Appendice C

Geometria del fibrato tangente

Sia M una varietà differenziabile di dimensione n. Ricordiamo che il fibrato tangente $TM = \{(p,u) \ : \ p \in M\,,\ u \in T_pM\}$, e $\pi : TM \longrightarrow M\,,\ (p,u) \longmapsto p$, è la proiezione canonica. TM si può munire in modo naturale di una struttura differenziabile indotta da quella di M (cfr. Sezione 2.2). Fissato $z = (p,u) \in TM$, se $(x_1,\dots,x_n,v^1,\dots,v^n)$ denota un sistema di coordinate locali definito in un intorno aperto di z in TM, allora un vettore tangente $\tilde{X}_z \in T_z(TM)$ si può esprimere come segue

$$\tilde{X}_z = \sum_{i=1}^{n} a^i \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_z + \sum_{i=1}^{n} b^i \Big(\frac{\partial}{\partial v^i}\Big)_z,$$

dove $a^i = \tilde{X}_z(x_i)$ e $b^i = \tilde{X}_z(v^i)$.

C.1 Vettori orizzontali e verticali

Assumiamo M munita di una connessione lineare ∇ e denotiamo con D/dt la derivata covariante di campi vettoriali differenziabili lungo curve. Una curva differenziabile di TM

$$\tilde{\gamma} : (-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow TM,\ t \longmapsto \big(\gamma(t), V(t)\big),$$

si dice *curva orizzontale* se il campo $V(t)$ è parallelo lungo γ, cioè $DV/dt = 0$ per ogni $t \in (-\alpha,\alpha)$; $\tilde{\gamma}$ si dice *curva verticale* se $\gamma(t) = p$ e quindi $V(t) \in T_pM$ per ogni $t \in (-\epsilon,\epsilon)$, in tal caso $DV/dt = \mathrm{d}V/dt$. Un vettore tangente $\tilde{X}_z \in T_z(TM)$, $z = (p,u) \in TM$, si dice *vettore verticale* (risp. *orizzontale*) se è tangente ad una curva $\tilde{\gamma}$ verticale (risp. orizzontale):

$$\tilde{X}_z = \dot{\tilde{\gamma}}(0), \quad \tilde{\gamma}(0) = z = (p,u).$$

Un *campo di vettori* $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(TM)$ si dice *verticale* (risp. *orizzontale*) se è un campo di vettori tangenti verticali (risp. orizzontali). Sia $X_p \in T_pM$. Si dice *sollevamento verticale* di X_p nel punto $z = (p,u) \in TM$, il vettore

$X_z^V \in T_z(TM)$ tangente, per $t=0$, a una curva verticale $\tilde\gamma(t) = \big(p\,, V(t)\big)$ che soddisfa $\tilde\gamma(0) = z$ e $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(0) = X_p$. Ad esempio, le curve $\tilde\gamma_1(t) = (p\,, u + t\,X_p)$ e $\tilde\gamma_2(t) = \big(p\,, (\cos t)u + (\sin t)X_p\big)$ soddisfano le due proprietà. Siccome, in termini di coordinate locali il vettore $\dot{\tilde\gamma}(0) = (0, X_p^i)$, allora

$$X_z^V = \dot{\tilde\gamma}(0) = \sum_{i=1}^n X_p^i \Big(\frac{\partial}{\partial v^i}\Big)_z \quad \text{e quindi} \quad \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p^V = \Big(\frac{\partial}{\partial v^i}\Big)_z.$$

Se $X \in \mathfrak{X}(M)$, il *campo vettoriale* X^V *sollevamento verticale* di X è definito da $X^V(z) = X_z^V$. Quindi, se X è espresso localmente da $X = \sum_i X^i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, il suo sollevamento verticale localmente è dato da

$$X^V = \sum_{i=1}^n \tilde X^i \frac{\partial}{\partial v^i} = \sum_{i=1}^n (X^i \circ \pi) \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)^V. \tag{3.1}$$

Si noti che nella definizione di X^V non interviene la connessione ∇.

Sia $p \in M$ e sia $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ una curva differenziabile di M con $\gamma(0) = p$. Allora, per ogni fissato $z = (p, u) \in TM$ esiste un unico campo di vettori $V(t)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, parallelo lungo γ e tale che $V(0) = u$. La curva

$$\tilde\gamma_z^H : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow TM, \quad t \longmapsto \big(\gamma(t), V(t)\big),$$

è detta *curva sollevamento orizzontale* di γ uscente da z. Si noti che la curva $\tilde\gamma_z^H(t)$ è univocamente determinata dalle condizioni

$$\tilde\gamma_z^H(0) = z = (p, u) \quad \text{e} \quad \pi \circ \tilde\gamma_z^H(t) = \gamma(t) \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

In particolare, se $\gamma(t)$ è una curva geodetica con $\gamma(0) = p$ e $\dot\gamma(0) = u$, allora il sollevamento orizzontale di $\gamma(t)$ uscente da $z = (\gamma(0), \dot\gamma(0))$ è la curva

$$\tilde\gamma_z^H(t) = (\gamma(t), \dot\gamma(t)).$$

Sia $X_p \in T_pM$ e sia $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ una curva differenziabile di M tale che $\gamma(0) = p\,,\ \dot\gamma(0) = X_p$. Fissato $z = (p, u) \in TM$, sia $\tilde\gamma_z^H(t) = \big(\gamma(t), V(t)\big)$ la curva sollevamento orizzontale di γ uscente da z. Il vettore tangente

$$\tilde X_z = \dot{\tilde\gamma}_z^H(0) = \big(\dot\gamma(0), \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(0)\big)$$

si chiama *sollevamento orizzontale di* X_p nel punto z. Se poniamo (localmente) $x_k(t) = x_k\big(\tilde\gamma_z^H(t)\big)$, $v^k(t) = v^k\big(\tilde\gamma_z^H(t)\big)$ e teniamo presente che

$$\frac{DV}{dt} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} v^j = 0 \quad \forall\, k = 1, \dots, n\,,$$

abbiamo

$$
\begin{aligned}
X_z^H &:= \dot{\gamma}_z^H(0) = \Big(\dot{\gamma}(0), \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(0)\Big) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{dx_k}{dt}(0)\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big)_z + \sum_{k=1}^n \frac{dv^k}{dt}(0)\Big(\frac{\partial}{\partial v^k}\Big)_z \\
&= \sum_{k=1}^n X_p^k\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big)_z + \sum_{k=1}^n \Big\{-\sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(p)\frac{dx_i}{dt}(0)\, v^j(0)\Big\}\Big(\frac{\partial}{\partial v^k}\Big)_z ,
\end{aligned}
$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
X_z^H &= \sum_{i=1}^n X_p^i\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_z - \sum_{k=1}^n \Big\{\sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(p)\, X_p^i\, u^j\Big\}\Big(\frac{\partial}{\partial v^k}\Big)_z \qquad (3.2) \\
&= \sum_{i=1}^n X_p^i\Big\{\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_z - \sum_{k,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(p)\, u^j\Big(\frac{\partial}{\partial v^k}\Big)_z\Big\} .
\end{aligned}
$$

