

Capitolo 7

Geodetiche su varietà riemanniane

Questo capitolo è dedicato alle curve geodetiche di una varietà riemanniana, alle loro proprietà, all'esponenziale riemanniana e al Teorema di Hopf-Rinow.

7.1 Esempi di curve geodetiche

Scopo principale di questa sezione è determinare le curve geodetiche degli spazi modello delle geometrie non-euclidee. Iniziamo con la seguente proposizione.

Proposizione 7.1. *Sia (M, g) una varietà riemanniana. Se il sostegno $\sigma(I)$ di una curva differenziabile $\sigma : I \rightarrow M$ è il luogo dei punti fissi di un'isometria f di (M, g) , cioè $\sigma(I) = \{p \in M : f(p) = p\}$, allora σ (opportunamente parametrizzata) è una curva geodetica di M .*

Dimostrazione. Sia $p \in \sigma(I)$, $p = \sigma(t_0)$. Posto $v = \dot{\sigma}(t_0)$, per il Teorema di esistenza e unicità delle geodetiche, esiste un'unica geodetica $\gamma(s)$, $s \in]-\delta, +\delta[$, tale che $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = v$. Poiché f è una isometria, $\gamma_1 = f \circ \gamma$ è una geodetica con $\gamma_1(0) = f(\gamma(0)) = f(p) = p$ e $\dot{\gamma}_1(0) = (f \circ \gamma)'(0) = (f_*)_p \dot{\gamma}(0) = (f_*)_p \dot{\sigma}(t_0) = (f \circ \sigma)'(t_0) = \dot{\sigma}(t_0) = v$. Dunque, per l'unicità della geodetica γ con le fissate condizioni iniziali, avremo $(f \circ \gamma)(s) = \gamma(s)$, $\forall s \in]-\delta, +\delta[$ e quindi $\gamma(]-\delta, +\delta[) \subset \sigma(I)$. Ciò prova che σ è una geodetica in un intorno di p e quindi, per l'arbitrarietà di p , σ è una geodetica (come insieme di punti). \square

Più in generale, vale la seguente proposizione.

Proposizione 7.2. *Siano (\bar{M}, \bar{g}) una varietà riemanniana e (M, g) una sottovarietà riemanniana di (\bar{M}, \bar{g}) . Se M è l'insieme dei punti fissi di una*

isometria Φ di (\bar{M}, \bar{g}) , cioè $M = \{p \in \bar{M} : \Phi(p) = p\}$, allora M è una sottovarietà totalmente geodetica di \bar{M} .

Dimostrazione. Siano $p \in M$ e $v \in T_p M$. Consideriamo una curva $\sigma(s)$ di M con $\sigma(0) = p$ e $\dot{\sigma}(0) = v$, inoltre consideriamo la geodetica $\gamma(t)$ di \bar{M} con $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = v$, $t \in]-\delta, \delta[$. Poiché σ è una curva di M si ha $\Phi \circ \sigma = \sigma$, inoltre Φ è un'isometria di \bar{M} , per cui $\tilde{\gamma}(t) = \Phi(\gamma(t))$ è una curva geodetica di \bar{M} con $\tilde{\gamma}(0) = \Phi(p) = p$ e $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = \Phi_{*p} v = \Phi_{*p} \dot{\sigma}(0) = (\Phi \circ \dot{\sigma})(0) = \dot{\sigma}(0) = v$. Pertanto, deve essere $\Phi(\gamma(t)) = \gamma(t)$ e quindi $\gamma \subset M$. Poiché γ è una geodetica di \bar{M} contenuta in M , dall'equazione di Gauss:

$$0 = \frac{\bar{D}\dot{\gamma}}{dt} = \frac{D\dot{\gamma}}{dt} + \alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))$$

segue che $D\dot{\gamma}/dt = 0$ e $\alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$ per ogni t . In particolare, γ è una curva geodetica di M e $\alpha_p(v, v) = 0$. Dall'arbitrarietà di p e v , segue che la seconda forma fondamentale $\alpha \equiv 0$ e quindi M è totalmente geodetica. \square

