CAPITOLO F

Teoria Enumerativa di Pólya-Redfield

La Teoria di Pólya-Redfield è stata elaborata nel 1937. Essa, attraverso lo studio del concetto algebrico di azione di un gruppo su un insieme, perviene a notevoli risultati nel campo del calcolo combinatorio. La teoria di Pólya-Redfield è nata da un problema inerente la chimica, ma di natura combinatoria, quale quello di conoscere quanti tipi di molecole (o isomeri di posizione) vi siano aventi una data configurazione degli atomi. Questo problema fa parte di una classe molto più vasta , comprendente i problemi riguardanti il numero di modelli distinti di una collezione di oggetti o il numero dei grafi non etichettati. Rielaborando alcune intuizioni di Redfield, Pólya riuscì a costruire una teoria capace di risolvere i problemi sopra esposti.

Questo capitolo è organizzato come segue:

La prima sezione è dedicata al lemma di Cauchy-Frobenius (Burnside). Questo è un importante strumento per la conoscenza del numero delle orbite di un insieme su cui agisce un gruppo finito. È data anche una versione del teorema per gruppi finiti di tipo ciclico. Infine, si dimostra l'utilità del lemma tramite due esempi: problema di codici e permutazioni circolari.

Nella seconda sezione, viene introdotta l'azione di gruppo di permutazioni sulle applicazioni fra due insiemi finiti. Come preparazione per il teorema di Pólya vengono presentati la funzione peso e l'enumaratore di applicazioni.

La terza sezione tratta il risultato centrale della teoria di Pólya-Redfield. Esso ci consente di conoscere il numero di modelli di collezioni di oggetti, di possibili strutture chimiche, di grafi, ecc.. Per fare questo si introduce il concetto di modello. Si identificano gli oggetti da enumerare con oggetti astratti (ad esempio poligoni). Sull'insieme di questi ultimi agisce un gruppo finito (usualmente di simmetrie). Si considera modello una classe di equivalenza degli oggetti astratti sotto l'azione del gruppo. Infine, si espone il teorema di Pólya, che permette di conoscere il numero dei modelli ciascuno con il suo peso, ossia con il numero di oggetti astratti che costituiscono la classe di equivalenza.

Nella quarta sezione viene esaminato l'indice ciclico di un gruppo finito di permutazioni. Questo ci consente di dare un'espressione più semplice alla formula di Pólya. Sono forniti gli indici ciclici dei più importanti gruppi di permutazioni: gruppo simmetrico, gruppo alterno, gruppo ciclico e gruppo diedrale.

La quinta sezione mostra alcune significative applicazioni della teoria di Pólya-Redfield. Vengono enumerati i modelli di cubi colorati, di scacchiere colorate e di molecole organiche aventi una data configurazione atomica ma differenti per il posizionamento degli atomi nello spazio (isomeri di posizione). Infine, partizioni e composizioni dei numeri naturali vengono studiate tramite la teoria di Pólya-Redfield.

F1. Lemma di Cauchy-Frobenius e classi di coniugio

Definizione F1.1. *Sia G un gruppo finito che agisce su un insieme finito Ω. Definiamo una funzione da G ad $\mathbb{N}_0$ come segue:*

$$\chi(g) = \Big|\{\alpha \in \Omega \mid \alpha^g = \alpha\}\Big|$$

cioè χ associa ad ogni $g \in G$ il numero dei membri di Ω fissati da g.

Lemma F1.2 (Cauchy-Frobenius). *Sia G un gruppo finito che agisce su Ω, un insieme anch'esso finito. Indichiamo con $\mathcal{O}$ l'insieme di tutte le orbite di Ω. Allora il numero delle orbite è dato da*

$$|\mathcal{O}| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g).$$

Dimostrazione. Per ogni $g \in G$, definiamo il sottoinsieme di Ω come segue

$$\Omega_g := \{\alpha \in \Omega \mid \alpha^g = \alpha\}.$$

Allora per le funzioni χ e λ così definite:

$$\chi: \quad G \longrightarrow \mathbb{N}_0 \quad \text{con} \quad g \longmapsto |\Omega_g|;$$
$$\lambda: \quad G\times\Omega \longrightarrow \{0,1\} \quad \text{con} \quad (g,\alpha) \longmapsto \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha^g \neq \alpha; \\ 1, & \text{se } \alpha^g = \alpha; \end{cases}$$

manipolando la doppia somma

$$\Lambda \quad := \sum_{(g,\alpha)\in G\times\Omega} \lambda(g,\alpha)$$

si ha che

$$\begin{aligned}\Lambda &= \sum_{\alpha\in\Omega}\sum_{g\in G}\lambda(g,\alpha) = \sum_{\alpha\in\Omega}|G_\alpha| \\ &= \sum_{g\in G}\sum_{\alpha\in\Omega}\lambda(g,\alpha) = \sum_{g\in G}\chi(g).\end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{g\in G}\chi(g) = \sum_{\alpha\in\Omega}|G_\alpha|.$$

Ora

$$\Omega = \biguplus_{\alpha\in C}\alpha^G = \biguplus_{T\in\mathcal{O}} T$$

dove C è un sistema di rappresentanti delle orbite. Allora

$$\begin{aligned}\sum_{g\in G}\chi(g) &= \sum_{\alpha\in\Omega}|G_\alpha| = \sum_{T\in\mathcal{O}}\sum_{\alpha\in T}|G_\alpha| = \sum_{T\in\mathcal{O}}\sum_{\alpha\in T}\frac{|G|}{|\alpha^G|} \\ &= \sum_{T\in\mathcal{O}}\sum_{\alpha\in T}\frac{|G|}{|T|} = \sum_{T\in\mathcal{O}}\frac{|G|}{|T|}\sum_{\alpha\in T}1 = |G|\cdot|\mathcal{O}|.\end{aligned}$$

Quindi

$$|\mathcal{O}| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g). \qquad \square$$

Il seguente lemma fornisce due proprietà della funzione χ definita nel lemma precedente.

Lemma F1.3. *Sia G un gruppo finito che agisce su un insieme Ω. Allora per due elementi $x, y \in G$, valgono le seguenti affermazioni:*

(a) *se x e y sono coniugati, allora $\chi(x) = \chi(y)$.*

(b) *se x e y generano lo stesso sottogruppo ciclico di G, allora $\chi(x) = \chi(y)$.*

DIMOSTRAZIONE. Definiti i seguenti insiemi:

$$\begin{aligned}\Omega_x &= \{\alpha\in\Omega \mid \alpha^x = \alpha\}, \\ \Omega_y &= \{\alpha\in\Omega \mid \alpha^y = \alpha\};\end{aligned}$$

risulta $|\Omega_x| = \chi(x)$ e $|\Omega_y| = \chi(y)$.

[a] Sia $y = g^{-1}xg$ con $g \in G$ e consideriamo la seguente applicazione

$$\begin{aligned}\phi:\quad \Omega_x &\longrightarrow \Omega_y; \\ \beta &\longmapsto \beta^g.\end{aligned}$$

Non è difficile vedere che ϕ è ben definita. Per ogni $\beta \in \Omega_x$ si ha che $\phi(\beta) = \beta^g \in \Omega_y$ perché

$$(\beta^g)^y = \beta^{gy} = \beta^{xg} = (\beta^x)^g = \beta^g.$$

Se ora consideriamo l'applicazione inversa

$$\begin{array}{rccc} \phi^{-1}: & \Omega_y & \longrightarrow & \Omega_x; \\ & \gamma & \longmapsto & \gamma^{g^{-1}}. \end{array}$$

Si vede che anche ϕ^{-1} è ben definita. Infatti, per ogni $\gamma \in \Omega_y$ si ha che $\phi^{-1}(\gamma) = \gamma^{g^{-1}} \in \Omega_x$ perché

$$(\gamma^{g^{-1}})^x = \gamma^{yg^{-1}} = (\gamma^y)^{g^{-1}} = \gamma^{g^{-1}}.$$

Quindi c'è una corrispondenza biunivoca fra gli insiemi Ω_x e Ω_y, pertanto essi risultano equipotenti e $\chi(x) = \chi(y)$.

[b] Per definizione

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \{x^i \mid i \in \mathbb{Z}\}, \\ \langle y \rangle &= \{y^j \mid j \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Se $\langle x \rangle = \langle y \rangle$ allora $x \in \langle y \rangle$ e $y \in \langle x \rangle$ quindi

$$\exists\, i, j \in \mathbb{Z}: \quad x = y^j \quad \text{e} \quad y = x^i.$$

Consideriamo ora gli insiemi Ω_x e Ω_y definiti precedentemente. Allora

$$\begin{array}{rrcl} \forall\, \alpha \in \Omega_x: & \alpha^x = \alpha & \Longrightarrow & \alpha^{x^2} = \alpha^x = \alpha \\ & & \cdots & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ & & \Longrightarrow & \alpha^{x^i} = \alpha^y = \alpha \\ & & \Longrightarrow & \alpha \in \Omega_y, \\ & & & \\ \forall\, \beta \in \Omega_y: & \beta^y = \beta & \Longrightarrow & \beta^{y^2} = \beta^y = \beta \\ & & \cdots & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ & & \Longrightarrow & \beta^{y^j} = \beta^x = \beta \\ & & \Longrightarrow & \beta \in \Omega_x; \end{array}$$

pertanto

$$\Omega_x = \Omega_y \implies \chi(x) = \chi(y). \qquad \square$$

Proposizione F1.4. *Sia G un gruppo finito che agisce su un insieme Ω, allora*

$$|\mathcal{O}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in C} \chi(g) |\mathrm{Cl}(g)|$$

dove C è un sistema di rappresentanti per le classi di coniugio e $\mathrm{Cl}(g)$ la classe di coniugio a cui g appartiene.

DIMOSTRAZIONE. La relazione di coniugio, essendo un'equivalenza, definisce una partizione su G, quindi risulta $G = \biguplus_{g \in C} \mathrm{Cl}(g)$. Applicando il Lemma **F1.2**, abbiamo

$$|\mathcal{O}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in C} \sum_{g' \in \mathrm{Cl}(g)} \chi(g').$$

Per il primo punto del Lemma **F1.3**, si ha che $\chi(g') = \chi(g)$ per $g' \in \mathrm{Cl}(g)$. Quindi

$$\sum_{g' \in \mathrm{Cl}(g)} \chi(g') = \chi(g)|\mathrm{Cl}(g)| \quad \text{e} \quad |\mathcal{O}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in C} \chi(g)|\mathrm{Cl}(g)|. \qquad \square$$

Proposizione F1.5. *Sia G un gruppo ciclico di ordine n generato da g che agisce su un insieme Ω. Allora il numero delle orbite*

$$|\mathcal{O}| = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \chi(g^d) \varphi(\frac{n}{d})$$

dove φ è la funzione di Eulero.