La (3.2) esprime X_z^H nella base coordinata $\Big\{\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_z, \Big(\frac{\partial}{\partial v^i}\Big)_z\Big\}$, inoltre mostra che X_z^H è univocamente determinato da X_p e $z = (p, u)$, quindi non dipende dalla particolare curva $\gamma(t)$ considerata. Il *campo di vettori* X^H *sollevamento orizzontale* di $X \in \mathfrak{X}(M)$ è così definito:

$$X^H(z) := X_z^H, \quad \forall\, z = (p, u) \in TM,$$

dove X_z^H è il sollevamento orizzontale di X_p in z. Di conseguenza, se localmente $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$, ponendo $\tilde{X}^k = X^k \circ \pi$, $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k \circ \pi$, l'espressione (3.2) diventa

$$X_z^H = \sum_{i=1}^n \tilde{X}^i\Big\{\frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{k,j=1}^n \tilde{\Gamma}_{ij}^k\, v^j \frac{\partial}{\partial v^k}\Big\}(z),$$

e quindi il campo di vettori $X^H \in \mathfrak{X}(TM)$ è espresso localmente da

$$X^H = \sum_{i=1}^n \tilde{X}^i\Big\{\frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{k,j=1}^n \tilde{\Gamma}_{ij}^k\, v^j \frac{\partial}{\partial v^k}\Big\} = \sum_i \tilde{X}^i\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)^H,$$

dove

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)^H(z) = \Big(\frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{k,j} \tilde{\Gamma}_{ij}^k\, v^j \frac{\partial}{\partial v^k}\Big)(z).$$

Decomposizione di $\tilde X \in \mathfrak{X}(TM)$:

Sia $\tilde X \in \mathfrak{X}(TM)$. Localmente $\tilde X$ è espresso da

$$\tilde X = \sum_{k=1}^{n} \tilde X^k \frac{\partial}{\partial x_k} + \tilde X^{n+k} \frac{\partial}{\partial v^k} = \sum_{k=1}^{n} \tilde X^k \frac{\partial}{\partial x_k} - \sum_{i,j,k=1}^{n} \Big\{ \tilde\Gamma^k_{ij} \tilde X^i v^j \Big\} \frac{\partial}{\partial v^k}$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \Big\{ \tilde X^{n+k} + \sum_{i,j=1}^{n} \tilde\Gamma^k_{ij} \tilde X^i v^j \Big\} \frac{\partial}{\partial v^k}.$$

Quindi

$$\tilde X = \tilde X^H + \tilde X^V,$$

dove $\tilde X^H$ è dato, applicando la (3.2), da

$$\tilde X^H := \sum_{k=1}^{n} \tilde X^k \frac{\partial}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^{n} \Big\{ \sum_{i,j=1}^{n} \tilde\Gamma^k_{ij} \tilde X^i v^j \Big\} \frac{\partial}{\partial v^k} \tag{3.3}$$
$$= \sum_i \tilde X^i \Big\{ \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{k,j} \tilde\Gamma^k_{ij} v^j \frac{\partial}{\partial v^k} \Big\} = \sum_i \tilde X^i \Big(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big)^H,$$

e $\tilde X^V$ è dato, applicando la (3.1), da

$$\tilde X^V := \sum_{k=1}^{n} \Big\{ \tilde X^{n+k} + \sum_{i,j=1}^{n} \tilde\Gamma^k_{ij} v^j \tilde X^i \Big\} \frac{\partial}{\partial v^k} \tag{3.4}$$
$$= \sum_k \Big\{ \tilde X^{n+k} + \sum_{i,j} \tilde\Gamma^k_{ij} v^j \tilde X^i \Big\} \Big(\frac{\partial}{\partial x_k} \Big)^V.$$

$\tilde X^H$ (risp. $\tilde X^V$) è la *componente orizzontale* (risp. *verticale*) di $\tilde X$. Osserviamo che per ogni $z = (p,u) \in TM$, $\tilde X^H_z$ è il sollevamento orizzontale del vettore

$$X'_p = \sum_i \tilde X^i(z) \Big(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big)_p \in T_pM,$$

e $\tilde X^V_z$ è il sollevamento verticale del vettore

$$X''_p = \sum_k \Big\{ \tilde X^{n+k}(z) + \sum_{i,j} \tilde\Gamma^k_{ij}(z)\, v^j(z)\, \tilde X^i(z) \Big\} \Big(\frac{\partial}{\partial x_k} \Big)_p \in T_pM.$$

Se $\tilde X_z = \dot{\tilde\gamma}(0)$, dove $\tilde\gamma(t) = (\gamma(t), V(t))$ con $\tilde\gamma(0) = z = (p,u) = (\gamma(0), V(0))$, allora

$$X'_p = \dot\gamma(0) \quad \text{e} \quad X''_p = \frac{DV}{\mathrm{d}t}(0). \tag{3.5}$$

Poniamo

$$\mathcal{V}_z TM := \left\{ \tilde{X}_z^V : \ \tilde{X}_z \in T_z TM \right\} \text{ sottospazio verticale di } T_z TM\,,$$
$$\mathcal{H}_z TM := \left\{ \tilde{X}_z^H : \ \tilde{X}_z \in T_z TM \right\} \text{ sottospazio orizzontale di } T_z TM.$$

Dall'unicità della decomposizione $\tilde{X}_z = \tilde{X}_z^H + \tilde{X}_z^V$, segue che:

$$T_z(TM) = \mathcal{V}_z TM \oplus \mathcal{H}_z TM.$$

Inoltre, le corrispondenze $z \longmapsto \mathcal{H}_z TM$ e $z \longmapsto \mathcal{V}_z TM$, definiscono due distribuzioni n-dimensionali supplementari su TM, dette rispettivamente *distribuzione orizzontale* e *distribuzione verticale*. Infine, notiamo che le applicazioni

$$T_pM \longrightarrow \mathcal{V}_z TM,\ X_p \longmapsto X_z^V, \quad \text{e} \quad T_pM \longrightarrow \mathcal{H}_z TM,\ X_p \longmapsto X_z^H,$$

sono isomorfismi tra spazi vettoriali.

