Università del Salento
Dipartimento di Matematica
"Ennio De Giorgi"

Simona Fornaro
Dipartimento di Matematica "F. Casorati"
Università di Pavia - ITALIA

Michele Miranda
Dipartimento di Matematica
Università di Ferrara - ITALIA

Abdelaziz Rhandi
Department of Mathematics
University Cadi-Ayyad - Marrakech (MAROCCO)
e DIIMA, Università di Salerno, Fisciano, ITALIA

Semigruppi di Markov, operatori differenziali e disuguaglianze di tipo Log-Sobolev

Quaderno 1/2008: ISBN 978-88-8305-056-5

Università del Salento - Coordinamento SIBA

UNIVERSITÀ DEL SALENTO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
"ENNIO DE GIORGI"

Simona Fornaro
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "F. CASORATI"
UNIVERSITÀ DI PAVIA - ITALIA

Michele Miranda
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
UNIVERSITÀ DI FERRARA - ITALIA

Abdelaziz Rhandi
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY CADI-AYYAD - MARRAKECH (MAROCCO)
E DIIMA, UNIVERSITÀ DI SALERNO, FISCIANO, ITALIA

Semigruppi di Markov, operatori differenziali e disuguaglianze di tipo Log-Sobolev

Quaderno 1/2008: ISBN 978-88-8305-056-5

Università del Salento - Coordinamento SIBA

QUADERNI DI MATEMATICA

Una pubblicazione a cura del

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

"ENNIO DE GIORGI"

UNIVERSITÀ DL SALENTO

I QUADERNI del Dipartimento di Matematica dell'Università del Salento documentano gli aspetti di rilievo dell'attività di ricerca e didattica del Dipartimento. Nei Quaderni sono pubblicati articoli di carattere matematico che siano:

(1) lavori di rassegna e monografie su argomenti di ricerca;
(2) testi di seminari di interesse generale, tenuti da docenti o ricercatori del Dipartimento o esterni;
(3) lavori di specifico interesse didattico.

La pubblicazione dei lavori è soggetta all'approvazione del Comitato di Redazione, che decide tenendo conto del parere di un *referee*, nominato di volta in volta sulla base delle competenze specifiche.

Quaderno 1/2008: ISBN 978-88-8305-056-5

Università del Salento - Coordinamento SIBA

SEMIGRUPPI DI MARKOV, OPERATORI DIFFERENZIALI E DISUGUAGLIANZE DI TIPO LOG-SOBOLEV

Simona Fornaro

Dipartimento di Matematica "F. Casorati"

Università degli Studi di Pavia

via Ferrata, 1 - 27100 Pavia - Italia

Michele Miranda

Dipartimento di Matematica

Università di Ferrara

Via Machiavelli, 35 - 44100 Ferrara - Italia

Abdelaziz Rhandi

Department of Mathematics

University Cadi-Ayyad

Marrakech - Marocco

e DIIMA, Università degli Studi di Salerno

Via Ponte Don Melillo, 84084 Fisciano (SA), Italia

Prefazione

Il presente quaderno è basato sulle lezioni tenute da A. Rhandi al Dipartimento di Matematica "Ennio De Giorgi" dell'Università del Salento nell'ambito del Dottorato di Ricerca in Matematica durante l'anno accademico 2004-2005. L'obiettivo principale del corso è stato lo studio di semigruppi di Markov associati ad operatori ellittici del secondo ordine a coefficienti localmente hölderiani e illimitati. I contenuti dei vari capitoli rispecchiano fedelmente l'effettivo svolgimento delle lezioni.

Nel Capitolo 1, sfruttando la classica teoria C^α, si studia l'esistenza di una soluzione classica, limitata $u(x,t)$ del problema parabolico associato ad un operatore ellittico del secondo ordine della forma

$$A\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)D_{ij}\varphi(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)D_i\varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

$$\begin{cases} \partial_t u - Au = 0 & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^N \\ u(0) = f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N) & \text{in } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{0.1}$$

con $\varphi \in D_{\max}(A) := \{u \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N) \cap W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N), \forall\, 1 < p < \infty, Au \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)\}$. I coefficienti di A sono funzioni regolari, ma illimitate in $\mathbb{R}^N$. Piú precisamente, usando un argomento di localizzazione, le stime interne di Schauder e la disuguaglianza di Harnack parabolica, si costruisce un semigruppo di contrazioni positive $(T(t))$ in $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$, il cosiddetto *semigruppo minimale associato ad* A, che fornisce la soluzione u di (0.1) tramite la formula $u(t,x) = T(t)f(x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^N$. Inoltre, il semigruppo $(T(t))$, che non è fortemente continuo in generale, è un semigruppo di Markov, irriducibile e con la proprietà strong Feller. La restante parte del capitolo è dedicata alla caratterizzazione del generatore debole $\widetilde{A}$ di $(T(t))$. In particolare, si prova che $\widetilde{A} = A$ se e solo se $(T(t))$ è conservativo, ossia $T(t)\mathbb{1} = \mathbb{1}$, per ogni $t > 0$. In questo caso, $(T(t))$ fornisce l' unica soluzione classica limitata di (0.1). Il riferimento bibliografico per questo capitolo è [**28**].

Nel Capitolo 2 si introduce il concetto di misura invariante per il semigruppo di Markov $(T(t))$ costruito nel precedente capitolo e si dimostra che se una misura invariante esiste, allora $(T(t))$ deve essere conservativo. In seguito,

si richiama il teorema di Krylov-Bogoliubov, che fornisce una condizione sufficiente per l'esistenza di una misura invariante.
Un criterio molto utile per l'esistenza e l'unicità di misure invarianti è quello di Hasminskii, di cui è data la dimostrazione. Inoltre, si mostra come opportune condizioni di crescita sul termine di drift $b = (b_1, \cdots, b_N)$ permettano di ottenere una misura invariante $\mu = \rho dx$ per il semigruppo di Markov $(T(t))$, con $\rho \in L^p(\mu)$, per ogni $p \in [1, \infty)$. In questo ambito, la nozione di funzione di Lyapunov gioca un ruolo importante. Per questi argomenti si rimanda a [**29**]. Inoltre, è facile provare che μ è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue, cioè esiste $\rho \in L^1(\mu)$ tale che $d\mu = \rho\, dx$.
Nell'ultima parte del capitolo, si indagano proprietà di regolarità locale e globale di ρ. Dapprima, si dimostra che $0 < \rho \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ per ogni $p \in (1, \infty)$ (cf. [**8**]), usando argomenti di regolarità ellittica. Il capitolo si chiude provando che $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, se $b \in L^k(\mu)$, per qualche $k > N$. La dimostrazione si basa sulla tecnica iterativa di Moser, il cui punto di partenza è il Teorema 2.15, che stabilisce che $\sqrt{\rho} \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, assumendo che $b \in L^2(\mu)$. Ne segue, con il teorema di immersione di Sobolev, che $\rho \in L^{\frac{N}{N-2}}(\mathbb{R}^N)$, se $N > 2$ e $\rho \in L^p(\mathbb{R}^N)$ per ogni $p < +\infty$, se $N = 2$. Il Teorema 2.15 si trova in [**7**], ma qui se ne presenta una dimostrazione differente. Ci riferiamo a [**26**] per questa parte.

Se μ è una misura invariante per $(T(t))$, allora $(T(t))$ può essere esteso ad un semigruppo C_0 in $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$. Pertanto, nel Capitolo 3 si studiano stime globali, proprietà spettrali e il comportamento asintotico di $(T(t))$ in $L^p(\mu)$. Dopo aver dato la nozione di *spectral gap*, si discute il suo legame con lo spettro del generatore di $(T(t))$ in $L^2(\mu)$ nel caso simmetrico. Inoltre, si mette in relazione la condizione di spectral gap con il comportamento asintotico di $(T(t))$ e si dimostra l'integrabilità di funzioni di tipo esponenziale rispetto alla misura invariante μ.
Quindi si formulano le cosiddette disuguaglianze di Sobolev logaritmiche, introdotte da L. Gross [**19**] per provare l'ipercontrattività del semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck (si veda anche [**30**]).
Sulla base di un risultato dovuto a Rothaus, si dimostra la relazione tra disuguaglianze di Sobolev logaritmiche e spectral gap. Successivamente, si fa vedere che l'ipercontrattività di $(T(t))$ è equivalente alle disuguaglianze di Sobolev logaritmiche (si veda [**19**]). Nell'ultima parte del capitolo, ci si avvale di questo risultato per mostrare che il semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck in $\mathbb{R}^N$ è ipercontrattivo. L'approccio è puramente analitico e nuovo in letteratura. Per gran parte dei risultati di questo capitolo, i riferimenti indicati sono [**5**], [**4**] e [**9**].

Nel Capitolo 4, seguendo l'approccio di E.B. Davies e B. Simon [**13**], si

introduce una famiglia di disuguaglianze di Sobolev logaritmiche. Procedendo come nella dimostrazione del teorema di Gross, si caratterizza l'ultracontrattività di $(T(t))$ mediante disuguaglianze di Sobolev logaritmiche. Infine, si presenta un risultato di Varopoulos [**34**] che dimostra il viceversa del precedente risultato nel caso simmetrico.
Nelle appendici sono stati raccolti dei risultati classici: le stime di Schauder paraboliche locali, la disuguaglianza di Harnack parabolica, alcuni richiami di teoria dei semigruppi e dei risultati di teoria dell'interpolazione.

Ringraziamenti. Il terzo autore esprime la sua gratitudine a G. Metafune, D. Pallara e al Dipartimento di Matematica "E. De Giorgi" dell'Università del Salento, per l'interesse e il supporto amichevole manifestati. Egli desidera inoltre ringraziare l'Indam e l'Università del Salento per il finanziamento ricevuto durante il periodo di durata del corso. Inoltre, si ringraziano L. Angiuli e C. Spina per aver curato la stesura delle Sezioni 3.4 e 4.2, rispettivamente.

Simona Fornaro
Michele Miranda
Abdelaziz Rhandi

Lecce e Salerno, febbraio 2008

Indice

CAPITOLO 1

Semigruppi di Markov ed operatori differenziali

In questo capitolo introduciamo la nozione di semigruppo di Markov in $\mathbb{R}^N$ e proviamo che ad ogni operatore differenziale lineare ellittico del secondo ordine a coefficienti illimitati in $\mathbb{R}^N$, A, è possibile associare un siffatto semigruppo, $(T(t))$. Per far ciò, ricorriamo essenzialmente ad un argomento di localizzazione e all'uso delle stime di Schauder locali classiche. Inoltre, discutiamo altre proprietà del semigruppo costruito, tra cui l'irriducibiltà e la condizione di strong Feller. Infine, introduciamo la nozione di generatore debole per $(T(t))$ (che non è fortemente continuo, in generale) e ne studiamo la relazione con l'operatore A di partenza.

1.1. Funzione di transizione e semigruppo di Markov

Iniziamo a definire una funzione di transizione di Markov. Con $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ denotiamo la famiglia dei boreliani di $\mathbb{R}^N$.

Definizione 1.1. *Definiamo* **funzione di transizione di Markov** *su* $\mathbb{R}^N$ *una funzione* $p : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \to [0, +\infty)$ *che soddisfa le seguenti condizioni;*

(1) $p(t, x, \cdot)$ *è una misura di probabilità su* $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$*, per ogni* $t \geq 0$*, per ogni* $x \in \mathbb{R}^N$*;*
(2) $p(0, x, \Gamma) = \chi_\Gamma(x)$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}^N$ *e per ogni* $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$*;*
(3) $p(t, \cdot, \Gamma)$ *è misurabile secondo Borel per ogni* $t \geq 0$ *e per ogni* $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$*;*
(4) *vale la regola di semigruppo, cioè*

$$p(t + s, x, \Gamma) = \int_{\mathbb{R}^N} p(s, x, dy)p(t, y, \Gamma),$$

per ogni $s, t \geq 0$*, per ogni* $x \in \mathbb{R}^N$ *e per ogni* $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

L' identità contenuta nell'ultima condizione è nota in letteratura come equazione di Chapman-Kolmogorov. Nel caso in cui la misura $p(t, x, \cdot)$ sia assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue, scriveremo $p(t, x, dy) = p(t, x, y)dy$, intendendo per $p(t, x, y)$ la densità. Sarà questo il caso nella sezione successiva.

A questo punto possiamo dare la seguente definizione.

Definizione 1.2. *Per ogni $p(t, x, dy)$ funzione di transizione di Markov, definiamo*

$$T(t)f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} p(t, x, dy)f(y), \quad f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N),\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^N$$

semigruppo di Markov.

In virtú della Definizione 1.1 si riconosce facilmente che

$$T(0)f(x) = f(x), \quad \forall f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N), \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} T(t+s)f(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} p(t+s, x, dy)f(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} p(s, x, dz)p(t, z, dy)f(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} p(s, x, dz)\int_{\mathbb{R}^N} p(t, z, dy)f(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} p(s, x, dz)T(t)f(z) \\ &= T(s)T(t)f(x), \end{aligned}$$

cioè la legge di semigruppo. $T(t)$ definisce un operatore lineare limitato su $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$, $T(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N))$, per ogni $t > 0$; infatti

$$|T(t)f(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} p(t, x, dy)f(y)\right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} p(t, x, dy)|f(y)| \leq \|f\|_\infty,$$

che dimostra in particolare che

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N))} \leq 1,$$

cioè la contrattività di $T(t)$. Altre proprietà importanti per il semigruppo di Markov sono le seguenti.

$$T(t)\mathbb{1}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} p(t, x, dy)\mathbb{1}(y) = \int_{\mathbb{R}^N} p(t, x, dy) = \mathbb{1}(x),$$

ossia $(T(t))$ è conservativo; qui $\mathbb{1}(x)$ denota la funzione che vale costantemente 1. Inoltre

$$f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad T(t)f \geq 0,$$

cioè $T(t)$ è positivo.

1.2. Semigruppi di Markov associati ad operatori differenziali

Vediamo ora come si costruisce un semigruppo di Markov associato ad un operatore differenziale di tipo ellittico.

Definizione 1.3. *Dato l'operatore*

$$Au(x) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) D_{ij} u(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) D_i u(x) \tag{1.1}$$

con $\{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,N}$ *e* $\{b_i\}_{i=1,\dots,N}$ *funzioni reali definite in* $\mathbb{R}^N$*, si definisce dominio massimale di* A *in* $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ *l'insieme*

$$D_{\max}(A) = \{u \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N) \cap W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N), \forall 1 < p < +\infty : Au \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)\}.$$

Il problema principale nella costruzione del semigruppo associato ad A è dato dalla non limitatezza di $\mathbb{R}^N$ e dei coefficienti di A; per ovviare a questo problema, localizzeremo l'operatore A sulle palle B_R, per poi far tendere R all'infinito. Consideriamo il seguente problema

$$\begin{cases} \partial_t u_R(t,x) = Au_R(t,x) & t > 0, \quad x \in B_R \\ \\ u_R(t,x) = 0 & t > 0, \quad x \in \partial B_R \\ \\ u_R(0,x) = f(x) & \qquad\quad\ x \in B_R, \end{cases} \tag{1.2}$$

dove $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$. Per garantire esistenza e regolarità della soluzione per (1.2), assumiamo che, per qualche $\alpha \in (0,1)$,

(1) $a_{ij} = a_{ji} \in \mathcal{C}^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, $b_i \in \mathcal{C}^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, per ogni $i,j = 1,\dots,N$;
(2) posto $a(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^N$,

$$\langle a(x)\xi, \xi\rangle = \sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu(x)|\xi|^2$$

per ogni $x, \xi \in \mathbb{R}^N$ con $\inf_{x\in K} \nu(x) > 0$, per ogni K compatto di $\mathbb{R}^N$.

Da queste ipotesi segue che A è uniformemente ellittico su ogni compatto di $\mathbb{R}^N$. Quindi, è ben noto che il problema (1.2) ammette un'unica soluzione classica rappresentata da un semigruppo analitico, non fortemente continuo, in $\mathcal{C}(\overline{B}_R)$

$$u_R(t,x) = T_R(t)f(x), \quad t \geq 0,\ x \in \overline{B}_R.$$

Il generatore infinitesimale (nel senso della Sezione 1.3) di $(T_R(t))$ è l'operatore $(A, D_R(A))$ dove

$$D_R(A) = \{u \in \mathcal{C}_0(\overline{B}_R) \cap W^{2,p}(B_R),\ \forall\, p \in (1,+\infty) : Au \in \mathcal{C}(\overline{B}_R)\}.$$

Nel teorema che segue elenchiamo alcune proprietà di $(T_R(t))$ utili per il seguito. Maggiori dettagli e relative dimostrazioni possono essere trovati in [**24**, Capitolo 3] e in [**15**, Capitolo 3, Sezione 7].

Teorema 1.4. (1) *Il semigruppo $(T_R(t))$ ammette la seguente rappresentazione integrale*

$$T_R(t)f(x) = \int_{B_R} p_R(t,x,y)f(y)dy, \quad f \in \mathcal{C}(\overline{B}_R), t > 0, x \in \overline{B}_R$$

con nucleo $p_R \in \mathcal{C}((0,+\infty) \times B_R \times B_R)$ strettamente positivo. In particolare, $T_R(t) \geq 0$;

(2) *$T_R(t) \in \mathcal{L}(L^p(B_R))$ per ogni $t \geq 0$ e per ogni $1 < p < +\infty$;*

(3) *$T_R(t)$ è contrattivo in $\mathcal{C}(\overline{B}_R)$;*

(4) *data una successione $(f_n)_n \subset \mathcal{C}(\overline{B}_R)$ limitata, tale che $f_n \to f$ puntualmente in $\overline{B}_R$, con $f \in \mathcal{C}(\overline{B}_R)$, si ha che $T_R(t)f_n \to T_R(t)f$ puntualmente, per ogni $t \geq 0$;*

(5) *per ogni $y \in \overline{B}_R$ fissato, $p_R(\cdot,\cdot,y) \in \mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}([s,t_0] \times \overline{B}_R)$ per ogni $0 < s < t_0$ e si ha*

$$\partial_t p_R(t,x,y) = Ap_R(t,x,y), \quad \forall (t,x) \in [s,t_0] \times \overline{B}_R.$$

Come conseguenza del Teorema 1.4 si ha che data una funzione $g \in \mathcal{C}(\overline{B}_R)$, e posto $v(t,x) = T_R(t)g(x)$, $v \in \mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}([s,t_0] \times \overline{B}_R)$. In particolare

$$u_R \in \mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}([s,t_0] \times \overline{B}_R),$$

dove $u_R(t,x) = T_R(t)f(x)$. Come anticipato, siamo interessati a mandare $R \to +\infty$. Si tratta dunque di studiare la convergenza delle funzioni u_R.

Proposizione 1.5. *Sia $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ e sia $t \geq 0$; allora esiste il limite*

$$T(t)f(x) = \lim_{R\to+\infty} T_R(t)f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \tag{1.3}$$

e $(T(t))$ definisce un semigruppo positivo in $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$.

Dim. Procediamo per passi; supponiamo anzitutto che $f \geq 0$ e fissiamo $0 < R < R_1 < R_2$. Dimostriamo che per ogni $x \in B_R$ vale

$$0 \leq T_{R_1}(t)f(x) \leq T_{R_2}(t)f(x). \tag{1.4}$$

Assumiamo $f = 0$ su ∂B_{R_1}. La funzione

$$v(t,x) = T_{R_2}(t)f(x) - T_{R_1}(t)f(x)$$

soddisfa $v(0,x) = 0$, se $x \in B_{R_1}$, e $v(t,x) = T_{R_2}(t)f(x) \geq 0$ se $|x| = R_1$; inoltre $\partial_t v = Av$. Quindi, per il principio del massimo, $v(t,x) \geq 0$ per ogni $x \in B_R$ da cui (1.4) per $f = 0$ su ∂B_{R_1}. In generale, se $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ e $f \geq 0$, consideriamo una successione di funzioni positive $f_h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$, tali che $f_h = 0$ su ∂B_{R_1} e f_h tende a f in $L^2(B_R)$; usando quindi il fatto che $T_R(t)$ è limitato in $L^2(B_R)$ (Teorema 1.4), otteniamo (1.4) anche in questo caso. Quindi, se $f \geq 0$, $T_R(t)f$ è crescente in R e come tale ammette limite puntuale per $R \to +\infty$.

Se f è di segno arbitrario, scrivendo $f = f^+ - f^-$ e usando la linearità di $T_R(t)$, deduciamo l'esistenza del limite

$$T(t)f(x) = \lim_{R\to\infty} T_R(t)f(x).$$

Verifichiamo ora la legge di semigruppo per $(T(t))$. È sufficiente considerare solo il caso $f \geq 0$, giacché il caso generale segue ancora una volta per decomposizione in parte positiva e negativa. Dalla monotonia e dalla definizione di $T(t)$ si ha che per ogni $x \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} T(t+s)f(x) &= \lim_{R\to+\infty} T_R(t+s)f(x) \\ &= \lim_{R\to+\infty} T_R(t)T_R(s)f(x) \leq T(t)T(s)f(x). \end{aligned}$$

Viceversa, fissato $R_1 > 0$, si ha che

$$\lim_{R\to+\infty} T_R(t)T_R(s)f(x) \geq \lim_{R\to+\infty} T_{R_1}(t)T_R(s)f(x) = T_{R_1}(t)T(s)f(x),$$

$x \in B_{R_1}$, e quindi facendo il limite per $R_1 \to +\infty$, si ricava che

$$T(t+s)f(x) \geq T(t)T(s)f(x).$$

□

PROPOSIZIONE 1.6. *Per il semigruppo definito dalla formula (1.3) si ha la seguente rappresentazione integrale*

$$T(t)f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} p(t,x,y)f(y)dy, \qquad f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N) \tag{1.5}$$

con $p(t,x,y) > 0$ *per q.o.* $y \in \mathbb{R}^N$ *e per ogni* $t > 0, x \in \mathbb{R}^N$, $p(\cdot,\cdot,y) \in \mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}_{\mathrm{loc}}((0,+\infty)\times\mathbb{R}^N)$ *e* $\partial_t p = Ap$ *come equazione nella coppia* (t,x).

DIM. Tenendo conto del Teorema 1.4 e della monotonia di $T_R(t)$ rispetto ad R, si può provare che per ogni $x, y \in B_R$

$$0 < p_{R_1}(t,x,y) \leq p_{R_2}(t,x,y), \quad \forall\, 0 < R < R_1 < R_2;$$

quindi è ben posta la seguente definizione

$$p(t,x,y) = \lim_{R\to+\infty} p_R(t,x,y).$$

Verifichiamo che tale funzione soddisfa l'asserto, provando innanzitutto che

$$T(t)f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} p(t,x,y)f(y)dy, \quad \forall f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N).$$

Grazie al teorema di convergenza monotona, se $f \geq 0$, si ha che

$$T(t)f(x) = \lim_{R\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} p_R(t,x,y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} p(t,x,y)f(y)dy.$$

Il caso di f di segno arbitrario si tratta come nella dimostrazione della Proposizione 1.5. In particolare, dato che $\int_{\mathbb{R}^N} p(t,x,y)dy$ è finito, per ogni $t \geq 0$ esiste $x \in B_1$ tale che per quasi ogni $y \in \mathbb{R}^N$ risulta $p(t,x,y) < +\infty$. Fissiamo $0 < \varepsilon < t_0$, $t_1 > t_0$ e indichiamo con $\overline{x}$ l'elemento in B_1 corrispondente a t_1 e per cui si abbia $p(t_1, \overline{x}, y) < +\infty$, per quasi ogni $y \in \mathbb{R}^N$. Utilizzando la disuguaglianza di Harnack parabolica (si veda il Teorema B.2), si ottiene che per ogni $\sigma > 1$ e per $y \in \mathbb{R}^N$ fissato come sopra,

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{t\in[\varepsilon,t_0]\\ x\in\overline{B}_\sigma}} (p_{R_2}(t,x,y) - p_{R_1}(t,x,y)) &\leq c \inf_{x\in\overline{B}_\sigma} (p_{R_2}(t_1,x,y) - p_{R_1}(t_1,x,y)) \\ &\leq c \inf_{x\in\overline{B}_1} (p_{R_2}(t_1,x,y) - p_{R_1}(t_1,x,y)) \\ &\leq c\,(p_{R_2}(t_1,\bar{x},y) - p_{R_1}(t_1,\bar{x},y)) \to 0\end{aligned}$$

per $R_1, R_2 \to +\infty$. Quindi $p_R(\cdot,\cdot,y) \to p(\cdot,\cdot,y)$ uniformemente su $[\varepsilon, t_0] \times \overline{B}_\sigma$. Grazie alle stime di Schauder locali (vedere Teorema B1), esiste una costante $C > 0$ indipendente da R_1, R_2 t.c.

$$\begin{aligned}&\|p_{R_1}(\cdot,\cdot,y) - p_{R_2}(\cdot,\cdot,y)\|_{\mathcal{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}([\varepsilon',t_0']\times\overline{B}_{\sigma'})} \leq \\ &\qquad\qquad C\,\|p_{R_1}(\cdot,\cdot,y) - p_{R_2}(\cdot,\cdot,y)\|_{\mathcal{C}([\varepsilon,t_0]\times\overline{B}_\sigma)}\end{aligned}$$

con $0 < \varepsilon < \varepsilon' < t_0' < t_0$ e $\sigma' < \sigma$. Quindi dalla convergenza uniforme si evince la convergenza in $\mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}([\varepsilon', t_0'] \times \overline{B}_{\sigma'})$ di $p_R(\cdot,\cdot,y)$ a $p(\cdot,\cdot,y)$ dalla quale segue che $p \in \mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}_{\text{loc}}((0,+\infty) \times \mathbb{R}^N)$. Infine, $\partial_t p = Ap$ si ottiene semplicemente passando al limite puntuale nell'equazione soddisfatta da $p_R(\cdot,\cdot,y)$. □

Osservazione 1.7. È opportuno sottolineare che la rappresentazione (1.5) permette di estendere il semigruppo $(T(t))$ da $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ allo spazio delle funzioni boreliane e limitate in $\mathbb{R}^N$. In particolare, avremo

$$T(t)\chi_\Gamma(x) = p(t,x,\Gamma) = \int_\Gamma p(t,x,y)dy,$$

per ogni $t > 0, x \in \mathbb{R}^N$ e $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

Utilizzando quanto visto fino a questo punto, mostriamo che il semigruppo $(T(t))$ fornisce una soluzione del problema

$$\begin{cases} \partial_t u = Au & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \\ u(0,x) = f(x) & \qquad\quad\; x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{1.6}$$

Premettiamo un lemma.

Lemma 1.8. *Sia $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$; allora*

$$\lim_{t\to 0} \sup_{x\in K} |T(t)f(x) - f(x)| = 0,$$

per ogni compatto K di $\mathbb{R}^N$.

Dim. Dividiamo la dimostrazione in passi; supponiamo anzitutto che $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$ con supp$f \subset B_r$ e sia $R > r$. Allora per ogni $x \in \overline{B}_R$, dato che $(A, D_R(A))$ è il generatore infinitesimale di $T_R(t)$, si ha che

$$T_R(t)f(x) - f(x) = \int_0^t \frac{d}{ds} T_R(s)f(x)ds = \int_0^t T_R(s)Af(x)ds$$

in quanto $f \in D_R(A)$. Passando al limite per $R \to +\infty$, otteniamo quindi, grazie al teorema di convergenza dominata,

$$T(t)f(x) - f(x) = \int_0^t T(s)Af(x)ds, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

da cui

$$\|T(t)f - f\|_\infty \le t\|Af\|_\infty$$

in quanto $T(t)$ è contrattivo. Passando al limite per $t \to 0$, si ottiene che $T(t)f$ converge a f uniformemente in $\mathbb{R}^N$ e quindi, in particolare, la tesi. Nel caso $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, si procede con un argomento di densità. Siano ora $R > 0$ e $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ con

$$0 \le \chi_{B_R} \le f_1 \le \chi_{B_{2R}} \le f_2 \le 1;$$

allora

$$0 \le T(t)f_1 \le T(t)\chi_{B_{2R}} \le T(t)f_2.$$

Per $t \to 0$ si ha che, uniformemente su $\overline{B}_R$

$$T(t)f_1 \to f_1 = 1, \quad T(t)f_2 \to f_2 = 1.$$

Siccome $T(t)\chi_{B_{2R}}(x) = p(t, x, B_{2R})$, si ottiene così la continuità stocastica di $(T(t))$, cioè il fatto che

$$p(t, x, B_{2R}) \to 1,$$

o equivalentemente $p(t, x, \mathbb{R}^N \setminus B_{2R}) \to 0$ uniformemente per $x \in \overline{B}_R$, quando $t \to 0$. Con questa premessa, consideriamo $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ e una funzione cut–off $\eta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ con $0 \le \eta \le 1$ e $\eta = 1$ su B_{2R}, supp$\eta \subset B_{3R}$. Su $\overline{B}_R$, siccome $\eta f(x) = f(x)$, si ha che

$$T(t)f(x) - f(x) = T(t)(\eta f)(x) - \eta f(x) + T(t)f(x) - T(t)(\eta f)(x).$$

Tenendo quindi presente che $\eta f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, si ha

$$\|T(t)\eta f - \eta f\|_\infty \to 0$$

per $t \to 0$, mentre

$$\begin{aligned} |T(t)f(x) - T(t)(\eta f)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} p(t, x, y)(1 - \eta(y))f(y)dy \right| \\ &\le \|f\|_\infty p(t, x, B_{2R}^c) \to 0 \end{aligned}$$

grazie alla continuità stocastica; dall'arbitrarietà di R segue la tesi. $\square$

A questo punto siamo in grado di dimostrare un risultato di esistenza per il problema (1.6), mentre, in generale, l'unicità non sussiste. L'unicità sarà oggetto di studio nella prossima sezione.

