CAPITOLO 1

La disuguaglianza di Harnack nel caso ellittico

1.1. L'equazione di Laplace

1.1.1. La disuguaglianza di Harnack. Si consideri l'equazione

$$\Delta u = 0 \qquad \text{in } \Omega$$

dove Ω è un aperto di $\mathbf{R}^n$. Allora vale la seguente disuguaglianza, dovuta ad Harnack (1887) nel caso $n = 2$.

Lemma 1.1.1. *Sia $u \geqslant 0$ una soluzione di classe $C^2(\Omega)$ dell'equazione $\Delta u = 0$ in Ω. Allora per ogni $x_0 \in \Omega$, per ogni ρ, R con $0 < \rho < R$ e $B_R(x_0) \subset \Omega$ e per ogni $x \in B_\rho(x_0)$ vale la stima*

$$\left(\frac{R}{R+\rho}\right)^{n-2} \frac{R-\rho}{R+\rho}\, u(x_0) \leqslant u(x) \leqslant \left(\frac{R}{R-\rho}\right)^{n-2} \frac{R+\rho}{R-\rho}\, u(x_0)\,.$$

Dimostrazione - Per una generica $\varphi \in C(\partial\Omega)$ la soluzione v del problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B_R(0) \\ v = \varphi & \text{in } \partial B_R(0) \end{cases} \tag{1.1}$$

può essere scritta tramite il nucleo di Poisson (si veda, ad esempio, il paragrafo 2.2.4 in [**7**]) come segue

$$v(x) = \frac{1}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R} \varphi(y) \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n} d\mathcal{H}^{n-1}\,. \tag{1.2}$$

Di conseguenza, supponendo per semplicità $x_0 = 0$, si ha

$$\begin{aligned} u(x) \quad &= \frac{1}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R} u(y) \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n} d\mathcal{H}^{n-1} \leqslant \\ &\leqslant \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{u(y)}{(|y| - |x|)^n} d\mathcal{H}^{n-1} \leqslant \\ &\leqslant \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \frac{n\omega_n R^{n-1}}{(R - |x|)^n} \fint_{\partial B_R} u(y) d\mathcal{H}^{n-1} = \\ &= \frac{R + |x|}{R - |x|} \left[\frac{R}{R - |x|}\right]^{n-2} u(0) \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata l'uguaglianza $u(0) = \fint_{\partial B_R} u(y) d\mathcal{H}^{n-1}$ valida per funzioni armoniche.
Usando la stima $|x-y|^n \leqslant (|x|+|y|)^n$ e ragionando analogamente si ottiene la seconda stima. $\square$

Osservazione 1.1.2. - Fissati $0 < \rho < R$ si ottiene dal teorema precedente la seguente stima

$$\sup_{B_\rho(x_0)} u \leqslant \left(\frac{R+\rho}{R-\rho}\right)^n \inf_{B_\rho(x_0)} u$$

da cui si deduce che

$$\sup_{B_r(x_0)} u \leqslant \gamma \inf_{B_r(x_0)} u \qquad \text{per ogni } r \leqslant \rho \tag{1.3}$$

con la costante $\gamma = \left(\frac{R+\rho}{R-\rho}\right)^n$. Di fatto la costante γ dipende dalla dimensione e da $(1-\alpha)^{-1}$ dove $\alpha = \rho/R$ e si può stimare

$$\gamma \leqslant 2^n/(1-\alpha)^n .$$

Di conseguenza la costante rimane la stessa in tutte le palle $B_\rho(x_0) \subset B_R(x_0) \subset \Omega$ con ρ/R fissato.