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema di Lagrange, l'ordine di ogni sottogruppo di G è un divisore dell'ordine di G. Inoltre per il Lemma **F1.3** se due elementi di G generano lo stesso sottogruppo, essi hanno la stessa immagine tramite la χ. Proviamo che, per ogni divisore d di n, esiste un sottogruppo di G il cui ordine è proprio d:

$$\langle g^{\frac{n}{d}} \rangle = \{g^{\frac{n}{d}}, g^{\frac{2n}{d}}, \cdots g^{\frac{(n-1)n}{d}}, g^n = e\} \implies |\langle g^{\frac{n}{d}} \rangle| = d.$$

In verità per ogni divisore di $|G|$ esiste un unico sottogruppo. Infatti, se ora consideriamo $\langle g^d \rangle$, questo è un sottogruppo di ordine n/d, quindi, preso un arbitrario $h \in G$ tale che $o(h) = n/d$, necessariamente $h \in \langle g^d \rangle$ in quanto

$$h \in G \implies \exists\, m \in \mathbb{N}_0 : \ h = g^m \implies h^{\frac{n}{d}} = g^{\frac{mn}{d}} = e.$$

Ne segue che

$$\frac{m}{d} \in \mathbb{Z} \implies d \mid m \implies h = g^m = (g^d)^{\frac{m}{d}} \in \langle g^d \rangle.$$

Possiamo allora suddividere G nei sottoinsiemi degli elementi che generano lo stesso sottogruppo. Dimostriamo che per ogni $d \in \mathbb{N}$, tale che $d \,\big|\, |G|$, il numero di generatori di ogni sottogruppo di G del tipo $\langle g^d \rangle$ è $\varphi(\frac{n}{d})$, dove

$$\langle g^d \rangle = \{g^{dk} \mid k = 1, 2, \cdots, n/d\}$$

e

$$\varphi\Big(\frac{n}{d}\Big) = \Big| \Big\{ 1 \le k \le \frac{n}{d} \ \Big| \ \mathrm{mcd}\Big(k, \frac{n}{d}\Big) = 1 \Big\} \Big|.$$

Se g^{dk} è un altro generatore di questo sottogruppo, allora

$$o(g^{dk}) = \frac{n}{d} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{mcd}(k, n/d) = 1.$$

Altrimenti, avremmo da $\mathrm{mcd}(k, n/d) > 1$ la seguente espressione:

$$\frac{n}{d} = o(g^{dk}) = \left|\{g^{dk}, g^{2dk}, \cdots, g^{dk\times\frac{n/d}{\mathrm{mcd}(k,n/d)}}\}\right| \leq \frac{n/d}{\mathrm{mcd}(k, n/d)} < \frac{n}{d}$$

che è impossibile. Quindi il numero dei generatori del sottogruppo $\langle g^d \rangle$ è proprio $\varphi(\frac{n}{d})$. $\square$

Mostriamo l'efficacia del teorema con due esempi.

Esempio F1.6 (Problema dei codici). *Il ministero della difesa deve adottare un codice di tre cifre arabe a scelta tra* $0, 1, 2, \cdots, 9$. *Essendo questo codice scritto su un foglio che non contiene del testo, ci potrebbe essere ambiguità nel leggerlo ruotando di* 180^0 *il foglio* (ovvero leggendo lo stesso codice dal basso o dall'alto). *In altre parole, un codice come* 918 *non può essere distinto da* 816. *Quanti codici distinguibili vi sono?*

Indichiamo con Ω l'insieme di tutti i possibili codici che si possono ricavare utilizzando le tre cifre arabe scelte tra $0, 1, \cdots, 9$. Tale insieme ha cardinalità 10^3. I codici capovolgibili sono costituiti esclusivamente da tre cifre scelte tra $0, 1, 6, 8, 9$. Essi sono esattamente 5^3. Pertanto le parole non capovolgibili, che sono in numero di $10^3 - 5^3$, contengono almeno una cifra scelta tra $3, 4, 5, 7$. Cerchiamo ora il gruppo di permutazione dei codici, che crea l'identificazione di alcuni di essi. Consideriamo la funzione

$$\begin{array}{rcl} g:\Omega & \longrightarrow & \Omega; \\ \alpha & \longmapsto & g(\alpha) := \begin{cases} \alpha, & \text{se } \alpha \text{ non è capovolgibile;} \\ \alpha^{-1}, & \text{se } \alpha \text{ è capovolgibile;} \end{cases} \end{array}$$

dove con α^{-1} si è indicato il codice α letto capovolgendo il foglio. Quindi g è effettivamente una funzione che trasforma ogni codice capovolgibile nel suo inverso, mentre lascia inalterati i codici non capovolgibili. Inoltre $g^{-1} = g$. Consideriamo il gruppo $G := \{g, \mathrm{Id}_\Omega\}$ e definiamo un'azione di G su Ω nel seguente modo:

$$\begin{array}{l} G \times \Omega \longrightarrow \Omega: \quad (\mathrm{Id}_\Omega, \alpha) \longmapsto \alpha; \\ (g, \alpha) \longmapsto \alpha^g := g(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{se } \alpha \text{ non è capovolgibile;} \\ \alpha^{-1}, & \text{se } \alpha \text{ è capovolgibile.} \end{cases} \end{array}$$

I codici distinti, ovvero che non possono essere confusi, sono tanti quante sono le orbite di Ω sotto l'azione di G. Infatti, dato un codice non capovolgibile, esso non può essere equivalente a nessun altro. Se un codice è capovolgibile, il suo inverso è a lui equivalente. Per conoscere il numero di codici distinti sarà sufficiente applicare il Lemma **F1.2**. Ora l'identità su Ω lascia inalterati tutti i codici, capovolgibili o non capovolgibili che essi siano. Le parole non capovolgibili sono lasciate fisse da g, ovvero $g(\alpha) = \alpha$

con α non capovolgibile. Le parole capovolgibili vengono rovesciate da g e restano invariate, ovvero $\alpha = \alpha^{-1}$ con α capovolgibile, se e solo se sono formate da cinque cifre scelte tra $0, 1, 6, 8, 9$ e hanno la cifra centrale scelta tra $0, 1, 8$, che resta fissa, mentre la prima e la terza cifra simmetriche sono scambiate. Allora le parole capovolgibili che restano invariate sotto l'azione di g sono $3 \cdot 5 = 15$. Pertanto il numero dei codici distinguibili è dato da

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g) = \frac{1}{2}\{10^3 + 10^3 - 5^3 + 15\} = 945.$$

Analogamente, si può stabilire che i codici distinguibili composti da quattro cifre sono in numero 9700.

Esempio F1.7 (Problema della collana). *Per la realizzazione di collane, un artigiano ha a disposizione m perline aventi n colori differenti. Se si ipotizza che due collane aventi colorazione differente appartengano allo stesso modello se una può essere ottenuta dall'altra attraverso una rotazione, quanti modelli di collane può realizzare l'artigiano?*

Denotiamo con $[n] = \{1, 2, \cdots, n\}$ gli n colori distinti delle perline e con $a_1, a_2, \cdots, a_m$ le m perline. L'equivalenza delle collane è determinata dal gruppo di rotazioni della struttura circolare della corda di perline. Esso è di fatto un gruppo di permutazioni di m simboli che agisce sulla posizione delle perline. Possiamo rappresentare una collana come una disposizione di perline di lunghezza m, con eventuale ripetizione. Pertanto, se indichiamo con Ω l'insieme di tutte le collane che si possono creare, si ha che

$$\Omega = \{(a_1, a_2, \cdots, a_m) \mid a_i \in [n]\} \quad \text{con} \quad |\Omega| = n^m.$$

Consideriamo, ora la seguente permutazione dell'insieme $\{1, 2, \cdots, m\}$

$$\pi := (12\cdots m).$$

Il gruppo di rotazioni della struttura circolare della corda di perline è quindi generato da π, ovvero $G = \langle\pi\rangle$. Inoltre G è un gruppo finito in quanto $|G| = o(\pi) = m$. Ora, se $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ con $a_i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ è un generico membro di Ω e se π^k è una qualsiasi permutazione di G, definiamo un'azione di G su Ω in questo modo:

$$(a_1, a_2, \cdots, a_m)^{\pi^k} = (a_{1+k}, \cdots, a_m, a_1, \cdots, a_k).$$

Ogni orbita di Ω corrisponde ad un modello di collana. Per conoscere il numero $W(m, n)$ dei modelli, sarà sufficiente applicare la Proposizione **F1.5**, per la quale il numero delle orbite distinte di Ω è dato da

$$W(m, n) = \frac{1}{m}\sum_{d|m}\chi(\pi^d)\varphi(\frac{m}{d})$$

dove $W(m, n)$ indica la cardinalità dell'insieme di tutte le orbite di Ω. Resta da trovare $\chi(\pi^d)$, con $d|m$. Poiché d è un divisore di m allora possiamo quindi dividere la m-upla disposizione $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ in m/d pezzi di lunghezza

d in questo modo:

$$\begin{aligned}(a_1,\cdots,a_m) &= (\,a_1,\cdots,a_d \mid a_{d+1},\cdots,a_{2d} \mid \\ &\cdots \mid a_{m-2d+1},\cdots,a_{m-d} \mid a_{m-d+1},\cdots,a_m\,).\end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}(a_1,\cdots,a_m)^{\pi^d} &= (a_{1+d},\cdots,a_{2d} \mid a_{2d+1},\cdots,a_{3d} \mid \\ &\cdots \mid a_{1+m-d},\cdots,a_m \mid a_1,\cdots,a_d\,).\end{aligned}$$

Pertanto π^d lascia fisso l'elemento $(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ se e solo se $(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ è costituito da m/d pezzi identici di lunghezza d, ovvero

$$(a_1,a_2,\cdots,a_m) = (a_1,a_2,\cdots,a_d \mid \cdots \mid a_1,a_2,\cdots,a_d).$$

Poiché vi sono n^d elementi del tipo $(a_1,a_2,\cdots,a_d)$ con $a_i \in \{1,2,\cdots,n\}$ per $i=1,2,\cdots,d$, allora $\chi(\pi^d)=n^d$ e quindi

$$W(m,n) = \frac{1}{m}\sum_{d|m}\varphi(m/d)n^d. \qquad (\star)$$

Invece, se l'artigiano ha a disposizione $m=\sum_{k=1}^n m_k$ perline con m_k perline aventi k-esimo colore, allora il numero delle colonne realizzabili è dato da

$$w(m_1,m_2,\cdots,m_n) = \frac{1}{m}\sum_{d|\mathrm{mcd}(m_1,m_2,\cdots,m_n)}\varphi(d)\binom{\frac{m}{d}}{\frac{m_1}{d},\frac{m_2}{d},\cdots,\frac{m_n}{d}} \qquad (\star\star)$$

che enumera anche il numero delle permutazioni circolari del multinsieme $[1^{m_1},2^{m_2},\cdots,n^{m_n}]$.