C.2 L'applicazione di connessione e π_*

Sia $z = (p, u) \in TM$. L'applicazione

$$K_z : T_z(TM) \longrightarrow T_pM,$$
$$\tilde{X}_z = \tilde{X}_z^H + \tilde{X}_z^V = \tilde{X}_z^H + \big(X_p\big)_z^V \longmapsto K_z(\tilde{X}_z) := X_p,$$

è detta *applicazione di connessione* (o applicazione di Dombrowski). Equivalentemente, se consideriamo una curva $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), V(t))\ TM$ con $\tilde{\gamma}(0) = (\gamma(0), V(0)) = z = (p, u)$,

$$K_z\big(\dot{\tilde{\gamma}}(0)\big) = K_z\Big(\big(\dot{\gamma}(0)\big)_z^H + \big(\frac{DV}{\mathrm{d}t}(0)\big)_z^V\Big) = \frac{DV}{\mathrm{d}t}(0).$$

Quindi, la definizione di K_z è in accordo col fatto che curve orizzontali su TM corrispondono a campi paralleli su M. In particolare, $K_z(\tilde{X}_z^H) = 0$ e K_z ristretta ai vettori verticali definisce un isomorfismo

$$\mathcal{V}_z TM \longrightarrow T_pM,\ \tilde{X}_z^V = (X_p)_z^V \longmapsto X_p.$$

Sappiamo che un campo di vettori $Z \in \mathfrak{X}(M)$ si può pensare come un'applicazione $Z : M \to TM$ e quindi, per ogni $p \in M$, possiamo considerare il differenziale

$$Z_{*p} : T_pM \to T_z TM,\ z = (p, Z_p).$$

Allora, l'applicazione di connessione soddisfa

$$K\big(Z_{*p}(X_p)\big) = \nabla_{X_p} Z.$$

Infatti, considerata una curva $\gamma(t)$ di M con $\gamma(0) = p$ e $\dot\gamma(0) = X_p$, e posto $\tilde\gamma(t) = Z(\gamma(t)) = (\gamma(t), Z(t))$, si ha

$$K\big(Z_{*p}(X_p)\big) = K\big(Z_{*p}(\dot\gamma(0))\big) = K\big(\dot{\tilde\gamma}(0)\big) = \frac{DZ}{\mathrm{d}t}(0) = \nabla_{\dot\gamma(0)}Z = \nabla_{X_p}Z.$$

La proiezione canonica $\pi : TM \longrightarrow M$, $z = (p, u) \longmapsto p$, è data localmente da $\big(x_i, v^i\big) \longmapsto (x_i)$, perciò il differenziale

$$\pi_{*z} : T_z(TM) \longrightarrow T_pM$$

è definito da

$$\tilde X_z = \sum_i \{a^i \big(\frac{\partial}{\partial x_i}\big)_z + b^{n+i}\big(\frac{\partial}{\partial v^i}\big)_z\} \longmapsto \pi_{*z}(\tilde X_z) = \sum_i a^i \big(\frac{\partial}{\partial x_i}\big)_p .$$

Dalle formule (3.3) e (3.4), si ottiene:

$$\pi_{*z}(\tilde X_z^H) = \pi_{*z}\big((X_p)_z^H\big) = X_p \quad \text{e} \quad \pi_{*z}(\tilde X_z^V) = 0$$

per ogni $\tilde X_z = \tilde X_z^H + \tilde X_z^V \in T_z(TM)$. Quindi,

$$\pi_{*z} : \mathcal{H}_z TM \longrightarrow T_pM,\ \tilde X_z^H = (X_p)_z^H \longmapsto X_p,$$

è un isomorfismo. Inoltre, siccome $\pi \circ Z = I_d$, abbiamo

$$\pi_{*z}\big(Z_{*p}(X_p)\big) = X_p,\ z = (p, Z_p)$$

e quindi

$$Z_{*p}(X_p) = \big(X_p\big)_z^H + \big(\nabla_{X_p}Z\big)_z^V. \tag{3.6}$$

Ricapitolando, le applicazioni K e π_* agiscono sui vettori $\tilde X_z \in T_zTM$ come proiezioni supplementari. K annulla la componente orizzontale di $\tilde X_z$ e proietta isomorficamente il sottospazio verticale su T_pM, π_* annulla la componente verticale di $\tilde X_z$ e proietta isomorficamente su T_pM il sottospazio orizzontale. Di conseguenza:

$$\ker K_z = \mathcal{H}_z TM \text{ è isomorfo a } \mathrm{Im}\pi_{*z},$$
$$\ker \pi_{*z} = \mathcal{V}_z TM \text{ è isomorfo a } \mathrm{Im}K_z,$$

e la corrispondenza

$$\Phi : T_z(TM) \longrightarrow T_pM \oplus T_pM,\ \ \tilde X_z \longmapsto \big(\pi_{*z}(\tilde X_z), K_z(\tilde X_z)\big),$$

è un isomorfismo. Infine si noti che, se $p \in M$ e $i : T_pM \hookrightarrow TM, u \mapsto (p, u)$, è l'inclusione della sottovarietà $T_pM = \pi^{-1}(p)$ di TM, allora

$$i_{*u}(T_pM) = \mathcal{V}_z TM.$$

Osservazione C.1. Sia $X_p \in T_pM$. I sollevamenti $X^H_z, X^V_z \in T_z(TM)$, $z = (p, u)$, come derivazioni di funzioni definite su TM si comportano nel modo seguente.

• $X^V_z(\mathrm{d}f) = X_p(f)$ per ogni $f \in \mathcal{F}(M)$, dove la 1-forma $\mathrm{d}f$ su M è pensata come una funzione su TM (cioè, $(\mathrm{d}f)(p, u) = u(f)$);

• $Y^H(f \circ \pi) = Y(f) \circ \pi$ e $Y^V(f \circ \pi) = 0$ $\forall f \in \mathcal{F}(M)$ e $\forall Y \in \mathfrak{X}(M)$;

• se g è una metrica riemanniana su M (in questo caso ∇ è la connessione di Levi-Civita), e denotiamo con r la lunghezza di un vettore tangente u, allora
$$X^H_z(f(r^2)) = 0 \quad \text{e} \quad X^V_z(f(r^2)) = 2f'(r^2)g_p(X_p, u) \quad \text{per ogni } f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}).$$

