Capitolo 9

Campi vettoriali di Killing e di Hopf

I campi vettoriali di Killing su una varietà riemanniana, e in particolare quelli di Hopf sulla sfera $\mathbb{S}^{2n+1}$ (che sono esattamente i campi unitari di Killing, cfr. Sezione 9.5) sono i più importanti campi vettoriali in geometria riemanniana. Ad esempio, essi giocano un ruolo fondamentale in geometria sasakiana, nello studio dell'armonicità dei campi vettoriali V pensati come applicazioni da (M, g) in (TM, G_s), dove G_s è la metrica di Sasaki, oppure da (M, g) in (T^1M, G_s) se V è unitario, e nello studio dei campi vettoriali unitari di volume minimo (problema di H. Gluck – W. Ziller, cfr. Sezione 9.6). Inoltre, l'esistenza di campi vettoriali di Killing è intimamente legata alla curvatura della varietà.

9.1 Campi vettoriali di Killing

Definizione 9.1. Un campo di vettori V su una varietà riemanniana (M, g) è detto campo di vettori di *Killing*, oppure *isometria infinitesimale*, se il gruppo (locale) a 1-parametro di diffeomorfismi $\phi(t, p)$ associato a V consiste di isometrie (locali).

Siccome la derivata di Lie

$$(\mathcal{L}_V g)_p := \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t} \left(\phi_t^* g_{\phi_t(p)} - g_p\right),$$

allora $\mathcal{L}_V g = 0$ se e solo se $\phi_t^* g_{\phi_t} = g$, cioè se e solo se V è di Killing. Ricordiamo che se S è un tensore di tipo $(0, 2)$,

$$(\mathcal{L}_V S)(X, Y) = VS(X, Y) - S([V, X], Y) - S(X, [V, Y]). \qquad (9.1)$$

Se $S = g$, siccome $\nabla g = 0$, si ha

$$(\mathcal{L}_V g)(X, Y) = g(\nabla_X V, Y) + g(X, \nabla_Y V).$$

Pertanto, V è di Killing se e solo se è soddisfatta l'equazione (di Killing)

$$g(\nabla_X V, Y) + g(X, \nabla_Y V) = 0,$$

ovvero l'operatore ∇V è antisimmetrico. In particolare, i campi vettoriali paralleli sono di Killing e inoltre hanno lunghezza costante (cfr. Proposizione 8.41). Usando la (9.1), si ha che

$$\mathcal{L}_{[V,W]} g = \mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_W g - \mathcal{L}_W \circ \mathcal{L}_V g.$$

Pertanto, l'insieme $\mathcal{K}(M)$ dei campi vettoriali di Killing su M, oltre ad essere uno spazio vettoriale reale, è un'algebra di Lie.

Osservazione 9.2. Sia $\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \to (M, g)$ un rivestimento riemanniano. É noto che per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ esiste un unico $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ tale che $\pi_{*\tilde{p}} \tilde{X}_{\tilde{p}} = X_{\pi(\tilde{p})}$ per ogni $\tilde{p} \in \tilde{M}$ (cfr. Proposizione 2.31). Siccome π è un'isometria locale, dall'equazione di Killing segue che X è di Killing se e solo se $\tilde{X}$ è di Killing.

Osservazione 9.3. Data $f \in \mathcal{F}(M)$, se consideriamo il campo vettoriale ∇f (gradiente di f), tenendo conto della (2.5) dell'Appendice B.1, si ha

$$(\mathcal{L}_{(\nabla f)} g)(X, Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y) + g(X, \nabla_Y \nabla f) = 2g(\nabla_X \nabla f, Y).$$

Quindi, dalla definizione di hessiano di f (cfr. Appendice B.1) si ha

$$(1/2)(\mathcal{L}_{(\nabla f)} g) = \nabla^2 f = Hess f \quad \text{(hessiano di } f).$$

Osservazione 9.4. Sia ξ un campo vettoriale di Killing su (M, g). Siccome ξ genera un gruppo (locale) ad un parametro di isometrie e il tensore di Ricci Ric è invariante per isometrie (locali), allora $\mathcal{L}_\xi Ric = 0$.

Osservazione 9.5. Se V è un campo vettoriale geodetico, ossia $\nabla_V V = 0$, e di lunghezza costante, dall'espressione di $(\mathcal{L}_V g)$ segue che $(\mathcal{L}_V g)(V, \cdot) = 0$.

La seguente proposizione è la versione infinitesimale della Proposizione 7.37.

Proposizione 9.6. *Un campo vettoriale $V \in \mathcal{K}(M)$ è univocamente determinato da V_p e $(\nabla V)(p)$ per un fissato punto $p \in M$.*

Dimostrazione. Poiché $\mathcal{K}(M)$ è uno spazio vettoriale, basta provare che se $V_p = 0$ e $(\nabla V)(p) = 0$, allora $V = 0$ su M. Intanto proviamo che $V_p = 0$ e $(\nabla V)(p) = 0$ implicano la seguente proprietà:

$$\text{“}V \text{ è nullo in un intorno del punto } p.\text{”} \tag{9.2}$$

Sia ϕ_t, $|t| < \epsilon$, il flusso locale di V definito in un intorno U di p, quindi $\phi_t : U \to \phi_t(U), q \mapsto \sigma(t) = \phi(t, q)$, è una isometria per ogni t; inoltre, per ogni $q \in U$ la curva $\sigma(t) = \phi(t, q)$ è l'unica curva che soddisfa $\sigma(0) = q$ e $\dot{\sigma}(t) = V_{\sigma(t)} = V_{\phi(t,q)}$ (cfr. Teorema 2.35). Allora $(\mathrm{d}\phi(t,p)/\mathrm{d}t)(0) = V_p = 0$ implica $\phi(t,p) = p$ per ogni t. Proviamo che $\phi_t : U \to \phi_t(U)$ è l'identità su tutto U. Dato $Y \in \mathfrak{X}(M)$, consideriamo il differenziale $(\phi_t)_{*p} : T_pM \to T_pM$ e poniamo $y(t) = (\phi_t)_{*p}Y_p$. Siccome

$$\dot{y}(0) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\phi_t\big)_{*p}Y_p\right)_0 = -\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\phi_{-t}\big)_{*p}Y_{\phi(t,p)}\right)_0 = -\mathcal{L}_{V_p}Y = -[V,Y]_p$$

e

$$[V,Y]_p = \nabla_{V_p}Y - \nabla_{Y_p}V = 0 \quad \text{(tenendo conto che } V_p = (\nabla V)_p = 0\text{)},$$

otteniamo $\dot{y}(0) = 0$. Di conseguenza, per ogni t:

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\phi_t\big)_{*p}Y_p\right)(t) = \lim_{h\to 0}\frac{(\phi_{t+h})_{*p}Y_p - (\phi_t)_{*p}Y_p}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(\phi_t)_{*p}(\phi_h)_{*p}Y_p - (\phi_t)_{*p}Y_p}{h} \\
&= \big(\phi_t\big)_{*p}\lim_{h\to 0}\frac{(\phi_h)_{*p}Y_p - Y_p}{h} = \big(\phi_t\big)_{*p}\dot{y}(0) = \big(\phi_t\big)_{*p}0 = 0,
\end{aligned}$$

dunque $y(t)$ è costante e quindi $(\phi_t)_{*p}Y_p = Y_p$. Pertanto, l'isometria ϕ_t soddisfa $\phi_t(p) = p$ e $(\phi_t)_{*p} = I_{T_pM}$ per ogni t, e quindi (cfr. Esercizio 7.37) $\phi_t = I_U$ da cui segue che V è nullo su U, ossia la proprietà (9.2). Di conseguenza l'insieme $A = \{p \in M : V(p) = 0,\ (\nabla V)(p) = 0\}$ è un aperto, ovviamente è anche un chiuso, ed essendo M connessa possiamo concludere che $A = M$ e quindi V è nullo su M. □

Proposizione 9.7. *L'algebra di Lie $\mathcal{K}(M)$ ha dimensione $\leq n(n+1)/2$, dove $n = \dim M$.*

Dimostrazione. Fissato un punto $p \in M$, denotiamo con $\mathcal{A}_p$ l'insieme delle trasformazioni antisimmetriche di T_pM e consideriamo l'applicazione lineare

$$\Phi : \mathcal{K}(M) \to T_pM \times \mathcal{A}_p,\ X \mapsto \big(X_p, (\nabla X)(p)\big).$$

Dalla dimostrazione della Proposizione 9.6 segue che il nucleo di Φ è banale, quindi

$$\dim \mathcal{K}(M) \leq \dim T_pM + \dim \mathcal{A}_p = n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2.$$

□

Osservazione 9.8. Se (M,g) è una varietà riemanniana completa, allora ogni campo vettoriale di Killing è completo, inoltre l'algebra di Lie $\mathcal{K}(M)$ è isomorfa all'algebra di Lie del gruppo di Lie $\mathrm{Iso}(M,g)$ ([100], p.118). Quindi, posto $\dim M = n$, $\dim \mathcal{K}(M) = n(n+1)/2$ se e solo se M è isometrica a una delle seguenti varietà a curvatura sezionale costante: lo spazio euclideo

$\mathbb{R}^n$, lo spazio iperbolico H^n, la sfera canonica $\mathbb{S}^n$, lo spazio proiettivo reale $\mathbb{R}P^n$ ([100], p.120; [56] vol I, p.239). Inoltre, se una varietà riemanniana compatta ha tensore di Ricci nullo, lo spazio dei campi vettoriali di Killing ha dimensione uguale al primo numero di Betti $b_1(M)$ ([10], p.41).

Il seguente risultato di K. Yano [125] si è rivelato molto utile nello studio dei campi vettoriali di Killing.

Proposizione 9.9. *Sia (M, g) una varietà riemanniana. Ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ soddisfa l'equazione*

$$\begin{aligned} Ric(X,X) = \|\nabla X\|^2 - (1/2)\|\mathcal{L}_X g\|^2 + (\operatorname{div} X)^2 \\ + \operatorname{div}(\nabla_X X) - \operatorname{div}((\operatorname{div} X)\, X). \end{aligned} \tag{9.3}$$

In particolare, se M è compatta:

$$\int_M \big(Ric(X,X) - \|\nabla X\|^2 + (1/2)\|\mathcal{L}_X g\|^2 - (\operatorname{div} X)^2\big)\, v_g = 0. \tag{9.4}$$

Dimostrazione. Proviamo le seguenti formule:

$$\begin{aligned} Ric(X,X) = -\operatorname{tr}\{(\nabla X)\circ(\nabla X)\} + (\operatorname{div} X)^2 \\ + \operatorname{div}(\nabla_X X) - \operatorname{div}((\operatorname{div} X)\, X), \end{aligned} \tag{9.5}$$

$$\operatorname{tr}\{(\nabla X)\circ(\nabla X)\} = (1/2)\|\mathcal{L}_X g\|^2 - \|\nabla X\|^2. \tag{9.6}$$

Dato $p \in M$, sia $\{E_1, \cdots, E_n\}$ una base ortonormale di campi vettoriali definiti su un aperto U di M con $p \in U$ tale che $(\nabla E_i)_p = 0$, cioè $(\nabla_X E_i)_p = 0$, per ogni $1 \le i \le n$. Allora, nel punto p, si ottiene

$$\begin{aligned} Ric(X,X) &= \sum_i R(X,E_i,X,E_i) = \sum_i g(R(X,E_i)X,E_i) \\ &= -\sum_i g(\nabla_X\nabla_{E_i}X - \nabla_{E_i}\nabla_X X - \nabla_{[X,E_i]}X\,,\,E_i) \\ &= -\sum_i \{X(g(\nabla_{E_i}X,E_i)) - g(\nabla_{E_i}X,\nabla_X E_i)\} + \operatorname{div}(\nabla_X X) \\ &\quad - \sum_i g(\nabla_{\nabla_{E_i}X}X,E_i) \\ &= -X(\operatorname{div} X) + \operatorname{div}(\nabla_X X) - \operatorname{tr}\,\{(\nabla X)\circ(\nabla X)\}\,, \end{aligned}$$

e quindi la (9.5), tenendo anche conto dell'identità

$$\operatorname{div}(fX) = f\operatorname{div}(X) + X(f).$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}_X g\|^2 &= \sum_{i,j} \big((\mathcal{L}_X g)(E_i, E_j)\big)^2 = \sum_{i,j} \big(g(\nabla_{E_i} X, E_j) + g(E_i, \nabla_{E_j} X)\big)^2 \\
&= \sum_{i,j} \Big(g(\nabla_{E_i} X, E_j)^2 + 2g(\nabla_{E_i} X, E_j) g(E_i, \nabla_{E_j} X) \\
&\quad + g(E_i, \nabla_{E_j} X)^2\Big) \\
&= \sum_i g\Big(\sum_j g(\nabla_{E_i} X, E_j) E_j, \nabla_{E_i} X\Big) \\
&\quad + \sum_i g\left(E_i, \nabla_{\sum_j g(\nabla_{E_i} X, E_j) E_j} X\right) \\
&\quad + \sum_j g\left(\nabla_{\sum_i g(\nabla_{E_j} X, E_i) E_i} X, E_j\right) \\
&\quad + \sum_j g\Big(\sum_i g(\nabla_{E_j} X, E_i) E_i, \nabla_{E_j} X\Big) \\
&= \sum_i g\Big(\nabla_{E_i} X, \nabla_{E_i} X\Big) + \sum_i g\left(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i} X} X\right) \\
&\quad + \sum_j g\left(\nabla_{\nabla_{E_j} X} X, E_j\right) + \sum_j g\Big(\nabla_{E_j} X, \nabla_{E_j} X\Big) \\
&= 2\left(\|\nabla X\|^2 + \mathrm{tr}\,\{(\nabla X) \circ (\nabla X)\}\right),
\end{aligned}$$

e quindi la (9.6). Le formule (9.5) e (9.6) implicano la (9.3). □

L'operatore

$$\bar{\Delta} : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M), X \mapsto \bar{\Delta} X = -\mathrm{tr}_g \nabla^2 X,$$

