APPENDICE C

Teoremi di interpolazione

Nel seguito $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ e $(\Sigma, \mathcal{F}, \nu)$ denotano due spazi di misura, con $\mathcal{B}, \mathcal{F}$ $\sigma-$algebre di sottoinsiemi di Ω e Σ rispettivamente e μ, ν misure positive $\sigma-$finite su $\mathcal{B}$ e $\mathcal{F}$, rispettivamente. Per ulteriori dettagli sui teoremi di seguito enunciati rimandiamo al testo [**32**].

TEOREMA C.1 (Riesz-Thorin). *Siano* $1 \le p_0, p_1, q_0, q_1 \le \infty$ *e sia* $T : L^{p_0}(\Omega, \mu) \cap L^{p_1}(\Omega, \mu) \to L^{q_0}(\Sigma, \nu) \cap L^{q_1}(\Sigma, \nu)$ *un operatore lineare tale che*

$$\|Tf\|_{q_0} \le M_0 \|f\|_{p_0} \quad e \quad \|Tf\|_{q_1} \le M_1 \|f\|_{p_1}$$

per ogni $f \in L^{p_0}(\Omega, \mu) \cap L^{p_1}(\Omega, \mu)$. *Per ogni* $0 \le t \le 1$, *poniamo*

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}. \tag{C.1}$$

Allora si ha che

$$\|Tf\|_{q_t} \le M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t}$$

per ogni $f \in L^{p_0}(\Omega, \mu) \cap L^{p_1}(\Omega, \mu)$.

Prima di enunciare il prossimo teorema, abbiamo bisogno di introdurre la nozione di operatore di tipo debole. Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$, una funzione μ-misurabile. Per ogni $\alpha > 0$ poniamo

$$\lambda(\alpha) = \lambda_f(\alpha) = \mu\{|f| > \alpha\}.$$

Facciamo notare che λ è una funzione decrescente in $(0, \infty)$. Se $p < \infty$, introduciamo gli spazi L^p deboli così definiti

$$L^p_w(\Omega, \mu) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}\ \mu - \text{misurabile} \mid \exists\, C > 0\ :\ \lambda(\alpha) \le \frac{C^p}{\alpha^p},\ \forall \alpha > 0 \right\}$$

e poniamo

$$\|f\|_{w,p} = \sup_{\alpha > 0} \{\alpha^p \lambda(\alpha)\}^{\frac{1}{p}}.$$

Se $f \in L^p(\Omega, \mu)$, allora per la disuguaglianza di Chebychev

$$\lambda(\alpha) = \mu\{|f| > \alpha\} \le \frac{\|f\|_p^p}{\alpha^p} \tag{C.2}$$

e quindi $L^p(\Omega, \mu) \subset L^p_w(\Omega, \mu)$. Denotiamo con $\mathcal{M}(\Omega)$ l'insieme di tutte le funzioni definite in Ω e a valori reali, che sono μ-misurabili.

Definizione C.2. *Sia $T : L^p(\Omega,\mu) \to \mathcal{M}(\Omega)$ un operatore. Se $1 \le q < \infty$, $1 \le p \le \infty$, T si dice di tipo debole (p,q) se esiste $C > 0$ tale che per ogni $f \in L^p(\Omega,\mu)$*

$$\|Tf\|_{w,q} \le C\|f\|_p.$$

Se $q = \infty$, T si dice di tipo debole (p,∞) se esiste $C > 0$ tale che per ogni $f \in L^p(\Omega,\mu)$

$$\|Tf\|_\infty \le C\|f\|_p.$$

In particolare se T è lineare allora T è continuo da $L^p(\Omega,\mu)$ in $L^\infty(\Omega,\mu)$.

Fatte queste premesse siamo ora in grado di enunciare il teorema di interpolazione di Marcinkiewicz che generalizza quello di Riesz-Thorin, ma è meno preciso nella stima della costante finale.

Teorema C.3 (Marcinkiewicz). *Siano $1 \le p_0 \le q_0 \le \infty$, $1 \le p_1 \le q_1 \le \infty$ con $q_0 \ne q_1$ e sia $T : L^{p_0}(\Omega,\mu) \to L^{q_0}_w(\Sigma,\nu)$, $T : L^{p_1}(\Omega,\mu) \to L^{q_1}_w(\Sigma,\nu)$ lineare e di tipo debole (p_0,q_0) e (p_1,q_1). Precisamente*

$$\|T\varphi\|_{w,q_0} \le c_0\|\varphi\|_{p_0}, \quad \textit{per ogni } \varphi \in L^{p_0}(\Omega,\mu)$$

$$\|T\psi\|_{w,q_1} \le c_1\|\varphi\|_{p_1}, \quad \textit{per ogni } \psi \in L^{p_1}(\Omega,\mu).$$

Allora T si estende ad un operatore lineare limitato da $L^{p_t}(\Omega,\mu)$ in $L^{q_t}(\Sigma,\nu)$ con p_t, q_t definiti da (C.1)*, con norma che può essere stimata in termini di t, c_i, p_i, q_i.*

Il Teorema di Marcinkiewicz può essere provato anche in una versione piú generale, per operatori sublineari.