TEOREMA 1.9. *Sia* $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$*; allora la funzione*

$$u(t,x) = T(t)f(x)$$

appartiene a $\mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}_{\mathrm{loc}}((0,+\infty)\times\mathbb{R}^N)$ *ed è soluzione di (1.6).*

DIM. Presa u_R la soluzione di (1.2), fissiamo $0<\varepsilon<t_0$ e $\varrho>0$. Applicando le stime di Schauder locali si ottiene che

$$\|u_R\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}([\varepsilon,t_0]\times\overline{B}_\varrho)} \le c\|u_R\|_\infty \le c\|f\|_\infty.$$

Quindi le u_R sono equi–limitate ed equi–hölderiane e grazie al teorema di Ascoli–Arzelà, a meno di sottosuccessioni, u_R converge uniformemente su $[\varepsilon,t_0]\times\overline{B}_\varrho$ ad una funzione u, per $R\to+\infty$. Ancora grazie alle stime di Schauder locali, si ricava inoltre che

$$\|u_{R_1}-u_{R_2}\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}([\varepsilon',t_0']\times\overline{B}_{\varrho_1})} \le c\|u_{R_1}-u_{R_2}\|_{\mathcal{C}([\varepsilon,t_0]\times\overline{B}_\varrho)}$$

con $0<\varepsilon<\varepsilon'<t_0'<t$ e $0<\rho_1<\rho$. Quindi si deduce che $u\in\mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}([\varepsilon',t_0']\times\overline{B}_{\varrho_1})$ e la convergenza è in $\mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}([\varepsilon',t_0']\times\overline{B}_{\varrho_1})$. Passando al limite nell'equazione (1.6), abbiamo dimostrato che la funzione u risolve il problema parabolico (1.6) e il fatto che il dato iniziale f viene assunto segue dal Lemma 1.8. $\square$

Il semigruppo $(T(t))$ così costruito è irriducibile e strong–Feller; richiamiamo le definizioni di irriducibilità e di strong–Feller.

DEFINIZIONE 1.10. *Un semigruppo* $(T(t))$ *si dice* **irriducibile** *se per ogni* $f\ge 0$ *con* f *non identicamente nulla, si ha che*

$$T(t)f(x)>0, \quad \forall x\in\mathbb{R}^N, \forall t>0.$$

$(T(t))$ *si dice* **strong–Feller** *se per ogni* f *boreliana e limitata in* $\mathbb{R}^N$ *risulta*

$$T(t)f\in\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N), \quad \forall t>0.$$

L' irriducibilità di $(T(t))$ segue dal fatto che il nucleo $p(t,x,y)$ è strettamente positivo. Per la proprietà di strong–Feller, data $f\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, possiamo prendere una successione $f_h\in\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ t.c. $f_h\to f$ q.o. e $\|f_h\|_\infty\le\|f\|_\infty$. Dal teorema di convergenza dominata segue che $T(t)f_h(x)$ converge a $T(t)f(x)$ per ogni $t>0$ e per ogni $x\in\mathbb{R}^N$. Dalle stime di Schauder locali si ricava inoltre che se $0<\varepsilon<t_0$ e $\varrho>0$, allora

$$\sup_{h\in\mathbb{N}}\|T(\cdot)f_h(\cdot)\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}([\varepsilon,t_0]\times\overline{B}_\varrho)} \le C\sup_{h\in\mathbb{N}}\|f_h\|_\infty \le C\,\|f\|_\infty.$$

Quindi, dal teorema di Ascoli–Arzelà, si ricava che per ogni $t > 0$, $T(t)f_h \to T(t)f$ uniformemente sui compatti (a meno di prenderne un'estratta), da cui la continuità di $T(t)f$.

1.3. Il generatore di $(T(t))$ in $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$

Siccome $(T(t))$ non è fortemente continuo in $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$, non è possibile definire il generatore nel modo classico. Tuttavia esiste un generatore debole, nel senso precisato dalla seguente definizione.

Definizione 1.11. *Definiamo il seguente operatore*

$$\begin{aligned} D(\tilde{A}) &= \left\{ f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N) \;\middle|\; \sup_{t>0} \frac{\|T(t)f - f\|_\infty}{t} < \infty \text{ e } \exists g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N) \text{ t.c.} \right. \\ &\qquad \left. \lim_{t\to 0} \frac{T(t)f(x) - f(x)}{t} = g(x), x \in \mathbb{R}^N \right\} \\ \tilde{A}f(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{T(t)f(x) - f(x)}{t}, \quad f \in D(\tilde{A}),\ x \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

il **generatore debole** *di* $(T(t))$.

Ci proponiamo ora di dimostrare alcune proprietà di $(\tilde{A}, D(\tilde{A}))$, simili a quelle del generatore di un semigruppo fortemente continuo.

Lemma 1.12. *Sia* $f \in D(\tilde{A})$. *Allora valgono*

(i) $T(t)f \in D(\tilde{A})$, *per ogni* $t \geq 0$ *e* $\tilde{A}T(t)f = T(t)\tilde{A}f$;
(ii) *per ogni* $x \in \mathbb{R}^N$, *la funzione* $t \in [0, +\infty[\to T(t)f(x)$ *è di classe* $\mathcal{C}^1$ *e* $\frac{d}{dt}T(t)f(x) = T(t)\tilde{A}f(x)$.

Dim. Sia $t > 0$. Allora, ricordando che $(T(t))$ è contrattivo, risulta

$$\sup_{s>0} \frac{\|T(s)T(t)f - T(t)f\|_\infty}{s} \leq \sup_{s>0} \frac{\|T(s)f - f\|_\infty}{s} < +\infty.$$

Inoltre, per ipotesi $\lim_{s\to 0} s^{-1}(T(s)f(x) - f(x)) = \tilde{A}f(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Tenendo conto della rappresentazione integrale di $T(t)$ (Proposizione 1.6), e applicando il teorema di convergenza dominata, deduciamo che

$$\lim_{s\to 0} \frac{T(s)T(t)f(x) - T(t)f(x)}{s} = \lim_{s\to 0} T(t) \left(\frac{T(s)f - f}{s} \right)(x) = T(t)\tilde{A}f(x).$$

Ciò dimostra la prima parte dell'enunciato.

Proviamo (ii). La derivabilità in $t = 0$ è ovvia, poiché $f \in D(\tilde{A})$. Siano ora $t > 0$ e $h > 0$. Lo stesso argomento di prima prova che

$$\frac{T(t+h)f(x) - T(t)f(x)}{h} = T(t)\left(\frac{T(h)f - f}{h}\right)(x) \to T(t)\tilde{A}f(x),$$

per $h \to 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Pertanto l'applicazione $t \to T(t)f(x)$ è derivabile da destra in ogni punto con $\frac{d^+}{dt}T(t)f(x) = T(t)\tilde{A}f(x)$ e tale derivata risulta continua; dunque la tesi. □

Proposizione 1.13.

(i) *$D(\tilde{A})$ è denso in $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ rispetto alla convergenza puntuale dominata, cioè per ogni $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$, esiste una successione di funzioni $(f_n) \subseteq D(\tilde{A})$, uniformemente limitate e convergenti a f puntualmente;*

(ii) *$(\tilde{A}, D(\tilde{A}))$ è chiuso in $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ rispetto alla convergenza puntuale dominata.*

Dim. Sia $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$. Consideriamo $t > 0$ e l'applicazione $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \int_0^t T(s)f(x)ds$, $x \in \mathbb{R}^N$. Proviamo che $\varphi \in D(\tilde{A})$. Sia $h > 0$. Siccome $T(h)$ è continuo rispetto alla convergenza puntuale dominata, possiamo scrivere

$$T(h)\left(\int_0^t T(s)f(\cdot)ds\right)(x) = \int_0^t T(s+h)f(x)ds,$$

da cui segue che

$$\begin{aligned}\frac{T(h)\varphi(x) - \varphi(x)}{h} &= \int_0^t \frac{T(s+h)f(x) - T(s)f(x)}{h}ds \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)f(x)ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)f(x)ds.\end{aligned}$$

Usando la contrattività di $(T(t))$, abbiamo che $h^{-1}\|T(h)\varphi - \varphi\|_\infty \le 2\|f\|_\infty$. Inoltre

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(h)\varphi(x) - \varphi(x)}{h} = T(t)f(x) - f(x).$$

Pertanto $\varphi \in D(\tilde{A})$. A questo punto, basta osservare che $t^{-1}\int_0^t T(s)f(x)ds$ tende a $f(x)$, per $t \to 0$ per dedurre (i).

Proviamo (ii). Sia $(f_n) \subseteq D(\tilde{A})$, tale che f_n e $\tilde{A}f_n$ siano uniformemente limitate e convergano puntualmente a certe funzioni $f, g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$, rispettivamente. Dal Lemma 1.12(ii) discende che

$$\frac{d}{dt}T(t)f_n(x) = T(t)\tilde{A}f_n(x), \quad t \ge 0,\ x \in \mathbb{R}^N$$

e quindi, integrando

$$T(t)f_n(x) - f_n(x) = \int_0^t T(s)\tilde{A}f_n(x)ds$$

e mandando $n \to +\infty$

$$\frac{T(t)f(x) - f(x)}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)g(x)ds.$$

Ciò implica che $f \in D(\tilde{A})$ e $\tilde{A}f = g$. □

Per i nostri scopi, è necessario conoscere alcune proprietà spettrali di $\tilde{A}$, enunciate nella proposizione che segue. Ricordiamo che si definisce l'insieme risolvente per un operatore A su X come

$$\varrho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) : D(A) \to X \ \text{ biiettivo con inverso limitato}\}$$

e si definisce l'operatore risolvente come

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}, \qquad \lambda \in \rho(A).$$

Proposizione 1.14. *Risulta che* $(0, +\infty) \subseteq \varrho(\tilde{A})$ *e per ogni* $\lambda > 0$

$$R(\lambda, \tilde{A})f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)f(x)dt, \tag{1.1}$$

per ogni $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ *e per ogni* $x \in \mathbb{R}^N$.

Dim. Sia $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$. Usando la contrattività di $(T(t))$, abbiamo che l'operatore

$$R(\lambda)f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)f(x)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

è ben definito per ogni $\lambda > 0$. Sia $h \in (0, 1)$. Con lo stesso argomento usato nella dimostrazione della Proposizione 1.13 si può provare che

$$\frac{1}{h}\left(T(h)R(\lambda)f(x) - R(\lambda)f(x)\right) = \frac{e^{\lambda h} - 1}{h}R(\lambda)f(x) - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)f(x).$$

Quindi si deduce che $\frac{1}{h}\|T(h)R(\lambda)f - R(\lambda)f\|_\infty \leq 2e^\lambda\|f\|_\infty$ e

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(T(h)R(\lambda)f(x) - R(\lambda)f(x)\right) = \lambda R(\lambda)f(x) - f(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Pertanto $R(\lambda)f \in D(\widetilde{A})$ e $(\lambda - \widetilde{A})R(\lambda)f = f$.
D'altro canto, integrando per parti, otteniamo dal Lemma 1.12(ii)

$$\begin{aligned} R(\lambda)(\lambda - \widetilde{A})f(x) &= \lambda R(\lambda)f(x) - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\widetilde{A}f(x)\,dt \\ &= \lambda R(\lambda)f(x) - \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{d}{dt}T(t)f(x)\,dt \\ &= \lambda R(\lambda)f(x) + f(x) - \lambda R(\lambda)f(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

per ogni $f \in D(\widetilde{A})$ e $x \in \mathbb{R}^N$; dunque la tesi. □

A questo punto, il nostro obiettivo è quello di stabilire una relazione tra gli operatori
$$(\tilde{A}, D(\tilde{A})) \quad \text{e} \quad (A, D_{\max}(A)).$$
A tal proposito, è utile risolvere l'equazione ellittica
$$\lambda f - Af = g. \tag{1.2}$$
Piú precisamente, proviamo il seguente risultato.

Proposizione 1.15. *Per ogni $\lambda > 0$ e per ogni $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ esiste $f \in D_{\max}(A)$ tale che $\lambda f - Af = g$ in $\mathbb{R}^N$. Per tale funzione vale inoltre la stima $\|f\|_\infty \le \lambda^{-1}\|g\|_\infty$.*

Dim. Procedendo come nel caso parabolico, costruiamo una soluzione dell'equazione $\lambda f - Af = g$ nell'intero spazio come limite delle soluzioni in palle con raggio crescente. Dalla teoria classica è ben noto che esiste un'unica soluzione $f_R \in D_R(A)$ del problema
$$\begin{cases} \lambda f - Af = g & \text{in } B_R \\ \\ f = 0 & \text{su } \partial B_R \end{cases} \tag{1.3}$$
rappresentata da
$$f_R(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T_R(t) g(x) dt.$$
In particolare, $f_R \in W^{2,p}(B_R)$, per ogni $p \in (1, \infty)$ e
$$\|f_R\|_\infty \le \lambda^{-1}\|g\|_\infty.$$
Inoltre dall'equazione contenuta in (1.3) segue che
$$\|Af_R\|_\infty \le 2\|g\|_\infty.$$
Siccome per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, $T_R(t)g(x)$ converge a $T(t)g(x)$, per $R \to +\infty$, dal teorema di convergenza dominata segue che
$$f_R(x) \to \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) g(x) dt = R(\lambda, \tilde{A}) g(x),$$
per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Proviamo che la funzione $f = R(\lambda, \tilde{A})g$ soddisfa l'asserto. Da quanto visto sinora, risulta che $Af_R = \lambda f_R - g$ converge a $\lambda f - g$, puntualmente. Dato che le famiglie $\{f_R\}_R$ e $\{Af_R\}_R$ sono equilimitate rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$, otteniamo che la convergenza è anche in $L^p(\Omega)$, per ogni Ω limitato in $\mathbb{R}^N$.

Ora, fissati $0 < r < r' < R_i$, $i = 1, 2$, le classiche stime di regolarità L^p implicano
$$\|f_{R_1} - f_{R_2}\|_{W^{2,p}(B_r)} \le C\Big(\|Af_{R_1} - Af_{R_2}\|_{L^p(B_{r'})} + \|f_{R_1} - f_{R_2}\|_{L^p(B_{r'})}\Big),$$

dove C è una costante indipendente da R_1, R_2. Ne segue che f_R converge a f in $W^{2,p}(B_r)$. Dall'arbitrarietà di r discende che $f \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Inoltre, siccome $A : W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) \to L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ è continuo, abbiamo che Af_R converge a Af in $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Per unicità del limite deve aversi $Af = \lambda f - g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$. Anche la stima

$$\|f\|_\infty \leq \frac{1}{\lambda}\|g\|_\infty$$

è provata, e ciò completa la dimostrazione. □

A questo punto, possiamo dimostrare la relazione che intercorre tra il generatore debole $\tilde{A}$ e l'operatore A.

Proposizione 1.16. *Valgono le seguenti proprietà :*

(i) *A è una estensione di $\tilde{A}$, cioè $D(\tilde{A}) \subseteq D_{\max}(A)$ e $\tilde{A}f = Af$, per ogni $f \in D(\tilde{A})$;*
(ii) *$D(\tilde{A}) = D_{\max}(A)$ se e solo se $\lambda - A$ è iniettivo per un (e quindi per tutti) $\lambda > 0$.*

Dim. Dalla dimostrazione della Proposizione 1.15 risulta che per ogni $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ e $\lambda > 0$, la funzione $f = R(\lambda, \tilde{A})g$ appartiene a $D_{\max}(A)$ e risolve l'equazione $\lambda f - Af = g$. D'altra parte, $\lambda f - \tilde{A}f = g$, da cui segue la prima parte dell'asserto.

Per quanto riguarda la seconda parte, osserviamo che dalla Proposizione 1.15 discende che l'operatore $\lambda - A : D_{\max}(A) \to \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ è suriettivo, per ogni $\lambda > 0$. Pertanto, esso risulta biiettivo se e solo se è iniettivo. La conclusione segue ora dal fatto che $\lambda - A : D(\tilde{A}) \to \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ è sempre biiettivo, grazie alla Proposizione 1.14. □

Osservazione 1.17. In virtú della Proposizione appena provata, ha senso scrivere $R(\lambda, A)$ invece di $R(\lambda, \tilde{A})$, per $\lambda > 0$, fermo restando il fatto che $R(\lambda, A)$ trasforma $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ in $D(\tilde{A})$ e non in $D_{\max}(A)$, in generale.

Un'altra utile caratterizzazione dell'iniettività di $\lambda - A$ può essere formulata in termini di $(T(t))$.

Proposizione 1.18. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

(i) *$\lambda - A$ è iniettivo in $D_{\max}(A)$ (per uno o per tutti i $\lambda > 0$);*
(ii) *$T(t)\mathbb{1} = \mathbb{1}$, per ogni $t \geq 0$.*

Dim. $(i) \Rightarrow (ii)$: Osserviamo che $\mathbb{1} \in D_{\max}(A) = D(\tilde{A})$ e che $\tilde{A}\mathbb{1} = A\mathbb{1} = 0$. Pertanto

$$(T(t)\mathbb{1} - \mathbb{1})(x) = \int_0^t T(s)A\mathbb{1}(x)ds = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Siccome $T(t)\mathbb{1} = \mathbb{1}$ per ogni t, risulta $R(1,A)\mathbb{1} = \mathbb{1}$, grazie alla rappresentazione integrale (1.1) e all'Osservazione 1.17. Ora, sia $f \in D_{\max}(A)$ tale che $f - Af = 0$ e $\|f\|_\infty \le 1$. Posto $g = \mathbb{1} - f$, risulta che $g \ge 0$ e $g - Ag = \mathbb{1} - f - A\mathbb{1} + Af = \mathbb{1}$. Consideriamo quindi la differenza $g - f_R$, dove $f_R = R(1, A_R)\mathbb{1}$, $R > 0$. Siccome

$$\begin{cases} A(g - f_R) - (g - f_R) = 0 & \text{in } B_R \\ \\ g - f_R = g \ge 0 & \text{su } \partial B_R \end{cases}$$

dal principio del massimo per funzioni $W^{2,p}$ segue che $g \ge f_R$ per ogni $R > 0$. Mandando $R \to +\infty$ e ricordando che f_R converge a $R(1,A)\mathbb{1} = \mathbb{1}$ (si vedano la dimostrazione della Proposizione 1.15 e l'Osservazione 1.17), risulta che $g \ge \mathbb{1}$ e quindi $f \le 0$. Analogamente si può dimostrare che $f \ge 0$ e quindi l'asserto è completamente provato. $\square$

A questo punto, abbiamo tutti gli strumenti necessari per affrontare il problema dell'unicità della soluzione del problema (1.6). Più precisamente, nel teorema seguente proviamo che se l'operatore $\lambda - A$ è iniettivo in $D_{\max}(A)$ per qualche $\lambda > 0$, allora l'unica soluzione classica limitata è quella fornita dal semigruppo $(T(t))$.

Teorema 1.19. *Supponiamo che esista $\lambda > 0$ tale che $\lambda - A$ sia iniettivo in $D_{\max}(A)$. Se $v \in \mathcal{C}^{1,2}((0,t_0] \times \mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}([0,t_0] \times \mathbb{R}^N)$ è una soluzione limitata del problema (1.6) con dato iniziale $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$, allora $v(t,x) = T(t)f(x)$.*

Dim. Per linearità, possiamo supporre $f = 0$. Siano $0 < \varepsilon \le t \le t_0$ fissati. Siccome v risolve l'equazione differenziale $\partial_t v = Av$ in $(0,t_0] \times \mathbb{R}^N$ possiamo scrivere

$$v(t,x) - v(\varepsilon, x) = \int_\varepsilon^t Av(s,x)ds = A \int_\varepsilon^t v(s,x)ds,$$

dove abbiamo usato il fatto che $\tilde{A} = A$ (Proposizione 1.16 (ii)) e la chiusura del generatore debole rispetto alla convergenza puntuale dominata (Proposizione 1.13). Mandando $\varepsilon \to 0$, risulta che $v(\varepsilon, x) \to 0$ e quindi dalla relazione precedente deduciamo che $A \int_\varepsilon^t v(s,x)ds \to v(t,x)$. D'altro canto, per continuità, $\int_\varepsilon^t v(s,x)ds \to \int_0^t v(s,x)ds$, per $\varepsilon \to 0$. Usando ancora la chiusura del generatore debole abbiamo che $\int_0^t v(s,\cdot)ds \in D_{\max}(A)$ e $A \int_0^t v(s,\cdot)ds = v(t,\cdot)$. Poniamo $w(s,\cdot) = T(t-s)\int_0^s v(\tau,\cdot)d\tau$, $s \in [0,t]$,

$t \leq t_0$. Allora

$$\partial_s w(s, \cdot) = -T(t-s)A \int_0^s v(\tau, \cdot) d\tau + T(t-s)v(s, \cdot) = 0,$$

da cui segue che la funzione w è costante rispetto ad s. In particolare, $0 = w(0, \cdot) = w(t, \cdot) = \int_0^t v(\tau, \cdot) d\tau$, per ogni $t \in [0, T]$. Concludiamo così che $v(\tau, \cdot) = 0$ per ogni τ. □

Osservazione 1.20. Se $\lambda - A$ non è iniettivo in $D_{\max}(A)$ allora il problema (1.6) ammette in generale piú di una soluzione. Infatti, consideriamo la funzione $u(t, x) = (\mathbb{1} - T(t)\mathbb{1})(x)$. Questa è una funzione limitata, di classe $\mathcal{C}^{1,2}((0, +\infty) \times \mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}([0, +\infty) \times \mathbb{R}^N)$, soluzione dell'equazione differenziale $(\partial_t - A)u = 0$, con dato iniziale nullo. Ma $u(t, x)$ non è identicamente nulla. Infatti, tenendo conto della Proposizione 1.18, si ha

$$\begin{aligned} u(t,x) = 0 \quad \forall\, t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N \quad &\Leftrightarrow \quad T(t)\mathbb{1} = \mathbb{1} \quad \forall\, t \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda - A \text{ iniettivo in } D_{\max}(A) \end{aligned}$$

che è in contraddizione con l'ipotesi. Perciò esistono $\bar{t} > 0, \overline{x} \in \mathbb{R}^N$ tali che $u(\bar{t}, \overline{x}) \neq 0$. Siccome il semigruppo è contrattivo, si ha $u(t, x) \geq 0$ e quindi $u(\bar{t}, \overline{x}) > 0$. In realtà, si può provare che $u(t, x) > 0$ per ogni $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}^N$. Supponiamo per assurdo che $u(t_0, x_0) = 0$ per qualche $t_0 > 0, x_0 \in \mathbb{R}^N$. Allora (t_0, x_0) è punto di minimo di u in ogni cilindro della forma $[0, t_0] \times B_R$, dove l'operatore $\partial_t - A$ è uniformemente parabolico (il raggio R deve essere sufficientemente grande affinché $x_0 \in B_R$). Applicando il principio del massimo forte parabolico, si deduce che $u(t, x) = 0$ in $[0, t_0] \times B_R$ e quindi in $[0, t_0] \times \mathbb{R}^N$, mandando $R \to +\infty$. Abbiamo così provato che $T(t)\mathbb{1} = \mathbb{1}$ per ogni $t \in [0, t_0]$. Ora, la legge di semigruppo permette di avere $T(t)\mathbb{1} = \mathbb{1}$ per ogni $t \geq 0$. Ciò produce un assurdo.

CAPITOLO 2

Misure invarianti e loro regolarità

In questo capitolo ci occupiamo di introdurre il concetto di misura invariante per il semigruppo di Markov $(T(t))$ costruito nel precedente capitolo e di fornire condizioni necessarie o sufficienti per l'esistenza, l'unicità e la regolarità locale e globale di tale misura.

2.1. Misure invarianti

Iniziamo col dare la definizione di misura invariante.

Definizione 2.1. *Diremo che una misura di probabilità μ definita sui boreliani di $\mathbb{R}^N$ è* **invariante** *per $(T(t))$, se*

$$\int_{\mathbb{R}^N} T(t) f d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu, \tag{2.1}$$

per ogni $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$.

Vale la pena osservare che l'identità (2.1) si può estendere, grazie alla contrattività di $(T(t))$, a ogni funzione $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ facendo uso del teorema di convergenza dominata. Difatti, se $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ allora esistono $f_h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ con $\|f_h\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ e $f_h \to f$ q.o.; allora $T(t)f_h \to T(t)f$ q.o. e $\|T(t)f_h\|_\infty \leq \|T(t)f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, da cui, dato che μ è una misura finita,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \lim_{h\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_h d\mu = \lim_{h\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} T(t) f_h d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} T(t) f. \tag{2.2}$$

Una misura invariante, quando esiste, è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue e, inoltre, il semigruppo $(T(t))$ è conservativo. Ciò rappresenta il contenuto della prossima proposizione.

Proposizione 2.2. *Supponiamo che esista μ misura invariante per $(T(t))$. Allora*

(a) *μ e la misura di Lebesgue m sono equivalenti (diciamo per questo che μ è regolare). In più esiste $0 < \rho \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tale che $\mu(dx) = \rho(x)dx$,*

(b) $T(t)\mathbb{1} = \mathbb{1}$ *per ogni* $t \geq 0$, *cioè* $(T(t))$ *è conservativo.*

Dim.
(a) Mostriamo prima che μ e m sono equivalenti.
Sia $B \subset \mathbb{R}^N$ un insieme di Borel con $m(B) = 0$. Allora risulta che

$$T(t)\chi_B(x) = \int_B p(t,x,y)\,dy = 0$$

per ogni $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^N$. Da (2.2) segue che

$$\mu(B) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_B \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} T(t)\chi_B \, d\mu.$$

Ciò implica che $\mu(B) = 0$. D'altra parte, siccome $p(t,x,y) > 0$ per ogni $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^N$ e per q.o. $y \in \mathbb{R}^N$ (Proposizione 1.6), otteniamo che se $m(B) > 0$, allora $T(t)\chi_B(x) > 0$ per ogni $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^N$ e quindi $\mu(B) > 0$. Dal teorema di Radon-Nikodym segue che esiste una funzione $0 \leq \rho \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tale che $\mu(dx) = \rho(x)\,dx$. Rimane da far vedere che $\rho > 0$. Siano $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $t_0 > 0$ fissati. Sappiamo che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\rho(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (T(t_0)f)(x)\rho(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} p(t_0,x,y)\rho(x)\,dx \right) f(y)\,dy. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\rho(y) = \int_{\mathbb{R}^N} p(t_0,x,y)\rho(x)\,dx$$

per q.o. $y \in \mathbb{R}^N$. Fissiamo ora $R > 0$. Dalla continuità di $p_R(t_0,\cdot,\cdot)$ su $B_R \times B_R$ (Teorema 1.4) segue che la funzione

$$g(y) := \int_{B_R} p(t_0,x,y)\rho(x)\,dx \geq \int_{B_R} p_R(t_0,x,y)\rho(x)\,dx$$

è continua su B_R e $\rho(y) \geq g(y)$ per q.o. $y \in B_R$. Siccome $0 < g$ su B_R risulta che

$$\rho(y) \geq \inf_{B_R} g > 0$$

per q.o. $y \in B_R$.
(b) Siccome μ è una misura invariante per $(T(t))$

$$\int_{\mathbb{R}^N} (T(t)\mathbb{1} - \mathbb{1})(x)\rho(x)\,dx = 0.$$

D'altro canto, essendo $(T(t))$ contrattivo, si ha $T(t)\mathbb{1} \leq \mathbb{1}$. Tenendo conto di (a) e $T(t)\mathbb{1} \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$, risulta che

$$T(t)\mathbb{1} = \mathbb{1}$$

per ogni $t \geq 0$. $\square$

Osservazione 2.3. Se esiste una misura invariante per $(T(t))$ allora $T(t)\mathbb{1} = \mathbb{1}$ per ogni $t \geq 0$, e quindi dalle Proposizioni 1.18 e 1.16 discende che $(A, D_{\max}(A))$ è il generatore debole di $(T(t))$.

È utile enunciare il seguente corollario.

Corollario 2.4. *Lo spazio $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ è denso in $L^p(\mu)$ per ogni $p \in [1, +\infty)$.*

Non è detto che se una misura invariante esiste questa sia unica. Tuttavia, un risultato generale (vedi [**11**, Teorema 4.2.1]) dimostra che se il semigruppo è irriducibile e strong Feller, allora esso ammette al piú una misura invariante. Questo risultato si applica evidentemente al semigruppo $(T(t))$.

Per quanto premesso, resta da affrontare solo il problema dell'esistenza di una misura invariante.

Lemma 2.5. *Supponiamo che $\lambda - A$ sia iniettivo in $D_{\max}(A)$, per qualche $\lambda > 0$. Allora sono equivalenti*

(i) *μ è una misura invariante per $(T(t))$;*
(ii) *$\int_{\mathbb{R}^N} Af d\mu = 0$, per ogni $f \in D_{\max}(A)$.*

Dim. In conseguenza della Proposizione 1.16, risulta che $(A, D_{\max}(A))$ è il generatore debole di $(T(t))$.

(i) $\Rightarrow$ *(ii)*: Sia $f \in D_{\max}(A)$. Dal Lemma 1.12 segue che

$$\int_{\mathbb{R}^N} AT(t) f d\mu = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} T(t) f d\mu = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = 0,$$

per ogni $t \geq 0$, grazie a *(i)*. Scegliendo $t = 0$ vale *(ii)*.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)*: Sia dapprima $f \in D_{\max}(A)$. Allora, sempre dal Lemma 1.12, $T(t)f \in D_{\max}(A)$, per ogni $t \geq 0$ e le stesse argomentazioni di prima provano che f soddisfa (2.1). In generale, se $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$, esiste una successione di funzioni $(f_n)_n \subseteq D_{\max}(A)$ tale che $f_n(x)$ converge a $f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e $\|f_n\|_\infty \leq C$, per qualche costante $C > 0$ indipendente da n (si veda la Proposizione 1.13(i)). Siccome ogni f_n verifica (2.1), mandando $n \to +\infty$ e tenendo conto della continuità di $T(t)$ e del teorema di convergenza dominata si ha che anche f soddisfa (2.1). Quindi vale *(i)*. □

Osservazione 2.6. Supponiamo che μ sia una misura invariante per $(T(t))$. Siccome ogni funzione $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$, costante fuori da una palla, appartiene a $D_{\max}(A)$, si ha che $\int_{\mathbb{R}^N} A\varphi d\mu = 0$.

Per provare un criterio di esistenza di una misura invariante ci occorre un risultato di compattezza di misure.