Il flusso geodetico

Per ogni fissato $z = (p, u) \in TM$ esiste un $\varepsilon > 0$ ed esiste un'unica curva differenziabile $\tilde{\gamma}_z(t) = \big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)$, $|t| < \varepsilon$, di TM, dove $\gamma(t)$ è la curva geodetica di M (rispetto alla connessione ∇) che verifica $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = u$. Poiché il campo tangente $\dot{\gamma}(t)$ è parallelo lungo γ, $\tilde{\gamma}_z(t)$ è una curva orizzontale con $\tilde{\gamma}_z(0) = z$ e quindi $\tilde{\gamma}_z(t)$ è il sollevamento orizzontale di γ uscente da z. Di conseguenza, il vettore $\dot{\tilde{\gamma}}_z(0) = \big(\dot{\gamma}(0), \ddot{\gamma}(0)\big) \in T_z(TM)$ è il sollevamento orizzontale di $X_p = u$ in $z = (p, u)$. Definiamo
$$\xi : TM \longrightarrow T(TM)\,, \quad z = (p, u) \longmapsto \xi_z = \dot{\tilde{\gamma}}_z(0) = u^H_z\,.$$
Se si prende $X_p = u$ nella (3.2), si ha
$$\begin{aligned}\xi_z = u^H_z &= \sum_i u^i \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_z - \sum_k \Big\{\sum_{i,j} \Gamma^k_{ij}(p)\, u^i\, u^j\Big\}\Big(\frac{\partial}{\partial v^k}\Big)_z \\ &= \sum_{i=1}^n u^i \Big\{\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p\Big\}^H_z\end{aligned}$$
da cui, essendo $v^k(z) = u^k$, si ricava l'*espressione locale del campo* ξ :
$$\xi = \sum_k v^k \frac{\partial}{\partial x_k} - \sum_k \Big\{\sum_{i,j} \tilde{\Gamma}^k_{ij}\, v^i\, v^j\Big\}\frac{\partial}{\partial v^k} = \sum_{i=1}^n v^i \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)^H.$$
Dunque, il campo ξ su TM è caratterizzato dalle seguenti proprietà:
$$K_z(\xi_z) = 0 \quad \text{e} \quad \pi_{*z}(\xi_z) = u \quad \forall\, z = (p, u) \in TM.$$
La prima di queste proprietà equivale a dire che ξ_z è un vettore orizzontale, mentre la seconda che ξ_z è il sollevamento orizzontale di u in z. Il campo vettoriale ξ su TM, equivalentemente il gruppo ad un parametro di trasformazioni locali $\phi_t(z) := \tilde{\gamma}_z(t)$ generato da ξ, viene detto *flusso geodetico.* Quindi
$$\xi_z = \dot{\tilde{\gamma}}_z(0) = \frac{d}{dt}\tilde{\gamma}_z(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\phi_t(z)|_{t=0}$$

è il vettore tangente per $t = 0$ all'orbita del flusso geodetico. Il campo ξ, visto come una derivazione di $\mathcal{F}(TM)$, opera come segue:

$$\xi(f)(z) = \xi_z(f) = \dot{\tilde{\gamma}}_z(0)(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\tilde{\gamma}_z(t))_{|t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))_{|t=0}$$

per ogni $f \in \mathcal{F}(TM)$ e per ogni $z \in TM$.

C.3 La metrica di Sasaki e il fibrato sferico

Sia ora (M, g) una varietà riemanniana con ∇ connessione di Levi-Civita. La *metrica di Sasaki* è la metrica riemanniana su TM, che denotiamo con G_s, più studiata e più nota. Essa è definita, per ogni $z = (p, u) \in TM$ e per ogni $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(TM)$, da

$$G_s\big(\tilde{X}, \tilde{Y}\big)(z) = g_p\big(\pi_{*z}(\tilde{X}_z), \pi_{*z}(\tilde{Y}_z)\big) + g_p\big(K_z(\tilde{X}_z), K_z(\tilde{Y}_z)\big).$$

Posto $\tilde{X}_z = \tilde{X}^H_z + \tilde{X}^V_z = (X'_p)^H_z + (X''_p)^V_z$ e $\tilde{Y}_z = \tilde{Y}^H_z + \tilde{Y}^V_z = (Y'_p)^H_z + (Y''_p)^V_z$, dalla definizione di G_s segue che:

$$G_s\big(\tilde{X}, \tilde{Y}\big)(z) = G_s\big(\tilde{X}^H_z, \tilde{Y}^H_z\big) + G_s\big(\tilde{X}^V_z, \tilde{Y}^V_z\big) = g_p(X'_p, Y'_p) + g_p(X''_p, Y''_p).$$

Quindi, la metrica di Sasaki è completamente determinata da

$$\begin{cases} G_s(X^H_z, Y^H_z) &= G_s(X^V_z, Y^V_z) = g_p(X_p, Y_p), \\ G_s(X^H_z, Y^V_z) &= G_s(X^V_z, Y^H_z) = 0, \end{cases}$$

dove $X^H_z, Y^H_z, X^V_z, Y^V_z$ sono i sollevamenti di $X_p, Y_p \in T_pM$. Equivalentemente, la metrica di Sasaki è caratterizzata da

$$G_s(X^H, Y^H) = G_s(X^V, Y^V) = g(X, Y) \circ \pi, \quad G_s(X^H, Y^V) = 0,$$

dove X, Y sono campi di vettori su M. In particolare, i sottospazi $\mathcal{V}_zTM$ e $\mathcal{H}_zTM$ sono G_s-ortogonali. Se $\tilde{X}_z, \tilde{Y}_z \in T_zTM$ sono vettori tangenti, per $t = 0$, alle curve $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), V(t))$ e $\tilde{\sigma}(t) = (\sigma(t), W(t))$ rispettivamente, e quindi per la (3.5)

$$\tilde{X}_z = \dot{\tilde{\gamma}}(0) = \big(\dot{\gamma}(0)\big)^H_z + \Big(\frac{DV}{dt}(0)\Big)^V_z,$$

$$\tilde{Y}_z = \dot{\tilde{\sigma}}(0) = \big(\dot{\sigma}(0)\big)^H_z + \Big(\frac{DW}{dt}(0)\Big)^V_z,$$

allora

$$G_s(\tilde{X}_z, \tilde{Y}_z) = g\Big(\dot{\gamma}(0), \dot{\sigma}(0)\Big) + g\Big(\frac{DV}{dt}(0), \frac{DW}{dt}(0)\Big).$$

Inoltre, la proiezione
$$\pi : (TM, G_s) \to (M, g)$$
è una *sommersione riemanniana* in quanto $\big(\ker \pi_{*z}\big)^{\perp} = \big(\mathcal{V}_z TM\big)^{\perp} = \mathcal{H}_z TM$ e $\pi_{*z} : \mathcal{H}_z TM \to T_pM$ è un'isometria:

$$G_s(X_z^H, Y_z^H) = g_p(X_p, Y_p) = g_p\big(\pi_{*z} X_z^H, \pi_{*z} X_z^H\big) \quad \forall\ X_z^H, Y_z^H \in \mathcal{H}_z TM.$$

Osservazione C.2. TM ammette una struttura quasi complessa J definita da
$$JX^H = X^V \ \text{ e } \ JX^V = -X^H.$$
Si può vedere che (G_s, J) è una struttura quasi hermitiana su TM. Inoltre, se consideriamo su TM la 1-forma β, detta *forma di Liouville*, definita da

$$\beta(\tilde{X}_z) = g_p(u, \pi_* \tilde{X}_z), \quad \text{dove } z = (p, u) \in TM \text{ e } \tilde{X} \in \mathfrak{X}(TM),$$

il differenziale $\mathrm{d}\beta$ è una forma simplettica su TM e $2\mathrm{d}\beta$ è la 2-forma fondamentale della struttura quasi hermitiana (G_s, J) (cfr. [11], Cap. 9).

