Appendice D

Decomposizione del tensore di curvatura

Sia V uno spazio vettoriale reale euclideo con prodotto scalare g e di dimensione n. Indichiamo con $\mathcal{R}(V)$ l'insieme di tutti i tensori algebrici di curvatura su V (cfr. Sezione 8.3). $\mathcal{R}(V)$ è uno spazio vettoriale, sottospazio dello spazio vettoriale dei tensori covarianti di tipo $(0,4)$ su V. Esso possiede un prodotto scalare naturale $<,>$ indotto da g:

$$< R, R' >= \sum_{ijkh} R_{ijkh} R'_{ijkh},$$

dove R_{ijkh} e R'_{ijkh} sono le componenti di R e R' rispetto a una fissata base g-ortonormale $\{e_i\}$ di V. Si verifica facilmente che tale definizione non dipende dalla particolare base ortonormale considerata. Inoltre, si pone

$$\|R\|^2 =< R, R >= \sum_{ijkh} R^2_{ijkh}.$$

Il gruppo $O(n)$, delle trasformazioni ortogonali di V, agisce in modo naturale su $\mathcal{R}(V)$:

$$O(n) \times \mathcal{R}(V) \to \mathcal{R}(V),\ (A, R) \mapsto AR, \quad \text{dove}$$
$$(AR)(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(Av_1, Av_2, Av_3, Av_4).$$

Per ogni $\ R, R' \in \mathcal{R}(V)\ $ e per ogni $\ A \in O(n)$ risulta

$$< AR, AR' >=< R, R' > .$$

Un sottospazio $\mathcal{R}'(V)$ di $\mathcal{R}(V)$ si dice $O(n)$-*irriducibile* se è $O(n)$-invariante e non ha sottospazi non banali $O(n)$-invarianti. Se R è un elemento di $\mathcal{R}(V)$, denotiamo con Ric il tensore di Ricci associato al tensore di curvatura R e con r la corrispondente curvatura scalare. Denotiamo con $\odot$ il prodotto di Kulkarni-Nomizu introdotto nell'Osservazione 8.22, con

$$R_0 = (1/2) g \odot g$$

il tensore di curvatura sezionale costante $+1$, e con Ric_0 la parte di Ric a traccia nulla, ovvero

$$Ric_0 = Ric - (r/n)g.$$

Se $n = 2$ si ha $R = (r/2)R_0 = (r/4)g \odot g$. Assumiamo $n \geq 3$ e sia $\{v_1, ..., v_n\}$ una arbitraria base di V. Poniamo:

$$g_{ij} = g(v_i, v_j),\ R_{ijkh} = R(v_i, v_j, v_k, v_h) \text{ e } Ric_{ij} = Ric(v_i, v_j).$$

Allora, per ogni $R \in \mathcal{R}(V)$:

$$\begin{aligned}
R_{ijkh} = &\frac{r}{n(n-1)}\left(g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk}\right)\\
&+ \frac{1}{(n-2)}\left(Ric_{ik}g_{jh} - g_{ih}Ric_{jk} + g_{ik}Ric_{jh} - Ric_{ih}g_{jk}\right)\\
&- \frac{2r}{n(n-2)}\left(g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk}\right)\\
&+ R_{ijkh} - \frac{1}{(n-2)}\left(Ric_{ik}g_{jh} - g_{ih}Ric_{jk} + g_{ik}Ric_{jh} - Ric_{ih}g_{jk}\right)\\
&+ \frac{r}{(n-1)(n-2)}\left(g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk}\right).
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi la seguente decomposizione del tensore di curvatura:

$$R = R_1 + R_2 + R_3,$$

dove

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{r}{n(n-1)}R_0 = \frac{r}{2n(n-1)}g \odot g,\\
R_2 &= \frac{1}{(n-2)}Ric \odot g - \frac{r}{n(n-2)}g \odot g = \frac{1}{(n-2)}\left(Ric - \frac{r}{n}g\right) \odot g\\
&= \frac{1}{(n-2)}Ric_0 \odot g,\\
R_3 &= R - \frac{1}{(n-2)}Ric \odot g + \frac{r}{2(n-1)(n-2)}g \odot g\\
&= R - \frac{1}{(n-2)}Ric_0 \odot g - \frac{r}{2n(n-1)}g \odot g\\
&= R - \frac{1}{(n-2)}Ric_0 \odot g - \frac{r}{n(n-1)}R_0.
\end{aligned}$$