Dimostrazione. Sia $[1^{m_1},2^{m_2},\cdots,n^{m_n}]$ un multinsieme con $\sum_{k=1}^n m_k = m$ e calcoliamo il numero delle sue permutazioni. Il numero di modi di distribuire le prime m_1 perle è dato dal coefficiente binomiale $\binom{m}{m_1}$. Ora procedendo analogamente col secondo insieme m_2 per le posizioni vacanti, si hanno $\binom{m-m_1}{m_2}$ modi, e così via fino all'ultimo colore. Quindi

$$\begin{aligned}&\binom{m}{m_1}\binom{m-m_1}{m_2}\cdots\binom{m-m_1-m_2-\cdots-m_{n-1}}{m_n}\\ &= \frac{m!}{m_1!m_2!\cdots m_n!} = \binom{m}{m_1,m_2,\cdots,m_n}.\end{aligned}$$

Allora il numero delle permutazioni del multinsieme $[1^{m_1},2^{m_2},\cdots,n^{m_n}]$ è dato dal coefficiente multinomiale, pertanto

$$|\Omega| = \binom{m}{m_1,m_2,\cdots,m_n}.$$

Se ora vogliamo le permutazioni circolari, considerando l'azione precedente di G su Ω si ha:

$$|\mathcal{O}| = \frac{1}{|G|}\sum_{d|m}\chi(\pi^{\frac{m}{d}})\varphi(d).$$

Per calcolare $\chi(\pi^{\frac{m}{d}})$, notiamo che

$$\begin{aligned}&\pi^{\frac{m}{d}}(a_1\cdots a_{\frac{m}{d}};\ a_{\frac{m}{d}+1}\cdots a_{2\frac{m}{d}};\cdots;a_{(d-1)\frac{m}{d}+1}\cdots a_m)\\ &= (a_{\frac{m}{d}+1}\ \cdots\ a_{2\frac{m}{d}}; a_{2\frac{m}{d}+1}\cdots\ a_{3\frac{m}{d}};\ \cdots;\ a_1\cdots\ a_{\frac{m}{d}}).\end{aligned}$$

Se $\pi^{\frac{m}{d}}$ fissa tale permutazione, ne segue che essa è formata da d blocchi uguali, quindi $d|m$ e $d|m_k$ con $1\leq k\leq n$, pertanto il numero di membri fissati da $\pi^{\frac{m}{d}}$ è

$$\chi(\pi^{\frac{m}{d}}) = \binom{\frac{m}{d}}{\frac{m_1}{d},\frac{m_2}{d},\cdots,\frac{m_n}{d}}$$

ne segue che

$$w(m_1,m_2,\cdots m_n) = \frac{1}{m}\sum_{d|\mathrm{mcd}(m_1,m_2,\cdots,m_n)}\varphi(d)\binom{\frac{m}{d}}{\frac{m_1}{d},\frac{m_2}{d},\cdots,\frac{m_n}{d}}.$$

Dalla somma multipla

$$\sum_{m_1+m_2+\cdots+m_n=m} w(m_1,m_2,\cdots,m_n)$$

$$= \sum_{m_1+m_2+\cdots+m_n=m}\frac{1}{m}\sum_{d|\mathrm{mcd}(m_1,m_2,\cdots,m_n)}\varphi(d)\binom{\frac{m}{d}}{\frac{m_1}{d},\frac{m_2}{d},\cdots,\frac{m_n}{d}}$$

si ottiene

$$\frac{1}{m}\sum_{d|m}\varphi(d)\sum_{\substack{m_1+m_2+\cdots+m_n=m\\ d|m_k:\ k=1,2,\cdots,n}}\binom{\frac{m}{d}}{\frac{m_1}{d},\frac{m_2}{d},\cdots,\frac{m_n}{d}}.$$

Ora se poniamo $m'_k=\frac{m_k}{d}$ si ha

$$\frac{1}{m}\sum_{d|m}\varphi(d)\sum_{m'_1+m'_2+\cdots+m'_n=\frac{m}{d}}\binom{\frac{m}{d}}{m'_1,m'_2,\cdots,m'_n} = \frac{1}{m}\sum_{d|m}\varphi(d)n^{\frac{m}{d}}$$

dove il teorema multinomiale

$$(x_1+\cdots+x_n)^m = \sum_{m_1+\cdots+m_n=m}\binom{m}{m_1,\cdots,m_n}x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}$$

è stato applicato nel caso $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$, pertanto

$$\sum_{m_1+m_2+\cdots+m_n=m}\binom{m}{m_1,m_2,\cdots,m_n} = n^m.$$

Così abbiamo dimostrato la seguente identità combinatoria:

$$W(m,n) = \sum_{m_1+m_2+\cdots+m_n=m} w(m_1, m_2, \cdots, m_n). \qquad \square$$

F2. Applicazioni fra due insiemi

In questa sezione il concetto di azione di un gruppo G sarà applicato al caso in cui G è il gruppo di permutazioni di un insieme e Ω l'insieme di alcune applicazioni. Si parlerà, pertanto, di funzioni equivalenti e saranno altresì presentati i concetti di *funzione peso* e di *enumeratore*.

Definizione F2.1 (Azione di un gruppo di permutazioni sulle applicazioni tra due insiemi). *Siano C e D due insiemi e $G \subseteq S_D$ un gruppo di permutazioni di D. L'insieme*

$$\Omega := C^D = \{f : D \to C\}$$

rappresenta tutte le applicazioni da D in C. Se consideriamo la seguente funzione

$$\begin{array}{ccc} G \times \Omega & \longrightarrow & \Omega, \\ (\pi, f) & \longmapsto & f^\pi := f \circ \pi^{-1}; \end{array}$$

possiamo facilmente verificare che essa definisce un'azione del gruppo G di permutazioni sull'insieme delle applicazioni da D a C. Tale azione può essere rappresentata dal seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dr, "f"] & \\ D \arrow[ur, "\pi"] \arrow[rr, "f^\pi"] & & C \end{tikzcd}$$

Nota F2.2. *In questo caso l'orbita di una qualunque funzione f è*

$$f^G = \{f^\pi \mid \pi \in G\}$$

mentre il suo stabilizzatore risulta in

$$G_f = \{\pi \in G \mid f^\pi = f\}.$$

Nell'insieme Ω definiamo la relazione di Pólya-Redfield al modo seguente:

$$f \sim g \iff \exists \pi \in G \text{ tale che } f \circ \pi = g$$

dove "$\sim$" è un'equivalenza che partiziona l'insieme Ω in classi di equivalenza. Queste sono le orbite di (G, Ω).

Esempio F2.3. *Per colorazione dei lati di un quadrato intendiamo una funzione dall'insieme $D = \{1,2,3,4\}$ dei lati del quadrato nell'insieme $C = \{b,n\}$ dei colori* (bianco e nero) *disponibili. Così due colorazioni f e g saranno equivalenti se esisterà π, una permutazione dei lati del quadrato, per la quale $f \circ \pi = g$. Pertanto il gruppo G che agisce sull'insieme C^D e che determina l'equivalenza tra le colorazioni è il gruppo delle permutazioni dei lati del quadrato.*

Definizione F2.4 (Funzione peso). *Sia A un anello commutativo. Una funzione*

$$\begin{array}{rcl} w: C & \longrightarrow & A, \\ c & \longmapsto & w(c); \end{array}$$

si chiama funzione peso *e se c è un elemento di C, $w(c)$ è il peso di c. Solitamente A è l'anello dei polinomi in un numero finito di variabili a coefficienti reali. La somma*

$$W(C) = \sum_{c \in C} w(c)$$

è chiamata enumeratore *di C. Essa è stata definita per C, ma evidentemente può essere estesa ad ogni insieme sul quale sia stata assegnata una funzione peso. Per ogni $f \in \Omega = C^D$, definiamo il peso di questa funzione ponendo*

$$w(f) := \prod_{d \in D} w(f(d)).$$

Lemma F2.5. *Funzioni appartenenti alla stessa orbita hanno lo stesso peso:*

$$\forall f_1,\ f_2 \in f^G : \quad w(f_1) = w(f_2).$$

Dimostrazione. Dal momento che f_1 ed f_2 appartengono alla stessa orbita, per quanto detto nella Nota **F2.2** esse sono equivalenti, ovvero esiste una permutazione π di G per la quale

$$f_1 = f_2 \circ \pi.$$

Allora

$$\begin{aligned} w(f_1) &= \prod_{d \in D} w(f_1(d)) = \prod_{d \in D} w(f_2 \circ \pi(d)) \\ &= \prod_{d \in D} w(f_2(d)) = w(f_2). \end{aligned}$$

Nel penultimo segno di uguaglianza è avvenuta semplicemente una permutazione degli elementi di D tramite π e nel prodotto sono stati riordinati i fattori. $\square$

Definizione F2.6 (Peso di un'orbita). *Il lemma precedente consente di definire il peso di un'orbita dell'insieme $\Omega = C^D$ sotto l'azione del gruppo $G \subseteq S_D$, come il peso di un suo rappresentante, ponendo*

$$w(f^G) := w(g) \quad \textit{per qualunque} \quad g \in f^G.$$

F3. Teorema di Pólya

In questa sezione sarà ampiamente illustrato il teorema di Pólya. Esso fornisce un metodo alquanto comodo e veloce, capace di stabilire non solo il numero delle orbite dell'insieme Ω (sotto l'azione di G), ma anche il peso di ciascuna di esse.

Nota F3.1. *Consideriamo l'enumeratore*

$$W(\Omega) := \sum_{f \in \Omega} w(f).$$

Dal momento che abbiamo supposto D e C insiemi finiti, possiamo ipotizzare $D = \{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$ e $C = \{c_1, c_2, \cdots, c_m\}$ per $m, n \in \mathbb{N}$. Siano w la funzione peso su C a valori nell'anello commutativo A e $x_i = w(c_i) \in A$ per $i = 1, 2, \cdots, m$. Poiché

$$\forall f \in C^D: \quad w(f) = \prod_{j=1}^{n} w(f(d_j))$$

allora $w(f)$ sarà un monomio della forma $x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_m^{j_m}$ con $j_i \in \{0, \cdots, n\}$. Quindi l'enumeratore $W(\Omega)$ risulta essere un polinomio nelle indeterminate $x_1, x_2, \cdots, x_m$ nel quale il coefficiente di ciascun monomio indica il numero delle funzioni di Ω aventi peso pari a quel monomio.

Lemma F3.2. *Siano C e D due insiemi finiti e w una funzione peso definita in C a valori in un anello commutativo. L'enumeratore dell'insieme delle applicazioni $\Omega = C^D$ è dato da*

$$W(\Omega) = W^{|D|}(C).$$

Dimostrazione. Gli insiemi C e D sono, per ipotesi, finiti. Poniamo $m := |C|$ ed $n := |D|$, allora $C = \{c_1, \cdots, c_m\}$ e $D = \{d_1, \cdots, d_n\}$. Ora

$$\begin{aligned} W(C)^{|D|} &= \Big\{ \sum_{c \in C} w(c) \Big\}^{|D|} = \Big\{ \sum_{k=1}^{m} w(c_k) \Big\}^{n} \\ &= \sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_m=n \\ n_1, n_2, \cdots, n_m \geq 0}} \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_m} \prod_{k=1}^{m} w^{n_k}(c_k). \end{aligned}$$

Sia $X_k := \{f^{-1}(c_k)\}$ con $k = 1, 2, \cdots, m$. Osserviamo che

$$D = \biguplus_{k=1}^{m} X_k \quad \text{e} \quad w(f) = \prod_{k=1}^{m} w(c_k)^{|X_k|}.$$

Allora per $n_k := |X_k|$ con $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$, si ha che

$$w(f) = \prod_{k=1}^{m} w(c_k)^{|X_k|} = \prod_{k=1}^{m} w(c_k)^{n_k}.$$

Considerando tutte le funzioni che inducono la stessa partizione su D si ha:

$$W(\Omega) = \sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_m=n \\ n_1,n_2,\cdots,n_m \geq 0}} \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_m} \prod_{k=1}^{m} w^{n_k}(c_k). \qquad \square$$

Lemma F3.3. *Dati due insiemi finiti C e D con $C = m$ e $D = n$, sia $D = \biguplus_{k=1}^{\ell} X_k$ una partizione di D con $n_k := |X_k|$ per $k = 1, 2, \cdots, \ell$. Consideriamo l'insieme delle funzioni*

$$\Lambda := \Big\{ f \in C^D \;\big|\; |f(X_k)| = 1 \Big\}$$

che sono costanti negli X_k per $k = 1, 2, \cdots, \ell$. Allora il suo enumeratore è

$$W(\Lambda) = \prod_{i=1}^{\ell} \sum_{c \in C} w^{n_k}(c) \quad \textit{con} \quad n = \sum_{k=1}^{\ell} n_k$$

dove w è la funzione peso definita su C.