Indichiamo con $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ l'insieme di tutte le misure di probabilità definite sui boreliani di $\mathbb{R}^N$. Data una successione $(\mu_k) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$, diremo che essa converge debolmente a $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ (per la topologia debole*) se

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu_k = \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu, \quad \text{per ogni } f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N).$$

Definizione 2.7. *Un sottoinsieme $\Lambda \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ si dice* **tight** *se esiste una successione crescente di compatti di $\mathbb{R}^N$, $\{K_n\}$, tali che $\lim_{n\to+\infty} \mu(K_n) = 1$, uniformemente rispetto a $\mu \in \Lambda$ o, equivalentemente, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto K_ε tale che $\mu(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$, per ogni $\mu \in \Lambda$.*

Lemma 2.8. *Sia $(\mu_n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ una successione convergente debolmente a $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$. Allora, per ogni insieme chiuso F di $\mathbb{R}^N$ risulta*

$$\limsup_{n\to+\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F).$$

Equivalentemente, per ogni aperto A di $\mathbb{R}^N$ si ha

$$\liminf_{n\to+\infty} \mu_n(A) \geq \mu(A).$$

Dim. Sia F un insieme chiuso di $\mathbb{R}^N$ e, per ogni $\delta > 0$, poniamo $F_\delta = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \mathrm{dist}(x, F) < \delta\}$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\mu(F_\delta) < \mu(F) + \varepsilon$. Sia ora $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $0 \leq \phi \leq 1$, tale che $\phi(t) = 0$ per $t \geq 1$, $\phi(t) = 1$ per $t \leq 0$. Poniamo quindi $f(x) = \phi(\delta^{-1}\mathrm{dist}(x, F))$. Siccome $f \geq 0$, e $f \equiv 1$ in F, abbiamo

$$\mu_n(F) = \int_F f d\mu_n \leq \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu_n.$$

Inoltre, $f \equiv 0$ fuori da F_δ, e $f \leq 1$, per cui

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \int_{F_\delta} f d\mu \leq \mu(F_\delta).$$

Quindi, dato che μ_n converge a μ, deduciamo

$$\limsup_{n\to+\infty} \mu_n(F) \leq \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \leq \mu(F_\delta) \leq \mu(F) + \varepsilon.$$

Data l'arbitrarietà di ε, segue la tesi. L'ultima parte invece si prova con un semplice argomento di complementazione. □

Teorema 2.9 (Prokhorov). *Una famiglia $\Lambda \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ è tight se e solo se essa è relativamente compatta rispetto alla topologia debole*.*

Dim. Assumiamo dapprima che Λ sia tight. Sia $(\mu_k) \subset \Lambda$. Fissato $n \in \mathbb{N}$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ indichiamo con $\mu_k^{(n)}$ la restrizione di μ_k alla palla chiusa di centro l'origine e raggio n, $\overline{B}_n$. Allora $(\mu_k^{(n)})_k$ è una successione di misure di Borel positive in $\overline{B}_n$, per cui, dal teorema di rappresentazione di Riesz, essa può essere vista come una successione di funzionali lineari, positivi e continui su $\mathcal{C}(\overline{B}_n)$. Inoltre

$$\mu_k^{(n)}(\overline{B}_n) \leq 1, \qquad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Ricordiamo che la palla unitaria $B_{X'}$ del duale topologico X' di uno spazio di Banach X separabile è metrizzabile per la topologia debole $\sigma(X', X)$ e che, per il teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki, essa è $\sigma(X', X)$ relativamente compatta. Quindi, da (2.3) ricaviamo che esiste una sottosuccessione di $(\mu_k^{(n)})$ che converge debolmente a una misura di Borel positiva μ^n in $\overline{B}_n$. Mediante un processo di diagonalizzazione, possiamo estrarre una sottosuccessione di (μ_k), che, per semplicità di notazione continueremo a denotare con (μ_k), tale che

$$\mu_k^{(n)} \to \mu^n, \quad \text{per } k \to +\infty,$$

debolmente, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissiamo ora $n \in \mathbb{N}$. Se $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ e $f \geq 0$, allora

$$\int_{\overline{B}_n} f d\mu^n = \lim_{k\to+\infty} \int_{\overline{B}_n} f d\mu_k^{(n)} \leq \lim_{k\to+\infty} \int_{\overline{B}_{n+1}} f d\mu_k^{(n+1)} = \int_{\overline{B}_{n+1}} f d\mu^{n+1}. \tag{2.4}$$

In particolare, vale l'uguaglianza se supp$f \subset B_n$. Se F è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^N$, presa una successione di funzioni positive (f_h) in $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ tale che f_h converge puntualmente a χ_F, allora da (2.4) mediante il teorema di convergenza dominata deduciamo che

$$\begin{aligned}\mu^n(F \cap \overline{B}_n) &= \int_{\overline{B}_n} \chi_F d\mu^n = \lim_{h\to+\infty} \int_{\overline{B}_n} f_h \, d\mu^n \\ &\leq \lim_{h\to+\infty} \int_{\overline{B}_{n+1}} f_h \, d\mu^{n+1} = \mu^{n+1}(F \cap \overline{B}_{n+1}).\end{aligned}$$

In particolare vale l'uguaglianza se $F \subset B_n$. In virtú dell'ultima stima, possiamo definire

$$\mu(F) = \lim_{n\to+\infty} \mu^n(F \cap \overline{B}_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu^n(F \cap \overline{B}_n). \tag{2.5}$$

Osserviamo che se K è un compatto di $\mathbb{R}^N$, allora possiamo scegliere n grande affinché $K \subset B_n$ ed avere

$$\mu(K) = \mu^n(K \cap \overline{B}_n).$$

Si può facilmente verificare che μ è una misura di Borel in $\mathbb{R}^N$ tale che $\mu(\mathbb{R}^N) \leq 1$. Rimane da dimostrare che μ è una misura di probabilità e che (μ_k) converge a μ debolmente. Sia $\varepsilon > 0$. Siccome Λ è tight, esiste $r \in \mathbb{N}$ tale che $\mu_k(\mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_r) < \varepsilon$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Se $n > r$, prendiamo $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$

tale che $0 \le g \le 1$, $g \equiv 1$ in $\overline{B}_n \setminus B_{r+1}$ e supp$g \subset B_{n+1} \setminus \overline{B}_r$. Allora

$$\begin{aligned}
\mu(\overline{B}_n \setminus B_{r+1}) &\le \int_{\mathbb{R}^N} g\, d\mu = \int_{\overline{B}_{n+1}} g\, d\mu^{n+1} \\
&= \lim_{k\to+\infty} \int_{\overline{B}_{n+1}} g\, d\mu_k \le \limsup_{k\to+\infty} \mu_k(\mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_r) \le \varepsilon.
\end{aligned}$$

Mandando $n \to +\infty$ troviamo che $\mu(\mathbb{R}^N \setminus B_{r+1}) \le \varepsilon$. Ora, se $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ risulta

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu_k \right| &\le \left| \int_{\overline{B}_{r+1}} f d\mu - \int_{\overline{B}_{r+1}} f d\mu_k \right| \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_{r+1}} |f| d\mu + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_{r+1}} |f| d\mu_k.
\end{aligned}$$

Infine, scegliamo k grande abbastanza affinché il primo termine al secondo membro sia minore di ε. In questo modo giungiamo a

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu_k \right| \le \varepsilon + 2\|f\|_\infty \varepsilon,$$

da cui l'asserto. In particolare, scegliendo $f \equiv 1$ abbiamo $\mu(\mathbb{R}^N) = 1$.

Viceversa, supponiamo per assurdo che Λ sia relativamente debolmente compatta ma non tight. Quindi, esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $\nu_n \in \Lambda$ con $\nu_n(B_n) \le \nu_n(\overline{B}_n) \le 1 - \varepsilon$. Per compattezza debole, esiste una sottosuccessione (ν_{n_k}) ed esiste $\nu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ tali che ν_{n_k} converge a ν_0 debolmente, per $k \to +\infty$. Dal Lemma 2.8 segue che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\nu_0(B_n) \le \liminf_{k\to+\infty} \nu_{n_k}(B_n) \le \liminf_{k\to+\infty} \nu_{n_k}(B_{n_k}) \le 1 - \varepsilon,$$

che è impossibile dato che $B_n \nearrow \mathbb{R}^N$. $\square$

Questa caratterizzazione è utilizzata nel prossimo teorema per stabilire l'esistenza di una misura invariante.

Teorema 2.10 (Krylov-Bogoliubov). *Assumiamo che per qualche $t_0 > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$ la famiglia $\{\mu_t\}_{t>t_0}$, dove*

$$\mu_t = \frac{1}{t} \int_0^t p(s, x_0, \cdot) ds,$$

sia tight. Allora esiste una misura invariante μ per $(T(t))$.

Dim. Dal Teorema 2.9 segue che esistono una successione (t_n) divergente a $+\infty$ ed una misura di probabilità μ con la proprietà che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f\, d\mu_{t_n} = \int_{\mathbb{R}^N} f\, d\mu,$$

per ogni $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$. Tenendo conto di (1.5), la precedente condizione si riscrive nel modo seguente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} (T(t)f)(x_0)dt = \int_{\mathbb{R}^N} f\, d\mu. \tag{2.6}$$

Posto $f = T(s)g$ abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} (T(t+s)g)(x_0)dt = \int_{\mathbb{R}^N} T(s)g\, d\mu,$$

per ogni $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$. Ora, proviamo che il limite al primo membro è uguale a $\int_{\mathbb{R}^N} g\, d\mu$. Infatti

$$\begin{aligned}\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}(T(t+s)g)(x_0)dt &= \frac{1}{t_n}\int_s^{t_n+s}(T(t)g)(x_0)dt \\ &= \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}(T(t)g)(x_0)dt + \frac{1}{t_n}\int_{t_n}^{t_n+s}(T(t)g)(x_0)dt \\ &\quad -\frac{1}{t_n}\int_0^{s}(T(t)g)(x_0)dt.\end{aligned}$$

Ricordando che il semigruppo $(T(t))$ è contrattivo, si vede immediatamente che gli ultimi due termini sono infinitesimi. D'altra parte, per (2.6), abbiamo che $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}(T(t)g)(x_0)dt = \int_{\mathbb{R}^N} g\, d\mu$. Abbiamo dunque provato (2.1), cioè che μ è una misura invariante per $(T(t))$. □

Il criterio che segue è il piú utile in pratica per stabilire l'esistenza di una misura invariante, perché fornisce una condizione sufficiente che può essere verificata direttamente sull'operatore differenziale. La funzione V, che compare nell'enunciato, è detta *funzione di Lyapunov* per A e la sua esistenza si traduce in sostanza in condizioni di crescita per i coefficienti di A.

Teorema 2.11 (Has'minskii). *Supponiamo che esista* $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$ *tale che* $\lim_{|x|\to+\infty} V(x) = +\infty$ *e* $\lim_{|x|\to+\infty} AV(x) = -\infty$. *Allora* $\lambda - A$ *è iniettivo in* $D_{\max}(A)$ *e* $(T(t))$ *ammette una misura invariante.*

Dim. Proviamo anzitutto che $\lambda - A$ è iniettivo in $D_{\max}(A)$. In virtú della Proposizione 1.18, è sufficiente provare che $T(t)\mathbb{1} = \mathbb{1}$, per ogni $t \geq 0$. A meno di sostituire V con $V + C$, per un'opportuna scelta della costante C, possiamo supporre che $V > 0$ e $AV \leq \lambda V$. Poniamo $u_\varepsilon = e^{-\lambda t}(T(t)\mathbb{1} - \mathbb{1}) + \varepsilon V$. Siccome $T(t)\mathbb{1} - \mathbb{1}$ è limitata in $[0, t_0] \times \mathbb{R}^N$ e V tende a $+\infty$ per $|x| \to +\infty$, risulta che esiste $(t_1, x_1) \in [0, t_0] \times \mathbb{R}^N$ tale che

$$u_\varepsilon(t_1, x_1) = \min_{[0,t_0]\times\mathbb{R}^N} u_\varepsilon(t, x).$$

Assumiamo che $u_\varepsilon(t_1, x_1) < 0$. Allora necessariamente $t_1 > 0$ e, di conseguenza, $\partial_t u_\varepsilon(t_1, x_1) \leq 0$. Inoltre $Au_\varepsilon(t_1, x_1) \geq 0$ (si veda [**28**, Lemma 3.2]), per cui

$$\big((A-\lambda)u_\varepsilon\big)(t_1,x_1) > 0.$$

D'altra parte, come è facile verificare, risulta

$$\partial_t u_\varepsilon = (A-\lambda)u_\varepsilon - \varepsilon(A-\lambda)V \geq (A-\lambda)u_\varepsilon.$$

Valutando la precedente disequazione nel punto (t_1,x_1), si perviene alla stima $\partial_t u_\varepsilon(t_1,x_1) > 0$, che è impossibile. Ne segue che $u_\varepsilon(t_1,x_1) \geq 0$. Ciò implica che

$$e^{-\lambda t}(T(t)\mathbb{1} - \mathbb{1}) + \varepsilon V \geq 0, \quad \text{in } [0,t_0]\times\mathbb{R}^N$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Se $\varepsilon \to 0^+$, abbiamo $T(t)\mathbb{1} - \mathbb{1} \geq 0$ e quindi $T(t)\mathbb{1} - \mathbb{1} = 0$, se $t \in [0,t_0]$, giacché l'altra disuguaglianza è sempre vera. Dall'arbitrarietà di t_0 segue la prima parte dell'asserto.

Siccome $\lim_{|x|\to+\infty} AV = -\infty$, esiste K costante tale che $AV \leq K$ in $\mathbb{R}^N$. Siano $\psi_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tali che

$$\begin{aligned} \psi_n(t) = t, &\quad t \leq n \\ \psi_n \ \text{ è costante in } &[n+1,+\infty) \\ 0 \leq \psi_n' \leq 1, &\quad \psi_n'' \leq 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Osserviamo che $\psi_n \circ V \in D_{\max}(A)$ e poniamo

$$u_n(t,x) = T(t)(\psi_n\circ V)(x), \quad t>0, x\in\mathbb{R}^N.$$

Tenendo conto di (2.7) e della Proposizione 1.16, risulta che

$$\begin{aligned} \partial_t u_n(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^N} p(t,x,y)A(\psi_n\circ V)(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} p(t,x,y)\bigg(\psi_n'(V(y))AV(y) \\ &\qquad\qquad + \psi_n''(V(y))\langle a(y)\nabla V(y), \nabla V(y)\rangle\bigg)dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} p(t,x,y)\psi_n'(V(y))AV(y)dy. \end{aligned}$$

Integrando tra 0 e t abbiamo

$$u_n(t,x) - \psi_n(V(x)) \leq \int_0^t\int_{\mathbb{R}^N} p(s,x,y)\psi_n'(V(y))AV(y)dy\,ds = I_n + J_n,$$

dove

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^t\int_{\{AV\geq 0\}} p(s,x,y)\psi_n'(V(y))AV(y)dy\,ds \\ J_n &= \int_0^t\int_{\{AV<0\}} p(s,x,y)\psi_n'(V(y))AV(y)dy\,ds. \end{aligned}$$

Siccome ψ_n' converge alla funzione $\mathbb{1}$ puntualmente per $n \to +\infty$, e $AV \leq K$, risulta che

$$I_n \longrightarrow \int_0^t \int_{\{AV \geq 0\}} p(s,x,y)AV(y)dy\,ds$$

per convergenza dominata. Per il limite di J_n, osserviamo che la successione ψ_n' è una successione crescente e positiva. Poiché $AV < 0$, abbiamo che $\psi_n'(V(\cdot))AV(\cdot)$ è una successione decrescente e negativa e quindi

$$J_n \longrightarrow \int_0^t \int_{\{AV<0\}} p(s,x,y)AV(y)dy\,ds$$

per convergenza monotona. Infine

$$u_n(t,x) \longrightarrow T(t)V(x)$$

per cui otteniamo

$$T(t)V(x) - V(x) \leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} p(s,x,y)AV(y)dy\,ds \leq K\,t.$$

Siccome $T(t)V \geq 0$, dalla stima precedente discende anche che

$$-\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} p(s,x,y)AV(y)dy\,ds \leq V(x). \tag{2.8}$$

Siano $\varepsilon, R_\varepsilon > 0$ tali che $AV(y) \leq -\varepsilon^{-1}$ per ogni $|y| \geq R_\varepsilon$. Allora, tenendo conto anche di (2.8)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t p(s,x,\mathbb{R}^N \setminus B_{R_\varepsilon})ds &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R_\varepsilon}} p(s,x,y)dy\,ds \\
&\leq -\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R_\varepsilon}} p(s,x,y)AV(y)dy\,ds \\
&= -\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} p(s,x,y)AV(y)dy\,ds \\
&\quad + \int_0^t \int_{B_{R_\varepsilon}} p(s,x,y)AV(y)dy\,ds \\
&\leq V(x) + K\,t.
\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\frac{1}{t}\int_0^t p(s,x,\mathbb{R}^N \setminus B_{R_\varepsilon})ds \leq \varepsilon\frac{V(x)}{t} + \varepsilon K, \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^N, t > 0.$$

Pertanto, comunque vengano fissati $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $t_0 > 0$ la famiglia di misure di probabilità $\{\frac{1}{t}\int_0^t p(s,x_0,\cdot)ds\}_{t \geq t_0}$ è tight. La conclusione segue ora applicando il Teorema 2.10. $\square$

Proposizione 2.12. *Supponiamo che V sia una funzione di Lyapunov. Allora $AV \in L^1(\mu)$.*

Dim. Siano ψ_n le stesse funzioni utilizzate nella dimostrazione del Teorema 2.11. Dato che $\psi_n \circ V \in D_{\max}(A)$, risulta, grazie al Lemma 2.5, che $\int_{\mathbb{R}^N} A(\psi_n \circ V) d\mu = 0$, dove μ è la misura invariante la cui esistenza è garantita proprio dal Teorema 2.11. Fissiamo B_R tale che $AV \le 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus B_R$ e sia M costante tale che $V \le M$ in B_R. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n > M$ si ha

$$-\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} A(\psi_n \circ V) d\mu = \int_{B_R} A(\psi_n \circ V) d\mu = \int_{B_R} AV \, d\mu.$$

D'altra parte, si verifica facilmente che $A(\psi_n \circ V) \le 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus B_R$, per cui

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |A(\psi_n \circ V)| d\mu = -\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} A(\psi_n \circ V) d\mu = \int_{B_R} AV \, d\mu.$$

Il Lemma di Fatou assicura che $\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |AV| d\mu \le \int_{B_R} AV \, d\mu < +\infty$ e l'asserto è provato. $\square$

Vediamo ora che per coefficienti a crescita polinomiale è sempre possibile determinare una funzione di Lyapunov.

Proposizione 2.13. *Supponiamo che $a_{ij} \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$. Se*

$$\limsup_{|x| \to +\infty} |x|^{-\beta} \langle b(x), x \rangle = -C \in [-\infty, 0),$$

per qualche $\beta > 1$, allora $V(x) = e^{\delta |x|^\beta}$ è una funzione di Lyapunov, per ogni $\delta < C(\beta\Lambda)^{-1}$, dove $\Lambda = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \Lambda(x)$, essendo $\Lambda(x)$ il massimo autovalore della matrice $(a_{ij}(x))$. Inoltre, $V \in L^1(\mu)$.

Dim. Facendo i conti esplicitamente si trova che

$$\begin{aligned} AV(x) &= \delta\beta |x|^{\beta-1} e^{\delta|x|^\beta} \Big(|x|^{-1} \mathrm{Tr}(a(x)) + (\beta - 2)|x|^{-3} \langle a(x)x, x \rangle \\ &\quad + \delta\beta |x|^{\beta-3} \langle a(x)x, x \rangle + |x|^{-1} \langle b(x), x \rangle \Big) \end{aligned}$$

da cui, per $|x|$ sufficientemente grande

$$\begin{aligned} AV(x) &\le \delta\beta |x|^{\beta-1} e^{\delta|x|^\beta} \Big(C_1 |x|^{-1} + |\beta - 2| |x|^{-1} \Lambda \Big) \\ &\quad + (\delta\beta)^2 |x|^{2\beta-2} \Lambda e^{\delta|x|^\beta} + \delta\beta |x|^{\beta-2} e^{\delta|x|^\beta} \langle b(x), x \rangle \\ &\le \delta\beta (C_1 + |\beta - 2|\Lambda) |x|^{\beta-2} e^{\delta|x|^\beta} + \delta\beta |x|^{2\beta-2} e^{\delta|x|^\beta} (\delta\beta\Lambda - C) \\ &\le |x|^{2\beta-2} e^{\delta|x|^\beta} \left[\delta\beta(\delta\beta\Lambda - C) + \delta\beta(C_1 + |\beta - 2|\Lambda)|x|^{-\beta} \right] \end{aligned}$$

dove C_1 dipende solo dalla norma del sup dei coefficienti a_{ii}. Siccome $\delta\beta\Lambda - C < 0$, risulta che $AV \to -\infty$, per $|x| \to +\infty$, quindi V è una funzione di Lyapunov.

Per la seconda parte dell'asserto, osserviamo che dalla Proposizione 2.12 $AV \in L^1(\mu)$. Inoltre, per R abbastanza grande, $AV(x) \le 0$, se $|x| \ge R$, per cui

$$\begin{aligned} |AV(x)| &= -AV(x) \\ &\ge |x|^{2\beta-2}e^{\delta|x|^\beta}\left[\delta\beta(C-\delta\beta\Lambda)-\delta\beta(C_1+|\beta-2|\Lambda)|x|^{-\beta}\right] \\ &\ge e^{\delta|x|^\beta}=V(x). \end{aligned}$$

Ne segue che $V \in L^1(\mu)$. □

2.2. Regolarità della misura invariante

Supponiamo che il semigruppo $(T(t))$ abbia una misura invariante μ. Per quanto osservato nella sezione precedente, tale misura è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue, per cui possiamo scrivere $\mu = \varrho dx$. In questa sezione ci proponiamo di far vedere che $\varrho \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Per questo scopo, in virtú del metodo impiegato, è conveniente scrivere l'operatore A, generatore debole di $(T(t))$, in forma di divergenza

$$A = \mathrm{div}(a\nabla) + \langle b, \nabla\rangle = \sum_{i,j} D_i(a_{ij}D_j) + \sum_i b_i D_i$$

e supporre che $a = (a_{ij})$ sia simmetrica con $a_{ij} \in \mathcal{C}^{1+\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}^1_b(\mathbb{R}^N)$, $b_i \in \mathcal{C}^\alpha_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ e che valga la condizione di ellitticità uniforme

$$\langle a(x)\xi, \xi\rangle \ge \lambda|\xi|^2, \quad \forall\, x, \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Notiamo che in quest'ambito, le ipotesi di regolarità per i coefficienti di A sono piú forti di quelle delle sezioni precedenti. La scrittura dell'operatore A in forma di divergenza è equivalente a quella data in (1.1) nel caso in cui i coefficienti a_{ij} siano di classe $\mathcal{C}^1$.

Richiamiamo un risultato di regolarità locale per ϱ (si vedano [**8**, Teorema 2.1, Corollario 2.10]).

Teorema 2.14. *Si ha che $\varrho \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ per ogni $p \in (1, +\infty)$ e $\varrho > 0$; in particolare, ϱ è continua.*

Dim. Procediamo per passi.
Passo 1: Proviamo che $\varrho \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, per ogni $p < N/(N-1)$. Dal Lemma 2.5(ii), abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}D_{ij}\phi\, d\mu = -\int_{\mathbb{R}^N}\sum_{i=1}^N \tilde{b}_i D_i\phi\, d\mu, \qquad \phi \in \mathcal{C}^2_c(\mathbb{R}^N), \tag{2.1}$$

dove $\tilde{b}_i = b_i + \sum_{j=1}^N D_i a_{ij}$, $i = 1, \ldots, N$. Fissiamo $R > 0$ e sia $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $\chi_{B_{R/2}} \leq \theta \leq \chi_{B_R}$. Riscrivendo (2.1) per $\phi = \vartheta\psi$, con $\psi \in \mathcal{C}^2(\overline{B}_R)$ troviamo

$$\begin{aligned}
\left| \int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij}\psi\, \vartheta \, d\mu \right| &\leq 2 \left| \int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_i\psi D_j\vartheta \, d\mu \right. \\
&\quad + \int_{B_R} \psi \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij}\vartheta \, d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \sum_{i=1}^N \tilde{b}_i D_i\psi \, d\mu \\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^N} \psi \sum_{i=1}^N \tilde{b}_i D_i\vartheta \, d\mu \right| \\
&\leq c_1 \|\psi\|_{\mathcal{C}^1(B_R)}, \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

dove c_1 è una costante positiva che dipende da R ma non da ψ. Sia ora $f \in \mathcal{C}_c^\infty(B_R)$. Per [**18**, Teorema 6.14, Lemma 9.17], il problema

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u = f, & \text{in } B_R \\ u = 0, & \text{su } \partial B_R, \end{cases} \qquad (2.3)$$

ammette un'unica soluzione $u \in \mathcal{C}^2(\overline{B}_R)$ con

$$\|u\|_{W^{2,q}(B_R)} \leq c_2 \|f\|_{L^q(B_R)},$$

per ogni $q > N$, con c_2 costante positiva dipendente da q, R ma non da f. Grazie al teorema di immersione per spazi di Sobolev [**1**, Teorema 5.4], ricaviamo che

$$\|u\|_{\mathcal{C}^1(\overline{B}_R)} \leq c_3 \|f\|_{L^q(B_R)},$$

con c_3 indipendente da f. Quindi, scegliendo $\psi = u$ in (2.2) otteniamo

$$\left| \int_{B_R} f \vartheta \varrho \, dx \right| \leq c_1 c_3 \|f\|_{L^q(B_R)}.$$

Dall'arbitrarietà di $f \in \mathcal{C}_c^\infty(B_R)$ e $q > N$ deduciamo che la funzione $\varrho\vartheta$ appartiene a $L^p(B_R)$ per ogni $p \in [1, N/(N-1)[$. Siccome $\varrho\vartheta = \varrho$ in $B_{R/2}$ ed R era arbitrario, la prima parte è provata.

Passo 2: Ci proponiamo di mostrare ora che $\varrho \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, per ogni $p \in (1, N/(N-1))$. Fissiamo dunque $p \in (1, N/(N-1))$ e $M \in \mathbb{N}$. Per ogni $x_0 \in \overline{B}_M$ ed $R > 0$ prendiamo due funzioni $\eta, \psi \in \mathcal{C}^2(\overline{B_R(x_0)})$ tali che $\chi_{B_{R/2}(x_0)} \leq \eta \leq \chi_{B_R(x_0)}$ e $\psi = 0$ su $\partial B_R(x_0)$. Facciamo vedere che è possibile scegliere R abbastanza piccolo (e dipendente solo da M) tale che $\varrho \in W^{1,p}(B_{R/2}(x_0))$, per ogni $x_0 \in B_M$. L'arbitrarietà di $x_0 \in B_M$ e di $M > 0$ implicherà poi che $\varrho \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$.

Non è restrittivo assumere che $R < 1$. Scrivendo (2.1) con $\phi = \psi\eta$, otteniamo

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{B_R(x_0)} \eta \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij}\psi \, d\mu\Big| \\
&\leq 2\Big|\int_{B_R(x_0)} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_i\psi D_j\eta \, d\mu\Big| + \Big|\int_{B_R(x_0)} \psi \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij}\eta \, d\mu\Big| \\
&\quad + \Big|\int_{B_R(x_0)} \eta \sum_{i=1}^{N} \tilde{b}_i D_i\psi \, d\mu\Big| + \Big|\int_{B_R(x_0)} \psi \sum_{i=1}^{N} \tilde{b}_i D_i\eta \, d\mu\Big| \\
&\leq c_4 \int_{B_R(x_0)} (|\psi| + |\nabla\psi|) \, d\mu \\
&\leq c_5 \|\nabla\psi\|_{L^{p/(p-1)}(B_R(x_0))},
\end{aligned} \tag{2.4}$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo usato la disuguaglianza di Hölder, grazie al fatto che $\varrho \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, e poi la disuguaglianza di Poincaré. Qui $c_4, c_5 > 0$ sono costanti opportune dipendenti da $R, M > 0$ e dalla norma del sup dei coefficienti dell' operatore A in B_{M+1}, ma non da ψ né da x_0. Per ogni scelta delle funzioni $f_i \in \mathcal{C}^\infty_c(B_R(x_0))$, $i = 1, \ldots, N$, denotiamo con $u \in \mathcal{C}^2(\overline{B_R(x_0)})$ la soluzione del problema ellittico (2.3) con $\sum_{i=1}^N D_i f_i$ al posto di f. Prendendo $\psi = u$ in (2.4), otteniamo

$$\Big|\int_{B_R(x_0)} \eta \sum_{i=1}^{N} D_i f_i \, d\mu\Big| \leq c_5 \|Du\|_{L^{p/(p-1)}(B_R(x_0))}. \tag{2.5}$$

Proviamo che

$$\|Du\|_{L^{p/(p-1)}(B_R(x_0))} \leq c_6 \sum_{i=1}^{N} \|D_i f_i\|_{W^{-1,p/(p-1)}(B_R(x_0))}, \tag{2.6}$$

per qualche costante positiva c_6, indipendente da R, x_0 e f, purché R sia sufficientemente piccolo. Abbiamo denotato con $W^{-1,p/(p-1)}(B_R(x_0))$ lo spazio duale di $W^{1,p}_0(B_R(x_0))$. Infatti, dalle stime (2.5), (2.6) discende immediatamente che $\eta\varrho \in W^{1,p}_0(B_R(x_0))$ e quindi, dato che $\eta = 1$ in $B_{R/2}(x_0)$, che $\varrho \in W^{1,p}_0(B_{R/2}(x_0))$.