è detto *"rough Laplacian"*, dove $\nabla^2 X$ è il tensore di tipo $(1,2)$ definito dalla (8.2) (cfr. anche Sezione 12.7). Sia $p \in M$ e sia $\{E_i : 1 \le i \le n\}$ una base ortonormale locale di campi di vettori definiti su un aperto U di M, $p \in U$. Per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$, dalla definizione di $\bar{\Delta}$ segue che

$$\big(\bar{\Delta} X\big)(p) = -\sum_{i=1}^{n} \Big(\nabla_{E_i} \nabla_{E_i} X - \nabla_{\nabla_{E_i} E_i} X\Big)_p . \tag{9.7}$$

Proposizione 9.10. *Per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$, abbiamo*

$$g(\bar{\Delta} X\,,\, X) = \frac{1}{2} \Delta(\|X\|^2) + \|\nabla X\|^2 \tag{9.8}$$

dove Δ è l'operatore di Laplace-Beltrami che opera sulle funzioni (cfr. Appendice B).

Dimostrazione. Sia $\{E_i : 1 \leq i \leq n\}$ una base ortonormale locale di campi di vettori definiti su un aperto U di M. Allora

$$\begin{aligned} g(\bar{\Delta}X, X) &= -\sum_i \{g(\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}X, X) - g(\nabla_{\nabla_{E_i}E_i}X, X)\} \\ &= -\sum_i \{E_i(g(\nabla_{E_i}X, X)) - \|\nabla_{E_i}X\|^2 - \frac{1}{2}(\nabla_{E_i}E_i)(\|X\|^2)\} \\ &= -\sum_i \{\frac{1}{2}E_i\big(E_i(\|X\|^2)\big) - \|\nabla_{E_i}X\|^2 - \frac{1}{2}(\nabla_{E_i}E_i)(\|X\|^2)\} \\ &= \frac{1}{2}\Delta(\|X\|^2) + \|\nabla X\|^2, \end{aligned}$$

dove abbiamo fatto uso dell'espressione locale (rispetto alla base ortonormale locale $\{E_i : 1 \leq i \leq n\}$) dell'operatore di Laplace-Beltrami sulle funzioni (cfr. Appendice B): $\Delta f = -\mathrm{tr}_g \nabla^2 f = -\sum_{i=1}^n \{E_i(E_i f) - (\nabla_{E_i}E_i)f\}$. □

Osservazione 9.11. Il rough laplaciano $\bar{\Delta}$ è legato al laplaciano Δ_1 operante sulle 1-forme (cfr. Appendice B). Intanto $\Lambda^1(M)$ e $\mathfrak{X}(M)$ si identificano in modo naturale mediante l'isomorfismo:

$$\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Lambda^1(M),\ X \longmapsto X^\flat = g(X, \cdot).$$

Con questa identificazione, possiamo considerare il laplaciano Δ_1 definito anche sui campi vettoriali, ossia

$$\Delta_1 : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M), X \longmapsto \Delta_1 X, \quad \text{dove} \quad g(\Delta_1 X, \cdot) = \Delta_1 X^\flat.$$

Allo stesso modo, anche il rough laplaciano $\bar{\Delta}$ si può definire sulle 1-forme. Allora gli operatori $\bar{\Delta}$ e Δ_1 sono legati dalla formula di Weitzenböck (cfr., ad esempio, [126] p. 56):

$$\Delta_1 = \bar{\Delta} + Q \tag{9.9}$$

dove Q è l'operatore di Ricci. Un campo vettoriale X si dice Hodge-armonico se la 1-forma g-duale $X^\flat$ è Hodge-armonica, cioè $\Delta_1 X^\flat = 0$. Se M è compatta, il teorema di Hodge-de Rham afferma che $H_1(M, \mathbb{R})$ è isomorfo allo spazio vettoriale dei campi vettoriali Hodge-armonici.

Teorema 9.12. *Sia (M, g) una varietà riemanniana.*
a) Se $V \in \mathcal{K}(M)$, allora

$$\mathrm{div}V = 0 \quad \text{e} \quad \bar{\Delta}\, V = Q\, V.$$

b) Se M è compatta, $\mathrm{div}V = 0$ *e* $\bar{\Delta}\, V = Q\, V$, *allora $V \in \mathcal{K}(M)$.*
c) Se $V \in \mathcal{K}(M)$, allora

$$Ric(V, V) = \|\nabla V\|^2 + \mathrm{div}\big(\nabla_V V\big) = \|\nabla V\|^2 + \tfrac{1}{2}\Delta\|V\|^2$$

e

$$\|V\| = \textit{cost.} \iff V \text{ è geodetico.}$$

In particolare, se $V \in \mathcal{K}(M)$, abbiamo

c_1) se $\|V\| =$cost., si ha

$$Ric(V,V) = \|\nabla V\|^2 \geq 0, \quad e \quad Ric(V,V) = 0 \text{ se e solo se } V \text{ è parallelo;}$$

c_2) se $Ric(V,V) \leq 0$, $\|V\| =$cost. $\Rightarrow$ V parallelo;

c_3) se $Ric(V,V) \leq 0$ ed M è compatta, allora V parallelo e $\|V\| =$cost.

Dimostrazione. a) Fissato $p \in M$, consideriamo una base ortonormale locale definita in un intorno U di p tale che $(\nabla E_i)_p = 0$. Poniamo per semplicità $e_i = E_i(p)$. Inoltre fissato $v \in T_pM$, possiamo considerare $X \in \mathfrak{X}(U)$ tale che $X_p = v$ e $(\nabla X)_p = 0$. Siccome V è di Killing, $\mathcal{L}_V g = 0$ e quindi

$$\mathrm{div} V = \textstyle\sum_i g(\nabla_{E_i} V, E_i) = 0.$$

Siccome $(\nabla_{E_i} E_i)_p = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned}
g_p((\bar{\Delta} V)_p, v) = g(\bar{\Delta} V, X)_p &= -\sum_i g(\nabla_{E_i}\nabla_{E_i} V - \nabla_{\nabla_{E_i} E_i} V, X)_p \\
&= -\sum_i g(\nabla_{E_i}\nabla_{E_i} V, X)_p \\
&= -\sum_i \{e_i(g(\nabla_{E_i} V, X)) - g(\nabla_{E_i} V, \nabla_{E_i} X)_p\} \\
&= -\sum_i e_i(g(\nabla_{E_i} V, X)).
\end{aligned}$$

Di conseguenza, siccome $[X, E_i]_p = (\nabla_X E_i)_p - (\nabla_{E_i} X)_p = 0$, si ha

$$\begin{aligned}
Ric(V,X)_p &= \sum_i R(V, E_i, X, E_i)_p = \sum_i g(R(X, E_i)V, E_i)_p \\
&= \sum_i g(-\nabla_X \nabla_{E_i} V + \nabla_{E_i}\nabla_X V + \nabla_{[X,E_i]} V \ , \ E_i)_p \\
&= \sum_i g(-\nabla_X \nabla_{E_i} V + \nabla_{E_i}\nabla_X V \ , \ E_i)_p \\
&= -\sum_i \{X(g(\nabla_{E_i} V, E_i)) - g(\nabla_{E_i} V, \nabla_X E_i) - E_i(g(\nabla_X V, E_i)) \\
&\quad + g(\nabla_X V, \nabla_{E_i} E_i)\}_p \\
&= -\sum_i \{X(g(\nabla_{E_i} V, E_i)) - E_i(g(\nabla_X V, E_i))\}_p \\
&= -X_p(\mathrm{div}(V)) + \sum_i e_i\big((\mathcal{L}_V g)(X, E_i) - g(\nabla_{E_i} V, X)\big) \\
&= -e_i\big(g(\nabla_{E_i} V, X)\big) = g(\bar{\Delta} V, X)_p \ .
\end{aligned}$$

Pertanto, $QV = \bar{\Delta}V$.
b) Se M è compatta, la formula (9.8) insieme con $QV = \bar{\Delta}V$ e il Teorema di Green implicano: $\int_M Ric(V,V)\; v_g = \int_M \|\nabla V\|^2\; v_g$. Quest'ultima formula, $\mathrm{div}V = 0$ e la formula integrale (9.4) implicano che V è di Killing.
c) Se V è di Killing, tenendo conto che $\mathrm{div}V = 0$ e ∇V è antisimmetrico, si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\big((\nabla V)\circ(\nabla V)\big) &= \sum_i g\big(\nabla V(\nabla_{E_i}V), E_i\big) \\ &= -\sum_i g\big(\nabla_{E_i}V, \nabla_{E_i}V\big) \\ &= -\|\nabla V\|^2. \end{aligned}$$

Per cui dalla (9.5) si ottiene $Ric(V,V) = \|\nabla V\|^2 + \mathrm{div}\big(\nabla_V V\big)$. Inoltre, per V di Killing abbiamo visto che $QV = \bar{\Delta}V$ e quindi applicando la (9.8) si ha $Ric(V,V) = \|\nabla V\|^2 + \frac{1}{2}\Delta\|V\|^2$. Inoltre, siccome V è di Killing, abbiamo

$$g\big(\nabla_V V, E_i\big) = -g\big(\nabla_{E_i}V, V\big) = -\frac{1}{2}E_i\|V\|^2.$$

Per cui $\|V\|$ è costante se e solo se V è geodetico. Infine, $c_1), c_2), c_3)$ seguono facilmente. In particolare per la c_3), applicando il Teorema B.5 si ottiene che V è parallelo, e quindi applicando il Teorema B.7 si ottiene che V ha lunghezza costante. □

Proposizione 9.13. *Sia (M,g) una varietà riemanniana e sia $V \in \mathcal{K}(M)$. Se $p \in M$ è un punto critico della funzione*

$$f : M \to \mathbb{R},\; p \mapsto f(p) = \|V_p\|^2,$$

si ha

$$R(V_p, X_p, V_p, X_p) + \tfrac{1}{2}X^2\big(g(V,V)\big)(p) = \|\nabla_{X_p}V\|^2.$$

In particolare, se $\|V\|$ è costante, le curvature sezionali lungo piani che contengono V sono sempre non negative.