Come osservato nell'Esempio 6.68, la sfera canonica \mathbb{S}^m è una sottovarietà riemanniana della sfera \mathbb{S}^n , $n > m$. Inoltre, l'applicazione

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{n-m} &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{n-m}, \\ p = (x, y) &\mapsto \Phi(p) = (x, -y), \end{aligned}$$

è una trasformazione ortogonale di \mathbb{R}^{n+1} e quindi un'isometria di \mathbb{S}^n . D'altronde,

$$\{p = (x, y) \in \mathbb{S}^n : \Phi(p) = p\} = \{p = (x, y) \in \mathbb{S}^n : y = 0\} = \mathbb{S}^m.$$

Pertanto, anche dalla Proposizione 7.2, segue che \mathbb{S}^m è una sottovarietà riemanniana totalmente geodetica di \mathbb{S}^n .

Esercizio 7.3. Determinare le isometrie del piano euclideo che ammettono una curva come luogo di punti fissi.

Proposizione 7.4. Sia $p : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ un rivestimento riemanniano. Allora le geodetiche di (M, g) sono tutte e sole le proiezioni delle geodetiche di (\tilde{M}, \tilde{g}) .

Dimostrazione. Sia $\tilde{\gamma}$ una geodetica di \tilde{M} , allora $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ è una geodetica di M perché p è un'isometria locale. Viceversa, sia γ una geodetica di M . Dati $x_0 = \gamma(t_0) \in \gamma(I)$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}\{x_0\}$, consideriamo U intorno ben coperto di x_0 , \tilde{U} foglio su U per \tilde{x}_0 . Allora, $p_1 = p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$ è un'isometria e quindi, se γ_1 è l'arco di γ contenuto in U , $\tilde{\gamma}_1 = p_1^{-1} \circ \gamma_1$ è una geodetica su \tilde{M} . Pertanto $\gamma_1 = p \circ \tilde{\gamma}_1$, con $\tilde{\gamma}_1$ geodetica, in un intorno di x_0 . Lo stesso procedimento si può ripetere in un intorno di ogni punto di γ , ottenendo in questo modo la stessa γ come proiezione di una geodetica $\tilde{\gamma}$ di \tilde{M} . \square

Esempio 7.5. Le geodetiche dello spazio euclideo

Le geodetiche $\gamma(t)$ dello spazio euclideo \mathbb{R}^n sono tutte e sole le rette (opportunamente parametrizzate) o segmenti di retta. Infatti, in questo caso

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \frac{d\dot{\gamma}}{dt} = \ddot{\gamma}(t) \quad \text{e quindi:}$$

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0 \Leftrightarrow (\ddot{x}_1(t), \dots, \ddot{x}_n(t)) = 0 \Leftrightarrow \gamma(t) = tv + x_0.$$

Proposizione 7.6. *Le geodetiche di un'ipersuperficie M dello spazio euclideo \mathbb{R}^{n+1} sono le curve $\gamma(t)$ di M la cui accelerazione estrinseca $\ddot{\gamma}(t) = d\dot{\gamma}/dt$ è ortogonale a M .*

Dimostrazione. $D\dot{\gamma}/dt = 0 \Leftrightarrow (d\dot{\gamma}/dt)^\top = 0 \Leftrightarrow \ddot{\gamma}(t)$ è normale a M . \square

Esempio 7.7. Le geodetiche della sfera canonica

Le geodetiche massimali della sfera canonica \mathbb{S}^n sono tutte e sole le circonferenze (opportunamente parametrizzate) di raggio massimo.