D'ora in avanti indicheremo con c_j delle costanti positive dipendenti da M ma indipendenti da x_0, R, f. Per provare (2.6), cominciamo ad osservare intanto che, siccome

$$\sum_{i,j=1}^{N} D_i(a_{ij} D_j u) = \sum_{i=1}^{N} D_i f_i + \sum_{i,j=1}^{N} D_i a_{ij} D_j u =: g_1 + g_2,$$

abbiamo

$$\begin{aligned}&\|Du\|_{L^{p/(p-1)}(B_R(x_0))}\\&\le c_7(\|g_1\|_{W^{-1,p/(p-1)}(B_R(x_0))}+\|g_2\|_{W^{-1,p/(p-1)}(B_R(x_0))}),\end{aligned}\tag{2.7}$$

(si veda ad esempio [**17**, Sezione 4.3]). Per stimare g_2, osserviamo che, siccome $p<N$, allora $L^{pN/(N(p-1)+p)}(B_R(x_0))\subset W^{-1,p/(p-1)}(B_R(x_0))$ e

$$\|k\|_{W^{-1,p/(p-1)}(B_R(x_0))}\le c_8\|k\|_{L^{pN/(N(p-1)+p)}(B_R(x_0))},$$

per ogni $k\in W^{-1,p/(p-1)}(B_R(x_0))$. Quindi

$$\begin{aligned}\|g_2\|_{W^{-1,p/(p-1)}(B_R(x_0))} &\le c_9\|g_2\|_{L^{pN/(N(p-1)+p)}(B_R(x_0))}\\&\le c_{10}\|h\|_{L^N(B_R(x_0))}\|Du\|_{L^{p/(p-1)}(B_R(x_0))}\\&\le c_{11}R\|h\|_{L^\infty(B_{M+1})}\|Du\|_{L^{p/(p-1)}(B_R(x_0))},\end{aligned}\tag{2.8}$$

dove $h^2=\sum_{i,j=1}^N|D_ia_{ij}|^2$. Da (2.7) e (2.8) ricaviamo

$$\begin{aligned}&\|Du\|_{L^{p/(p-1)}(B_R(x_0))}\\&\le c_{12}(R\|Du\|_{L^{p/(p-1)}(B_R(x_0))}+\|g_1\|_{W^{-1,p/(p-1)}(B_R(x_0))}).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Prendendo R piccolo, otteniamo (2.6).

Passo 3: Concludiamo ora la dimostrazione con un argomento standard di “bootstrap”. Siccome $\varrho\in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ per ogni $p\in[1,N/(N-1))$, i teoremi di immersione di Sobolev implicano che $\varrho\in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ per ogni $p\in[1,N/(N-2))$. Ripetendo il ragionamento del Passo 2, otteniamo così che $\varrho\in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ per ogni $p\in[1,N/(N-2))$. Iterando questo procedimento otteniamo che $\varrho\in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ per ogni $p\in[1,+\infty)$. Notiamo infine che possiamo adattare le argomentazioni del Passo 2 per provare che $\varrho\in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, anche per $p>N$. Occorre giusto modificare la stima (2.8). A tal proposito, osserviamo che se $p>N$, allora $L^1(B_R(x_0))$ si immerge con continuità in $W^{-1,p/(p-1)}(B_R(x_0))$ e

$$\|k\|_{W^{-1,p/(p-1)}(B_R(x_0))}\le c_{13}R^{(p-N)/p}\,\|k\|_{L^1(B_R(x_0))},$$

per ogni $k\in W^{-1,p/(p-1)}(B_R(x_0))$. Pertanto in tal caso abbiamo

$$\begin{aligned}\|g_2\|_{W^{-1,p/(p-1)}(B_R(x_0))} &\le c_{14}R^{(p-N)/p}\|g_2\|_{L^1(B_R(x_0))}\\&\le c_{15}R^{(p-N)/p}\|h\|_{L^p(B_R(x_0))}\|Du\|_{L^{p/(p-1)}(B_R(x_0))}\\&\le c_{15}R\|h\|_{L^\infty(B_{M+1})}\|Du\|_{L^{p/(p-1)}(B_R(x_0))}.\end{aligned}$$

Prendendo R piccolo, otteniamo (2.6) anche in questo caso e quindi $\varrho\in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. $\square$

TEOREMA 2.15. *Se $b\in L^2(\mu)$, allora $\sqrt{\varrho}\in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho}dx\le\frac{1}{\lambda^2}\int_{\mathbb{R}^N}|b|^2\varrho dx.\tag{2.10}$$

Dim. Dal Lemma 2.5, ricaviamo che

$$\int_{\mathbb{R}^N} A\varphi\varrho\, dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Dato che A è in forma di divergenza e ϱ è localmente regolare (per il Teorema 2.14), integrando per parti abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \langle a\nabla\varphi, \nabla\varrho\rangle dx = \int_{\mathbb{R}^N} \langle b, \nabla\varphi\rangle \varrho dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{2.11}$$

Procedendo formalmente prendiamo $\varphi = \log\varrho$ e applicando la disuguaglianza di Hölder troviamo

$$\begin{aligned}
\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho} dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\langle a\nabla\varrho, \nabla\varrho\rangle}{\varrho} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \langle b, \nabla\varrho\rangle dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |b||\nabla\varrho| dx = \int_{\mathbb{R}^N} |b|\varrho^{1/2} \frac{|\nabla\varrho|}{\varrho^{1/2}} dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |b|^2 \varrho\, dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho} dx\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

da cui la stima desiderata

$$\lambda^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |b|^2 \varrho\, dx.$$

Tuttavia, la funzione $\log\varrho$ non è a supporto compatto e non è sommabile su $\mathbb{R}^N$, quindi non può essere scelta come funzione test. Vediamo dunque come superare questa difficoltà. Osserviamo anzitutto che l'identità (2.11) può essere estesa ad ogni $\varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ con supporto compatto, per densità. Consideriamo poi una funzione cut-off $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $\eta(x) \equiv 1$ per $|x| \leq 1$, $\eta(x) \equiv 0$ per $|x| \geq 2$ e $|\nabla\eta| \leq 2$; poniamo quindi

$$\eta_n(x) = \eta\left(\frac{x}{n}\right), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Fissati poi $0 < \varepsilon < k$ con $k \in \mathbb{N}$, definiamo la funzione di $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e a supporto compatto

$$\varphi = \eta_n^2 \log((\varrho \vee \varepsilon) \wedge k).$$

Con questa scelta di φ si ha che

$$\nabla\varphi = \eta_n^2 \frac{\nabla\varrho}{\varrho} \chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}} + 2\eta_n \log((\varrho \vee \varepsilon) \wedge k)\nabla\eta_n.$$

Quindi l'equazione (2.11) diventa

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\eta_n^2\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\frac{\langle a\nabla\varrho,\nabla\varrho\rangle}{\varrho} &= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N}\eta_n^2\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\langle b,\nabla\varrho\rangle}_{\mathrm{I}_n}\\ &\quad\underbrace{+\,2\int_{\mathbb{R}^N}\eta_n\log((\varrho\vee\varepsilon)\wedge k)\langle b,\nabla\eta_n\rangle\varrho}_{\mathrm{II}_n}\\ &\quad\underbrace{-2\int_{\mathbb{R}^N}\eta_n\log((\varrho\vee\varepsilon)\wedge k)\langle a\nabla\varrho,\nabla\eta_n\rangle}_{\mathrm{III}_n}\end{aligned} \tag{2.12}$$

Utilizzando la disuguaglianza di Hölder, si ricava che

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_n &\le \left(\int_{\mathbb{R}^N}\eta_n^2\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho}dx\right)^{\frac12}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|b|^2\varrho dx\right)^{\frac12}\\ &\le \delta\int_{\mathbb{R}^N}\eta_n^2\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho}dx+\frac{1}{4\delta}\int_{\mathbb{R}^N}|b|^2\varrho dx\\ &\le \frac{\delta}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^N}\eta_n^2\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\frac{\langle a\nabla\varrho,\nabla\varrho\rangle}{\varrho}dx+\frac{\|b\|^2_{L^2(\mu)}}{4\delta}\end{aligned} \tag{2.13}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo utilizzato la disuguaglianza

$$ab\le\delta a^2+\frac{1}{4\delta}b^2$$

valida per ogni $a,b\in\mathbb{R}$ e $\delta>0$. Tenendo invece presente che $|\nabla\eta_n|\le 2/n$, e che $|\log((\varrho\vee\varepsilon)\wedge k)|\le c(\varepsilon,k)$ con $c(\varepsilon,k)$ costante dipendente solo da ε e k, si ha che

$$\mathrm{II}_n\le\frac{c(\varepsilon,k)}{n}\int_{\mathbb{R}^N}|b|\,\varrho\,dx\le\frac{c(\varepsilon,k)}{n}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|b|^2\varrho\,dx\right)^{\frac12}, \tag{2.14}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue da quella di Hölder e dal fatto che μ è una misura di probabilità. Inoltre, per quanto riguarda III_n, grazie alla simmetria di a e con una integrazione per parti si ottiene che

$$
\begin{aligned}
\mathrm{III}_n &= 2\int_{\mathbb{R}^N} \varrho \operatorname{div}\left(\eta_n \log((\varrho \vee \varepsilon)\wedge k) a\nabla\eta_n\right) dx \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^N} \varrho \log((\varrho \vee \varepsilon)\wedge k)\langle a\nabla\eta_n, \nabla\eta_n\rangle\, dx \\
&\quad +2\int_{\mathbb{R}^N} \eta_n \chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\langle a\nabla\eta_n, \nabla\varrho\rangle\, dx \\
&\quad +2\int_{\mathbb{R}^N} \varrho\, \eta_n \log((\varrho \vee \varepsilon)\wedge k)\sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij}\eta_n\, dx \\
&\quad +2\int_{\mathbb{R}^N} \varrho\, \eta_n \log((\varrho \vee \varepsilon)\wedge k)\sum_{i,j=1}^N D_i a_{ij} D_j\eta_n\, dx.
\end{aligned}
$$

Tenendo quindi presente che $a_{ij} \in \mathcal{C}^1_b(\mathbb{R}^N)$ e che $|D_{ij}\eta_n| \leq 4/n^2$, grazie alla disuguaglianza di Cauchy–Schwarz

$$
|\langle a\nabla\eta_n, \nabla\varrho\rangle| \leq \langle a\nabla\eta_n, \nabla\eta_n\rangle^{1/2}\langle a\nabla\varrho, \nabla\varrho\rangle^{1/2}
$$

si ottiene che

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{III}_n| &\leq c(\varepsilon, k)\left(\frac{\|a\|_\infty}{n^2} + \frac{\|Da\|_\infty}{n}\right)\int_{\mathbb{R}^N} \varrho dx \\
&\quad +2\int_{\mathbb{R}^N} \eta_n \chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\langle a\nabla\eta_n, \nabla\eta_n\rangle^{\frac{1}{2}}\langle a\nabla\varrho, \nabla\varrho\rangle^{\frac{1}{2}} dx \\
&\leq c(\varepsilon, k, n) \\
&\quad +2\left(\int_{\mathbb{R}^N} \eta_n^2 \chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\frac{\langle a\nabla\varrho, \nabla\varrho\rangle}{\varrho} dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\langle a\nabla\eta_n, \nabla\eta_n\rangle\varrho dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c(\varepsilon, k, n) + \frac{1}{\delta}\int_{\mathbb{R}^N}\langle a\nabla\eta_n, \nabla\eta_n\rangle\varrho dx \\
&\quad +\delta\int_{\mathbb{R}^N} \eta_n^2 \chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\frac{\langle a\nabla\varrho, \nabla\varrho\rangle}{\varrho} dx \\
&\leq c(\varepsilon, k, n) + \frac{\|a\|_\infty}{\delta n^2}\int_{\mathbb{R}^N}\varrho\, dx + \delta\int_{\mathbb{R}^N} \eta_n^2 \chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\frac{\langle a\nabla\varrho, \nabla\varrho\rangle}{\varrho} dx \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

dove abbiamo posto

$$
c(\varepsilon, k, n) = c(\varepsilon, k)\Big(\frac{\|a\|_\infty}{n^2} + \frac{\|Da\|_\infty}{n}\Big) \to 0, \quad \text{per } n \to +\infty.
$$

Inserendo questa stima di III_n in (2.12), utilizzando le (2.13) e (2.14), si ottiene che

$$
\begin{aligned}
\Big(1 - \delta - \frac{\delta}{\lambda}\Big)\int_{\mathbb{R}^N} \eta_n^2 \chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\frac{\langle a\nabla\varrho, \nabla\varrho\rangle}{\varrho} dx &\leq c(\varepsilon, k, n) + \frac{\|b\|^2_{L^2(\mu)}}{4\delta} \\
&\quad + \frac{c(\varepsilon, k)\|b\|_{L^2(\mu)}}{n} + \frac{\|a\|_\infty}{\delta n^2}.
\end{aligned}
$$

A questo punto bisogna scegliere opportunamente δ; se ad esempio prendiamo δ in modo che $1-\delta-\frac{\delta}{\lambda}=\frac{1}{2}$, si ricava la stima

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\eta_n^2\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\frac{\langle a\nabla\varrho,\nabla\varrho\rangle}{\varrho}dx &\leq c(\varepsilon,k,n)+\frac{\lambda+1}{2\lambda}\|b\|^2_{L^2(\mu)}\\ &\quad +\frac{c(\varepsilon,k)}{n}\|b\|_{L^2(\mu)}+\frac{\|a\|_\infty}{n^2}\frac{2(\lambda+1)}{\lambda},\end{aligned}$$

da cui, al limite per $n\to+\infty$, otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^N}\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\frac{\langle a\nabla\varrho,\nabla\varrho\rangle}{\varrho}dx\leq\frac{\lambda+1}{2\lambda}\|b\|^2_{L^2(\mu)}.$$

Ne segue, in particolare, mandando $\varepsilon\to 0, k\to+\infty$, che la funzione $\frac{\langle a\nabla\varrho,\nabla\varrho\rangle}{\varrho}$ è sommabile in $\mathbb{R}^N$. Tornando a (2.15) e mandando $n\to+\infty$, $\varepsilon\to 0$ e $k\to+\infty$, troviamo

$$\limsup_{n\to+\infty}|\mathrm{III}_n|\leq\delta\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\langle a\nabla\varrho,\nabla\varrho\rangle}{\varrho}dx,$$

e quindi, dato che δ è arbitrario,

$$\lim_{n\to+\infty}|\mathrm{III}_n|=0.$$

In definitiva, tornando alla stima (2.12), si ottiene che al limite per $n\to+\infty$, $\varepsilon\to 0$ e $k\to+\infty$

$$\begin{aligned}\lambda\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho}dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N}\frac{\langle a\nabla\varrho,\nabla\varrho\rangle}{\varrho}dx\\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho}dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|b|^2\varrho\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

da cui la (2.10) e quindi il fatto che $\sqrt{\varrho}\in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. □

Una conseguenza immediata del precedente teorema è data dal seguente corollario.

Corollario 2.16. *Se $b\in L^2(\mu)$ allora $\varrho\in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$. Inoltre per $N>2$ risulta $\varrho\in L^{\frac{N}{N-2}}(\mathbb{R}^N)$ e $\varrho\in L^p(\mathbb{R}^N)$ per ogni $p\in[1,+\infty)$ se $N=2$.*

Dim. Per dimostrare che $\varrho\in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$, dato che $d\mu=\varrho dx$ è una misura di probabilità, basta notare che dalla disuguaglianza di Hölder e dal Teorema 2.15 segue che

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varrho|dx = \int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\nabla\varrho|}{\sqrt{\varrho}}\sqrt{\varrho}dx\leq\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho}dx\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty.$$

La seconda parte segue invece dalle immersioni di Sobolev

$$W^{1,2}(\mathbb{R}^N)\subset L^{\frac{2N}{N-2}}(\mathbb{R}^N),\quad \text{se } N>2$$
$$W^{1,2}(\mathbb{R}^N)\subset L^p(\mathbb{R}^N),\quad \forall p\in[1,+\infty),\ \text{se } N=2,$$

tenuto conto del fatto che $\sqrt{\varrho} \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. □

Il prossimo lemma è cruciale nel metodo iterativo di Moser che ci permetterà di provare che $\varrho \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

LEMMA 2.17. *Supponiamo che $b \in L^k(\mu)$ con $k > 2$ e sia $\beta > 0$ fissato; se $\varrho \in L^{\frac{\beta k}{k-2}+1}(\mathbb{R}^N)$, allora*

$$\lambda^2 \int_{\mathbb{R}^N} \varrho^{\beta-1} |\nabla \varrho|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |b|^2 \varrho^{\beta+1} dx < +\infty. \tag{2.16}$$

DIM. Osserviamo innanzitutto che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |b|^2 \varrho^{\beta+1} &= \int_{\mathbb{R}^N} |b|^2 \varrho^{2/k} \varrho^{\beta+1-2/k} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |b|^k \varrho \right)^{2/k} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varrho^{\beta \frac{k}{k-2}+1} \right)^{1-2/k} < \infty. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Ripetiamo la stessa strategia e usiamo le stesse notazioni della dimostrazione del Teorema 2.15 introducendo le funzioni $\phi = \eta_n^2((\varrho \vee \varepsilon) \wedge k)^\beta$ nell'equazione

$$\int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_i \varrho D_j \phi = \int_{\mathbb{R}^N} \langle b, \nabla \phi \rangle \, \varrho.$$

Osservato che $\nabla((\varrho \vee \varepsilon) \wedge k)^\beta = \beta \varrho^{\beta-1} \nabla \varrho \chi_{\{\varepsilon < \varrho < k\}}$, si ha che

$$\begin{aligned} \beta \int_{\mathbb{R}^N} \eta_n^2 \varrho^{\beta-1} \chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}} \langle a \nabla \varrho, \nabla \varrho \rangle &= -2 \int_{\mathbb{R}^N} \eta_n ((\varrho \vee \varepsilon) \wedge k)^\beta \langle a \nabla \varrho, \nabla \eta_n \rangle \\ &\quad + \beta \int_{\mathbb{R}^N} \eta_n^2 \varrho^\beta \chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}} \langle b, \nabla \varrho \rangle \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{R}^N} \eta_n \varrho ((\varrho \vee \varepsilon) \wedge k)^\beta \langle b, \nabla \eta_n \rangle \\ &=: I_n + J_n + K_n. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Per quanto riguarda J_n, abbiamo che

$$\begin{aligned} |J_n| &\leq \beta \int_{\mathbb{R}^N} \eta_n^2 \varrho^{(\beta-1)/2} \chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}} \varrho^{(\beta+1)/2} |b| |\nabla \varrho| \\ &\leq \beta \left(\int_{\mathbb{R}^N} \eta_n^2 \varrho^{\beta-1} \chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}} |\nabla \varrho|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |b|^2 \varrho^{\beta+1} \right)^{1/2}. \\ |K_n| &\leq \frac{2k^\beta}{n} \int_{\mathbb{R}^N} |b| \varrho. \end{aligned}$$

Osserviamo che $K_n \to 0$, per $n \to \infty$, grazie al fatto che $b \in L^1(\mu)$. Per quanto riguarda I_n, lo stimiamo come nel Teorema 2.15. Con una integrazione per parti si ottiene che

$$\begin{aligned} I_n &= 2\int_{\mathbb{R}^N} \varrho\Big(((\varrho\vee\varepsilon)\wedge k)^\beta\langle a\nabla\eta_n,\nabla\eta_n\rangle + \eta_n((\varrho\vee\varepsilon)\wedge k)^\beta\sum_{i,j=1}^N a_{ij}D_{ij}\eta_n \\ &\quad +((\varrho\vee\varepsilon)\wedge k)^\beta\eta_n\sum_{i,j=1}^N D_i a_{ij}D_j\eta_n + \beta\eta_n\varrho^{\beta-1}\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\langle a\nabla\varrho,\nabla\eta_n\rangle\Big). \end{aligned}$$

Tenendo presente che $|\nabla\eta_n|\le 2/n$, e che $|D_{ij}\eta_n|\le 4/n^2$, si ottiene dalle disuguaglianze di Cauchy-Schwarz e Hölder

$$\begin{aligned} |I_n| &\le \omega(\varepsilon,k,n) \\ &\quad +\beta\left(\int_{\mathbb{R}^N}\eta_n^2\varrho^{\beta-1}\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\langle a\nabla\varrho,\nabla\varrho\rangle\right)^{1/2}\times \\ &\quad \left(\int_{\mathbb{R}^N}\varrho^{\beta+1}\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\langle a\nabla\eta_n,\nabla\eta_n\rangle\right)^{1/2} \\ &\le \omega(\varepsilon,k,n)(1+\delta^{-1}) + \delta\int_{\mathbb{R}^N}\eta_n^2\varrho^{\beta-1}\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\langle a\nabla\varrho,\nabla\varrho\rangle \end{aligned}$$

per ogni $\delta>0$ e con $\omega(\varepsilon,k,n)\to 0$, per $n\to\infty$ con ε,k fissati. Quindi,

$$\begin{aligned} \beta\int_{\mathbb{R}^N}\eta_n^2\varrho^{\beta-1}\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\langle a\nabla\varrho,\nabla\varrho\rangle &\le \beta\left(\int_{\mathbb{R}^N}\eta_n^2\varrho^{\beta-1}\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}|\nabla\varrho|^2\right)^{1/2}\times \\ &\quad \left(\int_{\mathbb{R}^N}|b|^2\varrho^{\beta+1}\right)^{1/2} + K_n \\ &\quad +\omega(\varepsilon,k,n)(1+\delta^{-1}) \\ &\quad +\delta\int_{\mathbb{R}^N}\eta_n^2\varrho^{\beta-1}\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\langle a\nabla\varrho,\nabla\varrho\rangle, \end{aligned}$$

per ogni $\delta>0$. Grazie all'ellitticità di a, otteniamo come nel Teorema 2.15, che

$$\int_{\mathbb{R}^N}\varrho^{\beta-1}\langle a\nabla\varrho,\nabla\varrho)\rangle < +\infty.$$

Quindi, $I_n\to 0$, per $n\to\infty$. Tornando alla stima (2.18), si ottiene che al limite per $n\to\infty$, vale la stima

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N}\varrho^{\beta-1}\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\langle a\nabla\varrho,\nabla\varrho\rangle &\le \left(\int_{\mathbb{R}^N}\varrho^{\beta-1}\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}|\nabla\varrho|^2\right)^{1/2}\times \\ &\quad \left(\int_{\mathbb{R}^N}|b|^2\varrho^{\beta+1}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

In definitiva, quando $\varepsilon \to 0$, $k \to \infty$, si conclude che

$$\begin{aligned}\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \varrho^{\beta-1}|\nabla\varrho|^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \varrho^{\beta-1}\langle a\nabla\varrho, \nabla\varrho\rangle \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varrho^{\beta-1}|\nabla\varrho|^2\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |b|^2\varrho^{\beta+1}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

$\square$

Conseguenza di questo lemma è il seguente corollario.

COROLLARIO 2.18. *Sia $b \in L^k(\mu)$ con $k > 2$ e sia $\beta > 0$ fissato; se $\varrho \in L^{\frac{\beta k}{k-2}+1}(\mathbb{R}^N)$ allora $\varrho^{\frac{\beta+1}{2}} \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e vale la stima*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\varrho^{\frac{\beta+1}{2}})|^2 \leq \left(\frac{\beta+1}{2\lambda}\right)^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |b|^k\varrho dx\right)^{\frac{2}{k}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varrho^{\frac{\beta k}{k-2}+1}dx\right)^{1-\frac{2}{k}}.$$

DIM. La dimostrazione segue notando che

$$\nabla(\varrho^{\frac{\beta+1}{2}}) = \frac{\beta+1}{2}\varrho^{\frac{\beta-1}{2}}\nabla\varrho,$$

per cui, utilizzando la formula (2.16) e la successiva (2.17)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\varrho^{\frac{\beta+1}{2}})|^2dx &= \left(\frac{\beta+1}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \varrho^{\beta-1}|\nabla\varrho|^2dx \\ &\leq \left(\frac{\beta+1}{2\lambda}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^N} |b|^2\varrho^{\beta+1}dx \\ &\leq \left(\frac{\beta+1}{2\lambda}\right)^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |b|^k\varrho dx\right)^{\frac{2}{k}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varrho^{\frac{\beta k}{k-2}+1}dx\right)^{1-\frac{2}{k}}.\end{aligned}$$

$\square$

A questo punto, osserviamo che dal Corollario 2.16 segue che, se $N > 2$, $\varrho \in L^{\frac{N}{N-2}}(\mathbb{R}^N)$ cioè, se $k > 2$, $\varrho \in L^{\frac{\beta k}{k-2}+1}$ con $\beta = \frac{2(k-2)}{k(N-2)} > 0$. Dal Corollario 2.18, se $b \in L^k(\mu)$, si ha che $\varrho^{(\beta+1)/2} \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \subset L^{2N/(N-2)}(\mathbb{R}^N)$, cioè $\varrho \in L^{(\beta+1)N/(N-2)}(\mathbb{R}^N)$ con $(\beta+1)N/(N-2) > N/(N-2)$; questo implica una maggior sommabilità di ϱ. Iterando questa procedura, è possibile arrivare a dimostrare la limitatezza di ϱ. Formalizziamo questo discorso nel seguente teorema, che rappresenta il risultato principale di questa sezione.

TEOREMA 2.19. *Sia $b \in L^k(\mu)$ con $k > N$; allora $\varrho \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.*

DIM. Supponiamo $N > 2$; se $\varrho \in L^{\frac{\beta k}{k-2}+1}$ con $\beta > 0$, allora grazie al Corollario 2.18 e all'immersione di Sobolev sappiamo che $\varrho^{\frac{\beta+1}{2}} \in L^{\frac{2N}{N-2}}(\mathbb{R}^N)$

e

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \varrho^{\frac{N(\beta+1)}{N-2}} dx\right)^{\frac{N-2}{2N}} &\leq C_N \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\varrho^{\frac{\beta+1}{2}})|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_N \frac{\beta+1}{2\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |b|^k \varrho dx\right)^{\frac{1}{k}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varrho^{\frac{\beta k}{k-2}+1} dx\right)^{\frac{k-2}{2k}} \quad (2.19)\end{aligned}$$

Poniamo

$$\gamma = \frac{\beta k}{k-2} + 1, \quad \vartheta = \frac{N}{N-2}\frac{k-2}{k}$$

e osserviamo che $\vartheta > 1$, in quanto $k > N$. Inoltre

$$\frac{(\beta+1)N}{N-2} = \vartheta\left(\gamma + \frac{2}{k-2}\right) > \gamma + \frac{2\vartheta}{k-2}.$$

Se definiamo quindi per ricorrenza

$$\begin{cases} \gamma_0 = \dfrac{N}{N-2} \\ \\ \gamma_{n+1} = \vartheta\left(\gamma_n + \dfrac{2}{k-2}\right) \end{cases},$$

la successione γ_n tende a $+\infty$ per $n \to +\infty$, giacché $\gamma_{n+1} \geq \vartheta^{n+1}\gamma_0$ e, se definiamo

$$\beta_n = \frac{k-2}{k}(\gamma_n - 1) > 0$$

in modo da avere $\beta_n \frac{k}{k-2} + 1 = \gamma_n$, otteniamo che

$$\beta_n + 1 = \gamma_{n+1}\frac{N-2}{N}. \quad (2.20)$$

Quindi, usando la notazione

$$\|\cdot\|_n = \|\cdot\|_{L^{\gamma_n}(\mathbb{R}^N)}$$

e iterando la stima (2.19) troviamo

$$\|\varrho\|_{n+1}^{\gamma_{n+1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N}\right)} \leq C_N\left(\frac{\beta_n+1}{2\lambda}\right)\|\varrho\|_n^{\gamma_n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{k}\right)}\|b\|_{L^k(\mu)}$$

cioè, tenendo presente (2.20) e le definizioni di ϑ e γ_{n+1},

$$\|\varrho\|_{n+1} \leq C_N^{\frac{2N}{N-2}\frac{1}{\gamma_{n+1}}}\left(\frac{N-2}{2\lambda N}\gamma_{n+1}\right)^{\frac{2N}{N-2}\frac{1}{\gamma_{n+1}}}\|\varrho\|_n^{\frac{\gamma_n}{\gamma_n+\frac{2}{k-2}}}\|b\|_{L^k(\mu)}^{\frac{2N}{N-2}\frac{1}{\gamma_{n+1}}}. \quad (2.21)$$

Definiamo la successione $\alpha_n = \log\|\varrho\|_n$. Siccome $\gamma_n \to +\infty$, per dimostrare che $\varrho \in L^\infty$, basta provare che α_n converge. La stima (2.21) ci dice che

$$\alpha_{n+1} \leq \frac{2N}{N-2}\frac{1}{\gamma_{n+1}}\log\left(\frac{C_N(N-2)}{2\lambda N}\gamma_{n+1}\|b\|_{L^k(\mu)}\right) + \frac{\gamma_n}{\gamma_n + \frac{2}{k-2}}\alpha_n;$$

se, per assurdo, si suppone che $\alpha_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$, allora si avrebbe che $\alpha_n \geq 0$ definitivamente e quindi per ogni $\varepsilon \in (0,1)$

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} - \alpha_n &\leq \frac{2N}{N-2} \frac{1}{\gamma_{n+1}} \log\left(\frac{C_N(N-2)}{2\lambda N} \gamma_{n+1} \|b\|_{L^k(\mu)} \right) \\ &\leq C \frac{1}{\left(\gamma_{n+1}\right)^{1-\varepsilon}} \leq C \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{(n+1)(1-\varepsilon)} \end{aligned}$$

dove $C > 0$ è una costante. Siccome l'ultimo membro rappresenta il termine generale di una serie geometrica con ragione minore di 1, α_n converge ad numero reale. Ciò contraddice l'ipotesi che $\alpha_n \to +\infty$. In definitiva, risulta che

$$\log \|\varrho\|_\infty = \lim_{n \to +\infty} \alpha_n < +\infty.$$

Per concludere, facciamo un'osservazione quando $N = 2$; in questo caso, dato che $\varrho \in L^p(\mathbb{R}^N)$ per ogni $p \in (1, +\infty)$, $\varrho \in L^{\frac{r}{r-2}}(\mathbb{R}^N)$ per $r \in (2, k)$. Quindi, se al posto di $N/(N-2)$ mettiamo $r/(r-2)$, la dimostrazione precedente funziona ugualmente. $\square$

CAPITOLO 3

Disuguaglianze di tipo log–Sobolev

Nell'ambito di questo capitolo vogliamo discutere alcune proprietà legate al comportamento asintotico del semigruppo $(T(t))$ e altre disuguaglianze funzionali che evidenziano, tra l'altro, come gli spazi $L^p(\mu)$, con μ invariante, siano i piú naturali per lo studio di $(T(t))$. Nell'ultima sezione applichiamo alcuni dei risultati provati per provare l'ipercontrattività del semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck.