Dimostrazione. Sia $V \in \mathcal{K}(M)$. Consideriamo la funzione $f = \|V\|^2$. Sia $p \in M$ un punto critico per f, cioè $f_{*p} = 0$. Siccome V è di Killing, da $0 = f_{*p}(X_p) = X_p(f) = X_p g(V,V)$ per ogni $X_p \in T_pM$, si ottiene

$$g\big(\nabla_{V_p}V, X_p\big) = -g\big(\nabla_{X_p}V, V_p\big) = 0 \quad \text{e quindi} \quad \big(\nabla_V V\big)_p = 0. \tag{9.10}$$

Poniamo $F(X) = R(V,X,V,X) + \frac{1}{2}X(X(g(V,V)))$. Allora,

$$\begin{aligned} F(X) &= g(\nabla_{[V,X]}V, X) - g(\nabla_V\nabla_X V, X) \\ &\quad + g(\nabla_X\nabla_V V, X) + Xg(\nabla_X V, V) \\ &= g(\nabla_{[V,X]}V, X) - g(\nabla_V\nabla_X V, X) + g(\nabla_X\nabla_V V, X) \\ &\quad + g(\nabla_X\nabla_X V, V) + \|\nabla_X V\|^2. \end{aligned}$$

Derivando rispetto a X l'equazione di Killing

$$g(\nabla_X V, V) = -g(\nabla_V V, X),$$

si ottiene

$$g(\nabla_X \nabla_X V, V) + \|\nabla_X V\|^2 + g(\nabla_X \nabla_V V, X) = -g(\nabla_V V, \nabla_X X),$$

e quindi

$$\begin{aligned} F(X) &= g(\nabla_{[V,X]} V, X) - g(\nabla_V \nabla_X V, X) - g(\nabla_V V, \nabla_X X) \\ &= -g(\nabla_X V, [V, X]) - g(\nabla_V \nabla_X V, X) - g(\nabla_V V, \nabla_X X) \\ &= -g(\nabla_X V, \nabla_V X) + g(\nabla_X V, \nabla_X V) - g(\nabla_V \nabla_X V, X) \\ &\quad - g(\nabla_V V, \nabla_X X). \end{aligned}$$

Derivando $g(\nabla_X V, X) = (\mathcal{L}_V g)(X, X) = 0$, si ha

$$g(\nabla_V \nabla_X V, X) = -(\nabla_X V, \nabla_V X),$$

e la precedente formula diventa

$$F(X) = \|\nabla_X V\|^2 - g(\nabla_V V, \nabla_X X).$$

Applicando poi la (9.10) si ottiene $F(X)(p) = \|\nabla_X V\|^2(p)$, ciò conclude la dimostrazione. □

Per campi vettoriali di Killing di lunghezza costante abbiamo la seguente caratterizzazione

Proposizione 9.14. *Se $V \in \mathfrak{X}(M)$ ha $\|V\|$ =cost., allora V è di Killing se e solo se*

$$\mathrm{div} V = 0, \qquad \nabla_V V = 0, \qquad g(QV, V) = ||\nabla V||^2. \tag{9.11}$$

Dimostrazione. Sia V un campo vettoriale di Killing di lunghezza costante. Allora, come è stato già osservato $\mathrm{div} V = 0$, inoltre $0 = (1/2)X(\|V\|^2) = g(\nabla_X V, V) = -g(\nabla_V V, X)$ e quindi $\nabla_V V = 0$. Infine, dal Teorema 9.12 segue che $Ric(V, V) = ||\nabla V||^2$. Viceversa, se assumiamo la (9.11), dalla (9.3) si ottiene che $\|\mathcal{L}_V g\| = 0$ e quindi V è di Killing. □

Proposizione 9.15. *Sia $V \in \mathfrak{X}(M)$ con M compatta. Allora,*

V è di Killing e Hodge-armonico se e solo se V è parallelo.

Dimostrazione. Se $\nabla V = 0$, allora V di Killing e dalla definizione di $\bar{\Delta}$ segue che $\bar{\Delta} V = 0$. Inoltre, dalla Teorema 9.12 abbiamo $QV = \bar{\Delta} V = 0$ e quindi $\Delta_1 V = QV + \bar{\Delta} V = 0$. Dunque, V è anche Hodge-armonico. Viceversa, assumiamo che V sia di Killing e Hodge-armonico. Allora, $\Delta_1 V = 0$ e quindi $\bar{\Delta} V = -QV$. Applicando la (9.4), siccome V è di Killing, si ha

$$\int_M \|\nabla V\|^2 \, v_g = \int_M Ric(V, V) \, v_g = \int_M g(QV, V) \, v_g = -\int_M g(\bar{\Delta} V, V) \, v_g,$$

e quindi applicando la (9.8) si ha $\int_M \|\nabla V\|^2 \, v_g = 0$. Pertanto, V è parallelo. □

Ricordiamo che ogni campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n})$ ha uno zero in quanto la caratteristica di Eulero-Poincaré di $\mathbb{S}^{2n}$ è 2 ($\neq 0$). Nel caso di varietà riemanniane compatte con curvatura positiva di dimensione pari, ogni campo di Killing ha uno zero. Infatti, abbiamo il seguente risultato.

Teorema 9.16. (di M. Berger, 1965)
a) Se una varietà riemanniana compatta (M, g) con tensore di Ricci definito positivo ammette un campo vettoriale di Killing privo di zeri, allora M ha dimensione dispari.
b) Se una varietà riemanniana (M, g) di Einstein (i.e., $Ric = \lambda g$, λ costante) con $\lambda \neq 0$, ammette un campo vettoriale V di Killing di lunghezza costante, allora $\lambda > 0$ ed M ha dimensione dispari.

Dimostrazione. a) Sia V di Killing e privo di zeri. Siccome M è compatta, la funzione $f : M \to \mathbb{R}$, $p \mapsto \|V_p\|^2$ ammette un punto $p \in M$ di minimo. In particolare, il differenziale $f_{*p} = 0$ in quanto:

$$f_{*p}(X_p) = f_{*\gamma(0)}(\dot{\gamma}(0)) = \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma(t))\Big)(0) = 0.$$

Nel corso della dimostrazione della Proposizione 9.13, abbiamo visto che $\nabla_{V_p} V = 0$ e $g(\nabla_{X_p} V, V_p) = -g(\nabla_{V_p} V, X_p) = 0$. Quindi, $(\nabla V)_p : X_p \mapsto \nabla_{X_p} V$ è un endomorfismo di $V_p^{\perp}$. Questo endomorfismo è iniettivo, e quindi un isomorfismo, cioè $\nabla_{X_p} V = 0$ implica $X_p = 0$. Infatti, essendo p un punto di minimo si ha $X_p(X(f)) \geq 0$ e quindi, considerata una base ortonormale locale di campi vettoriali $(E_1, ..., E_n)$ definita in un intorno di p, $(E_i)_p(E_i f) \geq 0$. Allora, applicando la Proposizione 9.13 tenendo anche conto che M ha curvatura di Ricci positiva e V è privo di zeri, si può concludere che $X_p = 0$. Poiché $(\nabla V)_p$ è anche antisimmetrico, deve essere $\dim V_p^{\perp}$ pari e quindi $\dim M = (\dim V_p^{\perp} + 1)$ è dispari.
b) Segue da a) e dalla Proposizione 9.13. □

Corollario 9.17. *Se una varietà riemanniana n-dimensionale ha curvatura sezionale costante $k \neq 0$ e ammette un campo vettoriale unitario di Killing, allora $k > 0$ ed n è dispari.*

Proposizione 9.18. *Sia (M, g) una varietà riemanniana con tensore di Ricci definito negativo.*
i) Se $V \in \mathcal{K}(M)$ ha lunghezza costante oppure è geodetico, allora $V = 0$.
j) Se M è compatta, allora $\mathcal{K}(M) = \{0\}$. Inoltre, il gruppo delle isometrie $\mathrm{Iso}(M, g)$ è finito.

Dimostrazione. Segue dalla c) del Teorema 9.12. In particolare, per la prima parte della j), tenere conto del Teorema di Green: $\int_M (\mathrm{div} X) v_g = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$. Siccome $\mathcal{K}(M) = \{0\}$, il gruppo delle isometrie $\mathrm{Iso}(M, g)$ è discreto; d'altronde per un Teorema di Myers-Steenrod il gruppo $\mathrm{Iso}(M, g)$ è un gruppo di Lie compatto (rispetto alla topologia compatta-aperta), per cui sarà necessariamente finito. □

9.2 Campi vettoriali di Killing su $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{S}^n$

Consideriamo lo spazio Euclideo $(\mathbb{R}^n, g_0)$. Sia V un campo di vettori lineare su $\mathbb{R}^n$, cioè pensato come un'applicazione da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ è lineare e quindi rappresentato da una matrice $A = (a_{ij})$ di ordine n:

$$V_p = Ap = \big(\textstyle\sum_j a_{1j}x_j(p), ..., \sum_j a_{nj}x_j(p)\big), \quad \text{equivalentemente:}$$

$$V_p = \sum_i \Big(\sum_j a_{ij}x_j(p)\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p. \tag{9.12}$$

Sia $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ del tipo $X_p = V_p + v$, con V campo di vettori del tipo (9.12) e v un fissato vettore di $\mathbb{R}^n$. Allora

$$X_p = \textstyle\sum_i \Big(\sum_j a_{ij}x_j(p) + v^i\Big)\Big(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p,$$

per cui

$$\big(\nabla^0_{\partial_k} X\big)(p) = \big(\nabla^0_{\partial_k} V\big)(p) = \textstyle\sum_i a_{ik}\Big(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p$$

e

$$g_0\Big(\nabla^0_{\partial_k} X, \frac{\partial}{\partial x_h}\Big)(p) = a_{hk},$$

dove ∇^0 è la connessione euclidea. Di conseguenza, X è di Killing se solo se $a_{hk} + a_{kh} = 0$ per ogni h, k, ossia se e solo se la matrice A è antisimmetrica. Proviamo che i campi vettoriali così costruiti sono tutti e soli i campi di Killing su $\mathbb{R}^n$. Sia X un arbitrario campo di vettori di Killing su $\mathbb{R}^n$, e sia

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (t, p) \mapsto \Phi(t, p),$$

il gruppo globale a 1-parametro generato da X. Siccome X è di Killing, le trasformazioni $\Phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ date da $\Phi_t(p) = \Phi(t, p)$ per ogni $p \in \mathbb{R}^n$, sono isometrie di $\mathbb{R}^n$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Di conseguenza, $\Phi_t(p) = A(t)p + v(t)$, dove $A(t)$ è una curva del gruppo ortogonale $O(n)$ e $v(t)$ è una curva di $\mathbb{R}^n$ con $A(0) = I$ e $v(0) = 0$. Siccome $A'(0) = A \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ (algebra di Lie delle matrici antisimmetriche di ordine n) e $v'(0) = v \in \mathbb{R}^n$, otteniamo che $X_p = \frac{d}{dt}\Phi(t, p)_{|t=0}$ e quindi

$$X_p = A'(0)p + v'(0) = Ap + v$$

con A matrice antisimmetrica. Pertanto: $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ *è lo spazio dei campi vettoriali* X *del tipo* $X = V + v$*, dove* V *è un campo vettoriale lineare determinato da una matrice antisimmetrica e* v *è un fissato vettore di* $\mathbb{R}^n$. Inoltre,

$$\dim \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) = \frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

In particolare, un campo vettoriale di Killing $X = V + v$ è parallelo (equivalentemente ha lunghezza costante) se e solo se il campo lineare $V = 0$.

Determiniamo ora lo spazio $\mathcal{K}(\mathbb{S}^n)$ dei campi vettoriali di Killing sulla sfera canonica. Sia $V \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^{n+1})$ lineare, quindi

$$V_p = \sum_{i=1}^{n+1} \Big(\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} x_j(p) \Big) \Big(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big)_p .$$

Siccome V è determinato da una matrice antisimmetrica, abbiamo $g_0(V_p, p) = 0$ per ogni $p \in \mathbb{S}^n$ e quindi la restrizione di V a $\mathbb{S}^n$ definisce un campo di vettori su $\mathbb{S}^n$. Inoltre, siccome V è di Killing su $\mathbb{R}^{n+1}$, V sarà di Killing anche su $\mathbb{S}^n$:

$$g_0(\nabla_X V, Y) = g_0(\nabla^0_X V, Y) = -g_0(\nabla^0_Y V, X) = -g_0(\nabla_X V, Y)$$

per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$. Dunque, ogni elemento di $\mathcal{K}(\mathbb{R}^{n+1})$ definisce un elemento di $\mathcal{K}(\mathbb{S}^n)$. D'altronde, vale anche il viceversa in quanto ogni isometria di $\mathbb{S}^n$ è la restrizione a $\mathbb{S}^n$ di una trasformazione ortogonale di $\mathbb{R}^{n+1}$. Pertanto,

$$\mathcal{K}(\mathbb{S}^n) = \big\{ V_{|\mathbb{S}^n} : V \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^{n+1}),\ V \text{ lineare} \big\}$$

e

$$\dim \mathcal{K}(\mathbb{S}^n) = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Esempio 9.19. Esaminiamo per $n = 3$ un esempio specifico di campo vettoriale di Killing. Consideriamo il campo vettoriale lineare

$$V(p) = a x_3(p)(\partial_2)_p - a x_2(p)(\partial_3)_p$$

il quale corrisponde alla matrice antisimmetrica $A = (a_{ij})$, dove $a_{23} = -a_{32} = a$ e $a_{ij} = 0$ negli altri casi. La curva integrale di V uscente da p è la curva

$$\gamma_p(t) = (e^{tA})p, \quad \text{dove} \quad e^{tA} = I + tA + (t^2/2!)A^2 + \ \dots\ + (t^k/k!)A^k + \ \dots$$

Siccome

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}, \ A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^3 \\ 0 & a^3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^4 & 0 \\ 0 & 0 & a^4 \end{pmatrix}, A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^5 \\ 0 & -a^5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^6 & 0 \\ 0 & 0 & -a^6 \end{pmatrix}, \ \dots \quad \text{abbiamo}$$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

dove

$$\alpha = 1 - \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^4}{4!} - \frac{(at)^6}{6!} + ..., \quad \beta = at - \frac{(at)^3}{3!} + \frac{(at)^5}{5!} - \frac{(at)^7}{7!} + ...$$

Quindi,

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(at) & \sin(at) \\ 0 & -\sin(at) & \cos(at) \end{pmatrix}$$

e il gruppo ad un parametro generato da V è formato dalle isometrie

$$\Phi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ p \mapsto \Phi_t(p) = \gamma_p(t) = e^{tA}p,$$

che sono rotazioni intorno all'asse x_1. $\Phi_t(p)$ è dato dalla seguente terna

$$\big(x_1(p), x_2(p)\cos(at) + x_3(p)\sin(at), -x_2(p)\sin(at) + x_3(p)\cos(at)\big).$$

Esercizio 9.20. Sia $X \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, quindi $X = V + v$. Data un'isometria $f = A + a$ di $\mathbb{R}^n$, si verifichi che X è f-invariante, cioè $f_{*p}X_p = X_{f(p)}$, se e solo se $[A, V] = 0$ e $Av = V(a) + v$. Suggerimento: basta osservare che $f_* = A$, $f_{*p}X_p = A(V_p + v)$ e $X_{f(p)} = VA(p) + V(a) + v$.

