Prefazione

Il presente quaderno è basato sulle lezioni tenute dal Prof. V. Vespri per un corso di dottorato presso il Dipartimento di Matematica “Ennio De Giorgi” dell'Università del Salento durante l'a.a. 2005/2006.
L'obiettivo del corso è stato quello di ripercorrere in ordine cronologico i risultati più significativi relativi alla disuguaglianza di Harnack (senza la pretesa di dimostrarli tutti). La prima formulazione, quella dovuta appunto ad Harnack, risale al 1887 e riguarda le funzioni armoniche positive. Dopo alcune estensioni parziali, il contributo più importante si deve a J. Moser, che nel 1961 prova la disuguaglianza di Harnack per soluzioni (deboli) positive di equazioni lineari uniformemente ellittiche a coefficienti limitati in forma variazionale. Moser, inoltre, sottolinea l'utilità della disuguaglianza di Harnack per dedurre la locale hölderianità della soluzione. L'ulteriore passaggio verso equazioni ellittiche non lineari con crescita p viene compiuto prima da J. Serrin e poi da N. S. Trudinger pochi anni dopo e riprende lo stesso approccio di Moser.

La prima versione parabolica della disuguaglianza di Harnack viene provata separatamente da Hadamard e Pini nel 1954 per soluzioni positive dell'equazione del calore. Dieci anni dopo, nel 1964, lo stesso Moser dimostra che la disuguaglianza di Harnack continua a valere per equazioni paraboliche più generali, precisamente per equazioni del tipo $u_t = \mathrm{div}(a(x,t)Du)$, con a matrice uniformemente definita positiva e limitata. Da qui l'estensione a equazioni paraboliche quasi lineari con crescita lineare grazie a Aronson–Serrin (1967) e Trudinger (1968). A differenza del caso ellittico però, il caso di coefficienti a crescita non lineare presenta maggiori difficoltà e resta a lungo irrisolto. Nel 1986 E. DiBenedetto dimostra che la disuguaglianza di Harnack non può valere nella versione di Moser per l'equazione $u_t = \mathrm{div}(|Du|^{p-2}Du)$, $p > 2$. Vale invece una disuguaglianza di Harnack *intrinseca*, cioè in una geometria determinata dalla soluzione considerata, non solo per il p–Laplaciano ma per un'ampia classe di equazioni. Questo risultato (il più recente fino a questo momento) è stato provato da DiBenedetto, Gianazza e Vespri nel 2006 e segna il passaggio fondamentale al caso di equazioni con coefficienti a crescita più che lineare.

L'intento principale di questo quaderno è stato quello di spiegare la tecnica di DiBenedetto, Gianazza e Vespri. Tale tecnica si ispira al metodo di E. De Giorgi per mostrare la limitatezza e la regolarità per certe classi di funzioni (le cosiddette *classi di De Giorgi*), che contengono in particolare le soluzioni di alcune equazioni ellittiche. La disuguaglianza di Harnack si ottiene usando solamente stime dell'energia e strumenti di teoria della misura. della positività Il metodo si applica a operatori abbastanza generali del tipo $\partial_t + A$ con A monotono a crescita $p-1$ nel gradiente, $p \geqslant 2$ (si pensi al p-laplaciano). Tuttavia, nel presente quaderno lo sforzo è stato rivolto a semplificare tale metodo il più possibile (si veda il paragrafo 2.3), nella speranza di rendere più comprensibili queste nuove tecniche che, come già detto, si adattano a diverse tipologie di equazioni. Per ciò si è deciso di trattare solamente il caso $p = 2$, lasciando brevi cenni ai casi $p > 2$ e $1 < p < 2$.
Per completezza, accanto a queste tecniche nuove sono presentati brevemente anche alcuni risultati più classici, non solo nel caso parabolico, ma anche nel caso ellittico.