L'insieme
$$T_1M := \Big\{z = (p, u) \in TM \ : \ g_p(u, u) = 1\Big\}$$
è una ipersuperficie di TM di dimensione $2n - 1$, che viene detta *fibrato sferico unitario tangente*, dove $n = \dim M$. La corrispondente proiezione la denotiamo con $\pi_1 : T_1M \to M$.

Proposizione C.3. *Sia (M, g) una varietà riemanniana. Allora, lo spazio tangente a T_1M in un fissato punto $z = (p, u) \in T_1M$ è dato da*

$$T_z(T_1M) = \left\{X_z^H + Y_z^V : X_p, Y_p \in T_pM,\ Y_p \perp u\right\}. \tag{3.7}$$

In particolare, si ha:
$$\mathcal{H}_z TM \subset T_z(T_1M), \quad e \quad Y_z^V \in T_z(T_1M) \Leftrightarrow Y_p \perp u.$$

Dimostrazione. Sia $z = (p, u) \in T_1M$. Un vettore X_z^H sollevamento orizzontale di $X_p \in T_pM$ è sempre tangente a T_1M. Infatti, $X_z^H = \dot{\tilde{\gamma}}(0)$, dove $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), V(t))$, $\gamma(0) = p$ e $V(t)$ è parallelo lungo $\gamma(t)$ con $V(0) = u$. $V(t)$, in quanto parallelo, ha lunghezza costante. Pertanto $\|V(t)\|$ =cost.= $\|V(0)\| = \|u\| = 1$, cioè $\tilde{\gamma}(t)$ è una curva di T_1M e quindi $X_z^H \in T_z(T_1M)$. Se consideriamo un vettore Y_z^V sollevamento verticale di $Y_p \in T_pM$, questo non sempre è tangente a T_1M. Infatti, sia $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), V(t))$ una curva verticale di T_1M uscente da z, quindi $\tilde{\gamma}(t) = (p, V(t))$ e $V(0) = u$, con $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(0) = Y_p \in T_pM$. Il vettore verticale $Y_z^V = \dot{\tilde{\gamma}}(0) = (0, \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(0)) = (0, Y_p)$. Siccome $g(V(t), V(t)) = 1$ è costante, si ha $g_p(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(0), V(0)) = 0$, cioè $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(0)$ è ortogonale a $u = V(0)$, quindi $Y_z^V \in T_z(T_1M)$ se e solo se $Y_p \perp u$. Ciò conclude la dimostrazione in quanto $\dim T_z(T_1M) = 2n - 1$. $\square$

Il campo vettoriale $N : T_1M \longrightarrow T(TM)$,

$$z = (p,u) \longmapsto N_z = u_z^V = \Big\{\sum_i u^i \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)\Big\}_p^V = \sum_i u^i \Big(\frac{\partial}{\partial v^i}\Big)_z,$$

è unitario in quanto $G_s(N_z, N_z) = G_s(u_z^V, u_z^V) = g_p(u,u) = 1$. Dalla definizione di G_s segue che N è anche normale a T_1M. Infatti: se $\tilde{X}_z \in T_z(T_1M)$, $z = (p,u)$, è orizzontale allora è chiaramente ortogonale a N_z che è verticale; se invece $\tilde{X}_z$ è verticale, applicando la (3.7), si ha che $\tilde{X}_z$ è il sollevamento verticale di un vettore ortogonale a u, e quindi è ortogonale a N_z. Una conseguenza immediata è che

$$T_z(T_1M) = N_z^{\perp} = \big(u_z^V\big)^{\perp}, \quad z = (p,u) \in T_1M.$$

Inoltre, se X_z^V è il sollevamento verticale di $X_p \in T_pM$ in $z = (p,u) \in T_1M$, allora

$$X_z^T := X_z^V - g_p(X_p, u)N_z$$

è un vettore di $T_z(T_1M)$ che prende il nome di *sollevamento tangenziale* di X_p in $z = (p,u) \in T_1M$. Naturalmente $X_z^T = X_z^V$ quando $X_p \perp u$. In particolare, $T_z(T_1M)$ è generato da vettori del tipo:

$$X_z^H = \big(X_p\big)^H \text{ e } X_z^T = \big(X_p\big)^T.$$

Il *sollevamento tangenziale di un campo di vettori* $X \in \mathfrak{X}(M)$ è il campo di vettori tangenziale $X^T \in \mathfrak{X}(T_1M)$ che ad ogni punto $z = (p,u) \in T_1M$ associa il sollevamento tangenziale di X_p in z. Il flusso geodetico ξ, in quanto vettore orizzontale ($\xi_z = u_z^H$) definisce su T_1M un campo di vettori unitari e tangenti che, usualmente, è indicato con lo stesso simbolo. Tale ξ è anche differenziabile in quanto l'applicazione

$$\xi \circ i : T_1M \hookrightarrow TM \to T(T_1M)$$

è differenziabile.

Se Z è un campo di vettori unitario, come per la (3.6), si può considerare l'applicazione $Z : M \to T_1M$ e quindi, per ogni $p \in M$, il differenziale $Z_{*p} : T_pM \to T_zT_1M$, $z = (p, Z_p)$, soddisfa:

$$Z_{*p}(X_p) = \big(X_p\big)_z^H + \big(\nabla_{X_p} Z\big)_z^V = \big(X_p\big)_z^H + \big(\nabla_{X_p} Z\big)_z^T.$$

La metrica di Sasaki G_s di TM induce su T_1M una metrica riemanniana che indichiamo con $\tilde{G}_s$. Se $z = (p,u) \in T_1M$ e $\{e_1 = u, e_2, \dots, e_n\}$ è una base g-ortonormale di T_pM, allora

$$\{\xi_z = u_z^H, (e_2)_z^H, \dots, (e_n)_z^H, N_z = u_z^V, (e_2)_z^V, \dots, (e_n)_z^V\}$$

è una base G_s-ortonormale di $T_z(TM)$, e

$$\{\xi_z = u_z^H, (e_2)_z^H, \dots, (e_n)_z^H, (e_2)_z^V, \dots, (e_n)_z^V\}$$

è una base $\tilde{G}_s$-ortonormale di $T_z(T_1M)$.