Dimostrazione. Sia f una funzione in Λ e consideriamone il peso

$$w(f) = \prod_{d \in D} w(f(d)) = \prod_{k=1}^{\ell} \prod_{d \in X_k} w(f(d)) = \prod_{k=1}^{\ell} w^{|X_k|}(f(x_k))$$

dove con x_k si indica un rappresentante dell'insieme X_k per $k = 1, 2, \cdots, \ell$. Supponendo $C = \{c_1, c_2, \cdots, c_m\}$ e per ogni $k \in \{1, 2, \cdots, \ell\}$ considerando $c_{i_k} := f(x_k)$ con $i_k \in \{1, 2, \cdots, m\}$, l'equazione diventa:

$$w(f) = \prod_{k=1}^{\ell} w^{n_k}(c_{i_k}).$$

Considerando tutte le possibili immagini in C per ogni blocco X_k, possiamo calcolare l'enumeratore dell'insieme Λ come segue:

$$\begin{aligned} W(\Lambda) &= \sum_{f \in \Lambda} w(f) = \sum_{f \in \Lambda} \prod_{k=1}^{\ell} w^{|X_k|}(f(x_k)) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i_k \leq m \\ 1 \leq k \leq \ell}} \prod_{k=1}^{\ell} w^{n_k}(c_{i_k}) = \prod_{k=1}^{\ell} \sum_{c \in C} w^{n_k}(c). \qquad \square \end{aligned}$$

Per illustrare questo lemma consideriamo il seguente esempio.

Esempio F3.4. *Sia $D = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ un insieme costituito da sette persone che vogliono visitare le tre città c_1, c_2, c_3. Supponiamo che le persone a, b, c siano della stessa famiglia, d ed e siano una coppia di sposi, f e g altre persone che viaggiano da sole. Poniamo*

$$\begin{aligned} X_1 &= \{a,\ b,\ c\}, \quad X_2 = \{d, e\}, \quad X_3 = \{f\}, \quad X_4 = \{g\}; \\ C &= \{c_1, c_2, c_3\}, \quad x := w(c_1), \quad y := w(c_2), \quad z := w(c_3). \end{aligned}$$

In questo caso il codominio della funzione peso è l'anello dei polinomi a coefficienti reali nelle indeterminate x, y e z. Allora l'enumeratore risulta $W(C) = x + y + z$ e Λ è l'insieme dei viaggi che possono fare le sette persone nelle tre città, con la ovvia condizione che i membri della stessa famiglia debbano andare nella stessa città. Ad esempio, la funzione

$$\psi = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ c_1 & c_1 & c_1 & c_3 & c_3 & c_2 & c_1 \end{pmatrix}$$

indica che la famiglia X_1 ed il signor g vanno nella città c_1, la famiglia X_2 va nella città c_3 ed il signor f va nella città c_2. La funzione ψ ha peso

$$w(\psi) = \prod_{d \in D} w(\psi(d)) = x^4 y z^2$$

e l'enumeratore dei viaggi, per il lemma precedente, è dato da

$$W(\Lambda) = \prod_{k=1}^{4} \sum_{c \in C} w^{|X_k|}(c) = (x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2.$$

Sia D un insieme finito con $n := |D|$ e consideriamo il gruppo simmetrico S_D. Ogni elemento $\pi \in S_D$ può essere decomposto nel prodotto di cicli disgiunti e tale decomposizione è unica. Indicheremo la struttura ciclica della permutazione π con $[1^{m_1(\pi)} 2^{m_2(\pi)} \cdots n^{m_n(\pi)}]$ in cui m_k indica il numero dei cicli di lunghezza k, chiamati anche k-cicli per $k = 1, 2, \cdots, n$.

Teorema F3.5 (Pólya, 1937). *Siano C e D due insiemi finiti con $n := |D|$ e $G \subseteq S_D$ un gruppo di permutazioni dell'insieme D che agisce su $\Omega := C^D$. Allora l'enumeratore di $\mathcal{O}$, l'insieme delle orbite determinate da (G, Ω), è*

$$W(\mathcal{O}) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \prod_{k=1}^{n} \Big\{ \sum_{c \in C} w^k(c) \Big\}^{m_k(\pi)}$$

dove $[1^{m_1(\pi)} 2^{m_2(\pi)} \cdots n^{m_n(\pi)}]$ è la struttura ciclica della permutazione π nel gruppo G. Il coefficiente del monomio

$$\prod_{c \in C} w^{n_c}(c) \quad con \quad \sum_{c \in C} n_c = n$$

nel polinomio $W(\mathcal{O})$ fornisce il numero delle orbite aventi il peso uguale a questo monomio.

DIMOSTRAZIONE. Siano $|C| = m$ e $|D| = n$ con $D = \{1, 2, \cdots, n\}$ per semplicità. Allora $\Omega = C^D$.

- **Classificazione:** Consideriamo la funzione peso
$$\begin{aligned} w : \Omega &\longrightarrow A, \\ f &\longmapsto w(f); \end{aligned}$$
con $\Omega := C^D$ ed A anello commutativo. Poiché Ω è un insieme finito, diverso dall'insieme vuoto, allora il codominio della funzione peso
$$\mathcal{P} := \Big\{ w(\beta) \mid \beta \in \mathcal{O} \Big\} = \bigcup_{f \in \Omega} \{w(f)\}$$
è anch'esso un insieme finito e diverso dall'insieme vuoto. Per ogni peso $\omega \in \mathcal{P}$, considerando
$$\Omega_\omega := \{f \in \Omega \mid w(f) = \omega\} \quad \Longrightarrow \quad \Omega = \biguplus_\omega \Omega_\omega$$
possiamo allora classificare le orbite di Ω sotto l'azione di G secondo la funzione peso. Indicando con $\mathcal{O}_\omega$ l'insieme di tutte le orbite costituite da funzioni aventi peso ω, allora si ha che
$$\Omega_\omega = \Big\{ f \in \Omega \mid w(f) = \omega \Big\} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{O} = \biguplus_\omega \mathcal{O}_\omega.$$
- **Lemma di Cauchy-Frobenius (Burnside):** Sulla base dell'azione del gruppo G su Ω, è facile verificare che induce un'azione di G anche su Ω_ω. Applicando il lemma **F1.2** a (G, Ω_ω), si ha che
$$|\mathcal{O}_\omega| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \chi(\pi|\Omega_\omega)$$
dove con $\chi(\pi|\Omega_\omega)$ si denota il numero delle funzioni in Ω_ω fissate da π. Allora possiamo calcolare l'enumeratore delle orbite come segue:
$$\begin{aligned} W(\mathcal{O}) &= \sum_{\omega \in \mathcal{P}} w(\mathcal{O}_\omega) = \sum_{\omega \in \mathcal{P}} \omega \cdot |\mathcal{O}_\omega| \\ &= \sum_{\omega \in \mathcal{P}} \frac{\omega}{|G|} \sum_{\pi \in G} \chi(\pi|\Omega_\omega) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \sum_{\omega \in \mathcal{P}} \omega \cdot \chi(\pi|\Omega_\omega). \end{aligned}$$
- **Classe di Ω fissata da $\pi \in G$:** Se, per ogni $\pi \in G$, poniamo
$$\Lambda(\pi) = \Big\{ f \in \Omega \mid f^\pi = f \Big\}$$
allora il suo enumeratore è uguale alla somma interna appena mostrata:
$$W(\Lambda(\pi)) = \sum_{f \in \Omega:\ f^\pi = f} w(f) = \sum_{\omega \in \mathcal{P}} \omega \cdot \chi(\pi \mid \Omega_\omega).$$

- **Struttura ciclica di $\pi \in G$:** Se la struttura ciclica di π è

$$[\pi] := [1^{m_1(\pi)} 2^{m_2(\pi)} \cdots n^{m_n(\pi)}] \quad \text{con} \quad \sum_{k=1}^{n} k\, m_k(\pi) = n$$

allora, dalla decomposizione ciclica di π, deriviamo la seguente partizione dell'insieme D:

$$\begin{aligned} \pi &= \prod_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{m_k} \left({}_1x_{kj}\ {}_2x_{kj}\ \cdots\ {}_kx_{kj} \right); \\ D &= \biguplus_{k=1}^{n} \biguplus_{j=1}^{m_k} X_{kj}, \quad \text{dove} \quad X_{kj} = \Big\{ {}_ix_{kj} \mid 1 \leq i \leq k \Big\}. \end{aligned}$$

Dunque, $f \in \Lambda(\pi)$ se e solo se f è costante su ciascun X_{kj}.

- **Enumeratore della classe $\Lambda(\pi)$:** Dato che $\Lambda(\pi) \subseteq \Omega$ è un sottoinsieme delle funzioni costanti negli X_{kj}, possiamo ricavare il suo enumeratore tramite la formula mostrata nel Lemma **F3.3**:

$$W(\Lambda(\pi)) = \prod_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{m_k} \sum_{c \in C} w^k(c) = \prod_{k=1}^{n} \Big\{ \sum_{c \in C} w^k(c) \Big\}^{m_k(\pi)}.$$

Ricapitolando abbiamo stabilito la seguente:

$$W(\mathcal{O}) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \prod_{k=1}^{n} \Big\{ \sum_{c \in C} w^k(c) \Big\}^{m_k(\pi)}$$

così la dimostrazione del teorema è conclusa. □

Il teorema dimostrato è dovuto a Pólya, il quale nel 1937 risolse il problema di contare le strutture algebriche e combinatorie sotto l'azione di gruppi di permutazioni, detti gruppi di simmetria.

F4. Indice ciclico di gruppo finito

In questa sezione esamineremo l'indice ciclico di un gruppo finito di permutazioni che ci consentirà di dare un'espressione più semplice alla formula di Pólya. Il concetto di indice ciclico venne introdotto da Redfield nel 1927, ma esso rimase pressocché sconosciuto fino al 1937 quando Pólya ne diede la definizione seguente e ne fece un uso sistematico come strumento centrale nella sua teoria di conteggio.

Definizione F4.1 (Indice ciclico). *Siano G un gruppo finito di permutazioni su un insieme finito D avente cardinalità n e $x_1, x_2, \cdots, x_n$ delle indeterminate. Se $\pi \in G$ e $[1^{m_1(\pi)} 2^{m_2(\pi)} \cdots n^{m_n(\pi)}]$ ne è la struttura* *ciclica, assoceremo a* π *il seguente monomio* $x_1^{m_1(\pi)} x_2^{m_2(\pi)} \cdots x_n^{m_n(\pi)}$. *Allora il polinomio formale:*

$$\mathcal{Z}(G|x_1, x_2, \cdots, x_n) := \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \prod_{k=1}^{n} x_k^{m_k(\pi)}$$

nelle variabili x_k *con* $k = 1, 2, \cdots, n$, *indicato anche con* $\mathcal{Z}_n(G)$ *per semplicità, è chiamato* l'indice ciclico di G.