Dimostrazione. Sia \mathbb{S}^n la sfera unitaria di centro l'origine di \mathbb{R}^{n+1} . Sia σ una circonferenza di raggio massimo di \mathbb{S}^n . Allora, esistono due punti u, v (su tale circonferenza) che, pensati come vettori unitari, risultano ortogonali fra loro, quindi si può scrivere

$$\sigma(t) = (\cos t)u + (\sin t)v \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Siccome $\dot{\sigma}(t) = (-\sin t)u + (\cos t)v$, allora

$$\frac{d\dot{\sigma}}{dt} = \ddot{\sigma}(t) = (-\cos t)u + (-\sin t)v = -\sigma(t)$$

è ortogonale a $T_{\sigma(t)}\mathbb{S}^n = \sigma(t)^\perp$, e quindi $\frac{D\dot{\sigma}}{dt} = (\ddot{\sigma}(t))^\top = 0$. Pertanto le circonferenze di raggio massimo sono curve geodetiche per \mathbb{S}^n . Viceversa, sia $\gamma(t)$ un arco geodetico, parametrizzato a velocità unitaria, con $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = v$. Allora, pensando p e v come vettori applicati nell'origine (centro della sfera), la curva $\sigma(t) = (\cos t)p + (\sin t)v$, $t \in \mathbb{R}$, è una circonferenza di raggio massimo che soddisfa le condizioni $\sigma(0) = p$ e $\dot{\sigma}(0) = v$. Pertanto, per l'unicità delle geodetiche con fissate condizioni iniziali, abbiamo che $\gamma \subset \sigma$.

Un altro modo per vedere che le circonferenze di raggio massimo sono curve geodetiche di \mathbb{S}^n è il seguente. Sia γ una circonferenza di raggio massimo di \mathbb{S}^n e sia E il piano per il centro O di \mathbb{S}^n tale che $\gamma = E \cap \mathbb{S}^n$. Consideriamo la riflessione Φ di \mathbb{R}^{n+1} rispetto al piano E :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^{n+1} = E \oplus E^\perp &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} = E \oplus E^\perp \\ x = x_E + x_{E^\perp} &\longmapsto \Phi(x) = x_E - x_{E^\perp}. \end{aligned}$$

Φ è una trasformazione ortogonale di \mathbb{R}^{n+1} . Quindi, $\phi = \Phi|_{\mathbb{S}^n}$ è una isometria di \mathbb{S}^n . D'altronde il piano E è l'autospazio di Φ relativo all'autovalore $+1$. Pertanto, applicando la Proposizione 7.1,

$$\gamma = \mathbb{S}^n \cap E = \{x \in \mathbb{S}^n : x \in E\} = \{x \in \mathbb{S}^n : \Phi(x) = x\}$$

è una curva geodetica. \square

Esercizio 7.8. Sia M una superficie regolare di \mathbb{R}^3 simmetrica rispetto a un piano E . Verificare che la curva $\gamma = E \cap M$ è una geodetica (come insieme di punti) di M .

Esempio 7.9. Le geodetiche di una superficie di rotazione

Consideriamo una superficie di rotazione M di \mathbb{R}^3 ottenuta ruotando una curva piana regolare γ intorno ad un asse del piano della curva e che non intersechi la stessa curva. Supponiamo che il piano di γ sia il piano yz , l'asse di rotazione sia l'asse z e la curva γ sia parametrizzata da $x = 0, y = r(u) > 0, z = z(u), u$ ascissa curvilinea, pertanto M (ottenuta ruotando γ intorno all'asse z) ha equazioni parametriche $x = r(u) \cos \vartheta, y = r(u) \sin \vartheta, z = z(u)$. Dall'Esercizio 4.21 sappiamo che la metrica g indotta su $M = \gamma \times S^1$, dalla metrica euclidea di \mathbb{R}^3 , è data da

$$g = du \otimes du + r^2(u) d\vartheta \otimes d\vartheta.$$

Proviamo che le curve geodetiche della suddetta superficie di rotazione sono:

- 1) tutti i meridiani;
- 2) i paralleli $\sigma(t)$ che hanno $\xi_{\sigma(t)}$ (campo normale ad M in $\sigma(t)$) ortogonale all'asse di rotazione;
- 3) le curve $(u(t), \vartheta(t))$, parametrizzate con l'ascissa curvilinea, che soddisfano il sistema:

$$(u'(t))^2 + r^2(u(t))(\vartheta'(t))^2 = 1, \quad r^2(u(t))\vartheta'(t) = c,$$

dove c è una costante associata alla geodetica.