Se $\tilde{\nabla}$ è la connessione di Levi–Civita di (TM, G_s), *l'operatore di Weingarten* (cfr. Sezione 6.7) dell'ipersuperficie T_1M di TM, dato da $S_N X := -\tilde{\nabla}_X N$, è caratterizzato da:

$$S_N\, X^H = 0 \quad \text{e} \quad S_N\, X^T = -X^T,$$

per ogni vettore orizzontale X^H e per ogni vettore tangenziale X^T. Di conseguenza, *T_1M è una ipersuperficie di (TM, G_s) a curvatura media H costante $\neq 0$*:

$$H := \frac{\text{tr } S_N}{2n-1} N = -\frac{n-1}{2n-1} N.$$

C.4 Il fibrato sferico tangente di una superficie riemanniana

Sia M^2 una superficie riemanniana, ovvero una varietà riemanniana 2-dimensionale con metrica g. In tal caso, il tensore di curvatura di M^2 è dato da

$$R(X,Y)Z = \kappa\big(g(X,Z)Y - g(Y,Z)X\big).$$

dove κ è la curvatura gaussiana. Inoltre assumiamo che M^2 sia orientabile, quindi possiamo definire una struttura complessa J ponendo:

$$Je_1 = e_2,\ Je_2 = -e_1,$$

dove (e_1, e_2) è una base ortonormale (locale) positiva.

Sia T_1M^2 il fibrato sferico tangente con la metrica di Sasaki $\tilde{G}_s$. Ponendo

$$(E_1)_z = (Ju)^T_z = (Ju)^V_z, \quad (E_2)_z = (Ju)^H_z, \quad (E_3)_z = (u)^H_z$$

per ogni $z = (x,u) \in T_1M^2$, si ottiene una base ortonormale globale su $(T_1M^2, \tilde{G}_s)$. Indichiamo con η_1, η_2, η_3 le 1-forme duali di E_1, E_2, E_3. Allora, dalla Proposizione 1 di [73], si ha

$$\mathrm{d}\eta_1 = \kappa\, \eta_2 \wedge \eta_3, \quad \mathrm{d}\eta_2 = -\eta_1 \wedge \eta_3, \quad \mathrm{d}\eta_3 = \eta_1 \wedge \eta_2.$$

Di conseguenza, i campi di vettori E_1, E_2, E_3 soddisfano:

$$[E_2, E_3] = -\kappa\, E_1\,, \quad [E_3, E_1] = -E_2\,, \quad [E_1, E_2] = -E_3\,. \tag{3.8}$$

Assumiamo ora che M^2 sia a curvatura gaussiana κ costante e che i campi vettoriali (E_1, E_2, E_3) siano completi (ad esempio, se M^2 è compatta i campi vettoriali sono completi). Allora, applicando il Teorema 3.16, il rivestimento universale di T_1M^2 si può pensare come un gruppo di Lie $\mathcal{G}$ con i campi vettoriali (E_1, E_2, E_3) invarianti a sinistra. Inoltre, la metrica di Sasaki $\tilde{G}_s$ è invariante a sinistra in quanto la base (E_1, E_2, E_3) è ortonormale rispetto a tale metrica (cfr. Proposizione 5.16). Quindi, dalla (3.8), tenendo conto della classificazione dei gruppi di Lie unimodulari data nella Sezione 3.6.1, si ha:

$$\mathcal{G} = SU(2) \text{ se } \kappa > 0; \quad \mathcal{G} = \tilde{E}(2) \text{ se } \kappa = 0; \quad \mathcal{G} = \widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \text{ se } \kappa < 0.$$

In particolare $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$, rivestimento universale di $PSL(2, \mathbb{R})$, si può vedere come il rivestimento universale del fibrato sferico tangente T_1H^2 del piano iperbolico con la metrica indotta (cfr., anche [65] p.395).

Usando le notazioni della Sezione 8.9 (caso unimodulare), dalla (3.8) segue che

$$\lambda_1 = -\kappa, \ \lambda_2 = \lambda_3 = -1, \quad \mu_1 = (\kappa - 2)/2, \ \mu_2 = \mu_3 = -\kappa/2,$$

e quindi dalla (8.29) si ottiene che le componenti del tensore di Ricci $Ric_{ij} = Ric(E_i, E_j)$ sono date da

$$Ric_{11} = \kappa^2/2, \quad Ric_{22} = Ric_{33} = \kappa(2 - \kappa)/2, \quad Ric_{ij} = 0 \ \forall i \neq j. \tag{3.9}$$

Di conseguenza, la segnatura della curvatura di Ricci $(Ric_{11}, Ric_{22}, Ric_{33})$ è data da:

- (+,–,–) se $\kappa < 0$;
- (0,0,0) se $\kappa = 0$;
- (+,+,+) se $0 < \kappa < 2$;
- (+,0,0) se $\kappa = 2$;
- (+,–,–) se $\kappa > 2$.

In particolare,

$$Ric_{11} = Ric_{22} = Ric_{33} \iff \kappa = 1 \text{ (caso } SU(2)) \text{ oppure } \kappa = 0 \text{ (caso } \tilde{E}(2)).$$

Pertanto, $(T_1M^2, \tilde{G}_s)$ è di Einstein, ovvero ha curvatura sezionale costante, se e solo se $\kappa = 1$ o $\kappa = 0$. Nel caso di $\kappa = 1$, la metrica $\tilde{G}_s$ ha curvatura sezionale costante $K = 1/4$, e la metrica $\tilde{g} = (1/4)\tilde{G}_s$ ha curvatura sezionale costante $K = 1$.

Struttura riemanniana di contatto su T_1M

Sia M^2 una varietà riemanniana di dimensione 2 con curvatura gaussiana κ. Usando le notazioni introdotte all'inizio di questa Sezione, poniamo

$$\xi_1 = 2E_2, \quad \xi_2 = 2E_3, \quad \xi_3 = -2E_1.$$

Allora, la (3.8) diventa

$$[\xi_1, \xi_2] = 2\kappa\xi_3\,, \quad [\xi_2, \xi_3] = 2\xi_1\,, \quad [\xi_3, \xi_1] = 2\xi_2\,. \tag{3.10}$$

Si noti che i campi vettoriali ξ_1, ξ_2, ξ_3 sono ortonormali rispetto alla metrica $\tilde{g} = (1/4)\tilde{G}_s$, inoltre $(1/2)\xi_2$ è il flusso geodetico.

Consideriamo la 1-forma $\eta = \tilde{g}(\xi, \cdot)$, $\xi = \xi_2$. Allora, dalla (3.10) si ottiene

$$(\mathrm{d}\eta)(\xi_1, \xi_3) = 1, \quad \text{e} \quad (\mathrm{d}\eta)(\xi, \cdot) = 0.$$

Di conseguenza, con un semplice calcolo si ha

$$\eta \wedge \mathrm{d}\eta \neq 0 \ .$$

Inoltre, le condizioni $\eta(\xi) = 1$, e $(\mathrm{d}\eta)(\xi, \cdot) = 0$, ci dicono che ξ è il campo vettoriale di Reeb della 1-forma di contatto η. Ora, se definiamo il tensore φ ponendo

$$\varphi\xi = 0, \ \varphi\xi_3 = \xi_1, \ \varphi\xi_1 = -\xi_3,$$

si ottiene facilmente che $(\mathrm{d}\eta)(\cdot, \cdot) = \tilde{g}(\cdot, \varphi\cdot)$. Pertanto, $(\eta, \xi, \varphi, \tilde{g})$, è una struttura riemanniana di contatto, *la struttura riemanniana di contatto naturale*, su T_1M^2 dove il campo vettoriale di Reeb è il flusso geodetico (normalizzato). Infine, determiniamo il tensore $h = (1/2)\mathcal{L}_\xi\varphi$. Dalla (3.9) segue

$$h\xi_1 = (\kappa - 1)\xi_1 \quad \text{e} \quad h\xi_3 = (1 - \kappa)\xi_3.$$

Pertanto, la struttura riemanniana di contatto naturale su T_1M^2 è sasakiana se e solo se M^2 ha curvatura gaussiana $\kappa = \mathit{cost.} = 1$.