Se C e D sono due insiemi finiti e G è un gruppo di permutazioni dell'insieme D, allora dall'indice ciclico di G si ottiene l'enumeratore delle orbite di C^D sotto l'azione di G, sostituendo x_k con $p_k[W(C)]$, dove

$$p_k[W(C)] \quad = \quad \sum_{c \in C} w^k(c) \quad \text{per} \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

Pertanto possiamo riformulare il teorema di Pólya come segue.

Teorema F4.2. *L'enumeratore* $W(\mathcal{O})$ *delle orbite di* C^D *sotto l'azione di* G *è dato da:*

$$W(\mathcal{O}) \;=\; \mathcal{Z}\big(G|\, p_1[W(C)], p_2[W(C)], \cdots, p_n[W(C)]\big). \qquad \square$$

Nota F4.3. *Se poniamo* $w(c) := 1$ *per ogni* $c \in C$, *si ha*

$$p_k[W(C)] = |C| = m \quad \text{con} \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

La somma dei coefficienti dell'enumeratore è ovviamente il numero delle orbite e quindi

$$|\mathcal{O}| = \mathcal{Z}(G|m, m, \cdots, m).$$

Esempio F4.4. *Calcoliamo l'indice ciclico di alcuni semplici gruppi di permutazioni:*

$$\begin{aligned} &[A] \qquad \mathcal{Z}(I_n|x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^n, \\ &[B] \qquad \mathcal{Z}(S_2|x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2), \\ &[C] \qquad \mathcal{Z}(S_3|x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3). \end{aligned}$$

Ricerchiamo ora gli indici ciclici di alcuni gruppi più noti di permutazioni.

F4.1. Gruppo simmetrico S_n.

Lemma F4.5 (Formula di Cauchy). *Consideriamo il gruppo simmetrico* S_n *ed* n *numeri naturali* $m_1, m_2, \cdots, m_n \in \mathbb{N}$ *tali che* $m_1 + 2m_2 + \cdots + nm_n = n$. *Allora le permutazioni di* S_n *aventi struttura ciclica* $[1^{m_1} 2^{m_2} \cdots n^{m_n}]$ *sono in numero di*

$$\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n} m_k! k^{m_k}} = \frac{n!}{1^{m_1} 2^{m_2} \cdots n^{m_n} \times m_1! m_2! \cdots m_n!}.$$

DIMOSTRAZIONE. Tutte le permutazioni di S_n aventi la struttura ciclica richiesta si possono scrivere nella forma seguente:

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{m_k}\mathcal{C}_{ki}$$

dove $\mathcal{C}_{ki}$, è il i-esimo ciclo di lunghezza k che compare nella decomposizione ciclica delle suddette permutazioni. Poiché ciascun ciclo $\mathcal{C}_{ki}$ contiene k-elementi distinti scelti tra $\{1, 2, \cdots, n\}$, abbiamo $n!$ modi di scegliere gli elementi di tutti i cicli. Tuttavia le permutazioni che ne risultano non sono tutte distinte perché gli m_k cicli $\{\mathcal{C}_{ki}\}$ di lunghezza k possono essere tra loro permutati senza cambiare la permutazione e ciò si può fare in $m_k!$ modi. Per di più, poiché il numero iniziale in ciascun ciclo di lunghezza k si può scegliere in k modi, ogni ciclo di lunghezza k può essere scritto in k differenti modi senza cambiare la permutazione. Ciò si può fare in k^{m_k} modi diversi e quindi, dividendo $n!$ per $m_k!k^{m_k}$ con $k \in [n]$, otteniamo il numero di permutazioni di S_n aventi la struttura ciclica $[1^{m_1}2^{m_2}\cdots n^{m_n}]$. □

Classificando ora tutte le permutazioni di S_n secondo le strutture cicliche, si stabilisce subito l'indice del gruppo simmetrico come segue:

Teorema F4.6. *L'indice ciclico del gruppo simmetrico S_n è*

$$\mathcal{Z}(S_n) = \sum_{\substack{m_1,m_2,\cdots,m_n\geq 0\\ m_1+2m_2+\cdots+nm_n=n}} \prod_{k=1}^{n}\frac{x_k^{m_k}}{m_k!k^{m_k}}.$$

F4.2. Gruppo alterno A_n. Ricordando che una permutazione ciclica di lunghezza k è pari se e solo se k è dispari, si deduce che una permutazione di S_n con la struttura ciclica $[1^{m_1}2^{m_2}\cdots n^{m_n}]$, risulta pari se e solo se il numero $\sigma(m)$ è pari, dove

$$\sigma(m) \quad = \quad \sum_{1\leq k\leq n/2} m_{2k}.$$

Adesso osserviamo la somma

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\big(S_n|x_1,x_2,\cdots,x_n\big) \quad &+ \quad \mathcal{Z}\big(S_n|x_1,-x_2,\cdots,(-1)^{n-1}x_n\big)\\ &= \sum_{\substack{m_1,m_2,\cdots,m_n\geq 0\\ m_1+2m_2+\cdots+nm_n=n}} \{1+(-1)^{\sigma(m)}\}\prod_{k=1}^{n}\frac{x_k^{m_k}}{k^{m_k}m_k!}.\end{aligned}$$

Quando $\sigma(m)$ è dispari, il fattore $\{1 + (-1)^{\sigma(m)}\}$ nella somma annulla il termine corrispondente; altrimenti, il fattore diventa 2. Questo risulta dal fatto che il gruppo alterno A_n è composto dalle permutazioni pari di S_n e l'inverso dell'ordine soddisfa l'uguaglianza $1/|A_n| = 2/|S_n|$. In conclusione, abbiamo stabilito il seguente teorema.

Teorema F4.7. *L'indice ciclico del gruppo alterno A_n è*

$$\mathcal{Z}(A_n) = \sum_{\substack{m_1, m_2, \cdots, m_n \geq 0 \\ m_1+2m_2+\cdots+nm_n=n}} \{1 + (-1)^{\sigma(m)}\} \prod_{k=1}^{n} \frac{x_k^{m_k}}{k^{m_k} m_k!}.$$

F4.3. Gruppo ciclico C_n.

Teorema F4.8. *Detto C_n il gruppo ciclico generato da $(12\cdots n)$ si ha*

$$\mathcal{Z}(C_n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) x_d^{n/d}$$

dove con φ si è indicata la funzione di Eulero.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo per ipotesi il gruppo $C_n = \langle\pi\rangle$, dove $\pi = (12\cdots n)$ e l'ordine $o(\pi) = n$. Ragionando in modo analogo a quanto fatto per la Proposizione **F1.5**, ripartiamo C_n in classi di equivalenza costituite dai generatori di uno stesso sottogruppo. Per ogni $d|n$ con $n \in \mathbb{N}$, il numero dei generatori del sottogruppo di ordine d è $\varphi(d)$ con ciascun generatore avente la struttura ciclica $[d^{n/d}]$ associato al monomio $x_d^{n/d}$. Quindi l'indice del gruppo ciclico C_n è dato da

$$\mathcal{Z}(C_n) = \frac{1}{|C_n|} \sum_{\sigma \in C_n} x_1^{m_1(\sigma)} x_2^{m_2(\sigma)} \cdots x_n^{m_n(\sigma)} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) x_d^{n/d}. \qquad \square$$

F4.4. Gruppo diedrale D_n. Tutte le simmetrie del poligono regolare di n vertici costituiscono un gruppo D_n, chiamato *gruppo diedrale.* Si evidenzia che D_n ha ordine $2n$ composto da n rotazioni e n riflessioni risulta essere un sottogruppo di S_n.

Teorema F4.9. *L'indice ciclico del gruppo diedrale D_n, con $n > 2$, è:*

$$\mathcal{Z}(D_n) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathcal{Z}(C_n) + \frac{1}{4}\{x_2^{n/2} + x_1^2 x_2^{(n-2)/2}\}, & \textit{se } n \textit{ è pari;} \\ \frac{1}{2}\mathcal{Z}(C_n) + \frac{1}{2} x_1 x_2^{(n-1)/2}, & \textit{se } n \textit{ è dispari.} \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Quando n è dispari, non è difficile verificare che

$$\begin{aligned} D_n &= \langle \pi, \eta \rangle = \{\pi^k, \pi^k \eta \mid k = 1, 2, \cdots, n\} \\ &= C_n \biguplus \{\pi^k \eta \mid k = 1, 2, \cdots, n\} \end{aligned}$$

dove π e η sono rispettivamente una rotazione $\pi = (1, 2, \cdots, n)$ ed una riflessione $\eta = (n)(1, n-1)(2, n-2) \cdots (\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2})$. Allora l'indice ciclico segue dal fatto che tutte le riflessioni $\pi^k\eta$ hanno la stessa struttura ciclica $[1^1 \times 2^{(n-1)/2}]$ per $k = 1, 2, \cdots, n$.

Invece, quando n è pari, abbiamo che

$$\begin{aligned} D_n &= \langle \pi, \sigma, \tau \rangle = \left\{ \pi^k, \pi^\ell\sigma, \pi^\ell\tau \;\middle|\; {\scriptstyle k=1,2,\cdots,n \atop \ell=1,2,\cdots,n/2} \right\} \\ &= C_n \biguplus \left\{ \pi^\ell\sigma, \pi^\ell\tau \mid \ell = 1, 2, \cdots, n/2 \right\} \end{aligned}$$

dove σ e τ sono rispettivamente due riflessioni date da

$$\begin{aligned} \sigma &= (1, n)(2, n-1)(3, n-2) \cdots (\tfrac{n}{2}, \tfrac{n+2}{2}); \\ \tau &= (n)(\tfrac{n}{2})(1, n-1)(2, n-2)(3, n-3) \cdots (\tfrac{n-2}{2}, \tfrac{n+2}{2}). \end{aligned}$$

È facile vedere che per $\ell = 1, 2, \cdots, n/2$, le riflessioni $\pi^\ell\sigma$ e $\pi^\ell\tau$ hanno le strutture cicliche $[2^{n/2}]$ e $[1^2 \times 2^{(n-2)/2}]$ rispettivamente. Questo conferma l'indice del gruppo D_n evidenziato dal teorema. $\square$

F5. Applicazioni

Il gruppo delle simmetrie viene frequentemente utilizzato nella teoria dell'enumerazione. Mostreremo in questa sezione alcune significative applicazioni della Teoria di Pólya-Redfield.

F5.1. Simmetrie di poligono regolare. Dato un poligono regolare avente n vertici, vogliamo colorare tutti gli n lati con gli m colori. Se consideriamo appartenenti allo stesso modello due poligoni aventi colorazioni distinte ma coincidenti in seguito a rotazioni e/o a riflessioni, quanti modelli dei poligoni si ottengono?