Teorema 1.1.3. *Sia $u \geqslant 0$ una soluzione C^2 di $\Delta u = 0$ in Ω, Ω aperto di $\mathbf{R}^n$. Allora per ogni aperto connesso $\omega \subset\subset \Omega$ si ha che esiste $\gamma = \gamma(n, \omega)$ tale che*

$$\sup_\omega u \leqslant \gamma \inf_\omega u .$$

Dimostrazione - Poiché Ω è aperto, fissati $x, y \in \overline{\omega}$ per cui $u(x) = \sup_\omega u$, $u(y) = \inf_\omega u$, esiste un cammino $\Gamma \subset \overline{\omega}$ che unisce x e y. Ricoprendo Γ con un numero finito di palle $B_\rho(x_i)$, $i = 1, \ldots N$, in modo tale che $B_\rho(x_i) \subset B_R(x_i) \subset \Omega$ e $B_\rho(x_i) \cap B_\rho(x_{i+1}) \neq \emptyset$ per ogni $i \in \{1, \ldots N-1\}$. Per comodità supponiamo che $x \in B_\rho(x_1)$, $y \in B_\rho(x_N)$. Detta γ la costante che appare in (1.3) si ha allora

$$\begin{aligned} \sup\nolimits_\omega u &= \sup\nolimits_{B_\rho(x_1)} u \leqslant \gamma \inf\nolimits_{B_\rho(x_1)} u \leqslant \gamma \sup\nolimits_{B_\rho(x_2)} u \leqslant \\ &\leqslant \gamma^2 \inf\nolimits_{B_\rho(x_2)} u \leqslant \ldots \leqslant \gamma^N \inf\nolimits_{B_\rho(x_N)} u = \gamma^N \inf\nolimits_\omega u . \qquad \square \end{aligned}$$

Osservazione 1.1.4. - Ovviamente dal Teorema 1.1.3 si deduce che

$$\sup_{\omega'} u \leqslant \sup_\omega u \leqslant \gamma \inf_\omega u \leqslant \gamma \inf_{\omega'} u \qquad \text{per ogni } \omega' \subset \omega .$$

1.1.2. Locale hölderianità. Dalla disuguaglianza di Harnack si può dedurre per funzioni armoniche la locale hölderianità. Infatti sia $x_0 \in \Omega$, l'aperto considerato all'inizio e u armonica in Ω. Definiamo

$$M(R) = \sup_{B_R} u\,, \qquad m(R) = \inf_{B_R} u\,. \tag{1.4}$$

dove per semplicità $B_R = B_R(x_0)$. Allora, per $\epsilon > 0$, le funzioni

$$M(R) - u + \epsilon \quad \text{e} \quad u - m(R) + \epsilon$$

sono positive in $B_{R/2}$ per cui vale la disuguaglianza di Harnack (1.3). Possiamo supporre anche $\epsilon = 0$, dal momento che la costante γ è indipendente da ϵ ed è quindi possibile poi mandare ϵ a zero. Si ottiene applicando (1.3) a tali funzioni

$$M(R) - m(R/2) \leqslant \gamma[M(R) - M(R/2)]\,,$$

$$M(R/2) - m(R) \leqslant \gamma[m(R/2) - m(R)]\,.$$

Sommando le due espressioni, e ponendo $\operatorname{osc}(u,r) := M(r) - m(r)$, si ha

$$\operatorname{osc}(u,R) + \operatorname{osc}(u,R/2) \leqslant \gamma[\operatorname{osc}(u,R) - \operatorname{osc}(u,R/2)] \tag{1.5}$$

da cui

$$\operatorname{osc}(u,R/2) \leqslant \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\operatorname{osc}(u,R) = \eta \operatorname{osc}(u,R)\,.$$

Reiterando il procedimento si ottiene

$$\operatorname{osc}(u,2^{-k}R) \leqslant \eta^k \operatorname{osc}(u,R)\,.$$

Si osservi che $\eta^{-1} = (\gamma+1)/(\gamma-1) \in (1,2)$ (se $\gamma > 3$).
Siano ora $x, y \in \Omega$ tali che

$$\frac{R}{2^{n+1}} \leqslant |x-y| \leqslant \frac{R}{2^n}\,.$$

Dalla stima precedente si ottiene

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leqslant \operatorname{osc}(u,2^{-n}R) \leqslant \eta^n \operatorname{osc}(u,R) = 2^{-n|\log_2 \eta|}\operatorname{osc}(u,R) \\ &\leqslant \operatorname{osc}(u,R)\Big(\frac{2}{R}\Big)^{|\log_2\eta|}|x-y|^{|\log_2\eta|} \end{aligned}$$

con $|\log_2 \eta| = \log_2 \eta^{-1} < 1$ se $\gamma > 3$. Poiché $\operatorname{osc}(u,R) < +\infty$ si ha che u risulta hölderiana.