Più in generale, abbiamo la seguente

Osservazione C.4. La struttura riemanniana di contatto naturale $(\tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{\varphi}, \tilde{g})$ sul fibrato sferico tangente T_1M, di una varietà riemanniana (M, g) di dimensione arbitraria n, è definita da (cfr. [11], Cap. 9):

- $\tilde{\eta} = (1/2)\eta'$, dove η' la 1-forma su T_1M indotta dalla forma di Liouville β su TM (cfr. Osservazione C.2). In forma esplicita:

$$\tilde{\eta}_z(X^T_z) = 0, \quad \tilde{\eta}_z(X^H_z) = (1/2)g_p(X, u), \quad z = (p, u) \in T_1M \text{ e } X \in \mathfrak{X}(M).$$

- $\tilde{\xi} = 2\xi$, dove ξ è il flusso geodetico. In forma esplicita:

$$\tilde{\xi}_z = 2\, u^H, \ z = (p, u) \in T_1M.$$

- Per $z = (p, u) \in T_1M$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\tilde{\varphi}_z X^T_z = -X^H_z + (1/2)g_p(X_p, u)\tilde{\xi}_z, \ \tilde{\varphi}_z X^H_z = X^T_z.$$

- $\tilde{g} = (1/4)\tilde{G}_s$. In forma esplicita:

$$\tilde{g}_z(X^T_z, Y^T_z) = (1/4)\big(g_p(X, Y) - g_p(X_p, u)g_p(Y_p, u)\big),$$
$$\tilde{g}_z(X^T_z, Y^H_z) = 0, \quad \tilde{g}_z(X^H_z, Y^H_z) = (1/4)g_p(X_p, Y_p),$$

dove $z = (p, u) \in T_1M$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Si noti che il campo vettoriale di Reeb $\tilde{\xi}$ della struttura riemanniana di contatto naturale su T_1M è di Killing se, e solo se, la varietà riemanniana (M, g) ha curvatura sezionale costante $+1$, e in tal caso la struttura di contatto è sasakiana. In particolare, se (M, g) è la sfera canonica di curvatura sezionale costante $+1$, la struttura riemanniana di contatto naturale su $T_1\mathbb{S}^n$ è sasakiana. Inoltre, se M ha curvatura negativa, $\tilde{\xi}$ (che è due volte il flusso geodetico) è un campo vettoriale di Anosov (cfr., ad esempio, [11] Sez. 11.2).

C.5 Metriche riemanniane g-naturali su TM e T_1M

La metrica di Sasaki è solo un caso particolare di un'ampia classe di metriche riemanniane su TM e T_1M introdotte da O. Kowalski e M. Sekizawa [58], e denominate *metriche riemanniane g-naturali.*

Sia (M,g) una varietà riemanniana, una *metrica g-naturale* G su TM è definita da

$$\begin{cases} G_{(p,u)}(X^H,Y^H) &= (\alpha_1+\alpha_3)(r^2)g_p(X,Y) \\ &\quad +(\beta_1+\beta_3)(r^2)g_p(X,u)g_p(Y,u), \\ G_{(p,u)}(X^H,Y^V) &= G_{(p,u)}(X^V,Y^H) \\ &= \alpha_2(r^2)g_p(X,Y)+\beta_2(r^2)g_p(X,u)g_p(Y,u), \\ G_{(p,u)}(X^V,Y^V) &= \alpha_1(r^2)g_p(X,Y)+\beta_1(r^2)g_p(X,u)g_p(Y,u), \end{cases} \tag{3.11}$$

dove α_i, $\beta_i : \mathbb{R}^+ = [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $i=1,2,3$, sono sei funzioni differenziabili, u,X,$Y \in T_pM$ e $r^2 = g_p(u,u)$. Poniamo

$$\phi_i(t) = \alpha_i(t) + t\beta_i(t), \quad \alpha(t) = \alpha_1(t)(\alpha_1+\alpha_3)(t) - \alpha_2^2(t),$$
$$\phi(t) = \phi_1(t)(\phi_1+\phi_3)(t) - \phi_2^2(t),$$

per ogni $t \in \mathbb{R}^+$. Allora, una metrica g-naturale G su TM è riemanniana se e solo se valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\alpha_1(t) > 0, \quad \phi_1(t) > 0, \quad \alpha(t) > 0, \quad \phi(t) > 0, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+. \tag{3.12}$$

In letteratura ci sono ben note metriche riemanniane su TM le quali sono casi speciali di metriche riemanniane g-naturali. In particolare:

• la *metrica di Sasaki* G_s si ottiene per
$$\alpha_1(t) = 1, \quad \alpha_2(t) = \alpha_3(t) = \beta_1(t) = \beta_2(t) = \beta_3(t) = 0;$$

• la *metrica di Cheeger-Gromoll* G_{cg} [23] è la metrica che si ottiene per
$$\alpha_2(t) = \beta_2(t) = 0, \quad \alpha_1(t) = \beta_1(t) = -\beta_3(t) = \tfrac{1}{1+t}, \quad \alpha_3(t) = \tfrac{t}{1+t};$$

• *metriche di Kaluza-Klein* G_{kk} (cfr., ad esempio, [122]), sono metriche g-naturali che si ottengono per
$$\alpha_2(t) = \beta_2(t) = \beta_1(t) + \beta_3(t) = 0.$$

Le metriche G_s e G_{cg} sono particolari metriche di Kaluza-Klein. In generale la proiezione $\pi : (TM,G) \to (M,g)$ non è una sommersione riemanniana, tuttavia se $G = G_{kk}$ con $\alpha_1(t) + \alpha_3(t) = 1$, allora la proiezione π è una sommersione riemanniana.