In questo caso, consideriamo gli n lati del poligono come dominio $D = \{1, 2, \cdots, n\}$ e gli m colori come codominio $C = \{1, 2, \cdots, m\}$. Allora tutte le colorazioni sono le applicazioni $\Omega = C^D$. Il numero delle colorazioni non equivalenti sotto rotazioni e riflessioni è quello delle orbite di Ω sotto l'azione del gruppo diedrale D_n. Ricordando l'indice del gruppo diedrale

$$\mathcal{Z}(D_n) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathcal{Z}(C_n) + \frac{1}{2}x_1x_2^{(n-1)/2}, & n - \text{dispari}; \\ \frac{1}{2}\mathcal{Z}(C_n) + \frac{1}{4}\left\{x_2^{n/2} + x_1^2x_2^{(n-2)/2}\right\}, & n - \text{pari}; \end{cases}$$

e poi applicando il teorema di Pólya, otteniamo il numero delle colorazioni non equivalenti del poligono come segue:

$$|\mathcal{O}| = \mathcal{Z}(D_n|m, m, \cdots, m) = \frac{1}{2n}\sum_{d|n}\varphi(d)m^{n/d} + \begin{cases} \frac{1}{2}m^{(n+1)/2}, & n - \text{dispari}; \\ \frac{1+m}{4}m^{n/2}, & n - \text{pari}. \end{cases}$$

F5.2. Colorazione di una scacchiera. Consideriamo una scacchiera di dimensione 3×3 come in figura:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Siano dati tre colori, bianco, nero e verde. In quanti modi si possono colorare *le nove caselle della scacchiera con tre colori? Inoltre, in quanti modi si* possono colorare le caselle della scacchiera sapendo che due sono bianche, tre nere e quattro verdi?

Sia $D = \{1, 2, \cdots, 9\}$ l'insieme delle nove caselle e $C = \{bianco, nero, verve\}$. Definiamo la funzione peso con

$$w(bianco) = b, \quad w(nero) = n, \quad w(verde) = v.$$

Il gruppo G di permutazioni di nove caselle è composto da otto simmetrie (una identica, tre rotazioni e quattro riflessioni). È facile stabilire le strutture cicliche delle permutazioni come segue:

e	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	c_1	c_2
x_1^9	$x_1x_4^2$	$x_1x_2^4$	$x_1x_4^2$	$x_1^3x_2^3$	$x_1^3x_2^3$	$x_1^3x_2^3$	$x_1^3x_2^3$

L'indice ciclico del gruppo G è

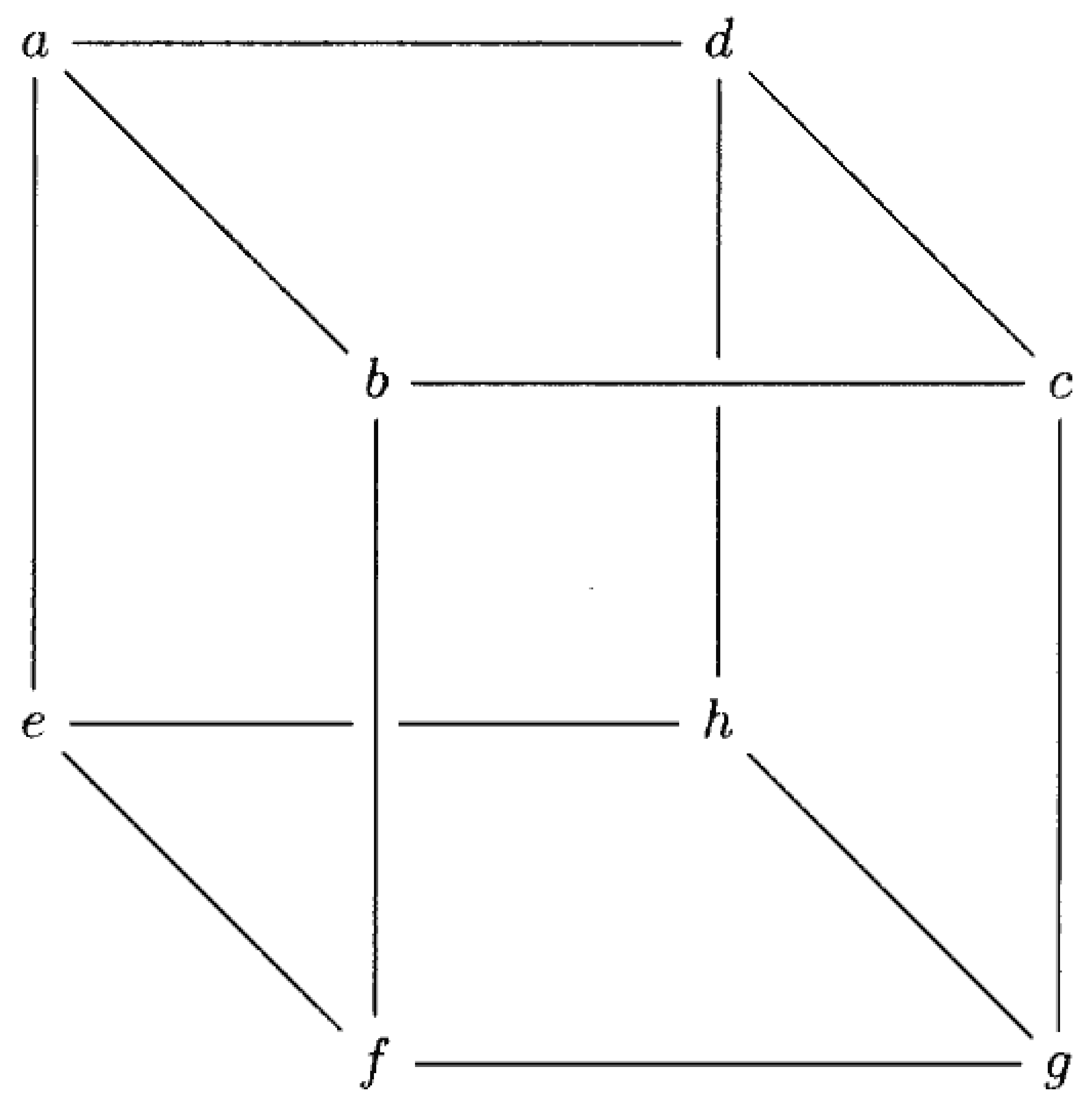
$$\mathcal{Z}(G \mid x_1, x_2, x_4) = \frac{1}{8}\Big\{x_1^9 + x_1x_2^4 + 2x_1x_4^2 + 4x_1^3x_2^3\Big\}.$$

L'enumeratore delle colorazioni è uguale al polinomio

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(G \mid p_1, p_2, p_4) &= (b+n+v)^9 + (b+n+v)(b^2+n^2+v^2)^4 \\ &+2(b+n+v)(b^4+n^4+v^4)^2 + 4(b+n+v)^3(b^2+n^2+v^2)^3.\end{aligned}$$

Ponendo $b = n = v = 1$, otteniamo il numero totale delle colorazioni $[2862 = 2 \times 3^3 \times 53]$. Invece, le colorazioni con $[b^2n^3v^4]$ sono in numero 174.

F5.3. Colorazione di un cubo. Supponiamo di voler colorare le facce di un cubo con i colori *bianco* e *nero*. Quanti modelli di cubi colorati otteniamo?



Indichiamo con $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ l'insieme delle 6 facce del cubo e con $C = \{bianco, nero\}$ l'insieme dei due colori disponibili per la colorazione del cubo. I modi di colorare il cubo sono in tutto $|C^D| = 64$. Ciascuna colorazione corrisponde ad una funzione $f \in C^D$ e due colorazioni sono equivalenti se esiste una opportuna permutazione dell'insieme D che porti l'una nell'altra.

Due cubi colorati appartengono allo stesso modello se, ruotando opportunamente uno di essi, questi coincidono. Di conseguenza, il gruppo delle rotazioni del cubo, agendo sull'insieme dei cubi colorati, determina una equivalenza tra quest'ultimi e i modelli di cubi colorati altro non sono che le orbite di quest'azione.

Osserviamo, ora, che ciascuna rotazione del cubo individua una particolare permutazione delle facce. Precisamente esiste un monomorfismo tra il gruppo G delle rotazioni del cubo ed il gruppo S_6 delle permutazioni delle facce del cubo. Allora l'equivalenza tra cubi colorati, prodotta dal gruppo delle rotazioni, induce un'equivalenza tra le colorazioni attraverso il gruppo G. Pertanto i modelli di cubi colorati altro non sono che le orbite di C^D sotto l'azione di G. Infatti due colorazioni f e g sono equivalenti se esiste un'*opportuna* permutazione delle facce del cubo che porti una colorazione nell'altra.

Nella tabella seguente sono riportati gli assi rispetto ai quali ruota il cubo, le permutazioni indotte e le relative strutture cicliche.

Rotazioni	Permutazioni	Strutture cicliche
abcd-efgh	(2645); (24)(56); (2546)	$x_1^2x_4; x_1^2x_2^2; x_1^2x_4$
bcfg-adhe	(1536); (13)(56); (1635)	$x_1^2x_4; x_1^2x_2^2; x_1^2x_4$
abfe-dcgh	(1234); (13)(24); (1432)	$x_1^2x_4; x_1^2x_2^2; x_1^2x_4$
a-g	(145)(632); (154)(623)	$x_3^2; x_3^2$
b-h	(152)(643); (125)(634)	$x_3^2; x_3^2$
c-e	(126)(345); (162)(345)	$x_3^2; x_3^2$
d-f	(164)(352); (146)(325)	$x_3^2; x_3^2$
ab-hg	(15)(36)(24)	x_2^3
bc-eh	(12)(34)(56)	x_2^3
cd-ef	(16)(35)(24)	x_2^3
ad-fg	(14)(23)(56)	x_2^3
bf-dh	(13)(25)(46)	x_2^3
ae-gc	(13)(26)(45)	x_2^3
Id	(1)(2)(3)(4)(5)(6)	x_1^6

dove le 6 facce sono segnate come segue:

$$1 = \{abcd\} \quad 2 = \{bcfg\} \quad 3 = \{efgh\};$$
$$4 = \{adeh\} \quad 5 = \{abef\} \quad 6 = \{cdgh\}.$$

Pertanto l'indice ciclico del gruppo G è:

$$\mathcal{Z}_6(G) = \frac{1}{24}(x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4 + 6x_2^3 + 8x_3^2).$$

Definiamo la funzione peso su C ponendo $w(bianco) = b$ e $w(nero) = n$. Allora $W(C) = (b + n)$ e quindi, per il Teorema **F4.2**, l'enumeratore delle orbite risulta come segue:

$$\begin{aligned} W(\mathcal{O}) &= \frac{1}{24}\Big\{(b+n)^6 + 6(b^2+n^2)^3 + 8(b^3+n^3)^2 \\ &\quad + 3(b+n)^2(b^2+n^2)^2 + 6(b+n)^2(b^4+n^4)\Big\} \\ &= b^6 + b^5n + 2b^4n^2 + 2b^3n^3 + 2b^2n^4 + bn^5 + n^6. \end{aligned}$$

Così ci sono due orbite (e quindi due modelli) con 4 facce bianche e 2 facce nere. Pertanto il numero delle orbite è

$$|\mathcal{O}| = \mathcal{Z}(H; 2, \cdots, 2) = 10.$$

Se invece delle facce si vogliono colorare i vertici o gli spigoli del cubo, dobbiamo considerare le permutazioni indotte dal gruppo delle rotazioni rispettivamente sull'insieme dei vertici e sull'insieme degli spigoli. Ragionando analogamente al caso della colorazione delle facce, si ricavano i seguenti indici ciclici.