Dall'Esercizio 6.57 sappiamo che i coefficienti Γ_{ij}^k della connessione di Levi-Civita di g sono dati da

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -r(u)r'(u), \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{r'(u)}{r(u)},$$

dove si è posto $x_1 = u$ e $x_2 = \vartheta$. Dunque, $\sigma(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (u(t), \vartheta(t))$ è una curva geodetica se, e solo se, soddisfa le seguenti equazioni differenziali:

$$u''(t) - r(u)r'(u)(\vartheta'(t))^2 = 0, \quad \vartheta''(t) + 2(r'(u)/r(u))u'(t)\vartheta'(t) = 0. \quad (7.1)$$

Se $\sigma(t)$, con t ascissa curvilinea, è un meridiano di M , cioè

$$\sigma(t) = (u(t), \text{cost.}) = (u(t), \vartheta_0), \quad u'(t) \neq 0,$$

allora $\vartheta'(t) = \vartheta''(t) = 0$. Inoltre,

$$1 = g(\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t)) = (u'(t))^2 \Rightarrow u''(t) = 0.$$

Dunque, il sistema (7.1) è identicamente soddisfatto, e quindi tutti i meridiani sono curve geodetiche.

Sia ora $\sigma(t)$, con t ascissa curvilinea, un parallelo di M , cioè $\sigma(t) = (\text{cost.}, \vartheta(t)) = (u_0, \vartheta(t))$. Allora, $\dot{\sigma}(t) = (0, \vartheta'(t))$ e

$$\begin{aligned} 1 &= g(\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t)) = r^2(u_0)(\vartheta'(t))^2 \\ &\Rightarrow r^2(u_0)\vartheta'(t)\vartheta''(t) = 0 \Rightarrow \vartheta''(t) = 0 \quad (\text{siccome } \vartheta'(t) \neq 0). \end{aligned}$$

Dunque la seconda equazione del sistema (7.1) è identicamente soddisfatta, mentre la prima equazione diventa $r(u_0)r'(u_0)(\vartheta'(t))^2 = 0$. Siccome $r(u_0) \neq 0$, il parallelo $\sigma(t)$ è una geodetica se e solo se $r'(u_0) = 0$. La condizione $r'(u_0) = 0$ significa che la tangente alla curva generatrice nel punto $\sigma(t)$ è parallela all'asse z , equivalentemente $\xi_{\sigma(t)}$ (campo normale ad M in $\sigma(t)$) è ortogonale all'asse di rotazione (cfr. Figura 7.1).

Infine, il risultato enunciato in 3) si ottiene dal sistema (7.1).

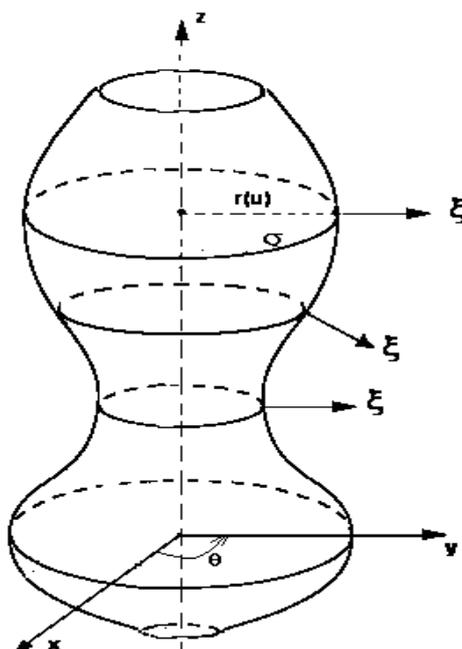


Figura 7.1: Geodetiche di una superficie di rotazione.