3.1. Preliminari

Ricordiamo che il semigruppo di Markov $(T(t))$ finora considerato ammette la rappresentazione

$$T(t)f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} p(t,x,y)f(y)dy, \quad f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N),$$

con $p(t,x,y) > 0$ per ogni $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^N$ e per q.o. $y \in \mathbb{R}^N$. Assumiamo che esista una misura invariante μ per $(T(t))$. Allora, dalla Proposizione 2.2 sappiamo che μ è regolare e quindi, dal Corollario 2.4, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ è denso in $L^p(\mu)$ per ogni $p \in [1,+\infty)$. Approssimando $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ con funzioni in $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, si vede che μ è una misura invariante per $(T(t))$ se e solo se

$$\int_{\mathbb{R}^N} T(t)f(x)d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)d\mu(x), \quad \forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{3.1}$$

Ne segue che $(T(t))$ si estende ad un C_0–semigruppo contrattivo in $L^p(\mu)$ per ogni $p \in [1,+\infty)$ e la condizione (3.1) è equivalente alla condizione

$$\int_{\mathbb{R}^N} A_p f(x)d\mu(x) = 0 \quad \forall f \in D(A_p),$$

dove $(A_p, D(A_p))$ è il generatore infinitesimale di $T(t)$ in $L^p(\mu)$. Definiamo l'insieme

$$RP_\infty(\mathbb{R}) := \{\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ regolare con crescita polinomiale all'infinito } \}.$$

Supporremo nel seguito che esista, senza specificarla, un'algebra di funzioni $\mathcal{A}$ con le seguenti proprietà:

- $\overline{\mathcal{A}} = L^p(\mu)$, per ogni $p \in [1, +\infty)$;
- $\mathcal{A} \subset D(A_2)$;
- $T(t)\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$, per ogni $t > 0$;
- $\phi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$, per ogni $\phi \in RP_\infty(\mathbb{R})$;
- A_2 è un operatore di diffusione, cioè

$$A_2(\phi(f)) = \phi'(f)A_2 f + \phi''(f)\Gamma(f, f) \tag{3.2}$$

per ogni $f \in \mathcal{A}$ e $\phi \in RP_\infty(\mathbb{R})$ e con Γ definita di seguito, in (3.4).

Queste ipotesi implicano in particolare che $\mathcal{A}$ è un core per $(A_2, D(A_2))$ e come esempio di riferimento si può pensare che $\mathcal{A}$ sia lo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ delle funzioni a decrescita rapida all'infinito.

Per ogni φ funzione convessa, dalla disuguaglianza di Jensen, dato che $p(t, x, \cdot)$ è una misura di probabilità, segue che

$$\varphi(T(t)f) \leq T(t)\varphi(f);$$

in particolare, se prendiamo $\varphi(x) = x^2$, troviamo che

$$(T(t)f)^2 \leq T(t)f^2$$

e quindi

$$2fA_2 f = \lim_{t\to 0} \frac{(T(t)f)^2 - f^2}{t} \leq A_2 f^2, \quad \forall f \in \mathcal{A}. \tag{3.3}$$

Definizione 3.1. *Su $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, definiamo la forma bilineare*

$$\Gamma(f, g) = \frac{1}{2}\left(A_2(fg) - fA_2 g - gA_2 f\right), \quad f, g \in \mathcal{A}; \tag{3.4}$$

la forma Γ viene detta square field.

Grazie a (3.3), la forma Γ è semi–definita positiva. Definiamo poi la forma di Dirichlet associata ponendo

$$\mathcal{E}(f, g) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(f, g)d\mu.$$

Osserviamo che, siccome μ è misura invariante,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(f, f)d\mu = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (A_2 f^2 - 2fA_2 f)d\mu \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} fA_2 f d\mu, \quad \forall f \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

In [**25**], viene dimostrato il seguente risultato astratto;

se Γ è una forma bilineare definita su un'algebra commutativa $\mathcal{A}$ tramite (3.4) con un certo operatore A, e $\Gamma(f,f) \geq 0$, allora per ogni polinomio convesso Φ e per ogni $f \in \mathcal{A}$ risulta

$$A\Phi(f) \geq \Phi'(f)Af.$$

Questo garantisce in particolare che A genera un semigruppo di Markov.

Osservazione 3.2. Supponiamo ora che $(T(t))$ sia simmetrico, cioè che

$$\int_{\mathbb{R}^N} (T(t)f)\, g\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} fT(t)g d\mu, \quad \forall f, g \in L^2(\mu);$$

questo è equivalente a richiedere che

$$\int_{\mathbb{R}^N} gA_2 f d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} fA_2 g\, d\mu, \quad \forall f, g \in \mathcal{A}.$$

Quindi, nel caso simmetrico, si ha che

$$\int_{\mathbb{R}^N} gA_2 f d\mu = -\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(f,g) d\mu, \quad \forall f, g \in \mathcal{A}.$$

Nel caso non simmetrico, si riesce solo a dire che

$$\int_{\mathbb{R}^N} g\frac{A_2 + A_2^*}{2} f d\mu = -\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(f,g) d\mu, \quad \forall f, g \in \mathcal{A}.$$

3.2. Spectral Gap

Diamo la seguente definizione.

Definizione 3.3. *Diremo che l'operatore A_2 soddisfa la condizione di spectral gap con costante $C > 0$, in breve $(SG)_C$, se per la varianza*

$$\sigma^2(f) := \int_{\mathbb{R}^N} f^2 d\mu - \left(\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu\right)^2,$$

vale la seguente stima

$$\sigma^2(f) \leq C\mathcal{E}(f,f), \quad \forall f \in \mathcal{A}.$$

Abbiamo la seguente caratterizzazione dello spectral gap, che ne motiva la terminologia.

Proposizione 3.4. *Supponiamo che il semigruppo $(T(t))$ sia simmetrico in $L^2(\mu)$. Allora A_2 soddisfa $(SG)_C$ se e solo se*

$$\sigma(-A_2) \subset \{0\} \cup [1/C, +\infty).$$

Dim. Ricordiamo che

$$\sigma(-A_2) = P\sigma(-A_2^*) \cup A\sigma(-A_2),$$

dove $P\sigma(-A_2^*)$ denota lo spettro puntuale dell'aggiunto di $-A_2$ (cioè l'insieme degli autovalori), mentre $A\sigma(-A_2)$ denota lo spettro approssimato. Ricordiamo che $\lambda \in A\sigma(-A_2)$ se e solo se esiste una successione $f_n \in D(A_2)$ con $\|f_n\|_2 = 1$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \|\lambda f_n + A_2 f_n\|_2 = 0.$$

La condizione di simmetria per A_2 garantisce che il suo spettro coincide con lo spettro approssimato, $\sigma(-A_2) = A\sigma(-A_2)$. Sia quindi $0 \neq \lambda \in \sigma(-A_2)$ e sia f_n una successione con le proprietà prima descritte. Allora

$$\frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} f_n(\lambda f_n + A_2 f_n)d\mu = 1 + \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} f_n A_2 f_n d\mu = 1 - \frac{1}{\lambda}\mathcal{E}(f_n, f_n) \to 0,$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{E}(f_n, f_n) = \lambda.$$

Inoltre, dato che

$$\lambda\int_{\mathbb{R}^N} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda f_n + A_2 f_n)d\mu \to 0,$$

si ha anche che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n d\mu = 0.$$

Infine, siccome $\sigma^2(f_n) \to 1$ e

$$\sigma^2(f_n) = 1 - \left(\int_{\mathbb{R}^N} f_n d\mu\right)^2 \leq C\mathcal{E}(f_n, f_n),$$

mandando $n \to +\infty$, si ottiene che $\lambda \geq 1/C$. Viceversa, sia $f \in \mathcal{A}$ e supponiamo per il momento che f abbia media nulla, cioè

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = 0.$$

Dal teorema spettrale (si veda ad esempio [**35**]), dato che A_2 è simmetrico, si ha che

$$-A_2 f = \int_{1/C}^{\infty} t\, dE_t(f).$$

Quindi,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(f,f) &= \int_{\mathbb{R}^N} f(-A_2 f)d\mu = -\langle A_2 f, f\rangle_{L^2(\mu)} = \int_{1/C}^{\infty} t\, d\langle E_t(f), f\rangle_{L^2(\mu)} \\
&\geq \frac{1}{C}\int_{1/C}^{\infty} d\langle E_t(f), f\rangle_{L^2(\mu)} = \frac{1}{C}\int_{\mathbb{R}^N} f^2 d\mu,
\end{aligned}$$

da cui

$$\int_{\mathbb{R}^N} f^2 d\mu \leq C\mathcal{E}(f,f), \qquad \forall f \in \mathcal{A} \text{ t.c. } \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = 0.$$

Se f non ha media nulla, basta ripetere il ragionamento per $f - \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu$. $\square$

La proposizione seguente mette in luce una proprietà equivalente alla condizione di spectral gap.

Proposizione 3.5. *Sono equivalenti*

(i) *vale* $(SG)_C$*;*
(ii) *per ogni* $t > 0, f \in \mathcal{A}$*, risulta* $\sigma^2(T(t)f) \le e^{-2t/C}\sigma^2(f)$.

Dim. $(ii) \Rightarrow (i)$. Come abbiamo visto nella dimostrazione della Proposizione 3.4, è sufficiente mostrare (i) per ogni $f \in \mathcal{A}$ con $\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = 0$. A tale scopo, ricorrendo allo sviluppo di Taylor, troviamo che

$$\int_{\mathbb{R}^N} (T(t)f)^2 d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} f^2 d\mu + 2t \int_{\mathbb{R}^N} f A_2 f d\mu + o(t), \quad \text{per } t \to 0,$$

da cui

$$\sigma^2(T(t)f) = \int_{\mathbb{R}^N} (T(t)f)^2 d\mu = \sigma^2(f) - 2t\mathcal{E}(f,f) + o(t) \le e^{-2t/C}\sigma^2(f),$$

e quindi

$$(1 - e^{-2t/C})\sigma^2(f) \le 2t\mathcal{E}(f,f) + o(t).$$

Dividendo per $2t$ e mandando $t \to 0$ abbiamo che

$$\frac{1}{C}\sigma^2(f) \le \mathcal{E}(f,f)$$

e quindi la tesi.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Mostriamo che vale (ii) per le funzioni $f \in \mathcal{A}$ con $\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = 0$. Posto

$$\Phi(t) = \int_{\mathbb{R}^N} (T(t)f)^2 d\mu,$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= 2\int_{\mathbb{R}^N} T(t)f A_2 T(t)f d\mu = -2\mathcal{E}(T(t)f, T(t)f) \\ &\le -\frac{2}{C}\sigma^2(T(t)f) = -\frac{2}{C}\Phi(t), \end{aligned}$$

e quindi

$$\Phi(t) \le e^{-2t/C}\Phi(0) = e^{-2t/C}\sigma^2(f),$$

che era quanto volevamo mostrare. □

Osservazione 3.6. Se al posto di Γ consideriamo un'altra forma Γ_1 con la proprietà

$$\Gamma \le a\Gamma_1,$$

allora (Γ_1, μ) soddisfa $(SG)_{aC}$, non appena (Γ, μ) soddisfa $(SG)_C$.

Osservazione 3.7. Siano μ e μ_1 due misure per le quali

$$\frac{1}{a}\mu \le \mu_1 \le \mu, \quad a > 1.$$

Se (Γ, μ) soddisfa $(SG)_C$, allora (Γ, μ_1) soddisfa $(SG)_{aC}$.

Esempio 3.8. Prendiamo $\mathcal{A} = C_c^\infty(\mathbb{R})$ e per $f, g \in \mathcal{A}$ definiamo

$$\Gamma(f, g) = f' \cdot g'.$$

Sia poi

$$d\mu(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}dx.$$

Allora

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(e^{-|x|}f') = \frac{1}{2}(-\mathrm{sgn}(x)e^{-|x|}f' + e^{-|x|}f'') = \frac{e^{-|x|}}{2}(f'' - \mathrm{sgn}(x)f').$$

Grazie all'Osservazione 3.2, si vede che l'operatore associato a Γ è dato da

$$Af = f'' - \mathrm{sgn}(x)f'.$$

Sia $u(x) = |x|$; allora

$$Au = -1 \quad \text{e} \quad \Gamma(u, u) = 1.$$

Inoltre

$$\Gamma(f, u) = \mathrm{sgn}(x)f', \quad \forall f \in \mathcal{A}.$$

Ricordando com'è definita μ, integrando per parti e applicando la disuguaglianza di Hölder ricaviamo

$$\int_{\mathbb{R}} f^2 d\mu = 2\int_{\mathbb{R}} f\Gamma(f, u)d\mu \le 2\left(\int_{\mathbb{R}} f^2 d\mu\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}} \Gamma(f, u)^2 d\mu\right)^{1/2}$$

per ogni $f \in \mathcal{A}$ con $f(0) = 0$, da cui

$$\int_{\mathbb{R}} f^2 d\mu \le 4\int_{\mathbb{R}} \Gamma(f, u)^2 d\mu = 4\int_{\mathbb{R}} (f')^2 d\mu = 4\mathcal{E}(f, f).$$

Se $f(0) \neq 0$, si ragiona sulla funzione $f - f(0)$. Pertanto, abbiamo verificato che A soddisfa $(SG)_C$ con $C = 4$. Alla fine della sezione vedremo che la costante 4 è ottimale.

Nel seguito utilizzeremo il seguente teorema, che presentiamo qui senza dimostrazione ([**9**]).

Teorema 3.9 (Muckenhaupt). *Sia μ una misura di probabilità su $\mathbb{R}$; se μ soddisfa la condizione $(SG)_C$ rispetto alla forma $\Gamma(f, f) = (f')^2$, allora μ è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue m. Sia ϱ la densità. Inoltre, preso $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\mu([\alpha, +\infty)) = \mu(-\infty, \alpha]) = \frac{1}{2},$$

e denotati con

$$B_+ = \sup_{x>\alpha} \mu([x,+\infty)) \int_\alpha^x \frac{1}{\varrho(t)} dt, \quad B_- = \sup_{x<\alpha} \mu((-\infty,x]) \int_x^\alpha \frac{1}{\varrho(t)} dt,$$

risulta che μ soddisfa la $(SG)_C$ se e solo se

$$B = \max\{B_+, B_-\} < +\infty$$

e la miglior costante C è compresa tra B e $4B$.

Proposizione 3.10. *Supponiamo che l'operatore A_2 soddisfi $(SG)_C$; se f verifica $\Gamma(f,f) \leq 1$ e*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \right| < \infty,$$

allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{\lambda f} d\mu < \infty$$

per ogni $\lambda < \sqrt{4/C}$.

Dim. La dimostrazione che qui presentiamo è presa da [**22**]. Mostriamo che

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{\lambda f} d\mu \leq e^{\lambda \int f d\mu} \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{C\lambda^2}{4^{k+1}}\right)^{-2^k}. \tag{3.1}$$

Se al posto di f si prende la funzione

$$f_n = -n \vee (f \wedge n),$$

si ha ancora che $\Gamma(f_n, f_n) \leq 1$; dal Lemma di Fatou, se la disuguaglianza (3.1) è vera per f_n, passando al limite sarà vera anche per f. Quindi non è restrittivo supporre $f \in L^\infty$. Se prendiamo la funzione $g = e^{f\lambda/2}$, tenendo presente che A_2 è un operatore di diffusione, si ottiene che

$$\Gamma(g,g) = \frac{1}{2}\left(A_2 g^2\right) - g A_2 g = \frac{\lambda^2}{4} e^{\lambda f} \Gamma(f,f).$$

Se ne deduce che

$$\mathcal{E}(g,g) \leq \frac{\lambda^2}{4} \Phi(\lambda)$$

con

$$\Phi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{\lambda f} d\mu.$$

La proprietà $(SG)_C$ implica quindi che

$$\sigma^2(g) = \Phi(\lambda) - \Phi^2\left(\frac{\lambda}{2}\right) \leq C\mathcal{E}(g,g) \leq \frac{C\lambda^2}{4}\Phi(\lambda),$$

e quindi

$$\Phi(\lambda) \leq \Phi^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)\left(1 - \frac{C\lambda^2}{4}\right)^{-1}.$$

Iterando il procedimento si ottiene l'asserto; difatti, dopo $n+1$ passi abbiamo

$$\Phi(\lambda) \leq \Phi^{2^n}\left(\frac{\lambda}{2^n}\right)\prod_{k=0}^{n}\left(1-\frac{C\lambda^2}{4^{k+1}}\right)^{-2^k}$$

e, siccome, per n abbastanza grande

$$\Phi^{2^n}\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{\lambda f/2^n} d\mu\right)^{2^n} \simeq e^{2^n(\int e^{\lambda f/2^n} d\mu - 1)} = e^{\lambda\int \frac{e^{\lambda f/2^n}-1}{\lambda/2^n} d\mu}$$

mandando $n \to \infty$, abbiamo (3.1). $\square$

Ritornando all'Esempio 3.8, proviamo che la costante 4 è ottimale; se $C < 4$, allora nella Proposizione 3.10 potremmo scegliere $\lambda = 1$ e $f(x) = |x|$, ottenendo un assurdo.

3.3. Disuguaglianze di Sobolev logaritmiche e il teorema di L. Gross

Data una funzione f positiva, definiamo la seguente quantità

$$\mathrm{Ent}(f) = \int_{\mathbb{R}^N} f\log f d\mu - \left(\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu\right)\log\left(\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu\right),$$

detta **entropia** di f. Applicando la disuguaglianza di Jensen alla funzione strettamente convessa $\phi(x) = x\log x$, $x > 0$, si vede che $\mathrm{Ent}(f) \geq 0$ e $\mathrm{Ent}(f) = 0$ se e solo se f è costante.

Definizione 3.11. *Diremo che il semigruppo $(T(t))$ soddisfa la disuguaglianza di Sobolev logaritmica con costanti M, C se*

$$\mathrm{Ent}(f^2) \leq M\int_{\mathbb{R}^N} f^2 d\mu + C\,\mathcal{E}(f,f), \tag{3.1}$$

per ogni $f \in \mathcal{A}_+ = \{f \in \mathcal{A} : \exists\alpha > 0 \text{ tale che } f \geq \alpha\}$.

La definizione precedente si deve a Gross, il quale introdusse le disuguaglianze di Sobolev logaritmiche per lo studio dell'ipercontrattività del semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck (si veda [**19**]). Per i nostri scopi è utile anche introdurre la seguente definizione che è una formulazione piú forte della precedente.

Definizione 3.12. *Diremo che il semigruppo $(T(t))$ soddisfa la disuguaglianza di Sobolev logaritmica tight con costante C se (3.1) è verificata con $M = 0$.*

Osservazione 3.13. Facciamo notare che, per quanto detto sopra, se il semigruppo soddisfa la disuguaglianza di Sobolev logaritmica tight, allora vale l'implicazione

$$\Gamma(f,f)=0 \Rightarrow f \text{ costante}.$$

Ciò discende semplicemente dal fatto che se $\Gamma(f,f)=0$, allora $\mathcal{E}(f,f)=0$ e (3.1) con $M=0$ implica che $\mathrm{Ent}(f^2)=0$, da cui f costante.

Proposizione 3.14. *Il semigruppo $(T(t))$ soddisfa la disuguaglianza di Sobolev logaritmica tight con costante C se e solo se per ogni $f \in L^1(\mu)$, $f>0$, risulta*

$$\mathrm{Ent}(T(t)f) \le e^{-\frac{4}{C}t}\,\mathrm{Ent}(f), \quad t \ge 0.$$

Dim. Proviamo dapprima la sufficienza. Usando lo sviluppo di Taylor troviamo che

$$\mathrm{Ent}(T(t)f) = \mathrm{Ent}(f) + t\int_{\mathbb{R}^N} (A_2 f)\log f\, d\mu + o(t), \tag{3.2}$$

per ogni $f \in \mathcal{A}_+$. Siccome A_2 è un operatore di diffusione, inserendo $\phi(x)=\sqrt{x}$ in (3.2), deduciamo

$$2\sqrt{f}A_2(\sqrt{f}) = A_2 f - \frac{1}{2f}\Gamma(f,f),$$

da cui integrando rispetto a μ

$$2\mathcal{E}(\sqrt{f},\sqrt{f}) = -2\int_{\mathbb{R}^N}\sqrt{f}A_2(\sqrt{f})d\mu = \int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{2f}\Gamma(f,f)d\mu. \tag{3.3}$$

Analogamente, se consideriamo in (3.2) la funzione $\phi(x) = x\log x - x$ otteniamo

$$A_2(f\log f) - A_2 f = (\log f)A_2 f + \frac{1}{f}\Gamma(f,f)$$

e quindi, integrando e tenendo conto di (3.3)

$$-\int_{\mathbb{R}^N}(\log f)A_2 f\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{f}\Gamma(f,f)d\mu = 4\mathcal{E}(\sqrt{f},\sqrt{f}). \tag{3.4}$$

Inserendo quanto ottenuto in (3.2) e usando l'ipotesi abbiamo

$$\mathrm{Ent}(T(t)f) = \mathrm{Ent}(f) - 4\,t\,\mathcal{E}(\sqrt{f},\sqrt{f}) + o(t) \le e^{-\frac{4}{C}t}\,\mathrm{Ent}(f)$$

da cui

$$\frac{1-e^{-\frac{4}{C}t}}{t}\,\mathrm{Ent}(f) \le 4\,\mathcal{E}(\sqrt{f},\sqrt{f}) + \frac{o(t)}{t}.$$

Mandando $t \to 0$, risulta provata la tesi con $\sqrt{f}$ al posto di f.

Viceversa, supponiamo che $\mathrm{Ent}(f^2) \le C\,\mathcal{E}(f,f)$, per ogni $f \in \mathcal{A}_+$. Sia $f \in \mathcal{A}_+$ fissata e sia

$$H(t) = \int_{\mathbb{R}^N}\phi(T(t)f)d\mu,$$

dove $\phi(x) = x \log x$. Siccome $\mathrm{Ent}(\lambda f) = \lambda \mathrm{Ent}(f)$ per ogni $\lambda > 0$, non è restrittivo supporre che $\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = 1$. Applicando (3.4) con $T(t)f$ al posto di f risulta

$$H'(t) = \int_{\mathbb{R}^N} \log(T(t)f)(A_2 T(t)f) d\mu = -4\,\mathcal{E}(\sqrt{T(t)f}, \sqrt{T(t)f})$$

da cui, in virtú dell'ipotesi, segue che

$$H'(t) \leq -\frac{4}{C}\,\mathrm{Ent}(T(t)f) = -\frac{4}{C}\,H(t),$$

dove nell'ultimo passo è stato usato il fatto che

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} T(t) f d\mu = 1.$$

Integrando la disequazione differenziale ottenuta deduciamo la tesi, quando $f \in \mathcal{A}_+$. Il caso generale segue per densità e usando la positività del semigruppo $(T(t))$. □

Il seguente risultato fornisce una condizione sufficiente sul semigruppo affinché questo soddisfi la disuguaglianza di Sobolev logaritmica tight e costituisce il passaggio cruciale per la dimostrazione del teorema di Nelson [**30**] (Teorema 3.24).

PROPOSIZIONE 3.15. *Supponiamo che il semigruppo $(T(t))$ sia ergodico, cioè*

$$\lim_{t\to+\infty} T(t)f = \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu$$

in $L^2(\mu)$. Se esiste $\lambda > 0$ tale che per ogni $f \in \mathcal{A}_+$ si abbia

$$-\int_{\mathbb{R}^N} A_2 T(t) f \log T(t) f d\mu \leq e^{-\lambda t} \int_{\mathbb{R}^N} -A_2 f \log f d\mu, \tag{3.5}$$

allora il semigruppo $(T(t))$ soddisfa la disuguaglianza di Sobolev logaritmica tight con costante $4/\lambda$.

DIM. Dato che c'è convergenza in norma $L^2(\mu)$, ci sarà convergenza quasi ovunque, e quindi grazie al teorema della convergenza dominata si avrà che

$$\int_{\mathbb{R}^N} T(t) f \log T(t) f d\mu \to \left(\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu\right) \log\left(\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu\right).$$

Otteniamo quindi che

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ent}(f) &= \int_{\mathbb{R}^N} f\log f d\mu - \left(\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu\right)\log\left(\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu\right) \\
&= -\int_0^\infty \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} T(t)f\log T(t)f d\mu\, dt \\
&= -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} A_2T(t)f\log T(t)f d\mu\, dt \\
&\le -\int_{\mathbb{R}^N} A_2 f\log f d\mu \int_0^\infty e^{-\lambda t}dt \\
&= -\frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} A_2 f\log f d\mu \\
&= \frac{4}{\lambda}\mathcal{E}(\sqrt{f},\sqrt{f}),
\end{aligned}$$

grazie a (3.4). Prendendo quindi f^2 al posto di f, segue la tesi. □

Osservazione 3.16. Applicando l'idendità (3.4) a $T(t)f$ si vede che (3.5) è equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{T(t)f}\Gamma(T(t)f,T(t)f)d\mu \le e^{-\lambda t}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{f}\Gamma(f,f)d\mu. \tag{3.6}$$

Il prossimo obiettivo è quello di stabilire una relazione tra le disuguaglianze di Sobolev logaritmiche e la proprietà di spectral gap. A tale scopo ci occorre un risultato preliminare rappresentato dal seguente lemma. Esso risale a Rothaus ([**33**]), ma la dimostrazione che presentiamo è dovuta a Bakry.

Lemma 3.17 (Rothaus). *Sia $f \in L^2(\mu)$ con $\mathrm{Ent}(f)$ finita. Posto $\tilde{f} = f - \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu$, risulta*

$$\mathrm{Ent}(f^2) \le \mathrm{Ent}(\tilde{f}^2) + 2\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}^2 d\mu. \tag{3.7}$$

Dim. Mostriamo prima che per ogni funzione $g \in L^\infty(\mu)$ con le seguenti proprietà

$$\int_{\mathbb{R}^N} g d\mu = 0, \qquad \int_{\mathbb{R}^N} g^2 d\mu = 1,$$

vale

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}(1+tg)^2\log(1+tg)^2 d\mu \le\ & (1+t^2)\log(1+t^2) \\
& + t^2\int_{\mathbb{R}^N} g^2\log g^2 d\mu + 2t^2
\end{aligned} \tag{3.8}$$

per ogni $t \geq 0$. A tal proposito, introduciamo la funzione

$$\varphi_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}^N} (1+tg)^2 \log \frac{(1+tg)^2+\varepsilon}{1+t^2} d\mu - t^2 \int_{\mathbb{R}^N} g^2 \log g^2 d\mu$$

e notiamo subito che $\varphi_\varepsilon(0) = \log(1+\varepsilon)$. Inoltre si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,\varphi_\varepsilon'(t) &= \int_{\mathbb{R}^N} g(1+tg) \log\big((1+tg)^2+\varepsilon\big) d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{g(1+tg)^3}{(1+tg)^2+\varepsilon} d\mu \\ & \quad -t\left(1+\log(1+t^2) + \int_{\mathbb{R}^N} g^2 \log g^2 d\mu\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,\varphi_\varepsilon''(t) &= \int_{\mathbb{R}^N} g^2 \log \frac{(1+tg)^2+\varepsilon}{g^2(1+t^2)} d\mu + 5\int_{\mathbb{R}^N} \frac{g^2(1+tg)^2}{(1+tg)^2+\varepsilon} d\mu \\ & \quad -2\int_{\mathbb{R}^N} \frac{g^2(1+tg)^4}{\big((1+tg)^2+\varepsilon\big)^2} d\mu - 1 - \frac{2t^2}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Applicando la disuguaglianza di Jensen alla funzione concava $\log x$ e alla misura di probabilità $g^2 d\mu$ risulta

$$\int_{\mathbb{R}^N} g^2 \log u\, d\mu \leq \log \int_{\mathbb{R}^N} u g^2 d\mu,$$

per ogni funzione $u > 0$. Scegliendo $u = \frac{(1+tg)^2+\varepsilon}{g^2(1+t^2)}$, abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^N} g^2 \log u\, d\mu \leq \log \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(1+tg)^2+\varepsilon}{(1+t^2)} d\mu = \log\left(1+\frac{\varepsilon}{1+t^2}\right). \tag{3.9}$$

Posto $\alpha = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{g^2(1+tg)^2}{(1+tg)^2+\varepsilon} d\mu$, applichiamo ancora la disuguaglianza di Jensen alla funzione convessa x^2 e alla misura $g^2 d\mu$ per ottenere

$$\alpha^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{g^2(1+tg)^4}{\big((1+tg)^2+\varepsilon\big)^2} d\mu. \tag{3.10}$$

Tenendo conto delle stime (3.9), (3.10) e del fatto che $5\alpha - 2\alpha^2 - 1 \leq 2$ per $\alpha \in [0,1]$, possiamo scrivere

$$\frac{1}{2}\,\varphi_\varepsilon''(t) \leq \log\left(1+\frac{\varepsilon}{1+t^2}\right) + 5\alpha - 2\alpha^2 - 1 \leq \log(1+\varepsilon) + 2.$$

Integrando tra 0 e t l'ultima disuguaglianza e osservando che $\varphi_\varepsilon'(0) = 0$ ricaviamo

$$\varphi_\varepsilon'(t) \leq 2\,t\,\log(1+\varepsilon) + 4\,t.$$

Integrando di nuovo otteniamo

$$\varphi_\varepsilon(t) \leq \log(1+\varepsilon) + t^2\big(\log(1+\varepsilon)+2\big).$$

Ricordando l'espressione di $\varphi_\varepsilon(t)$ e mandando $\varepsilon \to 0$ segue che

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1+tg)^2 \log(1+tg)^2 d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} (1+tg)^2 \log(1+t^2) d\mu$$

$$\leq t^2 \int_{\mathbb{R}^N} g^2 \log g^2 d\mu + 2t^2$$

da cui si deduce (3.8), tenendo conto ancora una volta delle proprietà di g.