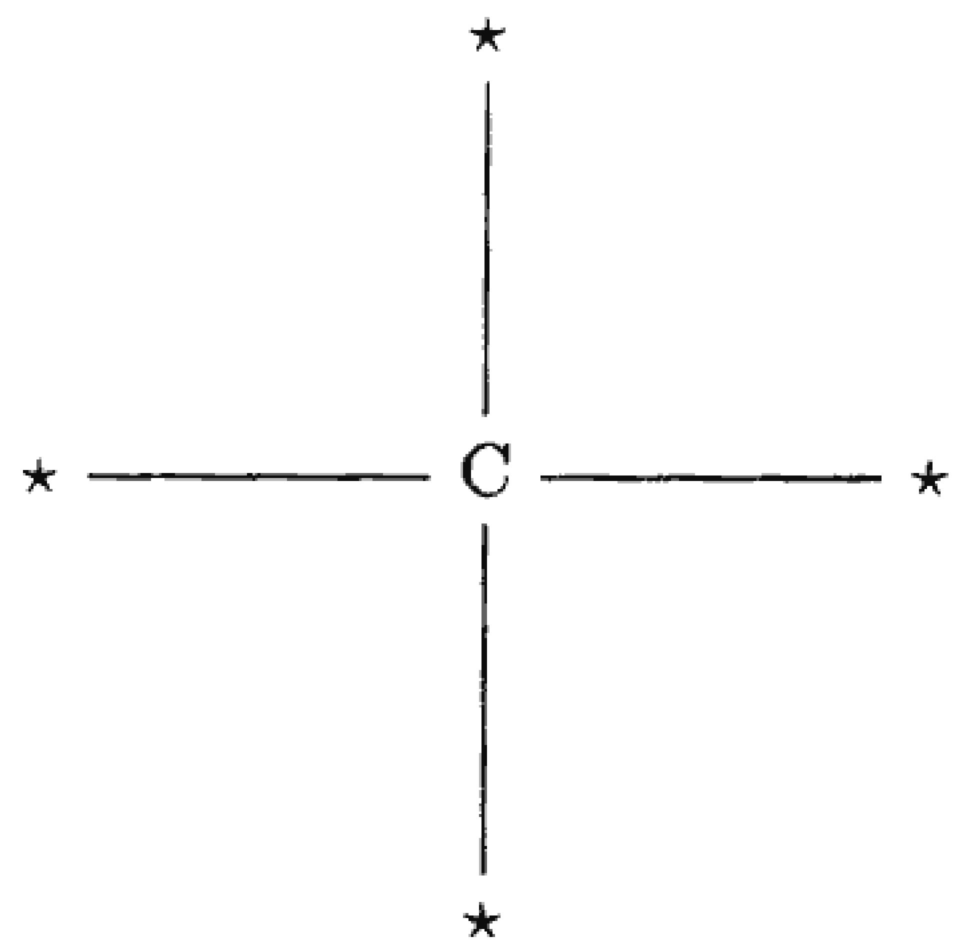
$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_v &= \frac{1}{24}(x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2x_3^2) \quad \text{per i } \textit{vertici}; \\ \mathcal{Z}_s &= \frac{1}{24}(x_1^{12} + 3x_2^6 + 6x_4^3 + 6x_1^2x_2^5 + 8x_3^4) \quad \text{per gli } \textit{spigoli}. \end{aligned}$$

Se invece di due colori se ne usano m, le orbite che si ottengono nei tre casi sono rispettivamente:

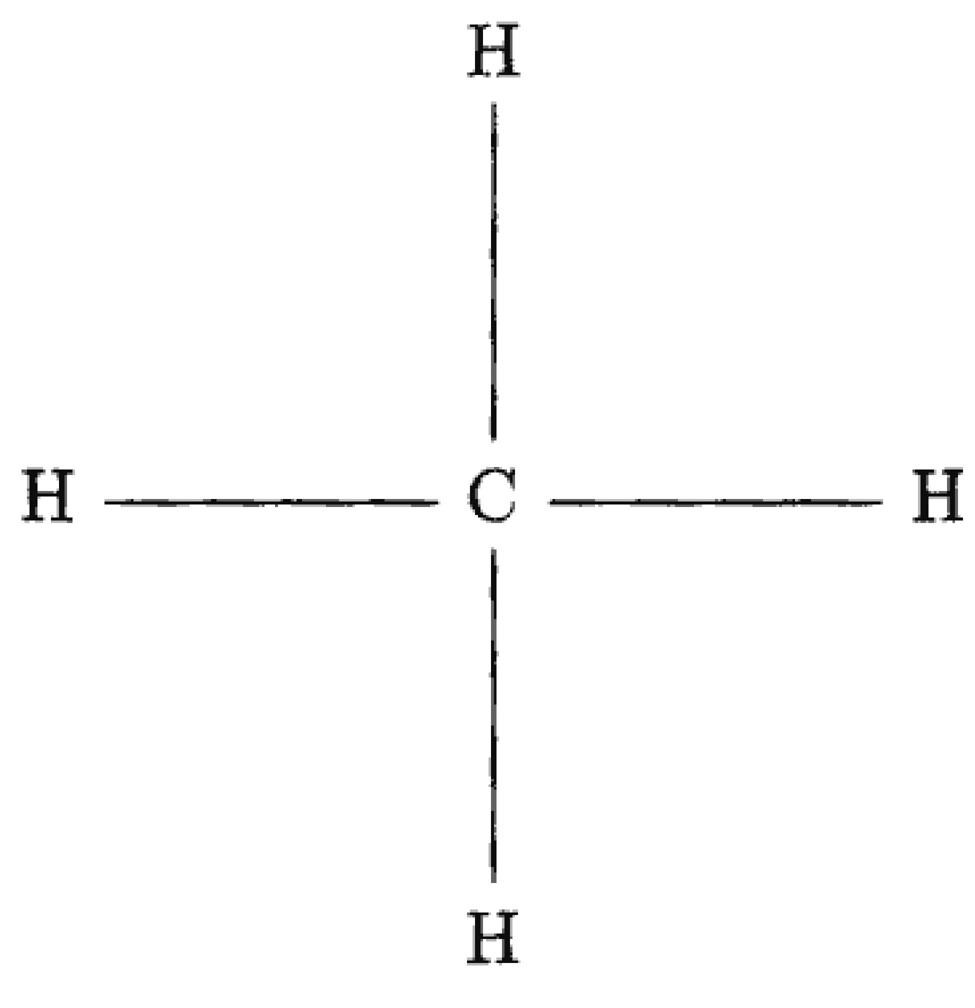
$$\begin{aligned} f_m &= \frac{1}{24}(m^6 + 3m^4 + 12m^3 + 8m^2) \quad \text{per le } \textit{facce}; \\ v_m &= \frac{1}{24}(m^8 + 17m^4 + 6m^2) \quad \text{per i } \textit{vertici}; \\ s_m &= \frac{1}{24}(m^{12} + 6m^7 + 3m^6 + 8m^4 + 6m^3) \quad \text{per gli } \textit{spigoli}. \end{aligned}$$

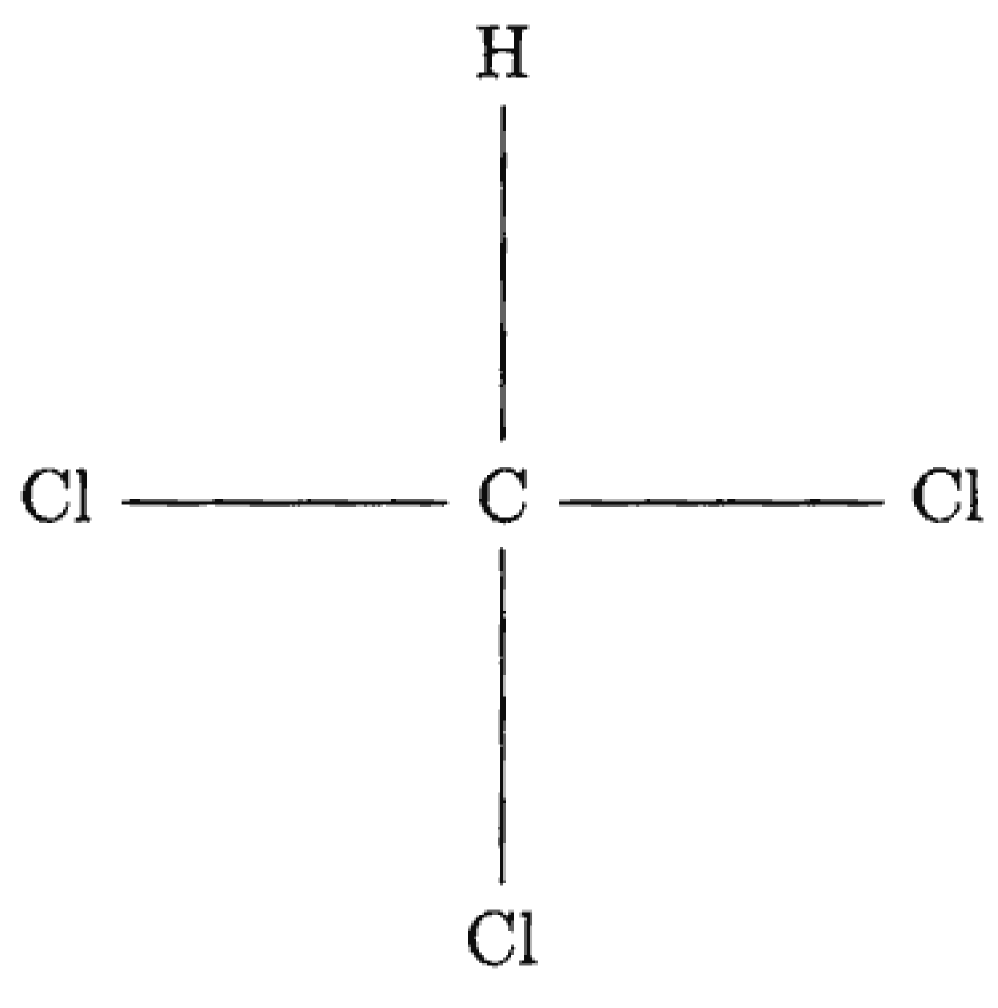
F5.4. Problema di enumerazione in chimica. Presentiamo adesso un problema di natura chimica che è fondamentalmente combinatorio. In realtà furono proprio i problemi di questo tipo a far nascere la teoria di enumerazione di Pólya-Redfield.