Osservazione 7.10. Esaminando il sistema di equazioni differenziali del punto 3) relativo all'Esempio 7.9, si ottiene che la geodetica γ , che soddisfa tale sistema, oscilla tra due paralleli consecutivi che verificano la condizione $r(u) = c$ e ai quali essa è tangente. Se uno di questi paralleli è estremo ($r'(u) = 0$), allora la geodetica è asintotica a questo parallelo che è esso stesso una geodetica.

Esempio 7.11. Le geodetiche di una superficie torica

In una superficie torica, con la metrica canonica, un meridiano è costituito da due circonferenze che saranno quindi geodetiche; tra i paralleli solo quello di raggio max e quello di raggio minimo sono geodetiche. Consideriamo ora il toro piatto (\mathbb{T}^2, g) , dunque il rivestimento

$$p : (\mathbb{R}^2, g_0) \rightarrow (\mathbb{T}^2, g), (x, y) \mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}),$$

è riemanniano e le geodetiche di (\mathbb{T}^2, g) sono tutte e sole le immagini delle rette di \mathbb{R}^2 . In particolare, data la retta $r(t) : x = t, y = kt$, di coefficiente angolare k , la geodetica $\gamma(t) = p(r(t))$ è una curva chiusa se, e solo se, k è razionale:

$$\begin{aligned} \gamma \text{ chiusa} &\Leftrightarrow \exists t_1, t_2 \in \mathbb{R}, t_1 \neq t_2, \gamma(t_1) = \gamma(t_2) \\ &\Leftrightarrow \exists t_1, t_2 \in \mathbb{R}, t_1 \neq t_2, e^{2\pi i t_1} = e^{2\pi i t_2} \text{ e } e^{2\pi i k t_1} = e^{2\pi i k t_2} \\ &\Leftrightarrow \exists t_1, t_2 \in \mathbb{R}, t_1 \neq t_2, t_1 - t_2, k(t_1 - t_2) \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Quindi, se k è irrazionale, la geodetica $\gamma(t)$ non può essere chiusa; in questo caso $\gamma(\mathbb{R})$ è un sottoinsieme denso di \mathbb{T}^2 (cfr. [14], p.86). Queste proprietà osservate per le geodetiche di \mathbb{T}^2 non si verificano per le geodetiche di \mathbb{R}^2 , quindi le geodetiche di uno spazio localmente isometrico allo spazio euclideo \mathbb{R}^n possono avere un comportamento molto diverso dalle geodetiche di \mathbb{R}^n .

Esempio 7.12. Le geodetiche dello spazio proiettivo

Sullo spazio proiettivo \mathbb{P}^n consideriamo la metrica h definita dal rivestimento $p : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n = \mathbb{S}^n / \{\pm I_d\}$, $g = p^*h$, dove g è la metrica canonica di \mathbb{S}^n . Quindi, p definisce un rivestimento riemanniano e le geodetiche di \mathbb{P}^n sono tutte e sole le proiezioni delle geodetiche di \mathbb{S}^n (cfr. Figura 7.2).