Campo vettoriale gradiente su $\mathbb{S}^n$

Consideriamo lo spazio euclideo $(\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$. Dato un punto (vettore) $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, $a \neq 0$, l'applicazione lineare $\bar{\lambda}_a : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g_0(x, a)$, ristretta alla sfera unitaria $\mathbb{S}^n$ definisce una applicazione differenziabile $\lambda_a = \bar{\lambda}_a \circ i : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ sulla stessa sfera. Denotiamo con $g = i^*g_0$ la metrica canonica di $\mathbb{S}^n$. Il campo vettoriale gradiente $\nabla\lambda_a$ è dato da

$$\nabla\lambda_a = a - \lambda_a\,\nu, \quad \text{dove} \quad \nu_p = \vec{p} = \sum_k x_k(p)(\partial_k)_p\,. \tag{9.13}$$

Infatti, il gradiente $\nabla\lambda_a$ è definito da $g(\nabla\lambda_a, X) = (\mathrm{d}\lambda_a)(X)$ dove $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$, quindi

$$\begin{aligned} \nabla\lambda_a &= \sum_j g(\nabla\lambda_a, E_j)E_j = \sum_j (\mathrm{d}\lambda_a)(E_j)E_j = \sum_j (\mathrm{d}\bar{\lambda}_a)(i_*E_j)E_j \\ &= \sum_j g_0(\nabla\bar{\lambda}_a, i_*E_j)E_j\,, \end{aligned}$$

dove $E_i (i = 1, ..., n)$ è una base ortonormale locale di campi vettoriali su $\mathbb{S}^n$. Pertanto, $\nabla\lambda_a$ è la componente di $\nabla\bar{\lambda}_a$ tangente a $\mathbb{S}^n$: $\nabla\lambda_a = (\nabla\bar{\lambda}_a)^\top$. Siccome $\nabla\bar{\lambda}_a = a$, per ogni $p \in \mathbb{S}^n$, si ha

$$(\nabla\lambda_a)_p = a - g_0(a,\nu_p)\nu_p = a - g_0(a,p)\nu_p$$

e quindi la (9.13). Di conseguenza, posto $V_a := \nabla\lambda_a$, siccome

$$\nabla^0_X V_a = \nabla^0_X(a - \lambda_a\,\nu) = -X(\lambda_a)\nu - \lambda_a\nabla^0_X\nu = -X(\lambda_a)\nu - \lambda_a X,$$

il derivato del campo gradiente V_a è dato da

$$\nabla_X V_a = -\lambda_a X \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n). \tag{9.14}$$

Dalla (9.14) segue che i campi gradienti V_a sono conformi (ma non di Killing) su $\mathbb{S}^n$:

$$\big(\mathcal{L}_{V_a}g\big)(X,Y) = g(\nabla_X V_a, Y) + g(\nabla_Y V_a, X) = -2\lambda_a g(X,Y).$$

Denotiamo con $\mathcal{C}(\mathbb{S}^n)$ lo spazio di tutti i campi conformi su $\mathbb{S}^n$. Inoltre, poniamo $\mathcal{G}_r(\mathbb{S}^n) := \{V_a : a \in \mathbb{R}^{n+1}\}$. Siccome $\dim\mathcal{K}(\mathbb{S}^n) = \frac{n(n+1)}{2}$, e (cfr. [56] vol.I, p. 310)

$$\dim\mathcal{C}(\mathbb{S}^n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

allora

$$\mathcal{C}(\mathbb{S}^n) = \mathcal{K}(\mathbb{S}^n) \oplus \mathcal{G}_r(\mathbb{S}^n).$$

Si noti che questi campi gradienti V_a sono importanti anche nella teoria delle applicazioni armoniche, essi sono i responsabili della instabilità, per $n \geq 3$, delle applicazioni armoniche non costanti $f : (\mathbb{S}^n, g = i^*g_0) \to (M, g')$ (cfr. Capitolo 12).

Esercizio 9.21. Si verifichino le seguenti formule:

$$\|V_a\|^2 = \|a\|^2 - {\lambda_a}^2, \quad \mathrm{div}V_a = -n\lambda_a, \quad \|\nabla V_a\|^2 = n{\lambda_a}^2,$$
$$\bar{\Delta}V_a := -\mathrm{tr}\nabla^2 V_a = V_a.$$

9.3 La fibrazione di Hopf

Consideriamo la sfera unitaria $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ e l'azione della circonferenza unitaria $\mathbb{S}^1$ su $\mathbb{S}^{2n+1}$: $(\lambda, z) \mapsto \lambda z$. Tale azione (nota come azione di Hopf) avviene mediante isometrie, ossia per ogni $\lambda \in \mathbb{S}^1$, l'applicazione $f_\lambda : z \mapsto \lambda z$ è un'isometria di $\mathbb{S}^{2n+1}$. Se $z \in \mathbb{S}^{2n+1}$, l'orbita di z sotto l'azione di Hopf è $\{\lambda z : \lambda \in \mathbb{S}^1\}$ che è una circonferenza unitaria di $\mathbb{S}^{2n+1}$. Lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/\wp = \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ e, siccome l'azione avviene con isometrie che agiscono transitivamente sulle fibre, la metrica canonica di $\mathbb{S}^{2n+1}$ induce una metrica su $\mathbb{C}P^n$, detta metrica di Study-Fubini, rispetto alla quale la proiezione quoziente $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n = \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ risulta una sommersione riemanniana. Per $n = 1$, abbiamo la *fibrazione di Hopf*

$$\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^2(1/2)$$

che adesso esaminiamo in dettaglio, dove $\mathbb{S}^2(1/2)$ denota la 2-sfera di raggio $1/2$. Prima di procedere, si noti che anche per $n > 1$ la sommersione riemanniana π è nota in letteratura col nome di fibrazione di Hopf, e il campo di vettori unitario ξ tangente alle fibre della sommersione è detto *campo di vettori di Hopf* (standard). Nella Sezione 9.4 vedremo che *ξ è un campo vettoriale di Killing.* Torniamo adesso al caso $n = 1$ e osserviamo che

$$z = (z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 \;\Leftrightarrow\; z_1 = \rho_1\, e^{i\vartheta_1},\; z_2 = \rho_2\, e^{i\vartheta_2},\; \rho_1^2 + \rho_2^2 = 1.$$

Quindi, i punti di $\mathbb{S}^3$ sono del tipo $z = (\cos(t)e^{i\vartheta_1}, \sin(t)e^{i\vartheta_2})$. La sfera $\mathbb{S}^2(1/2)$ si può pensare ottenuta ruotando, intorno all'asse x, la curva $\gamma : x = (1/2)\cos(2\,t)$, $y = (1/2)\sin(2\,t)$, $z = 0$, $t \in \mathbb{R}$, e quindi $\mathbb{S}^2(1/2)$ ha equazioni parametriche

$$x = (1/2)\cos(2\,t), \quad y = (1/2)\sin(2\,t)\cos\vartheta, \quad z = (1/2)\sin(2\,t)\sin\vartheta.$$

L'applicazione

$$\phi : [\lambda z] = [z] = [(\cos(t)e^{i\vartheta_1}, \sin(t)e^{i\vartheta_2})] \mapsto \left(\tfrac{1}{2}\cos(2\,t), \tfrac{1}{2}\sin(2\,t)e^{i(\vartheta_1-\vartheta_2)}\right)$$

è un diffeomorfismo che identifica la retta proiettiva complessa $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$ e la sfera $\mathbb{S}^2(1/2)$. Possiamo quindi rappresentare la fibrazione di Hopf con l'applicazione $\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2(1/2)$ definita da

$$\pi : (\cos t\, e^{i\vartheta_1}, \sin t\, e^{i\vartheta_2}) \mapsto \left(\tfrac{1}{2}\cos(2\,t), \tfrac{1}{2}\sin(2\,t)e^{i(\vartheta_1-\vartheta_2)}\right),$$

la quale risulta chiaramente invariante per l'azione di $\mathbb{S}^1$. Si noti che, posto $(z_1, z_2) = (\cos t\, e^{i\vartheta_1}, \sin t\, e^{i\vartheta_2})$, si ha

$$\pi(z_1, z_2) = (1/2)(|z_1|^2 - |z_2|^2, 2z_1\bar{z}_2) \in \mathbb{S}^2(1/2) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}.$$

Tale applicazione si può anche pensare definita da $\pi(z_1, z_2) = z_1/z_2$ identificando $\mathbb{S}^2(1/2)$ con $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ piano complesso compattificato. Infatti, mediante la proiezione stereografica dal polo nord, il punto $(z_1/z_2) = \dfrac{\cos t}{\sin t} e^{i(\vartheta_1-\vartheta_2)}$ corrisponde sulla sfera al punto di coordinate cartesiane

$$\left(\tfrac{1}{2}\sin(2\,t)\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2), \tfrac{1}{2}\sin(2\,t)\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2), \tfrac{1}{2}\cos(2\,t)\right).$$

In termini di quaternioni la fibrazione di Hopf si può esprimere nel modo seguente. Ricordiamo che il corpo dei quaternioni $\mathbb{H} = \{q = a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k : a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\}$ e la sfera $\mathbb{S}^3(1) = \{q \in \mathbb{H} : ||q|| = 1\}$. Per ogni $q \in \mathbb{S}^3(1)$, l'applicazione $\varphi_q(z) := \bar{q}zq$ definisce una trasformazione ortogonale di $\mathbb{H}$ che trasforma $\mathbb{R}^3 = \{q \in \mathbb{H} : q = a_2 i + a_3 j + a_4 k\}$ in sè. Più precisamente, l'applicazione $\Phi : \mathbb{S}^3(1) \to SO(3), q \mapsto \varphi_q$, è un'applicazione di rivestimento ($\mathbb{S}^3(1)$ è il rivestimento universale di $SO(3)$). Allora l'applicazione di Hopf è data da $\pi : \mathbb{S}^3(1) \to \mathbb{S}^2(1/2)$, $q \mapsto \frac{1}{2}\varphi_q(i)$, dove

$$\varphi_q(i) = (a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2)i + 2(a_2 a_3 - a_1 a_4)j + 2(a_1 a_3 + a_2 a_4)k.$$

Infatti, posto $z_1 = a_1 + ia_2$ e $z_2 = a_3 + ia_4$, si ha $\varphi_q(i) = (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2z_1\bar{z}_2)$.