Consideriamo la classe delle molecole organiche della forma:



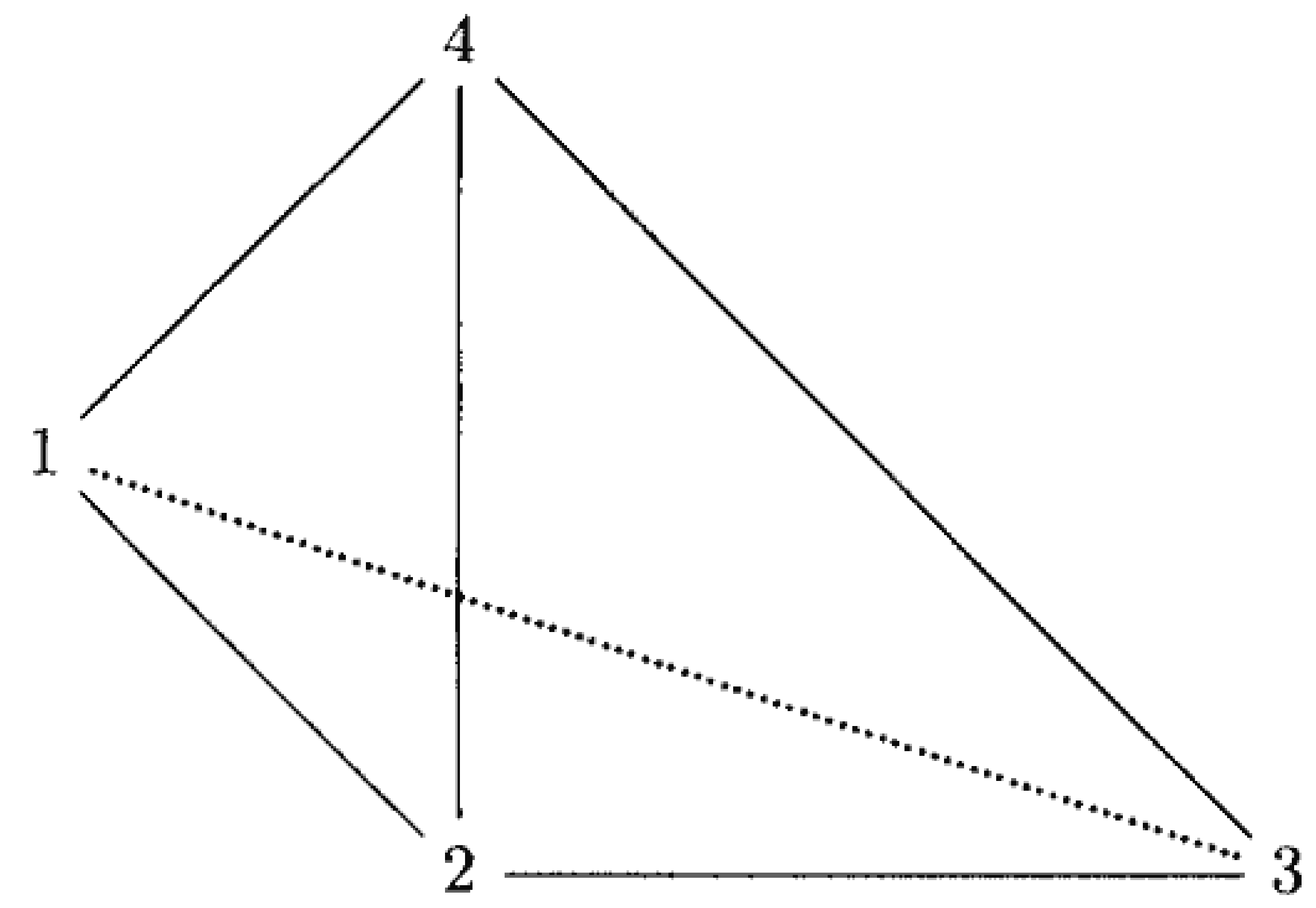
dove C è un atomo di carbonio e ciascun "$\star$" denota uno qualsiasi dei componenti CH_3(metile), C_2H_5(etile), H(idrogeno), Cl(cloro). Per esempio, le seguenti molecole di *Metano* e di *Cloroformio* sono della forma considerata.





Ciascuna molecola può essere rappresentata come un tetraedro regolare con l'atomo di carbonio nel centro ed i componenti segnati con "$\star$" nei vertici. Il problema è quello di contare le differenti molecole di questa forma.

Denotiamo con $D = \{1, 2, 3, 4\}$ e $C = \{CH_3, C_2H_5, H, Cl\}$ rispettivamente l'insieme dei vertici del tetraedro e l'insieme delle molecole da legare. Il problema consiste nel contare i modelli di così fatte molecole.



Ciascuna molecola organica corrisponde ad una funzione $f \in C^D$ e due molecole sono equivalenti se esiste un'opportuna permutazione dei vertici del tetraedro che porti l'una nell'altra. Il gruppo G delle rotazioni del tetraedro, agendo sull'insieme delle $|C^D|$ molecole organiche del tipo descritto, determina un'equivalenza tra molecole.

Le rotazioni del tetraedro sono 12 e precisamente:

π_1 : rotazione di 120^0 attorno all'asse passante per 1 ed il centro della faccia opposta;
σ_1 : rotazione di 240^0 attorno all'asse passante per 1 ed il centro della faccia opposta;
π_2 : rotazione di 120^0 attorno all'asse passante per 2 ed il centro della faccia opposta;
σ_2 : rotazione di 240^0 attorno all'asse passante per 2 ed il centro della faccia opposta;
π_3 : rotazione di 120^0 attorno all'asse passante per 3 ed il centro della faccia opposta;
σ_3 : rotazione di 240^0 attorno all'asse passante per 3 ed il centro della faccia opposta;
π_4 : rotazione di 120^0 attorno all'asse passante per 4 ed il centro della faccia opposta;
σ_4 : rotazione di 240^0 attorno all'asse passante per 4 ed il centro della faccia opposta;
τ_1 : rotazione di 180^0 attorno alla retta che unisce i punti medi degli spigoli [12] e [43];
τ_2 : rotazione di 180^0 attorno alla retta che unisce i punti medi degli spigoli [23] e [14];
τ_3 : rotazione di 180^0 attorno alla retta che unisce i punti medi degli spigoli [13] e [24].

Osserviamo che ciascuna rotazione del tetraedro determina una permutazione dei vertici, come descritto nella tabella seguente.

Rotazioni	Permutazioni dei vertici	Strutture cicliche
Id	(1)(2)(3)(4)	x_1^4
π_1	(243)(1)	x_1x_3
σ_1	(234)(1)	x_1x_3
π_2	(143)(2)	x_1x_3
σ_2	(134)(2)	x_1x_3
π_3	(421)(3)	x_1x_3
σ_3	(412)(3)	x_1x_3
π_4	(132)(4)	x_1x_3
σ_4	(123)(4)	x_1x_3
τ_1	(21)(34)	x_2^2
τ_2	(23)(14)	x_2^2
τ_3	(13)(24)	x_2^2

Allora l'equivalenza tra molecole (ovvero tra le funzioni dell'insieme C^D) è determinata dalle permutazioni descritte in tabella. Queste, assieme alla permutazione identica, costituiscono un gruppo che sarà denotato con G.

Ad esempio se consideriamo le molecole:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \mathrm{Cl} & \mathrm{C_2H_5} & \mathrm{Cl} & \mathrm{CH_3} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \mathrm{Cl} & \mathrm{Cl} & \mathrm{C_2H_5} & \mathrm{CH_3} \end{pmatrix}$$

queste sono equivalenti perché la permutazione $\sigma_4 = (123)(4)$ muta la molecola g in f. Tenendo conto della tabella precedente l'indice ciclico del gruppo G è:

$$\mathcal{Z}(G; x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{12}(x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2).$$

Pertanto vi sono

$$\mathcal{Z}(G; 4, 4, 4, 4) = 36$$

orbite, ovvero vi sono 36 possibili molecole del tipo richiesto. Ponendo $w(\mathrm{H}) = w$, $w(\mathrm{Cl}) = x$, $w(\mathrm{CH_3}) = y$, $w(\mathrm{C_2H_5}) = z$ si ottiene l'enumeratore delle orbite (ovvero delle molecole) sostituendo x_k con $w^k + x^k + y^k + z^k$, con $k = 1, 2, 3, 4$, che però ha uno sviluppo piuttosto lungo. Per semplicità poniamo $x = y = z = 1$, allora:

$$\begin{aligned} W(\mathcal{O}) &= \frac{1}{12}\Big\{(w+3)^4 + 3(w^2+3)^2 + 8(w+3)(w^3+3)\Big\} \\ &= 15 + 11w + 6w^2 + 3w^3 + w^4. \end{aligned}$$

Questo polinomio in w afferma che vi sono 15 molecole senza atomi di idrogeno, 11 molecole con 1 atomo di idrogeno, eccetera, infine una sola molecola con 4 atomi di idrogeno. Complessivamente le molecole sono 36.

F5.5. Partizioni e composizioni. Dato un intero non negativo m, il numero delle soluzioni dell'equazione diofantina

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$$

si chiama numero di composizioni di m in n-parti. Quando le soluzioni sono ordinate

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$$

il numero delle soluzioni corrispondenti viene denominato numero delle partizioni di m. Adesso, studiamo composizioni e le partizioni mediante la teoria di Pólya-Redfield.

Poniamo $D = \{1, 2, \cdots, n\}$ e $C = \{0, 1, 2, \cdots, m\}$. Sia G un gruppo di permutazioni di D. Evidentemente ogni applicazione $f \in \Omega = C^D$ rappresenta una composizione di qualche numero naturale. Per una variabile complessa q, definiamo la funzione peso $w(x) = q^x$, $\forall x \in C$. Abbiamo subito che

$$\eta(q) = W(C) = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} = \sum_{k=0}^{m} q^k.$$

Secondo il teorema di Pólya, l'enumeratore delle orbite (o funzione generatrice delle orbite $\mathcal{O}_G$ di Ω sotto l'azione di G) viene fornito da

$$W(\mathcal{O}_G) = \mathcal{Z}\big(G \mid \eta(q), \eta(q^2), \eta(q^n)\big).$$

- $G = E_n$, gruppo identico: si ha l'enumeratore delle composizioni:

  $$W(\mathcal{O}_E) = \eta^n(q) = \left\{\frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}\right\}^n.$$

  Calcolando il limite per $m \to \infty$, otteniamo la funzione generatrice delle composizioni senza restrizione

  $$\frac{1}{(1-q)^n} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{m} q^m.$$

- $G = S_n$, gruppo simmetrico: Possiamo stabilire la funzione generatrice delle orbite delle partizioni:

  $$W(\mathcal{O}_S) = \sum_{1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + \cdots + n \cdot m_n = n} \prod_{k=1}^{n} \frac{\eta^{m_k}(q^k)}{k^{m_k} \cdot m_k!}.$$

  Per semplificare la multisomma sulla destra, notiamo che

$$W(\mathcal{O}_S) \;=\; [x^n] \prod_{k=1}^{n} \exp\Big\{\frac{x^k}{k}\eta(q^k)\Big\} \;=\; [x^n] \exp\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}\eta(q^k)\Big\}.$$

L'esponente della funzione esponenziale si riduce a una forma chiusa:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}\eta(q^k) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}\sum_{i=0}^{m}q^{ik} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(q^ix)^k}{k}\\ &= -\sum_{i=0}^{m}\ln(1-q^ix) = -\ln\left\{(1-x)(1-qx)\cdots(1-q^mx)\right\}.\end{aligned}$$

Allora si ha la funzione generatrice delle partizioni

$$\begin{aligned}W(\mathcal{O}_S) &= [x^n]\frac{1}{(1-x)(1-qx)\cdots(1-q^mx)}\\ &= \frac{(1-q^{m+1})(1-q^{m+2})\cdots(1-q^{m+n})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}\end{aligned}$$

che risulta noto come coefficiente binomiale gaussiano.