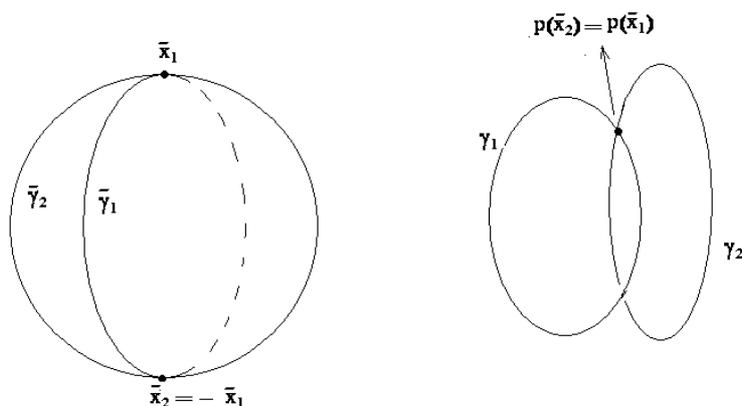


Figura 7.2: Geodetiche del piano proiettivo

Sia $\gamma(t)$ una geodetica massimale di \mathbb{P}^n , allora esiste $\tilde{\gamma}$ circonferenza di raggio massimo di \mathbb{S}^n tale che $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$, e quindi

$$\gamma(t + \pi) = p \circ \tilde{\gamma}(t + \pi) = p(-\tilde{\gamma}(t)) = p(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t).$$

Pertanto, le geodetiche massimali di \mathbb{P}^n sono curve chiuse di periodo π (radianti). Inoltre, mentre due geodetiche massimali distinte $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ di \mathbb{S}^n hanno due punti in comune, due geodetiche massimali distinte di \mathbb{P}^n hanno un solo punto in comune. Infatti:

$$\tilde{\gamma}_1 \cap \tilde{\gamma}_2 = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\} \implies \tilde{x}_1 = -\tilde{x}_2 \implies p(\tilde{x}_2) = p(\tilde{x}_1).$$

Osservazione 7.13. Assumendo come “rette” del piano proiettivo \mathbb{P}^2 le sue geodetiche massimali, si ottiene un modello di geometria non euclidea ellittica. Per quanto visto prima, dati $x \in \mathbb{P}^2$ e γ “retta” con $x \notin \gamma$, non esiste una “retta” γ' tale che $x \in \gamma'$ e $\gamma \cap \gamma' = \emptyset$, quindi non vale il postulato delle parallele della geometria euclidea. Si noti inoltre che per ogni $x, y \in \mathbb{P}^2, x \neq y$, esiste un’unica “retta” che congiunge x e y (ciò non accade per la sfera \mathbb{S}^2).

Determiniamo ora le geodetiche della geometria iperbolica nei vari modelli.

Esempio 7.14. Le geodetiche dell’iperboloide H^n

Le curve geodetiche dell’iperboloide $H^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1, x_{n+1} > 0$, munito della metrica iperbolica indotta dalla metrica di Minkowski q , sono tutte e sole le curve (le iperboli) intersezioni di H^n con i piani di \mathbb{R}^{n+1} passanti per l’origine.

Dimostrazione. Per determinare le geodetiche di H^n procediamo come per le geodetiche di \mathbb{S}^n . Sia \mathcal{C} la curva intersezione di H^n con un piano E passante per l’origine. Siano x un punto di \mathcal{C} e v un vettore tangente in x a \mathcal{C} . Quindi $v \in T_x H^n = x^\perp$, dove \perp è considerata rispetto a q ; in particolare possiamo prendere v unitario, quindi $q(x, v) = 0$ e $q(v, v) = 1$. Consideriamo la curva parametrizzata

$$\gamma(t) = (\cosh t)x + (\sinh t)v, \quad t \in \mathbb{R},$$

dove $\cosh t = (e^t + e^{-t})/2$ e $\sinh t = (e^t - e^{-t})/2$; $\gamma(0) = x \in H^n$ e

$$\begin{aligned} q(\gamma(t), \gamma(t)) &= (\cosh^2 t)q(x, x) + (\sinh^2 t)q(v, v) \\ &\quad + 2(\sinh t \cosh t)q(x, v) = -\cosh^2 t + \sinh^2 t = -1 \end{aligned}$$

implicano che γ è una curva di H^n . Dunque, $\gamma(t)$ è una curva di $H^n \cap E$ e quindi una parametrizzazione del ramo di iperbole \mathcal{C} . Il campo tangente $\dot{\gamma}(t)$ e l’accelerazione estrinseca $\ddot{\gamma}(t)$ sono dati da

$$\dot{\gamma}(t) = (\sinh t)x + (\cosh t)v, \quad \ddot{\gamma}(t) = (\cosh t)x + (\sinh t)v = \gamma(t).$$