Metriche g-naturali on T_1M sono le restrizioni all'ipersuperficie T_1M di metriche g-naturali su TM. Queste metriche possiedono una semplice forma. Precisamente, tenendo conto di (3.7), dalla (3.11) segue che una metrica g-naturale $\tilde{G}$ su T_1M, indotta da una metrica g-naturale G su TM, è completamente caratterizzata dalle seguenti identità

$$\begin{cases} G_{(p,u)}(X_1^H, X_2^H) &= (\alpha_1+\alpha_3)(r^2)g_p(X_1,X_2) \\ & \quad +(\beta_1+\beta_3)(r^2)g_p(X_1,u)g_p(X_2,u), \\ G_{(p,u)}(X_1^H, Y_1^V) &= \alpha_2(r^2)g_p(X_1,Y_1), \\ G_{(p,u)}(Y_1^V, Y_2^V) &= \alpha_1(r^2)g_p(Y_1,Y_2), \end{cases} \tag{3.13}$$

per ogni $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in T_pM$ con $Y_1, Y_2 \perp u$, dove $r^2 = g_p(u,u)$. Siccome la lunghezza di ogni elemento $(p,u) \in T_1M$ è costante ($r = 1$), ne segue che $G_{(p,u)}$ dipende da quattro costanti. Poniamo

$$a = \alpha_1(1), \quad b = \alpha_2(1), \quad c = \alpha_3(1), \quad \text{e} \quad d = (\beta_1+\beta_3)(1).$$

Nel caso di T_rM fibrato sferico di raggio r, si pone $a = \alpha_1(r^2)$, $b = \alpha_2(r^2)$, $c = \alpha_3(r^2)$ e $d = (\beta_1+\beta_3)(r^2)$. Tornando al caso unitario, fissato (p,u) elemento di T_1M, quindi $\|u\| = 1$, sia $(e_1, , ...e_{n-1}, e_n = u)$ una base ortonormale di T_pM. Allora una base di $T_{(p,u)}(T_1M)$ è data da $(e_1^V, , ..., e_{n-1}^V, e_1^H, , ..., e_n^H)$. La corrispondente matrice delle componenti della metrica, tenendo conto della (3.13), è data da

$$\begin{pmatrix} a\,I_{n-1} & b\,I_{n-1} & 0 \\ b\,I_{n-1} & (a+c)I_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & a+c+d \end{pmatrix}.$$

Quindi $\tilde{G}$ è riemanniana, cioè è definita positiva, se e solo se i minori principali della precedente matrice sono tutti positivi e ciò si verifica se e solo se valgono le seguenti disuguaglianze

$$a > 0, \quad a(a+c) - b^2 > 0 \quad \text{and} \quad a+c+d > 0. \tag{3.14}$$

Nel caso di $T_rM := \{z = (p,u) \in TM \,:\, g_p(u,u) = r^2\}$ cambia solo l'ultima condizione che diventa $a + c + d\,r^2 > 0$. La condizione (3.14) ci dice che $\tilde{G}$ è riemanniana, ma ciò non significa che $\tilde{G}$ sia indotta da una metrica riemanniana g-naturale G su TM. Se $\tilde{G}$ è indotta da una metrica riemanniana g-naturale G su TM della forma (3.11), senza perdere in generalità, la metrica G su TM si può scegliere con

$$\alpha_1 = a, \;\; \alpha_2 = b, \;\; \alpha_3 = c, \;\; \beta_1 = \beta_2 = 0, \;\; \beta_3 = \beta, \tag{3.15}$$

dove a, b, c sono costanti e $\beta : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile. Allora la metrica $\tilde{G}$ su T_1M, indotta da questa metrica riemanniana g-naturale G su TM, dipende solo dal valore $d := \beta(1)$. Da (3.12) e (3.15), segue che in questo caso $\tilde{G}$ è riemanniana se e solo se le costanti a, b, c, d soddisfano

$$a > 0, \quad \alpha := a(a+c) - b^2 > 0 \quad \text{and} \quad \phi := a(a+c+d) - b^2 > 0. \tag{3.16}$$

Nel caso del fibrato T_rM cambia solo l'ultima condizione che diventa

$$\phi := a(a + c + d\, r^2) - b^2 > 0, \quad \text{dove } d := \beta(r^2).$$

Come nel caso della metrica di Sasaki, si può verificare che il campo di vettori su TM definito da

$$N_z^G = \frac{1}{\sqrt{(a + c + d)\phi}}\, [-b\, u^h + (a + c + d)\, u^v],$$

per ogni $z = (p, u) \in TM$, è unitario e normale in ogni punto di T_1M. Anche in questo caso si può definire il *sollevamento tangenziale* $X_z^{T_G}$, rispetto a G, di un vettore $X_p \in T_pM$ in $z = (p, u) \in T_1M$, come la proiezione tangenziale del sollevamento verticale X_z^V di X_p in $z = (p, u)$ rispetto a N_z^G, cioè,

$$X_z^{T_G} = X_z^V - G_z(X_z^V, N_z^G)\, N_z^G = X_z^V - \sqrt{\frac{\phi}{a + c + d}}\, g_p(X_p, u)\, N_{(p,u)}^G.$$

Se $X_p \in T_pM$ è ortogonale a u, allora

$$X_z^{T_G} = X_z^V, \quad \text{mentre} \quad u_z^{T_G} = \frac{b}{a + c + d}\, u_z^H.$$

Lo spazio tangente $T_z(T_1M)$, $z = (p, u) \in T_1M$, è generato da vettori del tipo X_z^H e $Y_z^{T_G}$, dove $X_p, Y_p \in T_pM$. Tenendo conto di questo fatto, la metrica riemanniana $\tilde{G}$ su T_1M, indotta da G, è completamente determinata da

$$\begin{cases} \tilde{G}_z(X_z^H, Y_z^H) & = (a + c)\, g_p(X_p, Y_p) + d\, g_p(X_p, u) g_x(Y_p, u), \\ \tilde{G}_z(X_z^H, Y_z^{T_G}) & = b\, g_p(X, Y), \\ \tilde{G}_{(x,u)}(X_z^{T_G}, Y_z^{T_G}) & = a\, g_p(X, Y) - \frac{\phi}{a+c+d}\, g_p(X_p, u) g_p(Y_p, u), \end{cases}$$

per ogni $z = (p, u) \in T_1M$ e per ogni $X_p, Y_p \in T_pM$.

Dalla definizione di $\tilde{G}$, segue che la condizione $b = 0$ è soddisfatta se e solo se i sollevamenti orizzontali e tangenziali sono ortogonali rispetto a $\tilde{G}$.

In particolare:

- la metrica di Sasaki $\tilde{G}_s$ è definita da
$$a = 1 \quad \text{e} \quad b = c = d = 0;$$
- la metrica di Cheeger-Gromoll $\tilde{G}_{cg}$ è definita da
$$a = \tfrac{1}{2}, \quad b = 0,\ c = \tfrac{1}{2} \quad \text{e} \quad d = 0;$$
- metriche di Kaluza-Klein $\tilde{G}_{kk}$ sono definite da
$$b = d = 0 \quad \text{e} \quad a(a + c) > 0.$$

Per maggiori dettagli e approfondimenti sulle metriche g-naturali si rinvia a [1] e [2] (e alla bibliografia in essi contenuta).