Se $n = 3$, abbiamo $R_3 = 0$, ossia in tal caso

$$R = \frac{r}{12}\ g \odot g + Ric_0 \odot g = R_1 + R_2.$$

Ora assumiamo $n \geq 4$. Indichiamo con $S^2(V)$ lo spazio dei tensori covarianti simmetrici di ordine 2 su V, e con S^2_0 il sottospazio di quelli a traccia nulla. Inoltre, indichiamo con c la contrazione di Ricci,

$$c : \mathcal{R}(V) \to S^2(V),\ R \mapsto c(R) = (\text{tensore di Ricci associato a } R).$$

Poniamo

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}_1(V) = \mathbb{R}\, g \odot g \,(\text{spazio dei tensori di curvatura del tipo } R = \lambda R_0),\\
&\mathcal{R}_2(V) = g \odot S_0^2 = \left\{R \in \mathcal{R}(V) : R = g \odot h_0,\ h_0 \in S_0^2\right\},\\
&\mathcal{R}_3(V) = \ker c \ (\text{spazio dei tensori di curvatura di Weyl}).
\end{aligned}$$

Risulta che $R_1 \in \mathcal{R}_1(V)$, $R_2 \in \mathcal{R}_2(V)$ e $R_3 \in \mathcal{R}_3(V)$. Si noti che R_3 è il tensore di curvatura conforme di Weyl C associato a R.

La decomposizione

$$\mathcal{R}(V) = \mathcal{R}_1(V) \oplus \mathcal{R}_2(V) \oplus \mathcal{R}_3(V) \tag{4.1}$$

è ortogonale e i sottospazi $\mathcal{R}_i(V)$ sono $O(n)$-irriducibili (cfr. [10], p.47). Applicando la decomposizione (4.1) si ha:

- $R = R_1 = \lambda R_0 \iff (M, g)$ ha curvatura sezionale costante;
- $R = R_2 + R_3 \iff (M, g)$ ha curvatura scalare costante $r = 0$;
- $R = R_3 \iff (M, g)$ è Ricci piatta;
- $R = R_1 + R_2 \iff (M, g)$ è conformemente piatta;
- $R = R_1 + R_3 \iff (M, g)$ è di Einstein;
- $R = R_2 \iff (M, g)$ è conformemente piatta con curvatura scalare $r = 0$.

Di conseguenza, si ottiene:

Proposizione D.1. *Una varietà riemanniana (M, g), di dimensione $n \geq 4$, ha curvatura sezionale costante se e solo se è conformemente piatta e di Einstein.*

Poiché la decomposizione $R = R_1 + R_2 + R_3$ è ortogonale, risulta

$$\|R\|^2 = \|R_1\|^2 + \|R_2\|^2 + \|R_3\|^2.$$

D'altro canto, dalle espressioni di R_1, R_2 e R_3, con un calcolo diretto si trova

$$\|R_1\|^2 = \frac{2r^2}{n(n-1)}, \quad \|R_2\|^2 = \frac{4}{(n-2)}\left(\|Ric\|^2 - \frac{r^2}{n}\right),$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned}
\|C\|^2 = \|R_3\|^2 &= \|R\|^2 - \|R_1\|^2 - \|R_2\|^2\\
&= \|R\|^2 - \frac{4}{(n-2)}\|Ric\|^2 + \frac{2\,r^2}{(n-1)(n-2)}.
\end{aligned}$$

Usando le forme quadratiche di curvatura $\|R\|^2, \|Ric\|^2$ e r^2, dalle considerazioni precedenti, segue facilmente la seguente

Proposizione D.2. *Sia (M, g) una varietà riemanniana di dimensione $n \geq 4$. Allora:*