Ora, siccome $L^\infty(\mu)$ è denso in $L^2(\mu)$, è sufficiente provare (3.7) per $f \in L^\infty(\mu)$. Se f ha media nulla non c'è niente da dimostrare. Quindi supponiamo che $\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \neq 0$. Inoltre, dato che $\mathrm{Ent}(\cdot)$ è positivamente omogenea di grado uno, non è restrittivo assumere che $\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = 1$. Allora per la disuguaglianza di Jensen $1 \leq \int_{\mathbb{R}^N} f^2 d\mu$ e, siccome $\mathrm{Ent}(f) \neq 0$, deve essere $1 < \int_{\mathbb{R}^N} f^2 d\mu$. Per concludere, prendiamo

$$t = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^N} f^2 d\mu - 1} \text{ e } \quad g = \frac{1}{t}(f-1),$$

e applicando (3.8) otteniamo (3.7), che era quello che volevamo provare. □

Siamo pronti ora per dimostrare la relazione che intercorre tra le disuguaglianze di Sobolev logaritmiche e lo spectral gap.

Teorema 3.18. *Valgono le seguenti proprietà:*

(a) *Supponiamo che il semigruppo $(T(t))$ verifichi la disuguaglianza di Sobolev logaritmica tight con costante C. Allora la disuguaglianza di spectral gap è soddisfatta con costante $C/2$;*
(b) *Supponiamo che la disuguaglianza di spectral gap sia soddisfatta con costante $\tilde{C}$ e che valga la disuguaglianza di Sobolev logaritmica con costanti M e C. Allora vale la disuguaglianza di Sobolev logaritmica tight con costante $C + \tilde{C}(M+2)$.*

Dim. (a) Per ipotesi, per ogni $f \in \mathcal{A}_+$ risulta $\mathrm{Ent}(f^2) \leq C\mathcal{E}(f,f)$. Sostituendo f con $1+\varepsilon f$ si ottiene

$$\mathrm{Ent}((1+\varepsilon f)^2) \leq C\mathcal{E}(1+\varepsilon f, 1+\varepsilon f) = \varepsilon^2\, C\mathcal{E}(f,f).$$

D'altra parte, ricorrendo allo sviluppo di Taylor, si vede che

$$\begin{aligned} \mathrm{Ent}((1+\varepsilon f)^2) &= 2\varepsilon^2 \Big(\int_{\mathbb{R}^N} f^2 d\mu - \Big(\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \Big)^2 \Big) + o(\varepsilon^2) \\ &= 2\varepsilon^2 \sigma^2(f) + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Dividendo per ε^2 e mandando $\varepsilon \to 0$, abbiamo la tesi.

(b) Posto $\tilde{f} = f - \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu$, risulta $\mathcal{E}(f,f) = \mathcal{E}(\tilde{f},\tilde{f})$. Grazie alla disuguaglianza di spectral gap abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}^2 d\mu \leq \tilde{C}\mathcal{E}(f,f). \tag{3.11}$$

Applicando il Lemma 3.17, la disuguaglianza di Sobolev logaritmica e (3.11) otteniamo

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ent}(f^2) &\le \mathrm{Ent}(\tilde{f}^2) + 2\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}^2 d\mu \\
&\le M\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}^2 d\mu + C\mathcal{E}(f,f) + 2\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}^2 d\mu \\
&= (M+2)\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}^2 d\mu + C\mathcal{E}(f,f) \\
&\le \big((M+2)\tilde{C} + C\big)\mathcal{E}(f,f).
\end{aligned}
$$

□

A questo punto, ci proponiamo di mostrare che la disuguaglianza di Sobolev logaritmica equivale all'ipercontrattività del semigruppo. Questo è il contenuto del teorema di Gross. Per dimostrare tale risultato ci occorrono delle osservazioni preliminari.

Sia φ una funzione regolare e $\psi \in RP_\infty(\mathbb{R})$ una primitiva di φ, cioè $\psi' = \varphi$. Se $f \in \mathcal{A}$, allora, ricordando che A_2 è un operatore di diffusione, $A_2(\psi(f)) = \varphi(f)A_2 f + \varphi'(f)\Gamma(f,f)$, e quindi

$$
\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(f) A_2 f d\mu = -\int_{\mathbb{R}^N} \varphi'(f)\Gamma(f,f) d\mu. \tag{3.12}
$$

Inoltre, se anche ϕ è una funzione regolare con crescita polinomiale, allora

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(\phi(f),\phi(f)) &= \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(\phi(f),\phi(f)) d\mu = -\int_{\mathbb{R}^N} \phi(f) A_2(\phi(f)) d\mu \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \phi(f)\phi'(f) A_2 f d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} \phi(f)\phi''(f)\Gamma(f,f) d\mu \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}\phi^2\right)'(f) A_2 f - \int_{\mathbb{R}^N} \phi(f)\phi''(f)\Gamma(f,f) d\mu.
\end{aligned}
$$

Applicando (3.12) con $\psi = \phi^2/2$ segue che

$$
\mathcal{E}(\phi(f),\phi(f)) = \int_{\mathbb{R}^N} \big(\phi'(f)\big)^2 \Gamma(f,f) d\mu. \tag{3.13}
$$

Notiamo ora che la disuguaglianza di Sobolev logaritmica è stata data con esponente quadratico; grazie a (3.12) e (3.13), essa può essere estesa ad esponente arbitrario $p \in (1,+\infty)$ nel seguente modo:

LEMMA 3.19. *Sono equivalenti:*

(i) $(T(t))$ *soddisfa la disugualianza di Sobolev logaritmica con costanti* M *e* C*;*

(ii) *per ogni* $p \in (1, \infty)$ *e ogni* $f \in \mathcal{A}_+$ *risulta*

$$\mathrm{Ent}(f^p) \leq M \int_{\mathbb{R}^N} f^p d\mu - \frac{Cp^2}{4(p-1)} \int_{\mathbb{R}^N} f^{p-1} A_2 f d\mu.$$

Dim. $(i) \Rightarrow (ii)$. Assumiamo che

$$\mathrm{Ent}(f^2) \leq M \int_{\mathbb{R}^N} f^2 d\mu + C\mathcal{E}(f, f)$$

per ogni $f \in \mathcal{A}$. Presa $f \in \mathcal{A}_+$ mettendo $f^{p/2}$ al posto di f e applicando, rispettivamente, (3.13) con $\phi(x) = x^{\frac{p}{2}}$ e (3.12) con $\varphi(x) = (p-1)^{-1} x^{p-1}$, ricaviamo

$$\begin{aligned} \mathrm{Ent}(f^p) &\leq M \int_{\mathbb{R}^N} f^p d\mu + C\mathcal{E}(f^{p/2}, f^{p/2}) \\ &= M \int_{\mathbb{R}^N} f^p d\mu + \frac{Cp^2}{4} \int_{\mathbb{R}^N} f^{p-2} \Gamma(f, f) d\mu \\ &= M \int_{\mathbb{R}^N} f^p d\mu - \frac{Cp^2}{4(p-1)} \int_{\mathbb{R}^N} f^{p-1} A_2 f d\mu. \end{aligned} \tag{3.14}$$

La stima ottenuta è la disuguaglianza di Sobolev logaritmica per p qualunque.
$(i) \Rightarrow (ii)$. Se (3.14) è soddisfatta per qualche $p \in (1, \infty)$ e per ogni $f \in \mathcal{A}_+$, procedendo a ritroso si ritrova la disuguaglianza di Sobolev logaritmica con $p = 2$. $\square$

Pertanto, abbiamo dimostrato che la validità di tali disuguaglianze è indipendente da $p \in (1, +\infty)$.

Teorema 3.20 (Gross). *Siano* $C > 0$, $M \geq 0$ *e* $p \in (1, +\infty)$ *fissati. Poniamo*

$$q(t) = (p-1)e^{\frac{4}{C}t} + 1, \qquad m(t) = M\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q(t)}\right), \quad t \geq 0.$$

Sono equivalenti

(i) *la disuguaglianza di Sobolev logaritmica è verificata con costanti* M *e* C*;*
(ii) *per ogni* $t > 0$, $f \in L^p(\mu)$ *risulta*

$$\|T(t)f\|_{L^{q(t)}(\mu)} \leq e^{m(t)} \|f\|_{L^p(\mu)}. \tag{3.15}$$

*La proprietà (ii) esprime l'***ipercontrattività** *del semigruppo* $(T(t))$ *da* $L^p(\mu)$ *a* $L^{q(t)}(\mu)$.

Dim. $(i) \Rightarrow (ii)$. Siccome l'algebra $\mathcal{A}$ è densa in $L^p(\mu)$, possiamo considerare $f \in \mathcal{A}$. In piú, non è restrittivo supporre $f \in \mathcal{A}_+$, poiché, nel caso generale, basta considerare $f_\varepsilon = (f^2+\varepsilon)^{1/2} \in \mathcal{A}_+$ e applicare il teorema della convergenza dominata mandando $\varepsilon \to 0$. Quindi, se vale (3.15) per le f_ε, dato che $(T(t))$ è fortemente continuo in ogni $L^p(\mu)$, segue la (3.15) per $|f|$. In questo modo, la tesi risulta provata per $T(t)|f|$: dalla positività di $T(t)$ segue quindi che, scritto $f = f_+ - f_-$

$$\begin{aligned} |T(t)f| &= |T(t)f_+ - T(t)f_-| \le |T(t)f_+| + |T(t)f_-| \\ &= T(t)f_+ + T(t)f_- = T(t)|f|, \end{aligned}$$

da cui la (3.15) per f.

Sia dunque $f \in \mathcal{A}_+$. Poniamo

$$u(t) = T(t)f, \qquad \mathcal{H}(t) = e^{-m(t)}\left(\int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)}d\mu\right)^{1/q(t)}.$$

Osserviamo che $\mathcal{H}(0) = \|f\|_p$, per cui la stima di ipercontrattività (3.15) è equivalente alla disuguaglianza

$$\mathcal{H}(t) \le \mathcal{H}(0), \qquad t > 0.$$

Facciamo vedere che $\mathcal{H}' \le 0$. Ricordando che $u'(t) = A_2u(t)$, risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'(t) = \mathcal{H}(t)\bigg(&- m'(t) - \frac{q'(t)}{q^2(t)}\log\int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)}d\mu \\ &+ \frac{q'(t)}{q(t)}\frac{\int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)}\log u(t)d\mu}{\int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)}d\mu} + \frac{\int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)-1}A_2u(t)d\mu}{\int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)}d\mu}\bigg) \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'(t) = \frac{\mathcal{H}(t)}{\int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)}d\mu}\,\frac{q'(t)}{q^2(t)}\bigg\{ &- m'(t)\frac{q^2(t)}{q'(t)}\int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)}d\mu \\ &-\left(\int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)}d\mu\right)\log\int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)}d\mu \\ &+\int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)}\log u(t)^{q(t)}d\mu \\ &+\frac{q^2(t)}{q'(t)}\int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)-1}A_2u(t)d\mu\bigg\} \end{aligned}$$

e quindi

$$\mathcal{H}'(t) = \frac{\mathcal{H}(t)}{\int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)} d\mu} \frac{q'(t)}{q^2(t)} \Bigg\{ \mathrm{Ent}\big(u(t)^{q(t)}\big) - \frac{q^2(t)}{q'(t)} \Bigg(m'(t) \int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)} d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)-1} A_2 u(t) d\mu \Bigg) \Bigg\}. \tag{3.16}$$

A questo punto, applicando (3.14) con $u(t)$ e $q(t)$ al posto di f e p rispettivamente si ottiene

$$\mathrm{Ent}\big(u(t)^{q(t)}\big) \leq M \int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)} d\mu - \frac{Cq^2(t)}{4(q(t)-1)} \int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)-1} A_2 u(t) d\mu.$$

La tesi segue ora osservando che la scelta di m e q è tale che

$$\frac{q^2(t)}{q'(t)} m'(t) = M, \qquad \frac{q^2(t)}{q'(t)} = \frac{Cq^2(t)}{4(q(t)-1)},$$

per cui, l'ultimo membro di (3.16) risulta negativo.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Sia $f \in \mathcal{A}_+$. Nella prima parte della dimostrazione abbiamo osservato che la condizione (ii) equivale a $\mathcal{H}(t) \leq \mathcal{H}(0)$. Ciò implica necessariamente $\mathcal{H}'(0) \leq 0$ da cui segue

$$\mathrm{Ent}(f^p) \leq M \int_{\mathbb{R}^N} f^p d\mu - \frac{Cp^2}{4(p-1)} \int_{\mathbb{R}^N} f^{p-1} A_2 f d\mu,$$

che è proprio la (3.14), cioè la (i). □

Proposizione 3.21. *Supponiamo che il semigruppo $(T(t))$ soddisfi la disuguaglianza di Sobolev logaritmica tight con costante C; allora per ogni $f \in L^1(\mu)$ con $\Gamma(f,f) \leq 1$ q.o. si ha che*

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{\alpha f^2} d\mu < +\infty, \quad \forall \alpha < \frac{1}{C}.$$

Precisamente, vale la seguente stima

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{\alpha f^2} d\mu \leq \frac{1}{\sqrt{1 - C\alpha}} \exp\left(\frac{\alpha}{1 - C\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \right)^2 \right). \tag{3.17}$$

Dim. Dimostriamo (3.17) per $f \in \mathcal{A}_+ \cap L^\infty$ (possiamo eventualmente anche supporre che $\mathcal{A}_+ \subset L^\infty$). Applicando la disuguaglianza di Sobolev logaritmica alla funzione $e^{\frac{\lambda}{2} f}$ e definendo la funzione $H(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{\lambda f} d\mu$, otteniamo che

$$\begin{aligned} \mathrm{Ent}(e^{\lambda f}) &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{\lambda f} \lambda f d\mu - H(\lambda) \log H(\lambda) \\ &= \lambda H'(\lambda) - H(\lambda) \log H(\lambda) \\ &\leq C\mathcal{E}(e^{\frac{\lambda}{2} f}, e^{\frac{\lambda}{2} f}). \end{aligned}$$

Ricordando la formula (3.13) otteniamo che

$$\mathrm{Ent}(e^{\lambda f}) = \lambda H'(\lambda) - H(\lambda)\log H(\lambda) \le C\frac{\lambda^2}{4}\int_{\mathbb{R}^N} e^{\lambda f}\Gamma(f,f)d\mu \le C\frac{\lambda^2}{4}H(\lambda),$$

da cui

$$\lambda H'(\lambda) - H(\lambda)\log H(\lambda) \le \frac{C\lambda^2}{4}H(\lambda).$$

Vale quindi la disuguaglianza

$$\left(\frac{1}{\lambda}\log H(\lambda)\right)' = \frac{1}{\lambda^2}\left(\lambda\frac{H'(\lambda)}{H(\lambda)} - \log H(\lambda)\right) \le \frac{C}{4},$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Integrando tra 0 e λ, se $\lambda > 0$, o tra λ e 0 se $\lambda < 0$, si ottiene, indipendentemente dal segno di λ,

$$\frac{1}{\lambda}\log H(\lambda) - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\log H(\varepsilon) \le \frac{C}{4}\lambda.$$

Tenendo presente che $H(0) = 1$, se ne deduce che

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\log H(\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log H(\varepsilon) - \log H(0)}{\varepsilon}\\ &= \frac{H'(0)}{H(0)} = \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu,\end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{1}{\lambda}\log H(\lambda) \le \frac{C}{4}\lambda + \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu$$

da cui

$$H(\lambda) \le \exp\left(\lambda\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu + \frac{C}{4}\lambda^2\right), \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

Notiamo inoltre che vale la seguente identità:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x - \lambda^2/2}d\lambda \quad = \quad e^{x^2/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-(\lambda - x)^2/2}d\lambda = \sqrt{2\pi}e^{x^2/2},$$

grazie alla quale deduciamo che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} H(\lambda)e^{-\lambda^2/4\alpha}d\lambda &\le \int_{\mathbb{R}}\exp\left(\lambda\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu + \frac{C}{4}\lambda^2 - \frac{\lambda^2}{4\alpha}\right)d\lambda\\ &= \int_{\mathbb{R}}\exp\left(\lambda\sqrt{\frac{2\alpha}{1 - C\alpha}}\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu - \frac{\lambda^2}{2}\right)d\lambda\\ &= \sqrt{\frac{2\alpha}{1 - C\alpha}}\exp\left(\frac{\alpha}{1 - C\alpha}\left(\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu\right)^2\right)\sqrt{2\pi}.\end{aligned}$$

A questo punto la conclusione segue dal fatto che

$$\int_{\mathbb{R}} H(\lambda)e^{-\lambda^2/4\alpha}d\lambda = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda f}e^{-\lambda^2/4\alpha}d\lambda d\mu = \sqrt{2\alpha}\sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}^N} e^{\alpha f^2}d\mu.$$

$\square$

3.4. Il semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck

Scopo di questa sezione è mostrare che il semigruppo di Ornstein–Uhlenbeck è ipercontrattivo. Per questo ci occorrono dei risultati preliminari che richiamiamo di seguito.
Consideriamo l'operatore di Ornstein-Uhlenbeck definito da

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u(x) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} q_{ij}D_{ij}u(x) + \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}x_iD_ju(x)\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(QD^2u(x)\right) + < Bx, \nabla u(x) >, \qquad x\in\mathbb{R}^N,\end{aligned}$$

dove $Q = (q_{ij})$ è una matrice reale, simmetrica, definita positiva e $B = (b_{ij})$ è una matrice reale i cui autovalori appartengono al semipiano sinistro aperto cioè $\sigma(B) \subseteq \mathbb{C}_-$.
Il semigruppo generato $(P(t))_{t\geq 0}$ ha la seguente espressione esplicita, dovuta a Kolmogorov

$$P(t)f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}(\det Q_t)^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} f(e^{tB}x-y)e^{-\frac{1}{2}<Q_t^{-1}y,y>}dy \tag{3.1}$$

con $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$, $x\in\mathbb{R}^N$, $t>0$ e

$$Q_t = \int_0^t e^{sB}Qe^{sB^*}ds, \qquad t\in(0,\infty].$$

Con B^* abbiamo denotato la matrice trasposta di B. Osserviamo che le ipotesi fatte su Q e B assicurano che la matrice Q_t sia ben definita, simmetrica e definita positiva per ogni $t\in(0,\infty]$.
Definiamo la misura Gaussiana

$$\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}(\det Q_\infty)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}\langle Q_\infty^{-1}x,x\rangle}, \quad x\in\mathbb{R}^N.$$

Si dimostra che μ è l'unica misura invariante per il semigruppo $(P(t))$ ([**10**, Teoremi 11.7, 11.11]).
Tenendo conto della definizione di Q_t, $0\leq t\leq\infty$, si può vedere che

$$Q_t + e^{tB}Q_\infty e^{tB^*} = Q_\infty \tag{3.2}$$

per ogni $t\geq 0$; da qui segue

$$\frac{d}{dt}\left(Q_t + e^{tB}Q_\infty e^{tB^*}\right)|_{t=0} = Q + BQ_\infty + Q_\infty B^* = 0. \tag{3.3}$$

Sia ora M una matrice reale invertibile. Definiamo la trasformata

$$\Phi_M : \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)\to\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N); \qquad (\Phi_M u)(y) = u(M^{-1}y),\ y\in\mathbb{R}^N.$$

Osserviamo che $\Phi_M\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e che

$$\mathcal{L} = \Phi_M^{-1}\widetilde{\mathcal{L}}\Phi_M$$

su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, dove

$$\widetilde{\mathcal{L}}v(y) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\widetilde{Q}D^2v(y)\right) + \langle \widetilde{B}y, \nabla v(y)\rangle, \quad y \in \mathbb{R}^N,$$

con

$$\widetilde{Q} = MQM^* \quad \text{e} \quad \widetilde{B} = MBM^{-1}.$$

Da qui segue che

$$\widetilde{Q}_\infty = MQ_\infty M^*$$

e quindi

$$\widetilde{\mu}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}(\det \widetilde{Q}_\infty)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\langle \widetilde{Q}_\infty^{-1} y, y\rangle} = \frac{1}{|\det M|}\mu(M^* y), \qquad (3.4)$$

è l'unica misura invariante per il semigruppo $(\widetilde{P}(t))$ generato da $\widetilde{\mathcal{L}}$ e verificante, a sua volta, la formula

$$P(t) = \Phi_M^{-1}\widetilde{P}(t)\Phi_M.$$

Inoltre, per ogni $1 \le r < \infty$,

$$\Phi_M : L^r(\mu) \to L^r(\widetilde{\mu})$$

è un'isometria. Dal fatto che

$$\langle \Phi_M f, g\rangle_{L^2(\widetilde{\mu})} = \langle f, \Phi_M^{-1} g\rangle_{L^2(\mu)}$$

segue poi che $P(t)$ è simmetrico in $L^2(\mu)$ se e solo se $\widetilde{P}(t)$ è simmetrico in $L^2(\widetilde{\mu})$.

Ora, specifichiamo la scelta di M. Siccome Q è reale, simmetrica e definita positiva, esiste una matrice reale invertibile M_1 tale che $M_1 Q M_1^* = I$. Per la stessa ragione, si può trovare una matrice reale ortogonale M_2 tale che

$$M_2(M_1 Q_\infty M_1^*)M_2^* = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_N}\right) =: D_{\frac{1}{\alpha}}$$

con opportuni $\alpha_j > 0$, $j = 1, \ldots N$. Prendiamo

$$M = M_2 M_1$$

e usiamo la trasformata Φ_M corrispondente; otteniamo così che $\mathcal{L} = \Phi_M^{-1}\widetilde{\mathcal{L}}\Phi_M$, dove

$$\widetilde{\mathcal{L}}u(x) = \frac{1}{2}\Delta u(x) + \langle \widetilde{B}x, \nabla u(x)\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^N, \qquad (3.5)$$

avendo posto $\widetilde{B} = MBM^{-1}$. Osserviamo che, in accordo con (3.4),

$$\widetilde{\mu}(y) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \prod_{k=1}^N \sqrt{\alpha_k} e^{-\frac{1}{2}\langle D_\alpha y, y\rangle}, \quad y \in \mathbb{R}^N$$

è l'unica misura invariante per il semigruppo $(\widetilde{P}(t))$. Vale dunque il seguente lemma.

LEMMA 3.22.

(a) *Esiste M, matrice reale invertibile, tale che* $\mathcal{L}=\Phi_M^{-1}\widetilde{\mathcal{L}}\Phi_M$*, dove* $\widetilde{\mathcal{L}}$ *è dato da* (3.5)*. Inoltre,*
$$\widetilde{Q}_\infty = D_{\frac{1}{\alpha}},$$
con opportuni $\alpha_j > 0$, $j = 1, \dots N$.

(b) *Posto*
$$\widetilde{\mathcal{L}}^0 u = \frac{1}{2}\Delta u - \frac{1}{2}\langle D_\alpha x, \nabla u\rangle, \quad Cu = \langle B_1 x, \nabla u\rangle,$$
con $B_1 = \widetilde{B} + \frac{1}{2}D_\alpha$*, risulta*
$$\widetilde{\mathcal{L}} = \widetilde{\mathcal{L}}^0 + C$$
e
$$B_1 D_{\frac{1}{\alpha}} = -D_{\frac{1}{\alpha}} B_1^*.$$
Inoltre,
$$\widetilde{\mu}(y) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \prod_{k=1}^{N} \sqrt{\alpha_k} e^{-\frac{1}{2}\langle D_\alpha y, y\rangle}$$
è l'unica misura invariante per il semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck $(\widetilde{P}_{\rm sim}(t))$ *generato da* $\widetilde{\mathcal{L}}^0$ *e* $\widetilde{\mathcal{L}}^0$ *è simmetrico.*

Dividiamo la dimostrazione dell'ipercontrattività di $(P(t))$ in due casi, distinguendo a seconda che $(P(t))$ sia simmetrico in $L^2(\mu)$ o no. In virtú del Lemma 3.22 e del fatto che Φ_M è un'isometria da $L^r(\mu)$ su $L^r(\widetilde{\mu})$, studiare l'ipercontrattività di $(P(t))$ in $L^p(\mu)$ è equivalente a studiare quella del semigruppo $(\widetilde{P}(t))$ generato da $\widetilde{\mathcal{L}}$ in $L^p(\widetilde{\mu})$.

3.4.1. $(P(t))$ **simmetrico in** $L^2(\mu)$**.** Premettiamo un lemma che caratterizza la simmetria del semigruppo $(P(t))$. Dalla definizione di $\widetilde{B}$ otteniamo che
$$QB^* = BQ \Longleftrightarrow \widetilde{B}^* = \widetilde{B}. \tag{3.6}$$

LEMMA 3.23. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

(a) $(P(t))$ *è simmetrico in* $L^2(\mu)$.
(b) $Q_\infty B^* = BQ_\infty$.
(c) $Q_t B^* = BQ_t$ *per ogni* $t \geq 0$.
(d) $QB^* = BQ$.

Dim. $(a) \Rightarrow (b)$: Poniamo $f_\lambda(x) = \langle x, \lambda \rangle$, $x, \lambda \in \mathbb{R}^N$. Allora

$$P(t)f_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \langle e^{tB}x - y, \lambda \rangle d\mu_t(y) = \langle e^{tB}x, \lambda \rangle,$$

dove

$$d\mu_t(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} (\det Q_t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\langle Q_t^{-1}y, y\rangle}\, dy.$$

Siccome $\int_{\mathbb{R}^N} \langle x, \lambda_1 \rangle \langle x, \lambda_2 \rangle d\mu(x) = \langle Q_\infty \lambda_1, \lambda_2 \rangle$, otteniamo

$$\langle P(t)f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2} \rangle_{L^2(\mu)} = \langle e^{tB} Q_\infty \lambda_2, \lambda_1 \rangle$$

per ogni λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}^N$. Da qui segue che

$$\begin{aligned} \langle P(t)f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2} \rangle_{L^2(\mu)} \quad &= \quad \langle f_{\lambda_1}, P(t)f_{\lambda_2} \rangle_{L^2(\mu)} \\ \iff \quad & Q_\infty e^{tB^*} = e^{tB} Q_\infty, \end{aligned}$$

quindi $Q_\infty B^* = B Q_\infty$
$(b) \Rightarrow (c)$: Segue da (3.2).
$(c) \Rightarrow (d)$: Si ottiene prendendo la derivata di $Q_t B^*$ e BQ_t nel punto $t = 0$.
$(d) \Rightarrow (a)$: Da (3.6) segue che $\widetilde{B}^* = \widetilde{B}$. Siccome $\widetilde{Q}_\infty = \int_0^\infty e^{s\widetilde{B}} \widetilde{Q} e^{s\widetilde{B}^*}\, ds$, si deduce che $\widetilde{Q}_\infty \widetilde{B} = \widetilde{B} \widetilde{Q}_\infty$ e quindi applicando (3.3) si ottiene che

$$\widetilde{B} = -\frac{1}{2}\widetilde{Q}_\infty^{-1} = -\frac{1}{2}D_\alpha. \tag{3.7}$$

Ora si vede che

$$\langle \widetilde{\mathcal{L}}u, v \rangle_{L^2(\widetilde{\mu})} = -\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v\, d\widetilde{\mu} = \langle u, \widetilde{\mathcal{L}}v \rangle_{L^2(\widetilde{\mu})}$$

per ogni u, $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Usando il fatto che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è un core per $(\widetilde{\mathcal{L}}_2, D(\widetilde{\mathcal{L}}_2))$ in $L^2(\widetilde{\mu})$ si deduce che $R(\lambda, \widetilde{\mathcal{L}}_2)^* = R(\lambda, \widetilde{\mathcal{L}}_2)$ per ogni $\lambda > 0$. Quindi $\widetilde{P}(\cdot)$ è simmetrico in $L^2(\widetilde{\mu})$. $\square$

Nel caso simmetrico in esame, risulta di fatto che $\widetilde{\mathcal{L}} = \widetilde{\mathcal{L}}^0$ e $\widetilde{P}(t) = \widetilde{P}_{\mathrm{sim}}(t)$, secondo la notazione introdotta nel Lemma 3.22. Da (3.1) si ricava che

$$\widetilde{P}(t)f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} (\det \widetilde{Q}_t)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(e^{-\frac{t}{2}D_\alpha}x - y) e^{-\frac{1}{2}<\widetilde{Q}_t^{-1}y, y>} dy, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Siccome $\widetilde{Q}_t = \int_0^t e^{-sD_\alpha}\, ds = D_{\frac{1}{\alpha}}(I - e^{-tD_\alpha}) = \widetilde{Q}_\infty(I - e^{-tD_\alpha})$, usando il cambiamento di variabili $z = (I - e^{-tD_\alpha})^{-\frac{1}{2}}y$ si deduce che

$$\begin{aligned} \widetilde{P}(t)f(x) \quad &= \quad \frac{\det (I - e^{-tD_\alpha})^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} (\det \widetilde{Q}_\infty (I - e^{-tD_\alpha}))^{\frac{1}{2}}} \\ & \qquad \int_{\mathbb{R}^N} f(e^{-\frac{t}{2}D_\alpha}x - (I - e^{-tD_\alpha})^{\frac{1}{2}} z) e^{-\frac{1}{2}<\widetilde{Q}_\infty^{-1} z, z>} dz \end{aligned}$$

ed infine

$$(\widetilde{P}(t)f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(e^{-\frac{t}{2}D_\alpha}x - (I - e^{-tD_\alpha})^{\frac{1}{2}} y) d\widetilde{\mu}(y), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.8}$$

Segue ora il teorema di Nelson [**30**] per l'ipercontrattività di $(P(t))$.

TEOREMA 3.24. *Poniamo* $\alpha_0 = \min_{1\le i\le N} \alpha_i$.