Adesso, proviamo che π è una sommersione riemanniana. In coordinate locali, $\pi : (t, \vartheta_1, \vartheta_2) \mapsto (t, \vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2)$. Pertanto, il suo differenziale è dato dalla matrice

$$\pi_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e quindi π è chiaramente di rango 2, ossia è una sommersione. Il *campo di Hopf* è il campo di vettori unitario ξ tangente alle fibre della sommersione e quindi, siccome è definito dal $\ker \pi_*$, è dato da

$$\xi = \partial/\partial\vartheta_1 + \partial/\partial\vartheta_2.$$

Si noti che dato $w_0 \in \mathbb{S}^2(1/2)$, $w_0 = \big(\frac{1}{2}\cos(2\,t_0), \frac{1}{2}\sin(2\,t_0)\ e^{i\vartheta_0}\big)$, la fibra $\pi^{-1}\{w_0\}$ è la circonferenza

$$\mathbb{S}^1 = \left\{(\cos t_0\ e^{i(\vartheta_0+\vartheta)}, \sin t_0\ e^{i\vartheta}) \in \mathbb{S}^3 : \vartheta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Resta da vedere che la sommersione π è riemanniana. Rispetto alle coordiante locali $(t, \vartheta_1, \vartheta_2)$, $\mathbb{S}^3$ ha equazioni parametriche

$$x = \cos(t)\cos\vartheta_1,\ y = \cos(t)\sin\vartheta_1,\ u = \sin(t)\cos\vartheta_2,\ v = \sin(t)\sin\vartheta_2,$$

che definiscono l'immersione locale in $\mathbb{R}^4$, di conseguenza la metrica canonica di $\mathbb{S}^3$ è data da

$$g = \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t + \cos^2(t)\mathrm{d}\vartheta_1 \otimes \mathrm{d}\vartheta_1 + \sin^2(t)\mathrm{d}\vartheta_2 \otimes \mathrm{d}\vartheta_2.$$

Rispetto alle coordinate (t, ϑ), la metrica canonica di $\mathbb{S}^2(1/2)$ è

$$g = \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t + \frac{\sin^2(2\,t)}{4}\ \mathrm{d}\vartheta \otimes \mathrm{d}\vartheta.$$

Dall'espressione della metrica g di $\mathbb{S}^3$, segue che i campi vettoriali

$$\xi_1 = \xi = \frac{\partial}{\partial\vartheta_1} + \frac{\partial}{\partial\vartheta_2}, \quad \xi_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \xi_3 = \frac{\sin t}{\cos t}\frac{\partial}{\partial\vartheta_1} - \frac{\cos t}{\sin t}\frac{\partial}{\partial\vartheta_2}$$

costituiscono una base ortonormale. Su $\mathbb{S}^2(1/2)$ i campi vettoriali

$$\xi_2' = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \xi_3' = \frac{2}{\sin(2\,t)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}$$

costituiscono una base ortonormale. Siccome $\pi_*(\xi_1) = 0$, $\pi_*(\xi_2) = \xi_2'$ e $\pi_*(\xi_3) = \xi_3'$, possiamo concludere che la sommersione è riemanniana. Per esprimere il campo di Hopf in termini di coordinate cartesiane (x, y, u, v) di $\mathbb{R}^4$, consideriamo l'inclusione $i : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}^4$ che in coordinate locali è data da:

$$(t, \vartheta_1, \vartheta_2) \mapsto \big(\cos(t)\cos\vartheta_1, \cos(t)\sin\vartheta_1, \sin(t)\cos\vartheta_2, \sin(t)\sin\vartheta_2\big).$$

Siccome

$$i_*\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta_1}\right) = -(\cos(t)\sin\vartheta_1)\frac{\partial}{\partial x} + (\cos(t)\cos\vartheta_1)\frac{\partial}{\partial y} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

e

$$i_*\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta_2}\right) = -(\sin(t)\sin\vartheta_2)\frac{\partial}{\partial u} + (\sin(t)\cos\vartheta_2)\frac{\partial}{\partial v} = -v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v},$$

si ottiene

$$\xi_1 = \xi = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v} \tag{9.15}$$

(cfr. anche Sezione 9.4). La (9.15) permette di presentare il campo di Hopf usando la struttura complessa standard

$$J_0 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ (x, y, u, v) \mapsto J_0(x, y, u, v) = (-y, x, -v, u).$$

Il differenziale di J_0, che denotiamo con lo stesso simbolo, è rappresentato dalla matrice

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo quindi la struttura quasi complessa $J_0 : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^4) \to \mathfrak{X}(\mathbb{R}^4)$ definita da

$$J_0\big(\frac{\partial}{\partial x}\big) = \frac{\partial}{\partial y}, \quad J_0\big(\frac{\partial}{\partial y}\big) = -\frac{\partial}{\partial x}, \quad J_0\big(\frac{\partial}{\partial u}\big) = \frac{\partial}{\partial v}, \quad J_0\big(\frac{\partial}{\partial v}\big) = -\frac{\partial}{\partial u}.$$

Naturalmente J_0 soddisfa $J_0^2 = -I$. Inoltre, J_0 è compatibile con la metrica euclidea: $g_0(J_0X, J_0Y) = g_0(X, Y)$. Il campo vettoriale unitario ν ortogonale alla sfera $\mathbb{S}^3$ è definito da

$$\nu(p) = x(p)\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)_p + y(p)\big(\frac{\partial}{\partial y}\big)_p + u(p)\big(\frac{\partial}{\partial u}\big)_p + v(p)\big(\frac{\partial}{\partial v}\big)_p.$$

Pertanto, dalla (9.15) segue che il campo di Hopf standard ξ, che adesso denotiamo con ξ_0 per la corrispondenza con la struttura complessa standard J_0, è dato da $J_0(\nu)$.

9.4 Le metriche di Berger sulla sfera $\mathbb{S}^3$

In questa sezione vedremo che la sfera unitaria $\mathbb{S}^3$ ammette delle interessanti metriche, note in letteratura col nome di metriche di Berger, di curvatura sezionale non costante e ottenute deformando la metrica canonica nella direzione del campo di Hopf. Tali metriche risultano omotetiche a metriche sasakiane.

Consideriamo la sfera $\mathbb{S}^3$ rappresentata dal *gruppo unitario speciale* 3-dimensionale

$$SU(2) = \left\{A \in \mathbb{C}^{2,2} : \bar{A}^T \cdot A = I,\ detA = 1\right\}.$$

Quindi, le matrici di $SU(2)$ sono del tipo

$$A = \begin{pmatrix} x+iy & -u+iv \\ u+iv & x-iy \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad x^2+y^2+u^2+v^2=1.$$

Se $\gamma(t)$ è una curva di $SU(2)$ con $\gamma(0)=I$, la matrice $X=\dot\gamma(0)$, che è un vettore tangente nell'identità a $SU(2)$, soddisfa $X^T+\bar X=0$ e $\mathrm{tr}X=0$. Pertanto, l'algebra di Lie di $SU(2)$ è $\mathfrak{su}(2)\equiv T_I SU(2)=\big\{X\in\mathbb{C}^{2,2}: X^T+\bar X=0,\ \mathrm{tr}X=0\big\}$ la quale è generata dalle matrici

$$X_1=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad X_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3=\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Applicando il differenziale delle traslazioni sinistre L_A,

$$A=\begin{pmatrix} x+iy & -u+iv \\ u+iv & x-iy \end{pmatrix},$$

alle matrici $X_i (i=1,2,3)$, si ottengono i campi di vettori invarianti a sinistra $\xi_i=(L_A)_{*I}X_i\,(i=1,2,3)$ (cfr. (3.1)). Identificando la matrice A con il punto (x,y,u,v) di $\mathbb{R}^4$, con semplici calcoli si trova che

$$\begin{cases} \xi_1 &= -y\dfrac{\partial}{\partial x}+x\dfrac{\partial}{\partial y}-v\dfrac{\partial}{\partial u}+u\dfrac{\partial}{\partial v}, \\ \xi_2 &= u\dfrac{\partial}{\partial x}-v\dfrac{\partial}{\partial y}-x\dfrac{\partial}{\partial u}+y\dfrac{\partial}{\partial v}, \\ \xi_3 &= -v\dfrac{\partial}{\partial x}-u\dfrac{\partial}{\partial y}+y\dfrac{\partial}{\partial u}+x\dfrac{\partial}{\partial v}. \end{cases} \tag{9.16}$$

Si noti che $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in\mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)$ anche se espressi in termini di coordinate di $\mathbb{R}^4$. Inoltre, sono ortonormali rispetto alla metrica canonica di $\mathbb{S}^3$. D'altronde, se consideriamo la metrica riemanniana g su $SU(2)$ ottenuta imponendo che ξ_1,ξ_2,ξ_3 siano ortonormali, g è una metrica invariante a sinistra su $SU(2)$ (cfr. Sezione 5.3) e chiaramente l'applicazione

$$z=(\cos(t)e^{i\vartheta_1},\sin(t)e^{i\vartheta_2})\mapsto\begin{pmatrix} \cos(t)e^{i\vartheta_1} & -\sin(t)e^{-i\vartheta_2} \\ \sin(t)e^{i\vartheta_2} & \cos(t)e^{-i\vartheta_1} \end{pmatrix}$$

definisce una isometria tra la sfera unitaria $\mathbb{S}^3$ e $(SU(2),g)$. Inoltre, ξ_1 corrisponde al campo di Hopf su $\mathbb{S}^3$. Infatti, in termini di coordinate locali $(t,\vartheta_1,\vartheta_2)$ su S^3, il campo di Hopf è dato da $\xi=\partial/\partial\vartheta_1+\partial/\partial\vartheta_2$ (cfr. Sezione 9.3) e quindi $i_*\xi=\xi_1$ dove $i:\mathbb{S}^3\hookrightarrow\mathbb{R}^4$,

$$i:\ (t,\vartheta_1,\vartheta_2)\mapsto\big(\cos(t)\cos\vartheta_1,\cos(t)\sin\vartheta_1,\sin(t)\cos\vartheta_2,\sin(t)\sin\vartheta_2\big).$$

Adesso, per $\varepsilon>0$, sia g_ε la metrica su $\mathbb{S}^3$ ottenuta deformando la metrica canonica g nella direzione del campo di Hopf, più precisamente g_ε si ottiene imponendo che ξ_1,ξ_2,ξ_3 siano ortogonali, ξ_2,ξ_3 unitari e ξ_1 di lunghezza $\sqrt{\varepsilon}$:

$$g_\varepsilon=g+(\varepsilon-1)\eta\otimes\eta=g_{|D}+\varepsilon\,\eta\otimes\eta, \quad \varepsilon>0, \tag{9.17}$$

dove $\eta = g(\xi_1, \cdot)$ è la 1-forma duale al campo di Hopf e $D = \ker \eta$. Chiaramente g_ε è una metrica invariante a sinistra su $\mathbb{S}^3$. Le metriche g_ε definiscono una famiglia a un parametro di metriche riemanniane sulla sfera $\mathbb{S}^3$ note in letteratura con il nome di *metriche di Berger*.

Teorema 9.22. *Valgono le seguenti proprietà.*
i) Il campo di Hopf ξ_1 è di Killing rispetto alle metriche di Berger g_ε per ogni $\varepsilon > 0$. ξ_2, ξ_3 sono di Killing rispetto alla metrica canonica.
j) Le curvature sezionali di $(\mathbb{S}^3, g_\varepsilon)$ assumono valori appartenenti all'intervallo $[\varepsilon, (4-3\varepsilon]$ se $\varepsilon \leq 1$, mentre assumono valori nell'intervallo con estremi invertiti se $\varepsilon \geq 1$. In particolare, per $\varepsilon \to 0$ la curvatura lungo la sezione ortogonale alla fibra di Hopf tende a 4 che è la curvatura sezionale della base $\mathbb{S}^2(1/2)$ della fibrazione di Hopf.

Dimostrazione. Usando la (9.16), semplici calcoli mostrano che i campi vettoriali ξ_i soddisfano:

$$[\xi_1, \xi_2] = 2\xi_3, \quad [\xi_2, \xi_3] = 2\xi_1, \quad [\xi_3, \xi_1] = 2\xi_2. \tag{9.18}$$

Di conseguenza, applicando la formula di Koszul, ossia la formula (6.8), si ottengono le seguenti formule che determinano completamente la connessione di Levi-Civita ∇ della metrica di Berger g_ε:

$$\begin{cases} \nabla_{\xi_1}\xi_2 & = (2-\varepsilon)\xi_3, \quad \nabla_{\xi_2}\xi_3 = \xi_1, \quad \nabla_{\xi_3}\xi_1 = \varepsilon\ \xi_2, \\ \nabla_{\xi_i}\xi_i & = 0, \quad \nabla_{\xi_2}\xi_1 = \nabla_{\xi_1}\xi_2 - [\xi_1, \xi_2] = -\varepsilon\ \xi_3, \\ \nabla_{\xi_3}\xi_2 & = -\xi_1, \quad \nabla_{\xi_1}\xi_3 = (\varepsilon - 2)\xi_2. \end{cases} \tag{9.19}$$

Il campo di Hopf ξ_1 è di Killing rispetto a g_ε per ogni $\varepsilon > 0$. Infatti, dalla (9.19), si ottiene

$$(\mathcal{L}_\xi g_\varepsilon)(\xi_i, \xi_j) = g_\varepsilon(\nabla_{\xi_i}\xi, \xi_j) + g_\varepsilon(\nabla_{\xi_j}\xi, \xi_i) = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3.$$

Analogamente si vede che, per $\varepsilon = 1$, anche ξ_2, ξ_3 sono di Killing. Calcoliamo ora la curvatura delle metriche di Berger. Denotiamo con R il tensore di curvatura di (S^3, g_ε). Usando la (9.19), si ottiene

$$R(\xi_1, \xi_2)\xi_3 = -\nabla_{\xi_1}\nabla_{\xi_2}\xi_3 + \nabla_{\xi_2}\nabla_{\xi_1}\xi_3 + \nabla_{[\xi_1, \xi_2]}\xi_3 = 0,$$

e analogamente si trova che $R(\xi_i, \xi_j)\xi_k = 0$ quando i tre indici sono distinti. Poi,

$$\begin{aligned} R(\xi_1, \xi_2)\xi_2 &= -\nabla_{\xi_1}\nabla_{\xi_2}\xi_2 + \nabla_{\xi_2}\nabla_{\xi_1}\xi_2 + \nabla_{[\xi_1, \xi_2]}\xi_2 \\ &= -0 + (2-\varepsilon)\nabla_{\xi_2}\xi_3 + 2\nabla_{\xi_3}\xi_2 \\ &= -\varepsilon\ \xi_1, \\ R(\xi_1, \xi_3)\xi_3 &= -\nabla_{\xi_1}\nabla_{\xi_3}\xi_3 + \nabla_{\xi_3}\nabla_{\xi_1}\xi_3 + \nabla_{[\xi_1, \xi_3]}\xi_3 = ... \\ &= -\varepsilon\ \xi_1, \\ R(\xi_1, \xi_2)\xi_1 &= -\nabla_{\xi_1}\nabla_{\xi_2}\xi_1 + \nabla_{\xi_2}\nabla_{\xi_1}\xi_2 + \nabla_{[\xi_1, \xi_2]}\xi_1 = \varepsilon\nabla_{\xi_1}\xi_3 + 2\nabla_{\xi_3}\xi_1 \\ &= \varepsilon^2\ \xi_2, \\ R(\xi_1, \xi_3)\xi_1 &= \varepsilon^2\ \xi_3. \end{aligned}$$