1.2. Equazioni più generali

Per quanto visto nel paragrafo precedente la disuguaglianza di Harnack è utile per mostrare la regolarità.

Dopo la dimostrazione di Harnack vista nel Lemma 1.1.1 una prima estensione di tale risultato per operatori lineari del tipo

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu \tag{1.1}$$

è dovuta a L. Lichtenstein nel 1912 (si veda [**23**]). Tuttavia essa si limita al caso bidimensionale e richiede che i coefficienti siano piuttosto regolari. Nel 1930 Feller (si veda [**8**]) estende tale risultato al caso multidimensionale. Successivamente, nel 1956, in [**19**] J. Serrin prova la disuguaglianza di Harnack per soluzioni positive di equazioni della forma $Lu = 0$, dove L è definito da (1.1), in più variabili riducendo la regolarità richiesta ai coefficienti e facendo intravedere la possibilità di studiare il caso non lineare. In effetti, nel 1961, il celebre lavoro di J. Moser [**15**] segna un passo importante in questa direzione nel quale l'autore dimostra la disuguaglianza di Harnack per soluzioni deboli, positive, di equazioni lineari in forma variazionale

$$\mathrm{div}(a \cdot Du) = 0$$

con a simmetrica e

$$c|\xi|^2 \leqslant (a \cdot \xi, \xi) \leqslant C|\xi|^2 \qquad \text{per ogni } \xi \in \mathbf{R}^n .$$

Risultato preliminare alla disuguaglianza è il seguente teorema (si veda il Teorema 2 in [**15**]).

Teorema 1.2.1. *Se u è una soluzione positiva di $\mathrm{div}(a(x) \cdot Du) = 0$ in Ω aperto di $\mathbf{R}^n$, con a matrice strettamente definita positiva, simmetrica e di coefficienti $L^\infty(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$, si ha che per $p > 1$ e per ogni palla $B_{2R}(x_0) \subset \Omega$ esiste $c > 0$ tale che*

$$\sup_{B_R(x_0)} u \leqslant c \left(\frac{p}{p-1} \right)^2 \left(\fint_{B_{2R}(x_0)} u^p dx \right)^{1/p}$$

dove $Q_h(x_0)$ rappresenta il cubo di lato h e centro x_0.

Osservazione 1.2.2. - Oltre al risultato precedente Moser stima la norma L^p della soluzione (per opportuni p) con l'estremo inferiore della soluzione, da cui ricava la disuguaglianza di Harnack.

Più in generale vale il seguente risultato sulla locale limitatezza delle soluzioni (si veda il capitolo 8 in [**11**]). Dato Ω aperto di $\mathbf{R}^n$ si consideri un operatore L della forma

$$Lu = -\mathrm{div}(a \cdot Du) + b \cdot Du + cu$$

con coefficienti $L^\infty(\Omega)$ e a matrice strettamente definita positiva.

Teorema 1.2.3. *Sia u è una soluzione di $Lu = g + \mathrm{div} f$ con $g \in L^{q/2}(\Omega)$, $f_i \in L^q(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$ per un qualche $q > n$. Allora per ogni palla*

$B_{2R}(x_0) \subset \Omega$ e $p > 1$ esiste c (dipendente dai coefficienti, n, p, q) tale che

$$\|u\|_{L^\infty(B_R(x_0))} \leqslant c\left(R^{-n/p}\|u\|_{L^p(B_{2R}(x_0))} + R^{2\delta}\|g\|_{L^{q/2}(\Omega)} + R^{\delta}\|f\|_{L^q(\Omega)}\right),$$

dove $\delta = 1 - n/q$.