(i) *Se* $p, q \in (1, +\infty)$ *sono t.c.* $(q-1) \le e^{t\alpha_0}(p-1)$ *allora* $P(t)$ *è ipercontrattivo come operatore da* $L^p(\mu)$ *in* $L^q(\mu)$*, cioè*

$$\|P(t)f\|_{L^q(\mu)} \le \|f\|_{L^p(\mu)};$$

(ii) *se* $q-1 > e^{t\alpha_0}(p-1)$*, allora* $P(t)$ *non è limitato come operatore da* $L^p(\mu)$ *in* $L^q(\mu)$.

DIM. Come abbiamo osservato prima, usando l'isometria Φ_M, è sufficiente verificare (i) e (ii) per il semigruppo $(\widetilde{P}(t))$ negli spazi di Lebesgue relativi a $\tilde{\mu}$.

(i) Vediamo per quale costante positiva λ l'ipotesi della Proposizione 3.15, riscritta in termini di Γ, grazie all'Osservazione 3.16, nella forma

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\widetilde{P}(t)f}\Gamma(\widetilde{P}(t)f, \widetilde{P}(t)f)d\widetilde{\mu} \le e^{-\lambda t}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{f}\Gamma(f,f)d\widetilde{\mu} \tag{3.9}$$

è soddisfatta per il semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck.
Scegliamo $\mathcal{A} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e ricordiamo che Γ è così definita $\Gamma(f,f) = |\nabla f|^2$ per ogni $f \in \mathcal{A}$.
Se $f \in \mathcal{A}$ allora, a meno di diagonalizzare B, si ha

$$D_j(\widetilde{P}(t)f)(x) = e^{-t\frac{\alpha_j}{2}}\int_{\mathbb{R}^N} D_j f(e^{-\frac{t}{2}D_\alpha}x - (I - e^{-tD_\alpha})^{\frac{1}{2}}y)d\widetilde{\mu}(y)$$

quindi

$$D_j(\widetilde{P}(t)f)(x) = e^{-t\frac{\alpha_j}{2}}\widetilde{P}(t)D_j f(x).$$

Osserviamo ora che se si considera un'altra funzione $g \in \mathcal{A}$ e se $f \in \mathcal{A}_+$, grazie alla disuguaglianza di Hölder si ricava che

$$(\widetilde{P}(t)g)^2 = \left(\widetilde{P}(t)\Big(\sqrt{f}\,\frac{g}{\sqrt{f}}\Big)\right)^2 \le \big[\widetilde{P}(t)f\big]\left[\widetilde{P}(t)\Big(\frac{g^2}{f}\Big)\right];$$

e quindi

$$\frac{(\widetilde{P}(t)g)^2}{\widetilde{P}(t)f} \le \widetilde{P}(t)\left(\frac{g^2}{f}\right);$$

se $g = D_j f$, dalla disuguaglianza di sopra e dal fatto che $\widetilde{\mu}$ è una misura invariante per $\widetilde{P}(\cdot)$ si ricava che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\widetilde{P}(t)f} |D_j \widetilde{P}(t) f|^2 d\widetilde{\mu} &\leq e^{-t\alpha_0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(\widetilde{P}(t)|D_j f|)^2}{\widetilde{P}(t)f} d\widetilde{\mu} \\ &\leq e^{-t\alpha_0} \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{P}(t) \frac{|D_j f|^2}{f} d\widetilde{\mu} \\ &= e^{-t\alpha_0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|D_j f|^2}{f} d\widetilde{\mu},\end{aligned}$$

da cui segue che

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\widetilde{P}(t)f} |\nabla \widetilde{P}(t) f|^2 d\widetilde{\mu} \leq e^{-t\alpha_0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla f|^2}{f} d\widetilde{\mu}$$

per ogni $f \in \mathcal{A}_+$. Quindi la disuguaglianza (3.9) è verificata con $\lambda = \alpha_0$. Infine, l'ergodicità di $\widetilde{P}(t)$, ossia la proprietà per cui

$$\widetilde{P}(t) f \to \int_{\mathbb{R}^N} f d\widetilde{\mu} \quad \text{in } L^2(\widetilde{\mu}),$$

per $t \to +\infty$, si può verificare usando (3.8) e il teorema di convergenza dominata (si veda [**10**] per il caso generale). Grazie alla Proposizione 3.15, si ricava dunque che $\widetilde{P}(t)$ soddisfa la disuguaglianza di Sobolev logaritmica tight con costante $C = \frac{4}{\alpha_0}$; inoltre, utilizzando il Teorema 3.20, si ottiene che vale l'ipercontrattività

$$\|\widetilde{P}(t)\|_{p \to q(t)} \leq 1.$$

con

$$\frac{q(t)-1}{p-1} = e^{4t/C} = e^{t\alpha_0}.$$

Questo dimostra il punto (i) per $q(t)$; la tesi per $q < q(t)$ segue dal fatto che μ è una misura di probabilità.

(ii) Supponiamo ora che $q - 1 > e^{t\alpha_0}(p-1)$.
Siccome $\alpha_0 = \min_{1 \leq j \leq N} \alpha_j$, esiste allora $k \in \{1, \ldots N\}$ tale che $\alpha_0 = \alpha_k$. Fissiamo $\beta \in \mathbb{R}$ e consideriamo $\lambda = \beta\sqrt{\alpha_k} e_k$ dove $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Sia $f_\lambda(x) = e^{<\lambda, x>}$, $x \in \mathbb{R}^N$, da

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{<\lambda, x>} d\widetilde{\mu} = e^{\frac{\beta^2}{2}}$$

si deduce che

$$||f_\lambda||_{L^p(\widetilde{\mu})} = e^{\frac{p}{2}\beta^2}.$$

Usando (3.8) si ricava che

$$\begin{aligned}(\widetilde{P}(t)f_\lambda)(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{<\lambda, e^{-\frac{t}{2}D_\alpha}x-(I-e^{-tD_\alpha})^{\frac{1}{2}}y>} d\widetilde{\mu}(y) \\ &= f_{e^{-\frac{t}{2}D_\alpha}\lambda}(x)\, e^{\frac{1}{2}(1-e^{-t\alpha_0})\beta^2}\end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{\|\widetilde{P}(t)f_\lambda\|_{L^q(\widetilde{\mu})}}{\|f_\lambda\|_{L^p(\widetilde{\mu})}} = \exp\left\{\frac{\beta^2}{2}\left[e^{-t\alpha_0}(q-1)-(p-1)\right]\right\} \to \infty$$

per $|\beta| \to \infty$ se $(q-1) > e^{t\alpha_0}(p-1)$. □

3.4.2. $(P(t))$ **non simmetrico in** $L^2(\mu)$**.** Definiamo il gruppo

$$S(t)f(x) = f(e^{tB_1}x), \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^N,$$

per $f \in L^p(\widetilde{\mu})$ e $1 < p < \infty$. La notazione è quella del Lemma 3.22. Allora si può provare che

$$\|S(t)f\|_{L^p(\widetilde{\mu})} = \|f\|_{L^p(\widetilde{\mu})} \quad \text{per ogni } f \in L^p(\widetilde{\mu}), \tag{3.10}$$

(si veda [**27**]). Usando [**27**, Teorema 3.4] si deduce che

$$\widetilde{P}(t)f = \lim_{n\to\infty}\left(\widetilde{P}_{\text{sim}}\left(\frac{t}{n}\right)S\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n f, \quad t \geq 0 \tag{3.11}$$

per ogni $f \in L^p(\widetilde{\mu})$, dove $\widetilde{P}_{\text{sim}}(t)$ è il semigruppo simmetrico definito nel Lemma 3.22.
Da qui discende il seguente corollario.

Corollario 3.25. *Se $p, q \in (1, +\infty)$ sono tali che $(q-1) \leq e^{t\alpha_0}(p-1)$, allora*

$$\|P(t)f\|_{L^q(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)}$$

per ogni $f \in L^p(\mu)$, dove $\alpha_0 = \min_{1\leq i\leq N}\alpha_i$.

Inoltre, $(P(t))$ soddisfa la disuguaglianza di Sobolev logaritmica tight con costante $\frac{4}{\alpha_0}$ e quindi l'operatore di Ornstein-Uhlenbeck $\mathcal{L}$ soddisfa la condizione di spectral gap con costante $\frac{2}{\alpha_0}$.

Dim. Ancora una volta, come abbiamo osservato nella dimostrazione del Teorema 3.24, usando Φ_M si ha che l'ipercontrattività di $P(t)$ è equivalente a quella di $\widetilde{P}(t)$.
Utilizzando il Teorema 3.24 e (3.10), si ottiene che

$$\left\|\widetilde{P}_{\text{sim}}\left(\frac{t}{n}\right)S\left(\frac{t}{n}\right)f\right\|_{L^q(\widetilde{\mu})} \leq \left\|S\left(\frac{t}{n}\right)f\right\|_{L^p(\widetilde{\mu})} = \|f\|_{L^p(\widetilde{\mu})}$$

per ogni $f \in L^p(\widetilde{\mu})$, $n \in \mathbb{N}$ e $t > 0$ tale che $e^{t\alpha_0}(p-1) \geq (q-1)$. Quindi, usando (3.11) e la contrattività di $\widetilde{P}_{\rm sim}(t)$ in $L^p(\widetilde{\mu})$ si deduce che

$$\|\widetilde{P}(t)f\|_{L^q(\widetilde{\mu})} \leq \|f\|_{L^p(\widetilde{\mu})}$$

per ogni $f \in L^p(\widetilde{\mu})$.
L'ultima affermazione segue dal teorema di Gross e dal Teorema 3.18. $\square$

Osservazione 3.26. Nel caso simmetrico la condizione $(q-1) \leq e^{t\alpha_0}(p-1)$ per avere l'ipercontrattività è ottimale, come è stato provato nel Teorema 3.24. Per il caso generale, in [**16**, Teorema 2.2] è stato dimostrato con metodi stocastici che la condizione

$$(q-1) \leq (p-1)\|Q_\infty^{-\frac{1}{2}}e^{tB}Q_\infty^{\frac{1}{2}}\|^{-2} \tag{3.12}$$

implica l'ipercontrattività di $(P(t))$. Quindi, certamente, la condizione $(q-1) \leq e^{t\alpha_0}(p-1)$ non è ottimale nel caso non simmetrico. Tuttavia non è noto se la condizione (3.12) lo sia.

CAPITOLO 4

Disuguaglianze Log-Sobolev e ultracontrattività

4.1. Ultracontrattività

In questo capitolo studiamo l'ultracontrattività del semigruppo $(T(t))$, cioè la limitatezza di $T(t)$ da $L^1(\mu)$ in $L^\infty(\mu)$.

Per dimostrare questo risultato usiamo l'approccio di Davies e Simon, i quali hanno introdotto nel 1984 una famiglia di disuguaglianze di Sobolev logaritmiche (si vedano [**13**], [**12**]).

Definizione 4.1. *Data la funzione concava e crescente* $\Phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$*, diremo che vale la disuguaglianza* $(S\Phi)$ *se risulta*

$$\mathrm{Ent}(f^2) \leq \|f\|_2^2 \Phi\left(\frac{\mathcal{E}(f,f)}{\|f\|_2^2}\right), \quad \forall f \in \mathcal{A}_+. \tag{4.1}$$

Nel caso particolare di $\Phi(x) = Cx + M$, la precedente disuguaglianza diventa la disuguaglianza di Sobolev logaritmica di costanti M e C. Se invece prendiamo

$$\Phi(x) = \frac{N}{2}\log(C_1 + C_2 x),$$

la (4.1) diventa

$$\mathrm{Ent}(f^2) \leq \frac{N}{2}\|f\|_2^2 \log\left(C_1 + C_2\frac{\mathcal{E}(f,f)}{\|f\|_2^2}\right), \quad \forall f \in \mathcal{A}_+, \tag{4.2}$$

che è nota come disuguaglianza di Sobolev debole. Ricordiamo che la disuguaglianza di Sobolev classica è data da

$$\|f\|_{\frac{2N}{N-2}} \leq C_1\|f\|_2 + C_2\mathcal{E}(f,f)^{1/2}, \quad \forall f \in \mathcal{A}_+. \tag{4.3}$$

È facile notare che la disuguaglianza di Sobolev implica la disuguaglianza di Sobolev debole. Si può però vedere che vale anche l'implicazione inversa (vedere ad esempio [**6**, Teorema 10.2]).

Teorema 4.2. *Supponiamo che valga la disuguaglianza (4.1) con* $\Phi \in \mathcal{C}^1$ *funzione concava strettamente crescente e tale che*

$$\int_B^\infty \frac{\Phi'(x)}{x} dx < +\infty,$$

per qualche $B > 0$. *Allora, per ogni* $\lambda > 0$ *si ha l'ultracontrattività*

$$\|T(t_\lambda)\|_{1\to\infty} \le e^{m_\lambda},$$

dove

$$t_\lambda = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\Phi'(\lambda x)}{\sqrt{x(x-1)}} dx, \quad m_\lambda = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\Psi(\lambda x)}{x\sqrt{x(x-1)}} dx,$$

con $\Psi(x) = \Phi(x) - x\Phi'(x)$.

Dim. Mostriamo anzitutto che t_λ e m_λ sono ben definiti; dato che Φ' è decrescente, da

$$\int_B^\infty \frac{\Phi'(x)}{x} dx < +\infty$$

si deduce che $\Phi'(x) \to 0$ per $x \to +\infty$. Inoltre, dato che

$$\frac{\Psi(x)}{x^2} = -\left(\frac{\Phi(x)}{x}\right)',$$

vale anche

$$\int_B^\infty \frac{\Psi(x)}{x^2} dx < +\infty,$$

da cui segue che m_λ è ben definito. Dalla concavità di Φ si ricava anche che, per ogni x, x_0

$$\Phi(x) \le \Phi(x_0) + \Phi'(x_0)(x - x_0);$$

quindi, dalla disuguaglianza (4.1)

$$\mathrm{Ent}(f^2) \le \|f\|_2^2 \left(\Phi(x_0) + \Phi'(x_0)\left(\frac{\mathcal{E}(f,f)}{\|f\|_2^2} - x_0\right)\right),$$

da cui

$$\mathrm{Ent}(f^2) \le \Psi(x_0)\|f\|_2^2 + \Phi'(x_0)\mathcal{E}(f,f),$$

cioè la disugualglianza di Sobolev logaritmica con costanti $M = \Psi(x_0)$ e $C = \Phi'(x_0)$. Quindi, grazie a quanto già notato nella dimostrazione del Teorema di Gross 3.20, si ricava che per ogni $f \in \mathcal{A}_+$ e per ogni $x > 0$

$$\mathrm{Ent}(f^p) \le \Psi(x)\|f\|_p^p - \frac{\Phi'(x)p^2}{4(p-1)}\int_{\mathbb{R}^N} f^{p-1}A_2 f d\mu.$$

Ponendo $x = \frac{\lambda p^2}{4(p-1)}$ se ne deduce

$$\mathrm{Ent}(f^p) \le \Psi\left(\frac{\lambda p^2}{4(p-1)}\right)\|f\|_p^p - \frac{\Phi'\left(\frac{\lambda p^2}{4(p-1)}\right)p^2}{4(p-1)}\int_{\mathbb{R}^N} f^{p-1}A_2 f d\mu. \quad (4.4)$$

Definiamo quindi $p(s)$ e $m(s)$ con $s \in [0,t)$ come le soluzioni, per t e λ fissati, del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{ds} = \dfrac{4(p-1)}{\Phi'(\lambda p^2/(4(p-1)))}, & p(0)=1, \lim_{s\to t} p(s) = +\infty \\[2ex] \dfrac{dm}{ds} = \dfrac{4(p-1)}{p^2}\dfrac{\Psi(\lambda p^2/(4(p-1)))}{\Phi'(\lambda p^2/(4(p-1)))}, & m(0)=0. \end{cases}$$

Per questo sistema di equazioni differenziali si ha esistenza; infatti, se si considera

$$\tilde{t}_\lambda = \int_1^\infty \Phi'\left(\frac{\lambda p^2}{4(p-1)}\right)\frac{dp}{4(p-1)} < +\infty$$
$$\tilde{m}_\lambda = \int_1^\infty \Psi\left(\frac{\lambda p^2}{4(p-1)}\right)\frac{dp}{p^2} < +\infty;$$

queste due funzioni definiscono esattamente t_λ e m_λ dell'enunciato. Infatti, dividendo gli integrali tra 1 e 2 e tra 2 e ∞ ed effettuando il cambio di variabili

$$x = \frac{\lambda p^2}{4(p-1)}$$

si ottiene che $\tilde{t} = t$ e $\tilde{m} = m$. Procedendo come nella dimostrazione del Teorema di Gross 3.20, otteniamo

$$\mathcal{H}'(s) = \frac{\mathcal{H}(s)}{\int_{\mathbb{R}^N} u(s)^{p(s)}d\mu}\frac{p'(s)}{p^2(s)}\Bigg\{\mathrm{Ent}\big(u(s)^{p(s)}\big) - \frac{p^2(s)}{p'(s)}\Bigg(m'(s)\int_{\mathbb{R}^N} u(s)^{p(s)}d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} u(s)^{q(s)-1}A_2 u(s)d\mu\Bigg)\Bigg\}$$

dove $\mathcal{H}(s) = e^{-m(s)}\left(\int_{\mathbb{R}^N} u(s)^{p(s)}d\mu\right)^{\frac{1}{p(s)}}$ e $u(s) = T(s)f$, $s \in [0,t)$. Siccome $p(0) = 1$, $m(0) = 0$,

$$\frac{p^2(s)}{p'(s)}m'(s) = \Psi\left(\frac{\lambda p^2(s)}{4(p(s)-1)}\right) \text{ e } \frac{p^2(s)}{p'(s)} = \frac{\Phi'\left(\frac{\lambda p^2(s)}{4(p(s)-1)}\right)p^2(s)}{4(p(s)-1)},$$

usando (4.4), si ottiene che

$$\mathcal{H}'(s) \le 0$$

per ogni $s \in [0,t)$, e quindi

$$\|T(s)f\|_{p(s)} \le e^{m(s)}\|f\|_1$$

dove

$$s = \int_1^{p(s)} \Phi'\left(\frac{\lambda p^2}{4(p-1)}\right)\frac{dp}{4(p-1)}$$

e

$$m(s) = \int_1^{p(s)} \Psi\left(\frac{\lambda p^2}{4(p-1)}\right)\frac{dp}{p^2}.$$

Sfruttando anche la contrattività del semigruppo, abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \|T(t_\lambda f)\|_{p(s)} &= \|T(t_\lambda - s)T(s)f\|_{p(s)} \\ &\leq \|T(s)f\|_{p(s)} \\ &\leq e^{m(s)}\|f\|_1. \end{aligned}$$

Tenendo presente che

$$m_\lambda = \lim_{s\to t} m(s),$$

abbiamo provato che

$$\|T(t_\lambda)f\|_\infty \leq e^{m_\lambda}\|f\|_1.$$

□

Il teorema appena dimostrato ha il seguente corollario.

COROLLARIO 4.3. *Sotto le medesime ipotesi del Teorema 4.2 con, in aggiunta, la richiesta che per ogni $x \in [0,1]$ valga*

$$\Phi'(0) - \Phi'(x) \leq kx,$$

si ha

i) *se $\Phi(0) \neq 0$, allora*

$$\limsup_{t\to+\infty} \|T(t)\|_{1\to+\infty} \leq e^{\Phi(0)};$$

ii) *se $\Phi(0) = 0$, allora per $t \to +\infty$ si ha che*

$$\|T(t)\|_{1\to+\infty} \leq \exp\left(C\exp\left(-\frac{2t}{\Phi'(0)}\right)\right)(1+\varepsilon(t))$$

con $\lim_{t\to+\infty}\varepsilon(t) = 0$,

$$C = 2e^M \int_0^\infty \frac{\Psi(x)}{x^2}dx, \quad M = \int_0^1 \left(\frac{\Phi'(x)}{\Phi'(0)} - 1\right)\frac{dx}{x} + \int_1^\infty \frac{\Phi'(x)}{\Phi'(0)}\frac{dx}{x}.$$

DIM. Siccome si ha che

$$2t_\lambda = \int_\lambda^1 \frac{\Phi'(u)}{\sqrt{u(u-\lambda)}}du + \int_1^\infty \frac{\Phi'(u)}{\sqrt{u(u-\lambda)}}du,$$

dal teorema di convergenza dominata segue che

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_1^\infty \frac{\Phi'(u)}{\sqrt{u(u-\lambda)}}du = \int_1^\infty \frac{\Phi'(u)}{u}du.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\int_\lambda^1 \frac{\Phi'(u)}{\sqrt{u(u-\lambda)}}du &= \int_\lambda^1 \frac{\Phi'(u)-\Phi'(0)}{\sqrt{u(u-\lambda)}}du + \int_\lambda^1 \frac{\Phi'(0)}{\sqrt{u(u-\lambda)}}du \\ &= \int_\lambda^1 \frac{\Phi'(u)-\Phi'(0)}{\sqrt{u(u-\lambda)}}du \\ &\quad +\Phi'(0)\left(\log\frac{1}{\lambda}+2\log(1+\sqrt{1-\lambda})\right);\end{aligned}$$

dato che,

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_\lambda^1 \frac{\Phi'(u)-\Phi'(0)}{\sqrt{u(u-\lambda)}}du = \int_0^1 \frac{\Phi'(u)-\Phi'(0)}{u}du,$$

applicando il teorema di convergenza dominata ancora una volta se ne deduce che

$$2t_\lambda = -\Phi'(0)\log\lambda + C_1 + \varepsilon(\lambda),$$

dove

$$C_1 = \int_0^1 \frac{\Phi'(u)-\Phi'(0)}{u}du + \int_1^\infty \frac{\Phi'(u)}{u}du + 2(\log 2)\Phi'(0)$$

ed $\varepsilon(\lambda)\to 0$, per $\lambda\to 0$. Quindi, ricavando λ, si ottiene

$$\lambda = 4e^M \exp\left(-\frac{2t}{\Phi'(0)}\right)(1+\varepsilon(t))$$

con $\varepsilon(t)\to 0$ per $t\to\infty$. Per convergenza monotona, si ottiene che

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to 0} 2m_\lambda &= \Psi(0)\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x(x-1)}} \\ &= \Psi(0)\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}} = 2\Psi(0) = 2\Phi(0),\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo effettuato il cambio di variabili $u = 1/x$. Abbiamo quindi dimostrato il punto i). Per dimostrare ii), facciamo uno sviluppo di Taylor per Φ in un intorno di $x = 0$ per dimostrare che $\Psi(x)/x^2$ è limitato, usando il fatto che $\Phi(0) = 0$. Quindi, con il teorema della convergenza dominata, si vede che

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_{2\lambda}^\infty \frac{\Psi(u)}{u^2}\frac{du}{\sqrt{1-\lambda/u}} = \int_0^\infty \frac{\Psi(u)}{u^2}du.$$

Inoltre, dalla limitatezza di $\Psi(u)/u^2$ segue che

$$\left|\int_\lambda^{2\lambda} \frac{\Psi(u)}{u^2}\frac{du}{\sqrt{1-\lambda/u}}\right| \le C\int_\lambda^{2\lambda}\frac{du}{\sqrt{1-\lambda/u}} = C\lambda\int_1^2\sqrt{\frac{v}{v-1}}dv \to 0$$

per $\lambda\to 0$. Quindi

$$2m_\lambda = \lambda\left(\int_0^\infty \frac{\Psi(x)}{x^2}dx + \varepsilon(\lambda)\right).$$

Basta quindi inserire l'espressione di λ trovata per ottenere che

$$m_\lambda \leq 2e^M \exp\left(-\frac{2t}{\Phi'(0)}\right)(1+\varepsilon(\lambda))\int_0^\infty \frac{\Psi(x)}{x^2}dx$$

per $\lambda \to 0$. Da cui segue, usando il Teorema 4.2, che

$$\|T(t)\|_{1\to+\infty} \leq \exp\left(C\exp\left(-\frac{2t}{\Phi'(0)}\right)\right)(1+\varepsilon(t))$$

per $t \to \infty$. □

Il seguente Corollario segue ancora da uno sviluppo di Taylor di m_λ intorno a $\lambda = 0$.

Corollario 4.4. *Sotto le medesime ipotesi del Teorema 4.2 e con in aggiunta la condizione*

$$\Phi'(x) = \frac{N}{2x}$$

per $|x|$ grande, segue che esiste $C > 0$ tale che per $t \to 0$

$$\|T(t)\|_{1\to+\infty} \leq Ct^{-N/2}. \tag{4.5}$$

4.2. Il teorema di Varopoulos

Dalla sezione precedente possiamo facilmente dedurre dalla disuguaglianza di Sobolev classica (4.3) una stima della norma del semigruppo come in (4.5). Vediamo in che modo. Abbiamo osservato che la disuguaglianza classica di Sobolev implica quella debole (4.2) che è la disuguaglianza ($S\Phi$) per la particolare scelta

$$\Phi(x) = \frac{N}{2}\log(C_1 + C_2 x),$$

inoltre la funzione Φ così definita soddisfa le ipotesi del Corollario 4.4, pertanto otteniamo la stima (4.5) per la norma del semigruppo. Ora siamo interessati ad ottenere la disuguaglianza di Sobolev classica a partire dalla stima della norma operatoriale da L^1 in L^∞ del semigruppo. Proveremo il seguente risultato dovuto a Varopoulos ([**34**]).

Teorema 4.5. *Siano $N > 2$, $T(t) = e^{-tA}$ un semigruppo di Markov, simmetrico e analitico in L^2. Supponiamo che valga*

$$\|T(t)f\|_\infty \leq c_1 t^{-\frac{N}{2}}\|f\|_1 \tag{4.1}$$

per ogni $f \in L^1$, per ogni $t > 0$ e per qualche c_1 costante positiva. Allora esiste $c_2 > 0$ tale che

$$\|f\|^2_{\frac{2N}{N-2}} \leq c_2(\|f\|_2^2 + \mathcal{E}(f,f))$$

per ogni $f \in D(A)$.

Per provare questo teorema faremo ricorso ad alcuni risultati classici di interpolazione quali il teorema di Riesz Thorin e il teorema di Marcinkiewicz (Appendice C). Esprimeremo inoltre l'operatore $A^{\frac{1}{2}}$ mediante una formula integrale di rappresentazione delle potenze frazionarie di un operatore settoriale A in termini del semigruppo generato $(T(t))$ (Appendice A). Nella dimostrazione otterremo una stima piú raffinata di quella richiesta. Proveremo infatti che

$$\|f\|^2_{\frac{2N}{N-2}} \leq C\ \mathcal{E}(f,f). \tag{4.2}$$

Dim. Poniamo $B = A^{-\frac{1}{2}}$. Risulta

$$B = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}T(t)dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}T(t)dt.$$

Osserviamo che dalla simmetria di $T(t)$ segue che anche B è simmetrico. Per questo motivo, se proviamo che B è continuo come operatore da L^2 in $L^{\frac{2N}{N-2}}$ abbiamo la tesi. Infatti, dalla disuguaglianza

$$\|Bf\|^2_{\frac{2N}{N-2}} \leq C\|f\|_2^2$$

segue

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{\frac{2N}{N-2}} &\leq C\|A^{\frac{1}{2}}f\|_2^2 \\ &= C\int_{\mathbb{R}^N} A^{\frac{1}{2}}fA^{\frac{1}{2}}f = C\int_{\mathbb{R}^N} fAf = C\mathcal{E}(f,f),\end{aligned}$$

cioè (4.2).

Decomponiamo l'operatore B nella somma di B_1 e B_2 dove

$$B_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_T^\infty t^{-\frac{1}{2}}T(t)dt,$$

$$B_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^T t^{-\frac{1}{2}}T(t)dt.$$

Il valore di T sarà scelto opportunamente in seguito.