Più in generale,

$$R(\xi_1, Z)Z = -\varepsilon\ \xi_1 \quad e \quad R(\xi_1, Z)\xi_1 = \varepsilon^2 Z \tag{9.20}$$

per ogni $Z = a\,\xi_2 + b\,\xi_3$, $a^2 + b^2 = 1$, da cui segue che le curvature sezionali verticali sono date da

$$K(\xi_1, Z) = -\frac{1}{\varepsilon} g_\varepsilon\big(R(\xi_1, Z)Z, \xi_1\big) = \varepsilon, \tag{9.21}$$

per ogni $Z = a\,\xi_2 + b\,\xi_3$, $a^2 + b^2 = 1$. Inoltre,

$$\begin{aligned} R(\xi_2, \xi_3)\xi_3 &= -\nabla_{\xi_2}\nabla_{\xi_3}\xi_3 + \nabla_{\xi_3}\nabla_{\xi_2}\xi_3 + \nabla_{[\xi_2,\xi_3]}\xi_3 \\ &= -0 + \nabla_{\xi_3}\xi_1 + 2\nabla_{\xi_1}\xi_3 \\ &= \varepsilon\ \xi_2 + 2(\varepsilon - 2)\xi_2 = (3\,\varepsilon - 4)\xi_2, \\ R(\xi_3, \xi_2)\xi_2 &= ... = (3\varepsilon - 4)\xi_3, \end{aligned}$$

e di conseguenza la curvatura sezionale orizzontale

$$K(Z, W) = K(\xi_2, \xi_3) = -g_\varepsilon\big(R(\xi_2, \xi_3)\xi_3, \xi_2\big) = (4 - 3\,\varepsilon) \tag{9.22}$$

per ogni $Z, W \in \xi_1^\perp$. Posto $\xi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\xi_1$, consideriamo una arbitraria base ortonormale X, Y, quindi del tipo

$$X = a_1\,\xi + b_1\,Z, \qquad Y = a_2\,\xi + b_2\,W,$$

dove Z e W sono vettori unitari orizzontali, quindi ortogonali a ξ, e

$$a_1^2 + b_1^2 = 1, \quad a_2^2 + b_2^2 = 1, \qquad a_1a_2 + b_1b_2\ g_\varepsilon(Z, W) = 0. \tag{9.23}$$

Dalla (9.23), si ottiene

$$(1 - b_1^2)(1 - b_2^2) = a_1^2a_2^2 = b_1^2b_2^2\ g_\varepsilon(Z, W)^2,$$

da cui

$$(1 - b_1^2 - b_2^2) = b_1^2b_2^2\big(g_\varepsilon(Z, W)^2 - 1\big) \leq 0 \tag{9.24}$$

e quindi anche

$$a_1^2 + a_2^2 - 1 = 1 - b_1^2 - b_2^2 \leq 0. \tag{9.25}$$

La curvatura sezionale $K(X, Y)$, usando le formule (9.20), (9.21) e (9.22), è data da

$$\begin{aligned} K(X, Y) &= h(R(X, Y)X, Y) = R(X, Y, X, Y) \\ &= R(a_1\xi + b_1Z, a_2\xi + b_2W, a_1\xi + b_1Z, a_2\xi + b_2W) \\ &= a_1^2b_2^2\ K(\xi, W) - 2a_1a_2b_1b_2\ \varepsilon\ g_\varepsilon(Z, W) + b_1^2a_2^2\ K(\xi, Z) \\ &\quad + b_1^2b_2^2\ K(Z, W)\big(1 - g_\varepsilon(Z, W)^2\big) \\ &= a_1^2b_2^2\ \varepsilon - 2a_1a_2b_1b_2\ \varepsilon\ g_\varepsilon(Z, W) + b_1^2a_2^2\ \varepsilon \\ &\quad + b_1^2b_2^2\ (4 - 3\,\varepsilon)\big(1 - g_\varepsilon(Z, W)^2\big). \end{aligned}$$

Infine, applicando le formule (9.23), (9.24), (9.25), si ha

$$K(X,Y) = \left(a_1^2 + a_2^2\right)\varepsilon + (4 - 3\,\varepsilon)\left(1 - a_1^2 - a_2^2\right)$$

e quindi la formula che esprime la curvatura sezionale per una metrica di Berger è la seguente

$$K(X,Y) = 4(\varepsilon - 1)\left(a_1^2 + a_2^2\right) + (4 - 3\,\varepsilon). \tag{9.26}$$

Dalla (9.26) segue che tutte le curvature sezionali assumono valori nell'intervallo $[\varepsilon, (4-3\varepsilon]$ se $\varepsilon \leq 1$, mentre assumono valori nell'intervallo con estremi invertiti se $\varepsilon \geq 1$. Notiamo che per $\varepsilon \to 0$ la curvatura lungo la sezione ortogonale alla fibra di Hopf tende a 4 che è la curvatura sezionale della base $\mathbb{S}^2(1/2)$ della fibrazione di Hopf. □

Osservazione 9.23. Rispetto alla base $(\xi = (1/\sqrt{\varepsilon})\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, la quale è g_ε-ortonormale, il tensore di Ricci è diagonalizzato e le curvature di Ricci sono

$$Ric_{11} = 2\,\varepsilon, \quad Ric_{22} = Ric_{33} = 2(2 - \varepsilon).$$

Strutture sasakiane su $\mathbb{S}^3$

Sia $(\eta_1 = \eta, \eta_2, \eta_3)$ la base di 1-forme duali dei vettori della base ortonormale $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)$, dove la sfera unitaria $\mathbb{S}^3$ è munita della metrica canonica g. Usando la (9.18), e la definizione di $\mathrm{d}\eta$ col coefficiente (1/2), si trova che

$$(\mathrm{d}\eta)(\xi_2, \xi_3) = -(\mathrm{d}\eta)(\xi_3, \xi_2) = -1 \quad \text{e} \quad (\mathrm{d}\eta)(\xi_1, \xi_2) = (\mathrm{d}\eta)(\xi_1, \xi_3) = 0.$$

Quindi,

$$\eta \wedge \mathrm{d}\eta \quad \text{è una forma di volume su}\, \mathbb{S}^3, \;\; \eta(\xi_1) = 1 \;\text{ e }\; (\mathrm{d}\eta)(\xi_1, \cdot) = 0 \tag{9.27}$$

Definiamo un tensore ϕ di tipo $(1,1)$ ponendo

$$\phi(\xi_1) = 0, \quad \phi(\xi_2) = \xi_3, \quad \phi(\xi_3) = -\xi_2,$$

allora

$$\mathrm{d}\eta = g(\cdot, \phi) \quad \text{e} \quad \phi^2 = -I + \eta \otimes \xi_1. \tag{9.28}$$

Dalla *i*) del Teorema 9.22 abbiamo che ξ_1 è di Killing, per cui le proprietà (9.27) e (9.28) ci dicono che i tensori (η, ξ_1, ϕ, g) definiscono una *struttura sasakiana* su $\mathbb{S}^3$, dove ξ_1 svolge il ruolo del campo di Reeb (cfr. Sezione 4.6). Se consideriamo la struttura deformata $(\eta_t, \bar{g}_t, \phi_t, \xi_{1t})$ definita, per $t > 0$, da:

$$\eta_t = t\,\eta, \quad \bar{g}_t = tg + (t^2 - t)\eta \otimes \eta, \quad \phi_t = \phi, \quad \xi_{1t} = (1/t)\xi_1, \tag{9.29}$$

questa definisce ancora una struttura sasakiana su $\mathbb{S}^3$. Questo tipo di deformazione è nota col nome di "*deformazione $\mathcal{D}$-omotetica*"(cfr. Sezione 4.6), dove $\mathcal{D}$ =kerη. Osserviamo che la metrica sasakiana $\bar{g}_t$ non è una metrica di Berger, tuttavia $\bar{g}_t$ è omotetica alla metrica di Berger g_ε con $\varepsilon = t$. Infatti, confrontando la (9.17) con la (9.29) si ha

$$g_t = g + (t-1)\eta \otimes \eta = (1/t)\bar{g}_t.$$

9.5 Campi vettoriali di Hopf

La presentazione del campo di Hopf standard su $\mathbb{S}^3$, che denotiamo con ξ_0, si estende in modo naturale per presentare il campo di Hopf standard su $\mathbb{S}^{2n+1}$ per ogni $n \geq 1$. Sullo spazio euclideo $(\mathbb{R}^{2n+2}, g_0)$, la struttura complessa standard $J_0 : \mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{R}^{2n+2}$ è definita da

$$J_0(x_1, y_1, \cdots, x_{n+1}, y_{n+1}) = (-y_1, x_1, \cdots, -y_{n+1}, x_{n+1}),$$

per ogni $(x_1, y_1, \cdots, x_{n+1}, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+2}$. J_0 si può pensare anche come un tensore di tipo $(1,1)$ su $\mathbb{R}^{2n+2}$,

$$J_0 : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n+2}) \to \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n+2}),$$

$$J_0\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big) = \frac{\partial}{\partial y_j}\,, \quad J_0\Big(\frac{\partial}{\partial y^j}\Big) = -\frac{\partial}{\partial x_j}\,, \quad 1 \leq j \leq n+1,$$

il quale soddisfa $J_0^2 = -I$ e $g_0(J_0X, J_0Y) = g_0(X,Y)$ per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n+2})$. Sia ν il campo vettoriale unitario ortogonale alla sfera $\mathbb{S}^{2n+1}$, cioè

$$\nu(p) = \sum_{j=1}^{n+1} \{x_j(p)\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)_p + y_j(p)\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)_p\} \in T_p(\mathbb{R}^{2n+2})$$

per ogni $p \in \mathbb{R}^{2n+2}$. Anche in questo caso

$$\xi_0 = J_0\nu$$

è il campo di vettori di Hopf standard su $\mathbb{S}^{2n+1}$, cioè tangente alle fibre della fibrazione di Hopf $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$. Nel seguito con g_0 denotiamo anche la metrica indotta su $\mathbb{S}^{2n+1}$. Per ogni $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n+1})$ denotiamo con $-\varphi X$ la componente tangente di J_0X, dunque

$$J_0X = -\varphi X + g_0(J_0X, \nu)\nu = -\varphi X - g_0(X, \xi_0)\nu. \tag{9.30}$$

Dalla (9.30) segue che φ è un endomorfismo di $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n+1})$ che soddisfa

$$\varphi(\xi_0) = 0 \quad \text{e} \quad \varphi X = -JX \quad \text{per ogni } X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n+1}) \cap \xi_0^\perp.$$

Inoltre,

$$g_0(\varphi X, Y) = -g_0(J_0X, Y) = g_0(X, J_0Y) = -g_0(X, \varphi Y)$$

per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n+1})$, quindi φ è un tensore di tipo $(1,1)$ antisimmetrico.