Sebbene Moser in [**15**] si limiti a considerare equazioni lineari la tecnica dimostrativa è intrinsecamente non lineare. Così nel 1964 Serrin ne riprende l'idea (si veda [**20**]) per ottenere la disuguaglianza di Harnack anche per equazioni quasi lineari del tipo

$$\operatorname{div}(a(x,u,Du)) + b(x,u,Du) = 0 \tag{1.2}$$

con a, b funzioni misurabili che verificano le seguenti condizioni di crescita

$$\begin{aligned}
\big(a(x,u,\xi),\xi\big) &\geqslant a_1^{-1}|\xi|^p - b_1|u|^p - \gamma\\
|a(x,u,\xi)| &\leqslant a_1|\xi|^{p-1} + b_2|u|^{p-1} + c_2\\
|b(x,u,\xi)| &\leqslant a_2|\xi|^{p-1} + b_1|u|^{p-1} + c_3
\end{aligned}$$

con a_1 costante positiva e $a_2, b_1, b_2, \gamma, c_2, c_3$ funzioni in opportuni spazi L^q. Un risultato di locale limitatezza preliminare alla disuguaglianza di Harnack e analogo a quelli enunciati precedentemente viene mostrato anche da Serrin.
Analoghi risultati sono ottenuti da Trudinger in [**21**] con ipotesi di crescita su b leggermente più generali, assumendo però che la u sia limitata.

In [**20**] si mostra una formulazione della disuguaglianza di Harnack leggermente diversa da quella enunciata in Teorema 1.1.3. Precisamente

$$\sup_{B_R} u \leqslant \gamma\,(\inf_{B_R} u + R^{\varepsilon}) \tag{1.3}$$

con $\gamma > 0$ e $\varepsilon \in (0,1)$. Anche da questa disuguaglianza è possibile dedurre la locale hölderianità per una soluzione limitata dell'equazione (1.2). Infatti, denotando con M e m le stesse funzioni definite in (1.4) e applicando un analogo ragionamento nelle palle B_R e B_{sR} con $s \in (0,1)$ si giunge alla stima

$$\operatorname{osc}(u, B_{sR}) \leqslant \eta\Big(\operatorname{osc}(u, B_R) + \frac{2\gamma}{\gamma - 1}R^{\varepsilon}\Big)$$

dove $\eta = (\gamma - 1)(\gamma + 1)^{-1}$. Iterando si ottiene

$$\operatorname{osc}(u, B_{s^kR}) \leqslant \eta^k\Big(\operatorname{osc}(u, B_R) + \frac{2\gamma}{\gamma - 1}\big[1 + (\eta s^{-\varepsilon})^{-1} + \cdots + (\eta s^{-\varepsilon})^{-k+1}\big]\Big).$$

A questo punto scegliendo, ad esempio, $\eta s^{-\varepsilon} = 2$ (per s sufficientemente piccolo è sempre possibile) si ottiene che

$$\operatorname{osc}(u, B_{s^kR}) \leqslant \eta^k\big(\operatorname{osc}(u, B_R) + 4\gamma(\gamma - 1)^{-1}\big)$$

da cui, se la u risulta limitata in B_R, ragionando come fatto precedentemente si ottiene la locale hölderianità.

Stime del tipo (1.3) si ottengono da stime locali sui coefficienti γ, c_2, c_3.
Si osservi come è necessario che la funzione u sia localmente limitata, cosicché risulta limitata anche la sua oscillazione in B_R, per poter ottenere una stima sulla riduzione dell'oscillazione tipo (1.5). Nel caso in cui u sia una funzione armonica questo è ben noto e si ottiene semplicemente, ad esempio, dal Lemma 1.1.1. Più in generale si dovranno mostrare stime di limitatezza locali prima di poter applicare l'iterazione per stimare la riduzione dell'oscillazione (che nel nostro caso seguono dal Teorema 1.2.1).