Applichiamo il teorema d'interpolazione di Riesz-Thorin per provare la seguente disuguaglianza

$$\|e^{-tA}f\|_\infty \leq Ct^{-\frac{N}{2q}}\|f\|_q \tag{4.3}$$

per ogni $f \in L^q$, $1 < q < \infty$, $t > 0$ e per qualche C costante positiva. Per la contrattività del semigruppo da L^∞ in L^∞, risulta

$$\|e^{-tA}f\|_\infty \leq \|f\|_\infty;$$

per ipotesi

$$\|e^{-tA}f\|_\infty \leq c_1 t^{-\frac{N}{2}}\|f\|_1.$$

Per il Teorema C.1, dalle due precedenti disuguaglianze otteniamo

$$\|e^{-tA}f\|_\infty \leq c\,t^{-\frac{N}{2}\vartheta}\|f\|_{\frac{1}{\vartheta}}$$

per ogni $0 < \vartheta < 1$ o, equivalentemente, posto $q = \frac{1}{\vartheta}$,

$$\|e^{-tA}f\|_\infty \leq c\,t^{-\frac{N}{2q}}\|f\|_q$$

per ogni $1 < q < \infty$. Servendoci della disuguaglianza appena provata, stimiamo B_1. Abbiamo così

$$\|B_1 f\|_\infty \leq \frac{c}{\sqrt{\pi}}\int_T^\infty t^{-\frac{1}{2}-\frac{N}{2q}}\|f\|_q dt = C\|f\|_q T^{\frac{1}{2}-\frac{N}{2q}} \tag{4.4}$$

per ogni $1 < q < N$. Sia $r > 1$ tale che $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{N}$. Proviamo che l'operatore $A^{-\frac{1}{2}}$ è di tipo debole (q, r) per ogni $1 < q < N$. Sia $\lambda > 0$ e scegliamo T come estremo d'integrazione in B_1 e B_2 in modo che

$$\frac{\lambda}{2} = C\|f\|_q T^{\frac{1}{2}-\frac{N}{2q}}.$$

Per (4.4), $\|B_1 f\|_\infty \leq \frac{\lambda}{2}$.
Risulta

$$\{x : |A^{-\frac{1}{2}}f(x)| \geq \lambda\} \subset \left\{x : |B_1 f(x)| \geq \frac{\lambda}{2}\right\} \bigcup \left\{x : |B_2 f(x)| \geq \frac{\lambda}{2}\right\}.$$

Osserviamo che, essendo $\|B_1 f\|_\infty \leq \frac{\lambda}{2}$, l'insieme $\{x : |B_1 f(x)| \geq \frac{\lambda}{2}\}$ ha misura nulla, pertanto

$$\begin{aligned}
\mu\left\{x : |A^{-\frac{1}{2}}f(x)| \geq \lambda\right\} &\leq \mu\left\{x : |B_2 f(x)| \geq \frac{\lambda}{2}\right\} \\
&\leq \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-q}\|B_2 f\|_q^q \\
&\leq \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-q}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^T t^{-\frac{1}{2}}\|e^{-At}f\|_q dt\right)^q \\
&\leq \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-q}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^T t^{-\frac{1}{2}}\|f\|_q dt\right)^q \\
&= \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-q}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\|f\|_q T^{\frac{1}{2}}\right)^q \\
&\leq C_q\lambda^{-q}\left(\frac{\lambda}{\|f\|_q}\right)^{\frac{q}{1-\frac{N}{q}}}\|f\|_q^q = C\lambda^{-r}\|f\|_q^r.
\end{aligned}$$

Abbiamo appena provato che $A^{-\frac{1}{2}}$ è di tipo debole (q, r) per ogni $1 < q < N$ ed r definito come sopra. In particolare, è possibile scegliere $1 < q_1, q_2 < N$

(e di conseguenza saranno determinati r_1, r_2) in modo che

$$\frac{1}{2} = \frac{\vartheta}{q_1} + \frac{(1-\vartheta)}{q_2}$$

e

$$\frac{N}{2} - \frac{1}{N} = \frac{\vartheta}{r_1} + \frac{1-\vartheta}{r_2}$$

per qualche $0 < \vartheta < 1$. A questo punto, usando il Teorema C.3, possiamo concludere che $A^{-\frac{1}{2}}$ è continuo da L^2 in $L^{\frac{2N}{N-2}}$ e, per l'osservazione iniziale, da qui segue immediatamente la tesi. $\square$

Motiviamo brevemente l'uso del teorema di Marcinkiewicz nella dimostrazione del teorema di Varopoulos. In un primo momento, si potrebbe tentare di provare la continuità di $(I + A)^{-\frac{1}{2}}$ come operatore da L^2 in $L^{\frac{2N}{N-2}}$, da cui seguirebbe la disuguaglianza di Sobolev classica. A tal fine potremmo procedere come nella dimostrazione appena vista, ossia rappresentando $(I+A)^{-\frac{1}{2}}$ mediante la formula per potenze frazionarie di operatori settoriali usata in precedenza e spezzare l'integrale in B_1 e B_2 scegliendo come estremo d'integrazione $T = 1$. Usando il teorema di Riesz-Thorin riusciremmo a provare la continuità di B_1, mentre riusciremmo a provare la continuità di B_2 da L^2 in L^p per ogni $p < \frac{2N}{N-2}$. Otterremmo l'esponente di nostro interesse come caso limite. Da qui la necessità di ricorrere ad un altro risultato d'interpolazione quale il teorema di Marcinkiewicz.

APPENDICE A

Semigruppi C_0

In questa sezione presentiamo alcuni risultati relativi al problema di Cauchy astratto per un operatore lineare illimitato in uno spazio di Banach e la relazione che intercorre con la teoria dei semigruppi C_0. Per ulteriori dettagli rimandiamo ai testi [**14**], [**2**] e [**31**].

Consideriamo il problema di Cauchy astratto

$$(PCA) \qquad \begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Au(t), & t \geq 0, \\ u(0) = x, \end{cases}$$

dove A è un operatore lineare, possibilmente illimitato, con dominio $D(A)$ in uno spazio di Banach X e $x \in X$. Una *soluzione classica* di (PCA) è una funzione $u \in C^1(\mathbb{R}_+, X)$ tale che $u(t) \in D(A)$ per ogni $t \geq 0$ e u soddisfa (PCA).

Ora introduciamo i semigruppi C_0.

Definizione A.1. *Una famiglia di operatori lineari e limitati in X $(T(t))_{t\geq 0}$ è detta un semigruppo C_0 se*

(i) $\lim_{t\downarrow 0} \|T(t)x - x\| = 0, \quad \forall x \in X,$
(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ *per ogni* $t, s \geq 0$ *e* $T(0) = Id$.

Il generatore di $(T(t))$ è l'operatore lineare A definito da

$$\begin{aligned} D(A) &= \{x \in X : \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ esiste } \}, \\ Ax &= \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad x \in D(A). \end{aligned}$$

Si può provare che il generatore è sempre un operatore chiuso e densamente definito. Il dominio $D(A)$ soddisfa

$$T(t)D(A) \subseteq D(A) \text{ and } AT(t)x = T(t)Ax, \quad \forall t \geq 0, \; x \in D(A).$$

Inoltre, se $x \in D(A)$,

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x, \quad t \geq 0.$$

Ciò prova che se $x \in D(A)$, il problema (PCA) ha una soluzione classica $u(\cdot) := T(\cdot)x$. Diciamo che (PCA) è *ben posto* se per ogni dato iniziale $x \in D(A)$ esiste una soluzione classica $u(\cdot, x)$ e inoltre

> per ogni successione $(x_n) \subset D(A)$ con $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ e $x \in D(A)$, le corrispondenti soluzioni classiche $u(\cdot, x_n)$ convergono a $u(\cdot, x)$ uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}_+$.

Il seguente teorema mostra che la buona positura è equivalente alla generazione di semigruppi C_0.

Teorema A.2. *Sia A un operatore lineare con dominio $D(A)$ in uno spazio di Banach X. Le seguenti affermazioni sono equivalenti*

(a) *$(A, D(A))$ è il generatore di un semigruppo C_0 in X.*
(b) *Il problema di Cauchy astratto (PCA) associato ad A è ben posto.*

D'altra parte, per un semigruppo C_0 $(T(t))$, si ha

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad t \geq 0,$$

per opportune costanti $\omega \in \mathbb{R}$ e $M \geq 1$. Se denotiamo con

$$\omega_0(A) := \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \text{ esiste } M_\omega \geq 1 \text{ tale che } \|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}, \forall t \geq 0\}$$

il growth bound di $(T(t))$ con generatore A, allora $(\omega_0(A), \infty) \subset \rho(A)$, dove $\rho(A)$ è l'insieme risolvente di A, e l'operatore risolvente $R(\lambda, A)$ di A è dato da

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt, \quad x \in X,\ \lambda > \omega_0(A).$$

La proposizione seguente contiene una serie di proprietà dei semigruppi C_0 e dei loro generatori.

Proposizione A.3. *Sia $(T(t))$ un semigruppo C_0 in uno spazio di Banach X con generatore $(A, D(A))$. Allora valgono le seguenti affermazioni.*

(i) $\int_0^t T(s)x\,ds \in D(A)$ *e* $A\int_0^t T(s)x\,ds = T(t)x - x$ *per ogni* $x \in X$ *e* $t \geq 0$.
(ii) $A\int_0^t T(s)x\,ds = \int_0^t T(s)Ax\,ds = T(t)x - x$ *per ogni* $x \in D(A)$ *e* $t \geq 0$.
(iii) $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x$ *per ogni* $x \in X$.
(iv) $R(\lambda, A)T(t) = T(t)R(\lambda, A)$ *per ogni* $\lambda \in \rho(A)$ *e* $t \geq 0$.

In molte applicazioni è piuttosto complicato identificare il dominio del generatore di un semigruppo. Per questo conviene cercare un sottospazio di $D(A)$ "grande" abbastanza, nel senso precisato di seguito.

DEFINIZIONE A.4. *Un sottospazio D di $D(A)$, dominio di un operatore lineare A in uno spazio di Banach X è chiamato* **core** *per A se D è denso in $D(A)$ per la norma del grafico*

$$\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\|, \quad x \in D(A).$$

Un utile criterio affinchè un sottospazio risulti un core per il generatore di un semigruppo C_0 è dato dalla proposizione seguente.

PROPOSIZIONE A.5. *Sia $(A, D(A))$ il generatore di un semigruppo C_0 $(T(t))_{t\geq 0}$ in uno spazio di Banach X e sia D un sottospazio di $D(A)$. Se D è denso in X e invariante per $(T(t))_{t\geq 0}$, allora D è un core per A.*

Ricordiamo la formula integrale di rappresentazione delle potenze frazionarie di un operatore settoriale A in termini del semigruppo generato $(T(t))$ (si veda per esempio [**2**, Pag. 170]).

PROPOSIZIONE A.6. *Sia A il generatore di un semigruppo C_0 $(T(t))$ limitato in uno spazio di Banach X. Se $0 \in \rho(A)$, allora*

$$(-A)^{-z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty t^{z-1} T(t)\, dt$$

per $0 < \Re z < 1$.

Ci proponiamo ora di introdurre una classe importante di semigruppi. Nel seguito, denotiamo il settore di $\mathbb{C}$ di angolo δ mediante

$$\Sigma_\delta := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \delta\} \setminus \{0\}.$$

DEFINIZIONE A.7. *Una famiglia $(T(z))_{z\in\Sigma_\theta\cup\{0\}} \subset \mathcal{L}(X)$, X spazio di Banach, è detta un semigruppo analitico (di angolo $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$) se*

(a1) $T(0) = Id$ *e* $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ *per ogni* $z_1, z_2 \in \Sigma_\theta$.
(a2) *La funzione* $z \mapsto T(z)$ *è analitica in* Σ_θ.
(a3) $\lim_{\Sigma_{\theta'}\ni z\to 0} T(z)x = x$ *per ogni* $x \in X$ *e* $0 < \theta' < \theta$.

Se, in aggiunta

(a4) $\|T(z)\|$ *è limitato in* $\Sigma_{\theta'}$ *per ogni* $0 < \theta' < \theta$,

chiamiamo $(T(z))_{z\in\Sigma_\theta\cup\{0\}}$ *semigruppo analitico limitato.*

Il teorema che segue fornisce una caratterizzazione molto utile dei generatori di semigruppi analitici limitati.

Teorema A.8. *Sia* $(A, D(A)$ *un operatore in uno spazio di Banach* X. *Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*

(i) *A genera un semigruppo analitico limitato* $(T(z))_{z\in\Sigma_\theta\cup\{0\}}$ *in* X*;*
(ii) *A genera un semigruppo C_0 limitato* $(T(t))$ *in X con* $\mathrm{rg}(T(t)) \subset D(A)$ *per ogni* $t > 0$, *e*
$$\|AT(t)\| \leq \frac{M}{t}$$
per qualche costante $M > 0$*;*
(iii) *esiste* $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ *tale che* $\mathrm{e}^{\pm i\delta}A$ *generano semigruppi C_0 limitati in X;*
(iv) $\Sigma_{\theta+\frac{\pi}{2}} \subset \rho(A)$ *e per ogni* $\varepsilon \in (0, \theta)$ *esiste* $M_\varepsilon \geq 1$ *tale che*
$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|} \qquad \textit{per ogni } 0 \neq \lambda \in \overline{\Sigma}_{\theta+\frac{\pi}{2}-\varepsilon}.$$

APPENDICE B

Stime di Schauder e disuguaglianza di Harnack

Consideriamo l'operatore

$$Lu(t,x) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(t,x) D_{x_i x_j} u + \sum_{i=1}^{N} b_i(t,x) D_{x_i} u + c(t,x)u, \tag{B.5}$$

e supponiamo che i coefficienti a_{ij}, b_i, c siano funzioni a valori reali definite in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Assumiamo che

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(t,x)\xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2, \tag{B.6}$$

per ogni $x, \xi \in \mathbb{R}^N$, $t \in \mathbb{R}$ e per qualche costante $\lambda > 0$.

B.1. Stime di Schauder interne

Assumiamo, oltre a (B.5), (B.6), che $a_{ij}, b_i, c \in \mathcal{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$, per qualche $\alpha \in (0,1)$, dove $\phi \in \mathcal{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ se e solo se ϕ è limitata e soddisfa

$$[\phi]_{\frac{\alpha}{2},\alpha} := \sup_{\substack{(t_1,x_1),(t_2,x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \\ (t_1,x_1) \neq (t_2,x_2)}} \frac{|\phi(t_1,x_1) - \phi(t_2,x_2)|}{(|x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|^{1/2})^{\alpha}} < +\infty.$$

In tal caso, poniamo $\|\phi\|_{\frac{\alpha}{2},\alpha} = \|\phi\|_{\infty} + [\phi]_{\frac{\alpha}{2},\alpha}$. Sia $M > 0$ tale che

$$\|a_{ij}\|_{\frac{\alpha}{2},\alpha} + \|b_i\|_{\frac{\alpha}{2},\alpha} + \|c\|_{\frac{\alpha}{2},\alpha} \leq M,$$

per ogni $i, j = 1, \ldots, N$.
Diremo che $\phi \in \mathcal{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ se e solo se ϕ ammette derivate parziali rispetto a t fino al primo ordine e rispetto a x fino al secondo ordine, tutte limitate e inoltre

$$[\phi]_{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha} := [\phi_t]_{\frac{\alpha}{2},\alpha} + \sum_{i,j=1}^{N} [D_{x_i x_j}\phi]_{\frac{\alpha}{2},\alpha} < +\infty.$$

In tal caso, poniamo

$$\|\phi\|_{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha} = \|\phi\|_\infty + \|\phi_t\|_\infty + \|\nabla_x\phi\|_\infty + \|D_x^2\phi\|_\infty + [\phi]_{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}.$$

L' interpretazione degli spazi di Hölder parabolici $\mathcal{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(Q)$, $\mathcal{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(Q)$, con $Q \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, e delle relative norme è quella usuale. Una volta stabilite le notazioni, possiamo enunciare le stime di Schauder interne (si vedano ad esempio [**15**, Capitolo 3, Sezione 2], [**20**, Teorema 8.11.1]).

TEOREMA B.1. *Siano $Q_1 \subset Q_2$ sottoinsiemi di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Allora esiste una costante $C > 0$ che dipende solo da $N, \alpha, \lambda, M, Q_1, Q_2$ tale che per ogni $u \in \mathcal{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(Q_2)$ risulta*

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(Q_1)} \leq C(\|u_t - Lu\|_{\mathcal{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(Q_2)} + \|u\|_{L^\infty(Q_2)}) \tag{B.1}$$

B.2. Disuguaglianza di Harnack parabolica

In questa sezione assumiamo che i coefficienti dell'operatore L siano funzioni misurabili tali che

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \leq \lambda^{-1}|\xi|^2,$$

e

$$|b(t,x)| \leq \lambda^{-1}, \quad 0 \leq c(t,x) \leq \lambda^{-1},$$

dove $b(t,x) = \big(b_1(t,x)\dots,b_N(t,x)\big)$ e $\lambda \in]0,1]$. Se $\theta, R > 0$, poniamo

$$Q(\theta,R) = (0,\theta R^2) \times \left\{x \in \mathbb{R}^N \,:\, |x| < R\right\}.$$

Indichiamo infine con $W^{1,2}_{N+1}(Q(\theta,R))$ lo spazio delle funzioni $u = u(t,x)$ che appartengono a $L^{N+1}(Q(\theta,R))$ insieme alle derivate deboli Du, D^2u, u_t. La seguente versione della disuguaglianza di Harnack si trova in [**21**, Teorema 1.1].

TEOREMA B.2. *Siano $\theta > 1, R \leq 2$, $u \in W^{1,2}_{N+1}(Q(\theta,R))$, $u \geq 0$ e $u_t = Lu$ q.o. in $Q(\theta,R)$. Allora esiste una costante $C > 0$, dipendente solo da θ, λ e N tale che*

$$u(R^2,0) \leq C\,u(\theta R^2,x), \quad |x| \leq \frac{1}{2}R.$$

Inoltre, la costante C resta limitata dal basso e dall'alto se $(1-\theta)^{-1}$ e λ^{-1} variano entro intervalli limitati.

APPENDICE C

Teoremi di interpolazione

Nel seguito $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ e $(\Sigma, \mathcal{F}, \nu)$ denotano due spazi di misura, con $\mathcal{B}, \mathcal{F}$ $\sigma-$algebre di sottoinsiemi di Ω e Σ rispettivamente e μ, ν misure positive $\sigma-$finite su $\mathcal{B}$ e $\mathcal{F}$, rispettivamente. Per ulteriori dettagli sui teoremi di seguito enunciati rimandiamo al testo [**32**].

Teorema C.1 (Riesz-Thorin). *Siano* $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ *e sia* $T : L^{p_0}(\Omega, \mu) \cap L^{p_1}(\Omega, \mu) \to L^{q_0}(\Sigma, \nu) \cap L^{q_1}(\Sigma, \nu)$ *un operatore lineare tale che*

$$\|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0} \quad e \quad \|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1}$$

per ogni $f \in L^{p_0}(\Omega, \mu) \cap L^{p_1}(\Omega, \mu)$. *Per ogni* $0 \leq t \leq 1$, *poniamo*

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}. \tag{C.1}$$

Allora si ha che

$$\|Tf\|_{q_t} \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t}$$

per ogni $f \in L^{p_0}(\Omega, \mu) \cap L^{p_1}(\Omega, \mu)$.

Prima di enunciare il prossimo teorema, abbiamo bisogno di introdurre la nozione di operatore di tipo debole. Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$, una funzione μ-misurabile. Per ogni $\alpha > 0$ poniamo

$$\lambda(\alpha) = \lambda_f(\alpha) = \mu\{|f| > \alpha\}.$$

Facciamo notare che λ è una funzione decrescente in $(0, \infty)$. Se $p < \infty$, introduciamo gli spazi L^p deboli così definiti

$$L^p_w(\Omega, \mu) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ \mu - \text{misurabile} \mid \exists\, C > 0 \, : \, \lambda(\alpha) \leq \frac{C^p}{\alpha^p}, \, \forall \alpha > 0 \right\}$$

e poniamo

$$\|f\|_{w,p} = \sup_{\alpha > 0} \{\alpha^p \lambda(\alpha)\}^{\frac{1}{p}}.$$

Se $f \in L^p(\Omega, \mu)$, allora per la disuguaglianza di Chebychev

$$\lambda(\alpha) = \mu\{|f| > \alpha\} \leq \frac{\|f\|_p^p}{\alpha^p} \tag{C.2}$$

e quindi $L^p(\Omega, \mu) \subset L^p_w(\Omega, \mu)$. Denotiamo con $\mathcal{M}(\Omega)$ l'insieme di tutte le funzioni definite in Ω e a valori reali, che sono μ-misurabili.

Definizione C.2. *Sia* $T : L^p(\Omega,\mu) \to \mathcal{M}(\Omega)$ *un operatore. Se* $1 \le q < \infty$, $1 \le p \le \infty$, T *si dice di tipo debole* (p, q) *se esiste* $C > 0$ *tale che per ogni* $f \in L^p(\Omega,\mu)$
$$\|Tf\|_{w,q} \le C\|f\|_p.$$
Se $q = \infty$, T *si dice di tipo debole* (p,∞) *se esiste* $C > 0$ *tale che per ogni* $f \in L^p(\Omega,\mu)$
$$\|Tf\|_\infty \le C\|f\|_p.$$
In particolare se T *è lineare allora* T *è continuo da* $L^p(\Omega,\mu)$ *in* $L^\infty(\Omega,\mu)$.

Fatte queste premesse siamo ora in grado di enunciare il teorema di interpolazione di Marcinkiewicz che generalizza quello di Riesz-Thorin, ma è meno preciso nella stima della costante finale.

Teorema C.3 (Marcinkiewicz). *Siano* $1 \le p_0 \le q_0 \le \infty$, $1 \le p_1 \le q_1 \le \infty$ *con* $q_0 \ne q_1$ *e sia* $T : L^{p_0}(\Omega,\mu) \to L^{q_0}_w(\Sigma,\nu)$, $T : L^{p_1}(\Omega,\mu) \to L^{q_1}_w(\Sigma,\nu)$ *lineare e di tipo debole* (p_0, q_0) *e* (p_1, q_1). *Precisamente*
$$\|T\varphi\|_{w,q_0} \le c_0\|\varphi\|_{p_0}, \quad \text{per ogni } \varphi \in L^{p_0}(\Omega,\mu)$$
$$\|T\psi\|_{w,q_1} \le c_1\|\varphi\|_{p_1}, \quad \text{per ogni } \psi \in L^{p_1}(\Omega,\mu).$$
Allora T *si estende ad un operatore lineare limitato da* $L^{p_t}(\Omega,\mu)$ *in* $L^{q_t}(\Sigma,\nu)$ *con* p_t, q_t *definiti da* (C.1), *con norma che può essere stimata in termini di* t, c_i, p_i, q_i.

Il Teorema di Marcinkiewicz può essere provato anche in una versione piú generale, per operatori sublineari.

Notazioni

Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p < +\infty$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leq 1$.

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$	σ-algebra dei boreliani in $\mathbb{R}^N$;
$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$	spazio delle funzioni derivabili con continuità infinite volte e a supporto compatto in Ω;
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$	classe di Schwartz delle funzioni a decrescenza rapida all'infinito;
$(L^p(\Omega), \\| \cdot \\|_{L^p(\Omega)})$	spazio delle funzioni u misurabili secondo Lebesgue in Ω, con $\\|u\\|_{L^p(\Omega)}^p := \int_\Omega \vert u(x)\vert^p dx < +\infty$;
$(L^p(\mu), \\| \cdot \\|_{L^p(\mu)})$	spazio delle funzioni u misurabili in $\mathbb{R}^N$ rispetto alla misura μ, con $\\|u\\|_{L^p(\mu)}^p := \int_{\mathbb{R}^N} \vert u(x)\vert^p d\mu < +\infty$;
$(W^{k,p}(\Omega), \\| \cdot \\|_{W^{k,p}(\Omega)})$	spazio delle funzioni u con derivate distribuzionali fino all'ordine k in $L^p(\Omega)$, con norma $\\|u\\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{\vert\beta\vert \leq k} \\|D^\beta u\\|_{L^p(\Omega)}$;
$W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$	spazio delle funzioni appartenenti a $W^{k,p}(\Omega')$, per ogni aperto limitato Ω' con $\overline{\Omega}' \subset \Omega$;
$\mathcal{C}(\overline{\Omega})$	spazio delle funzioni continue in $\overline{\Omega}$;
$\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$	spazio delle funzioni continue e limitate in $\mathbb{R}^N$;
$\mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^N)$	spazio delle funzioni derivabili k volte con continuità in $\mathbb{R}^N$ e a supporto compatto;
$\mathcal{C}_b^k(\mathbb{R}^N)$	spazio delle funzioni derivabili k volte in $\mathbb{R}^N$ con tutte le derivate fino all'ordine k limitate;
$\mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$	spazio delle funzioni continue in $\overline{\Omega}$ e nulle sul bordo $\partial\Omega$;

$(\mathcal{C}^\alpha(\Omega), \\|\cdot\\|_\alpha)$	spazio delle funzioni u α-hölderiane in Ω, ossia in $\mathcal{C}_b(\Omega)$ e con $[u]_\alpha := \sup_{x,y\in\Omega; x\neq y} \frac{\|u(x)-u(y)\|}{\|x-y\|^\alpha} < +\infty$, munito della norma $\\|u\\|_\alpha := \\|u\\|_\infty + [u]_\alpha$;
$\mathcal{C}^\alpha_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$	spazio delle funzioni in $\mathcal{C}^\alpha(\Omega')$ per ogni Ω' aperto limitato;
$\mathcal{C}^{1,2}((a,b)\times\Omega)$	spazio delle funzioni $u(t,x)$ continue in $(a,b)\times\Omega$ con le loro derivate temporali del primo ordine e spaziali del primo e del secondo ordine;
$\mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}((a,b)\times\Omega)$	spazio delle funzioni $u = u(t,x)$ tali che $\partial_t u$ e $D_{x_ix_j}u$ sono α-hölderiane in $(a,b)\times\Omega$ rispetto alla distanza parabolica $d\big((t,x),(s,y)\big) = \|t-s\|^{1/2} + \|x-y\|$;
$\mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}_{\rm loc}((0,+\infty)\times\mathbb{R}^N)$	spazio delle funzioni u tali che $u \in \mathcal{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}([\varepsilon,T]\times K)$, per ogni $0<\varepsilon<T$ e compatto K;
$\mathcal{L}(X)$	spazio degli operatori lineari e continui dallo spazio di Banach X in sé;
$B_R(x_0)$	palla di centro x_0 e raggio R. Scriveremo solo B_R quando non sarà importante indicare esplicitamente il centro;
$\langle x, y\rangle$	prodotto scalare euclideo tra i vettori $x, y \in \mathbb{R}^N$;
χ_Γ	funzione caratteristica dell'insieme Γ, ossia la funzione così definita, $\chi_\Gamma(x) = 1$ se $x\in\Gamma$ e $\chi_\Gamma(x) = 0$ se $x\notin\Gamma$;
$\mathbb{1}$	funzione caratteristica di $\mathbb{R}^N$;
$\operatorname{supp} u$	supporto di una data funzione u.

Bibliografia

[1] R.A. Adams: Sobolev spaces, Academic press, 1975.

[2] W. Arendt, C.J.K. Batty, M. Hieber, F. Neubrander, Vector-valued Laplace transforms and Cauchy Problems, Birkhäuser, 2001.

[3] D. Bakry: Functional inequalities for Markov semigroups, Probability measures on groups: recent directions and trends, 91–147, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 2006.

[4] D. Bakry: On Sobolev and logarithmic Sobolev inequalities for Markov semigroups, New trends in stochastic analysis (Charingworth, 1994), 43–75, World Scientific, 1997.

[5] D. Bakry: L'hypercontrctivité et son utilisation en théorie des semi-groupes, in Lectures on Probability Theory, vol. 1581, Springer, 1994.

[6] D. Bakry, T. Coulhon, M. Ledoux, L. Saloff-Coste: Sobolev inequalities in disguise, Indiana Univ. Math. J. **44** (1995), 1033–1074.

[7] V.I. Bogachev, N.V. Krylov, M. Röckner: Regularity of invariant measures: the case on non-constant diffusion part, J. Funct. Anal., **138** (1996), 223-242.

[8] V.I. Bogachev, N.V. Krylov, M. Röckner: On regularity of transition probabilities and invariant measure of singular diffusions under minimal conditions, Comm. Partial Differential Equations, **26** (2000), 2037-2080.

[9] C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto, G. Scheffer: Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques. Panoramas et Synthèses, 10. Société Mathématique de France, 2000. xvi+217 pp.

[10] G. Da Prato, J. Zabczyk: Stochastic Equations in Infinite Dimensions, Cambridge University Press, 1992.

[11] G. Da Prato, J. Zabczyk: Ergodicity for Infinite Dimensional Systems, Cambridge University Press, 1996.

[12] E.B. Davies: Heat Kernels and Spectral Theory, Cambridge University Press, 1989.

[13] E.B. Davies, B. Simon: Ultracontractivity and the heat kernel for Schrödinger operators and Dirichlet Laplacians, J. Funct. Anal. **59** (1984), 335-395.

[14] K-J. Engel, R. Nagel: One-parameter semigroups for linear evolution equations, Springer, 2000.

[15] A. Friedman: Partial Differential Equations of Parabolic type, Prentice-Hall, 1964.

[16] M. Fuhrman: Hypercontractivity properties of nonsymmetric Ornstein-Uhlenbeck semigroups in Hilbert spaces, Stochastic Anal. Appl. 16 (1998), 241-260.

[17] M. Giaquinta: Introduction to regularity theory for nonlinear elliptic systems. Birkhäuser, 1993.

[18] D. Gilbarg, N.S. Trudinger: Elliptic partial differential equations of Second order, 2nd Edition, Springer, 1983.

[19] L. Gross: Logarithmic Sobolev inequalities, Amer. J. Math. **97** (1975), 1061-1083.

[20] N.V. Krylov: Lectures on Elliptic and Parabolic Problems in Hölder Spaces, Graduate Studies in Mathematics **12**, Amer. Math. Soc., 1996.

[21] N. V. Krylov, M. V. Safonov: A certain property of solutions of parabolic equations with measurable coefficients, Math. USSR Izv. (1981), **16** (1), 151-164.

[22] M. Ledoux: Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities, in

Séminaire de Probabilités, XXXIII, Lecture Notes in Math., pages 120-216. Springer, 1999.

[23] G.M. Lieberman: Second Order Parabolic Differential Equations, World Scientific, 1996.

[24] A. Lunardi: Analytic Semigroups and Maximal Regularity in Parabolic Problems, Birkhäuser, 1995.

[25] O. Mazet: A characterization of Markov property for semigroups with invariant measure, Potential Analysis **16** (2002), 279-287.

[26] G. Metafune, D. Pallara, A. Rhandi: Global properties of invariant measures, J. Funct. Anal. **223** (2005), 396-424.

[27] G. Metafune, J. Prüss, A. Rhandi, R. Schnaubelt: The domain of the Ornstein-Uhlenbeck operator on an L^p-space with invariant measure, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **5** (2002), 471-485.

[28] G. Metafune, D. Pallara, M. Wacker: Feller semigroups on $\mathbb{R}^N$, Semigroup Forum **65** (2002), 159-205.

[29] G. Metafune, D. Pallara, M. Wacker: Compactness properties of Feller semigroups, Studia Math. **153** (2002), 179-206.

[30] E. Nelson: The free Markov field, J. Funct. Anal. **12** (1973), 211-227.

[31] A. Pazy: Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer, 1983.

[32] M. Reed, B. Simon: Methods of modern mathematical physics II, Fourier Analysis, self-adjontness. Academic Press, 1975.

[33] O.S. Rothaus: Hypercontractivity and the Bakry-Emery criterion for compact Lie groups, J. Funct. Anal., **65** (1986), 358367.

[34] N. Th. Varopoulos: Hardy-Littlewood theory for semigroups, J. Funct. Anal. **63** (1985), 240-260.

[35] K. Yosida: Functional Analysis, 6th ed., Springer, 1980.

S. Fornaro: simona.fornaro@unipv.it
M. Miranda: michele.miranda@unife.it
A. Rhandi: rhandi@diima.unisa.it e rhandi@ucam.ac.ma

Finito di stampare nel mese di maggio 2008
presso lo stabilimento tipolitografico della **TorGraf**
S.P. 362 km. 15,300 - Zona Industriale • 73013 **GALATINA** (Lecce)
Telefono +39 0836.561417 • Fax +39 0836.569901
e-mail: **stampa@torgraf.it**