Proposizione 9.24. *Il campo di Hopf standard $\xi_0 \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n+1})$ è un campo vettoriale unitario di Killing.*

Dimostrazione. La formula di Gauss per l'inclusione $\mathbb{S}^{2n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m+2}$ è data da:

$$\nabla^0_X Y = \nabla_X Y + g_0(\nabla^0_X Y, \nu)\nu, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n+1}),$$

dove ∇ è la connessione di Levi-Civita di $(\mathbb{S}^{2n+1}, g)$. Siccome

$$\nabla^0_X \nu = X, \tag{9.31}$$

la formula di Gauss diventa

$$\nabla^0_X Y = \nabla_X Y - g_0(X, Y)\nu, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n+1}).$$

In particolare (per $Y = \xi_0$)

$$\nabla^0_X \xi_0 = \nabla_X \xi_0 - g_0(X, \xi_0)\nu. \tag{9.32}$$

Le identità (9.30)-(9.31) e $(\nabla^0_X J_0)\nu = 0$ implicano

$$\nabla^0_X \xi_0 = \nabla^0_X J_0 \nu = J_0 \nabla^0_X \nu = J_0 X = -\varphi X - g_0(X, \xi_0)\nu,$$

e quindi, usando la (9.32),

$$\nabla_X \xi_0 = -\varphi X\,, \quad X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n+1}). \tag{9.33}$$

Come osservato prima φ è antisimmetrico, pertanto ξ_0 è di Killing. □

Osservazione 9.25. Dall'Esempio 4.37 segue che il campo di Hopf standard ξ_0, la metrica g (restrizione di g_0 a $\mathbb{S}^{2n+1}$), la 1-forma $\eta_0 = g(\xi_0, \cdot)$ e il tensore φ (indotto da J_0) definiscono una struttura riemanniana di quasi contatto su $\mathbb{S}^{2n+1}$. D'altronde, dalla Proposizione 9.24 e dalla sua dimostrazione segue che ξ_0 è di Killing e vale la (9.33). Di conseguenza,

$$\begin{aligned} 2(\mathrm{d}\eta_0)(X, Y) &= X\eta_0(Y) - Y\eta_0(X) - \eta_0([X, Y]) \\ &= Xg(\xi, Y) - Yg(\xi, X) - g(\xi, \nabla_X Y - \nabla_Y X) \\ &= g(\nabla_X \xi, Y) - g(\nabla_Y \xi, X) = g(-\varphi X, Y) + g(\varphi Y, X), \end{aligned}$$

e quindi

$$(\mathrm{d}\eta_0)(X, Y) = g(X, \varphi Y).$$

Pertanto, $(\eta_0, \xi_0, \varphi, g)$ è una struttura riemanniana di contatto. Inoltre, g è la metrica canonica di $\mathbb{S}^{2n+1}$ che ha curvatura sezionale costante $+1$ e quindi il tensore di curvatura R soddisfa

$$R(X, Y)\xi = g(X, \xi)Y - g(\xi, Y)X = \eta_0(X)Y - \eta_0(Y)X.$$

Di conseguenza, dalla Proposizione 4.36 segue che la struttura $(\eta_0, \xi_0, \varphi, g)$ è sasakiana, la *struttura sasakiana standard* di $\mathbb{S}^{2n+1}$.

Definizione 9.26. Una *struttura complessa ortogonale* su $\mathbb{R}^{2n+2}$ è una matrice ortogonale $J \in \mathrm{O}(2n+2)$ tale che $J^2 = -I$.

Si noti che se A è una matrice quadrata di ordine pari, due delle seguenti tre proprietà implica la terza:

$$1)\ A^t A = I, \qquad 2)\ A^t = -A, \qquad 3)\ A^2 = -I.$$

Una struttura complessa ortogonale J su $\mathbb{R}^{2n+2}$ determina un tensore di tipo $(1,1)$ su $\mathbb{R}^{2n+2}$, che denotiamo con lo stesso simbolo J, tale che $J^2 = -I$ e $g_0(JX, JY) = g_0(X, Y)$ per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n+2})$. Se $J = (J_i^j)$, il corrispondente tensore è definito da

$$J\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p = \sum_{j=1}^{2n+2} J_i^j \Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)_p,$$

dove $(x_1, \cdots, x_{2n+2})$ sono le coordinate cartesiane su $\mathbb{R}^{2n+2}$.

Definizione 9.27. Un campo di vettori $\xi \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n+1})$ è detto *campo di Hopf* su $\mathbb{S}^{2n+1}$ se $\xi = J\nu$ per qualche struttura complessa ortogonale J su $\mathbb{R}^{2n+2}$.

Teorema 9.28. (Wiegmink, [118]) *I campi di Hopf su $\mathbb{S}^{2n+1}$ sono tutti e soli i campi unitari di Killing su $\mathbb{S}^{2n+1}$.*

Dimostrazione. Sia ξ un campo vettoriale unitario di Killing su $\mathbb{S}^{2n+1}$. Mostriamo che ξ è un campo di Hopf. Sia

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{S}^{2n+1}, \quad (t, p) \mapsto \Phi(t, p),$$

il gruppo globale a 1-parametro generato da ξ. Siccome ξ è di Killing, le trasformazioni $\Phi_t : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{S}^{2n+1}$ date da $\Phi_t(p) = \Phi(t, p)$ per ogni $p \in \mathbb{S}^{2n+1}$, sono isometrie di $(\mathbb{S}^{2n+1}, g_0)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Di conseguenza, se $\{e_j : 1 \leq j \leq 2n+2\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^{2n+2}$ e $\Phi_t(e_j) = a_j^i(t) e_i$, allora $(a_j^i(t)) \in \mathrm{O}(2n+2)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Possiamo quindi considerare la curva

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{O}(2n+2), \quad \gamma(t) = (a_j^i(t))_{1 \leq i,j \leq 2n+2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Siccome $\Phi_0 = I_{\mathbb{S}^{2n+1}}$, la curva $\gamma(t)$ soddisfa

$$\gamma(0) = (\delta_j^i) = I_{2n+2}, \quad \dot\gamma(0) \in T_{I_{2n+2}} \mathrm{O}(2n+2) = \mathfrak{so}(2n+2, \mathbb{R}),$$

dove $\mathfrak{so}(2n+2, \mathbb{R})$ (spazio delle matrici antisimmetriche di ordine $(2n+2)$) è l'algebra di Lie di $\mathrm{O}(2n+2)$ (cfr. Sezione 3.4). Definiamo

$$J : \mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{R}^{2n+2}, \ \ p \mapsto J(p) = Ap, \quad \text{ossia} \quad J\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{2n+2} A_i^j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

dove $A = (A_i^j)$ è la matrice antisimmetrica definita da

$$A_i^j = \frac{\mathrm{d}a_i^j}{\mathrm{d}t}(0), \quad 1 \leq i, j \leq 2n+2.$$

Inoltre, per ogni $p \in \mathbb{S}^{2n+1}$

$$\xi_p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t,p)_{|_{t=0}} = \dot{\gamma}(0)\, p = J(p) = \sum_{ij} x_j(p) A_j^i \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p = J\nu_p.$$

Infine, J è una trasformazione ortogonale in quanto

$$g_0(J(p), J(p) = g_0(J\nu_p, J\nu_p) = g_0(\xi_p, \xi_p) = 1 = g_0(p,p)$$

per ogni $p \in \mathbb{S}^{2n+1}$, e quindi $g_0(J(p), J(p) = g_0(p,p)$ per ogni $p \in \mathbb{R}^{2n+2}$. Viceversa, sia $\xi \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n+1})$ un campo vettoriale di Hopf su $\mathbb{S}^{2n+1}$ e sia J la struttura complessa ortogonale su $\mathbb{R}^{2n+2}$ tale che $J\nu = \xi$. Siccome J è una isometria di $(\mathbb{R}^{2n+2}, g_0)$, abbiamo

$$g_0(\xi,\xi) = g_0(J\nu, J\nu) = g_0(\nu,\nu) = 1$$

cioè ξ è unitario. Poniamo

$$J\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_i J_j^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (J_j^i) \in \mathrm{O}(2n+2) \cap \mathfrak{so}(2n+2, \mathbb{R}).$$

Allora, per ogni $p \in \mathbb{S}^{2n+1}$

$$\xi_p = J\nu_p = \sum_{ij} x_j(p) J_j^i \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p = \sum_i \xi^i(p) \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p,$$

dove $\xi^i(p) = \sum_j x_j(p) J_j^i$, $1 \leq i \leq 2n+2$. Di conseguenza, per ogni X elemento di $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2m+2})$, risulta

$$X(\xi^i) = \sum_j X^j J_j^i + \sum_i x_j X(J_j^i) = \sum_i X^j J_j^i \quad \text{e} \quad \nabla_X^0 \xi = X(\xi^i)\frac{\partial}{\partial x_i} = JX.$$

Pertanto, per ogni $X \in \mathfrak{X}(S^{2n+1})$

$$(\nabla_X^0 J)\nu = \nabla_X^0 J\nu - J\nabla_X^0 \nu = \nabla_X^0 \xi - JX = 0. \tag{9.34}$$

A questo punto si prova che ξ è di Killing come nella dimostrazione della Proposizione 9.24. $\square$

Osservazione 9.29. Osserviamo quanto segue.

i) Sia $\xi = J\nu$ un campo di Hopf su $\mathbb{S}^{2n+1}$. Per ogni $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n+1})$, usando la (9.34) e la formula di Gauss, si ha

$$\begin{aligned} JX = \nabla^0_X \xi &= \nabla_X \xi + g_0(\nabla^0_X \xi, \nu)\nu = \nabla_X \xi + g_0(JX, \nu)\nu \\ &= \nabla_X \xi - g_0(X, \xi)\nu, \end{aligned}$$

quindi

$$\nabla_X \xi = JX, \quad X \in \xi^\perp.$$

ii) Per una sfera $\mathbb{S}^{2n+1}(r)$ di raggio r, la nozione di campo di Hopf standard ξ_0 e quella di un arbitrario campo di Hopf ξ possono essere definite come per la sfera unitaria. Nel caso di $\mathbb{S}^{2n+1}(r)$ si considera $\nu_p = (1/r)\vec{p}$ per ogni $p \in \mathbb{S}^{2n+1}(r)$. Inoltre, il risultato di Wiegmink vale anche su $\mathbb{S}^{2n+1}(r)$ (la dimostrazione si ottiene adattando quella del Teorema 9.28).

9.6 Campi vettoriali di volume minimo

In questa sezione faremo uso di notazioni e risultati delle Appendici A, B e C. Consideriamo una varietà riemanniana (M', g') e una varietà differenziabile compatta M immersa in M' con immersione $f : M \to M'$. Allora, $(M, \overline{g} = f^* g')$ è una sottovarietà riemanniana di (M', g'). Per definizione

$$\mathrm{vol}(f) := \mathrm{vol}(M, \overline{g}).$$

Se g è una fissata metrica riemanniana su M, il tensore L_f di tipo $(1,1)$ che corrisponde, rispetto a g, al tensore $\bar{g}$ di tipo $(0,2)$, è determinato da

$$g(L_f X, Y) = \overline{g}(X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Fissato un sistema di coordinate locali (x_i), poniamo $G = (g_{ij})$, $\bar{G} = (\bar{g}_{ij})$ e $C = (c_{ij})$, dove la matrice C è definita da $L_f \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_i c_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}$, e quindi $\det C = \det L_f$. Siccome $\bar{G} = CG$, abbiamo:

$$v_{\bar{g}} = \sqrt{\det \bar{G}}\, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n = \sqrt{\det L_f}\, v_g,$$

e quindi

$$\mathrm{vol}(f) = \int_M v_{\bar{g}} = \int_M \sqrt{\det L_f}\, v_g.$$

Ora, sia (M, g) una varietà riemanniana compatta n-dimensionale, e sia $(T_1 M, G_s)$ il relativo fibrato sferico unitario tangente, munito della metrica di Sasaki. Denotiamo con $\mathfrak{X}^1(M)$ l'insieme dei campi vettoriali unitari. Assumiamo $\mathfrak{X}^1(M)$ non vuoto, equivalentemente la caratteristica di Eulero-Poincarè $\chi(M)$ di M è nulla (cfr. Teorema 2.18). Una varietà riemanniana compatta orientabile di dimensione dispari, per la dualità di Poincarè, ha caratteristica di Eulero-Poincarè $\chi(M) = 0$.

Definiamo il volume di un campo di vettori. Più precisamente, vogliamo definire il funzionale volume:

$$\mathrm{vol} : \mathfrak{X}^1(M) \to \mathbb{R}, \;\; U \mapsto \mathrm{vol}(U).$$

Un campo di vettori $U \in \mathfrak{X}^1(M)$ determina un'immersione

$$U : M \to T_1M, \; p \mapsto z = (p, U_p).$$

Possiamo quindi definire il volume di U ponendo

$$\mathrm{vol}(U) = \mathrm{vol}(M, U^*G_s) = \int_M \sqrt{\det L_U}\, v_g. \tag{9.35}$$

Dalla definizione di metrica di Sasaki (cfr. Appendice C), si ha:

$$L_U = I + (\nabla U)^T \circ \nabla U, \tag{9.36}$$

dove $(\nabla U)^T$ denota l'operatore trasposto di ∇U. Infatti, il differenziale $U_* : T_pM \to T_zT_1M$, $z = (p, U_p)$, soddisfa

$$U_*(X_p) = (X_p)^H_z + (\nabla_{X_p} U)^V_z \quad \forall X_p \in T_pM.$$

Pertanto, per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e per ogni $p \in M$:

$$\begin{aligned} g(L_U X, Y)(p) &= (U^*G_s)(X, Y)(p) = G_s(U_*X_p, U_*Y_p) \\ &= G_s((X_p)^H_z + (\nabla_{X_p}U)^V_z, (Y_p)^H_z + (\nabla_{Y_p}U)^V_z) \\ &= g(X_p, Y_p) + g(\nabla_{X_p}U, \nabla_{Y_p}U) \\ &= g(X, Y)(p) + g(((\nabla U)^T \circ \nabla U)X, Y)(p) \\ &= g((I + (\nabla U)^T \circ \nabla U)X, Y)(p). \end{aligned}$$

In particolare, U definisce un'immersione isometrica, cioè $U^*G_s = g$, se e solo se $\nabla U = 0$. Dalla (9.35) e dalla (9.36) segue che (cfr. [51])

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(U) = \int_M \Big(1 + \sum_j \left\|\nabla_{E_j} U\right\|^2 + \sum_{j_1<j_2} \left\|\nabla_{E_{j_1}} U \wedge \nabla_{E_{j_2}} U\right\|^2 \qquad (9.37) \\ + \cdots + \sum_{j_1<\ldots<j_{n-1}} \left\|\nabla_{E_{j_1}} U \wedge \cdots \wedge \nabla_{E_{j_{n-1}}} U\right\|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} v_g, \end{aligned}$$

dove $\{E_1, ..., E_n\}$ è una base ortonormale locale. Da questa formula segue che

$$\mathrm{vol}(U) \geq \mathrm{vol}(M, g),$$

dove l'uguaglianza vale se e solo se U è parallelo. Quindi, se esiste un campo di vettori unitario parallelo, allora questo sicuramente minimizza il volume. Si noti che l'esistenza di un campo vettoriale parallelo implica che la varietà è localmente riducibile (cfr. Proposizione 8.41). Pertanto, il problema diventa interessante se M non ammette alcun campo unitario parallelo. La sfera canonica $\mathbb{S}^{2n+1}$ è il classico esempio di varietà riemanniana priva di campi di vettori paralleli. Nel 1986 Gluck e Ziller [40] posero il seguente problema:

"*esistono campi di vettori unitari* (*non paralleli*)
che minimizzano il volume?".