- $\|R\|^2 \geq 2r^2/n(n-1)$, *dove l'uguaglianza vale se e solo se M ha curvatura sezionale costante;*
- $\|Ric\|^2 \geq r^2/n$, *dove l'uguaglianza vale se e solo se M è di Einsten;*
- $\|R\|^2 \geq (4/(n-2)\|Ric\|^2 - 2r^2/(n-1)(n-2)$, *dove l'uguaglianza vale se e solo se M è conformemente piatta.*

Corollario D.3. *Sia (M, g) una varietà riemanniana di dimensione $n \geq 4$. Allora,*

- $\|R\|^2 \geq 2\|Ric\|^2/(n-1)$,

dove l'uguaglianza vale se e solo se M ha curvatura sezionale costante.

Dimostrazione. Se consideriamo il tensore di curvatura

$$P_{ijkh} = R_{ijkh} - \frac{1}{(n-1)} \left(g_{ik} Ric_{jh} - g_{jk} Ric_{ih} \right),$$

si ottiene

$$\|R\|^2 - \frac{2}{(n-1)} \|Ric\|^2 = \|P\|^2 \geq 0.$$

Se $\|R\|^2 = \dfrac{2\|Ric\|^2}{(n-1)}$, cioè $P = 0$, applicando la Proposizione D.2 si ha

$$\frac{2\|Ric\|^2}{(n-1)} \geq \frac{4\|Ric\|^2}{(n-2)} - \frac{2r^2}{(n-1)(n-2)}$$

e da questa si ottiene

$$\|Ric\|^2 \leq \frac{r^2}{n}.$$

Quindi $\|Ric\|^2 = \dfrac{r^2}{n}$ ed M è di Einstein. Pertanto,

$$\|R\|^2 = \frac{2\|Ric\|^2}{(n-1)} = \frac{2r^2}{n(n-1)}$$

e di conseguenza M ha curvatura sezionale costante. □

Osservazione D.4. Per varietà riemanniane di dimensione 2:

$$\|R\|^2 = 2\|Ric\|^2 = r^2.$$

Per varietà riemanniane di dimensione 3:

$$\|R\|^2 = 4\|Ric\|^2 - r^2.$$

Se $(M, g) = (M_1, g_1) \times (M_2, g_2)$ è una varietà riemanniana prodotto:

$$\|R_g\|^2 = \|R_{g_1}\|^2 + \|R_{g_2}\|^2, \quad \|Ric_g\|^2 = \|Ric_{g_1}\|^2 + \|Ric_{g_2}\|^2$$

e

$$r_g = r_{g_1} + r_{g_2}.$$

Esercizio D.5. Indicata con $\mathbb{S}^m(c)$ la sfera canonica di curvatura sezionale costante $c > 0$ e con $H^m(c)$ lo spazio iperbolico di curvatura sezionale costante $-c < 0$, si verifichi che le seguenti varietà riemanniane prodotto:

$$\mathbb{S}^{n-1}(c) \times \mathbb{R}, \quad H^{n-1}(c) \times \mathbb{R}, \quad \mathbb{S}^{n-p}(c) \times H^p(c),\ p \geq 2,$$

sono conformemente piatte. Suggerimento: fare uso della caratterizzazione delle varietà conformemente piatte data nella Proposizione D.2.

Osservazione D.6. Interessanti applicazioni delle forme quadratiche fondamentali $\|R\|^2$, $\|Ric\|^2$ e r^2 si hanno, ad esempio, nello studio della geometria spettrale dell'operatore di Laplace-Beltrami (cfr. [7]) e nella espressione della caratteristica di Eulero-Poincaré nelle dimensioni 4 e 6 (cfr. Sezione 10.5). Un'altra interessante applicazione di queste forme quadratiche fondamentali si ha nello studio dei funzionali $F_1(g) := \int_M r^2(g)\, v_g$, $F_2(g) := \int_M \|Ric\|^2(g)\, v_g$ e $F_3(g) := \int_M \|R\|^2(g)\, v_g$ al variare di $g \in \mathcal{M}$ (cfr. [8]), così come visto nella Sezione 11.1 per il funzionale $I(g) := \int_M r(g)\, v_g$.