Nello stesso articolo [40] gli autori dimostrarono il seguente risultato, che è stato il primo di un lungo elenco di risultati, ottenuti da altri autori, ma sempre relativi al suddetto problema.

Teorema 9.30. (di Gluck e Ziller) *Sulla sfera canonica $\mathbb{S}^3$ i campi vettoriali unitari di volume minimo sono tutti e soli i campi vettoriali di Hopf.*

La dimostrazione del Teorema 9.30 fornita da Gluck e Ziller usa il metodo delle geometrie calibrate, di seguito riportiamo una dimostrazione più semplice così come data in [89]. Più precisamente, dimostriamo il Teorema di Gluck-Ziller nella seguente più generale formulazione.

Teorema 9.31. ([89]) *Sia (M, g) una varietà Riemanniana compatta di dimensione 3 e di curvatura sezionale costante $c \geq 0$. Allora, i campi di vettori unitari di volume minimo sono tutti e soli i campi vettoriali unitari di Killing.*

Dimostrazione. Sia U un fissato campo di vettori unitario e sia $\{E_1, E_2, E_3 = U\}$ una base ortonormale locale. Poniamo

$$V = \nabla_U U = \sum_i V^i E_i \quad \text{dove } V^i = g(V, E_i),$$
$$S_{ij} = g(\nabla_{E_i} U, E_j), \quad \|S\|^2 = \sum_{i,j} S_{ij}^2 = \|\nabla U\|^2 .$$

Osserviamo che $V^3 = S_{i3} = 0$ per ogni i. Nel caso 3-dimensionale, la formula (9.37) si esplicita come segue

$$\begin{aligned}\mathrm{vol(U)} = \int_M \Big[&(1+\sigma)^2 + (\|S\|^2 - 2\sigma) + \|V\|^2 + (S_{11}V^2 - S_{12}V^1)^2 \\ &+ (S_{21}V^2 - S_{22}V^1)^2\Big]^{\frac{1}{2}} v_g,\end{aligned}$$

dove $2\sigma := (\mathrm{div} U)^2 - \mathrm{tr}(\nabla U \circ \nabla U)$. Dalla (9.5), siccome nel nostro caso $Ric(U, U) = 2c$, segue la seguente formula

$$\int_M \sigma v_g = \frac{1}{2}\int_M Ric(U, U) v_g = c \,\mathrm{vol}(M, g).$$

Poiché:

$$\begin{aligned}
\|S\|^2 &= {S_{11}}^2 + {S_{12}}^2 + {S_{21}}^2 + {S_{22}}^2, \\
(\mathrm{div} U)^2 &= (\sum_i g(\nabla_{E_i} U, E_i))^2 \ = \ (S_{11} + S_{22})^2, \\
\mathrm{tr}(\nabla U \circ \nabla U) &= \sum_i g((\nabla_U \circ \nabla_U) E_i, E_i) \\
&= \sum_{i,j} g(\nabla_{E_i} U, E_j) g(\nabla_{E_j} U, E_i) \\
&= {S_{11}}^2 + {S_{22}}^2 + 2 S_{12} S_{21},
\end{aligned}$$

otteniamo

$$2\sigma = (S_{11} + S_{22})^2 - {S_{11}}^2 - {S_{22}}^2 - 2 S_{12} S_{21},$$

e quindi

$$\|S\|^2 - 2\sigma = (S_{11} - S_{22})^2 + (S_{12} + S_{21})^2 \geq 0.$$

Pertanto,

$$\mathrm{vol}(U) \geq \int_M (1+\sigma) v_g \ = (1+c)\mathrm{vol}(M, g) \tag{9.38}$$

dove l'uguaglianza vale se e solo se

$$V = \nabla_U U = 0, \quad S_{11} = S_{22}, \quad S_{12} + S_{21} = 0. \tag{9.39}$$

Se $U_0 \in \mathfrak{X}^1(M)$ è di Killing, allora $S_{11} = S_{22} = 0$ e $S_{12} + S_{21} = 0$, e quindi nella (9.38) vale l'uguaglianza. Pertanto, U_0 minimizza il volume:

$$\mathrm{vol}(U_0) = (1+c)\mathrm{vol}(M, g) \leq \mathrm{vol}(U) \quad \forall U \in \mathfrak{X}^1(M).$$

Viceversa, supponiamo che $U \in \mathfrak{X}^1(M)$ minimizzi il volume e quindi vale la (9.39). Siccome $S_{12} + S_{21} = 0$, per provare che U è di Killing, ovvero che $\mathcal{L}_U g = 0$, resta da verificare che $S_{11} = S_{22} = 0$. Poniamo

$$\begin{aligned}
&f_1 = S_{11} = S_{22} = (1/2)\mathrm{div} U, \quad f_2 = S_{12} = -S_{21}; \\
&\alpha = g(\nabla_U E_1, E_2), \quad \beta = g(\nabla_{E_1} E_2, E_1), \quad \gamma = g(\nabla_{E_2} E_2, E_1).
\end{aligned}$$

Allora, valgono

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_1} U &= f_1 E_1 + f_2 E_2, & \nabla_{E_2} U &= -f_2 E_1 + f_1 E_2, & \nabla_U U &= 0, \\
\nabla_{E_1} E_1 &= -f_1 U - \beta E_2, & \nabla_{E_2} E_2 &= -f_1 U + \gamma E_1, & \nabla_U E_1 &= \alpha E_2, \\
\nabla_{E_1} E_2 &= -f_2 U + \beta E_1, & \nabla_{E_2} E_1 &= f_2 U - \gamma E_2, & \nabla_U E_2 &= -\alpha E_1,
\end{aligned} \tag{9.40}$$

e quindi

$$[E_1, U] = f_1 E_1 + (f_2 - \alpha) E_2, \quad [E_2, U] = (\alpha - f_2) E_1 + f_1 E_2,$$

$$[E_1, E_2] = -2 f_2 U + \beta E_1 + \gamma E_2. \tag{9.41}$$

Utilizzando tutte queste formule, si ottiene

$$R(E_2, U)U = -(U(f_2) + 2 f_1 f_2) E_1 + (U(f_1) + f_1^2 - f_2^2) E_2, \tag{9.42}$$

$$R(E_1, E_2)U = (E_1(f_2) + E_2(f_1)) E_1 + (-E_1(f_1) + E_2(f_2)) E_2. \tag{9.43}$$

La (9.42) implica

$$(U(f_1) + f_1^2 - f_2^2) = -c. \tag{9.44}$$

Inoltre, la (9.43) implica

$$E_1(f_2) + E_2(f_1) = E_2(f_2) - E_1(f_1) = 0. \tag{9.45}$$

Le equazioni (9.44), (9.45) e (9.41) implicano

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} E_i(E_i(f_1)) &= E_1 E_2(f_2) - E_2 E_1(f_2) + U(f_2^2 - f_1^2 - c) \\ &= [E_1, E_2]\,(f_2) + 2 f_2 U(f_2) - 2 f_1 U(f_1) \\ &= \beta E_1(f_2) + \gamma E_2(f_2) - 2 f_1 U(f_1). \end{aligned}$$

Inoltre, usando la (9.39) e la (9.40), si ottiene

$$\begin{aligned} (\nabla_U U)(f_1) &= 0, \\ (\nabla_{E_1} E_1)(f_1) &= -f_1 U(f_1) - \beta E_2(f_2), \\ (\nabla_{E_2} E_2)(f_1) &= -f_1 U(f_1) + \gamma E_1(f_1). \end{aligned}$$

Di conseguenza, calcolando il laplaciano di f_1 si trova

$$\Delta f_1 = -\mathrm{tr} \nabla^2 f_1 = \textstyle\sum_i (E_i E_i(f_1) - (\nabla_{E_i} E_i)(f_1)) = 0,$$

quindi f_1 è una funzione armonica. D'altro canto, f_1 è un'applicazione differenziabile definita globalmente su M (in quanto $2f_1 = \mathrm{div} U$) ed M è connessa e compatta, per cui f_1 è costante. Inoltre, siccome f_1 è una divergenza, dal Teorema di Green (cfr. Appendice B, Teorema B.5) segue che f_1 dev'essere necessariamente nulla. Di conseguenza U è di Killing. □

Osservazione 9.32. Come caso particolare del Teorema 9.31 ritroviamo esattamente il Teorema di Gluck–Ziller. Infatti: la sfera canonica $(\mathbb{S}^3, g)$ è una varietà riemanniana compatta a curvatura sezionale costante 1, quindi i campi di vettori unitari che minimizzano il volume sono tutti e soli quelli di Killing. Inoltre, per il Teorema 9.28 (di Wiegmink) questi campi vettoriali sono tutti e soli quelli di Hopf.

Osservazione 9.33. Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta orientata e di dimensione 2. Assumiamo che esista $U \in \mathfrak{X}^1(M)$, quindi $\chi(M) = 0$ ed M è topologicamente una superficie torica. Poniamo $E_1 = U$ e $E_2 = JE_1$, dove J è la struttura complessa definita dalla metrica riemanniana g (cfr. Sezione 4.5). Allora, $\{E_1, E_2\}$ è una base ortonormale globale positiva e

$$(\nabla E_1)(E_1) = k_1 E_2, \;\; k_1 = g(\nabla_{E_1} E_1, E_2),$$
$$(\nabla E_1)(E_2) = -k_2 E_2, \;\; k_2 = -g(\nabla_{E_2} E_1, E_2) = g(\nabla_{E_2} E_2, E_1),$$

dove k_1 è la curvatura geodetica della fogliazione generata da U e k_2 è la curvatura geodetica della fogliazione generata da E_2. Inoltre,

$$(\nabla E_1)^T(E_1) = 0, \quad (\nabla E_1)^T(E_2) = k_1 E_1 - k_2 E_2.$$

Quindi,

$$\det\big(I + (\nabla E_1)^T(\nabla E_1)\big) = 1 + k_1^2 + k_2^2.$$

La stessa formula vale per $\det\big(I + (\nabla E_2)^T(\nabla E_2)\big)$. Pertanto,

$$\mathrm{vol}(U) = \mathrm{vol}(JU) = \int_M \sqrt{1 + k_1^2 + k_2^2}\, v_g. \tag{9.46}$$

Con facili calcoli si ottiene

$$\begin{aligned} R(E_1, E_2)E_1 &= -\nabla_{E_1}\nabla_{E_2}E_1 + \nabla_{E_2}\nabla_{E_1}E_1 + \nabla_{[E_1,E_2]}E_1 \\ &= \{E_1(k_2) + E_2(k_1) - (k_1^2 + k_2^2)\}E_2. \end{aligned}$$

Di conseguenza, la curvatura gaussiana K è data da

$$K = E_1(k_2) + E_2(k_1) - (k_1^2 + k_2^2)$$

e la (9.46) diventa

$$\mathrm{vol}(U) = \mathrm{vol}(JU) = \int_M \sqrt{1 - K + E_1(k_2) + E_2(k_1)}\, v_g.$$

Inoltre, dal Teorema di Gauss-Bonnet, si ottiene

$$\int_M \big(E_1(k_2) + E_2(k_1)\big)\, v_g = \int_M (k_1^2 + k_2^2)\, v_g.$$

In particolare se k_1 e k_2 sono costanti, allora le stesse curvature k_1, k_2 e la curvatura gaussiana K sono nulle, e $\mathrm{vol(U) = vol(M, g)}$.