Quindi $D\dot{\gamma}/dt$, proiezione q -ortogonale di $\ddot{\gamma}(t)$ su $T_{\gamma(t)}H^n = \gamma(t)^\perp$, è data da $(\ddot{\gamma}(t))^\top = 0$. Pertanto, $\gamma(t)$ è una geodetica di H^n . Viceversa, sia $\sigma(t)$ una geodetica di H^n parametrizzata a velocità unitaria, con $\sigma(0) = x$ e $\dot{\sigma}(0) = v$. Allora, x e v , pensati entrambi come vettori, sono q -ortogonali (in quanto $v \in T_x H^n = x^\perp$) con $q(v, v) = 1$ e $q(x, x) = -1$, e il ramo di iperbole $\gamma(t) = (\cosh t)x + (\sinh t)v$ soddisfa le condizioni iniziali $\gamma(0) = x$ e $\dot{\gamma}(0) = v$. Pertanto, applicando il teorema di esistenza e unicità per le curve geodetiche, abbiamo che $\sigma \subset \gamma$. Un altro modo di procedere per determinare le geodetiche di H^n è il seguente. Sia E un piano per O e per x_1, x_2 , con $x_1, x_2 \in H^n$. Posto $E^\perp = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : q(y, x) = 0 \quad \forall x \in E\}$, si ha

$$\mathbb{R}^{n+1} = E \oplus E^\perp \quad \text{e} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n+1} : x = x_E + x_{E^\perp}.$$

L'applicazione

$$s : x = x_E + x_{E^\perp} \mapsto s(x) = x_E - x_{E^\perp}$$

è un elemento di $O(n, 1)$. Infatti:

$$q(s(x), s(y)) = q(x_E, y_E) + q(x_{E^\perp}, y_{E^\perp}) = q(x_E + x_{E^\perp}, y_E + y_{E^\perp}) = q(x, y).$$

Inoltre, $s^2 = I$ e quindi $s^{-1} = s$. Se $x \in H^n$, poiché $q(s(x), s(x)) = q(x, x)$, allora $s(x) \in \bar{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : q(x, x) = -1\}$ che ha due componenti connesse, la falda superiore H^n e la falda inferiore. Siccome $s(x_1) = x_1$, $s(x_2) = x_2 \in H^n$, $s(H^n)$ dovendo essere connesso sarà necessariamente contenuto in H^n . Quindi, $s(H^n) \subset H^n$. Viceversa, $y \in H^n \Rightarrow x = s^{-1}(y) \in H^n \Rightarrow y = s(x) \in s(H^n)$. Pertanto, $s(H^n) = H^n$ e quindi $s \in O_+(n, 1) = \text{Iso}(H^n)$. Di conseguenza, applicando la Proposizione 7.1, $\gamma = E \cap H^n$ (luogo dei punti fissi di s) è geodetica per H^n . \square

Esempio 7.15. Le geodetiche del piano iperbolico \mathbb{R}_+^2

Le geodetiche massimali del piano iperbolico \mathbb{R}_+^2 sono tutte e sole le semirette parallele all'asse y e le semicirconferenze con centro sull'asse x (cfr. Figura 7.3).

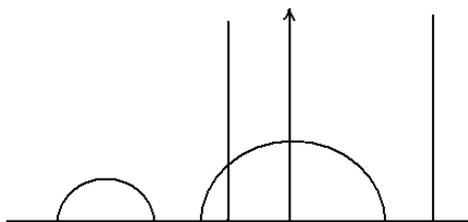


Figura 7.3: Le geodetiche di \mathbb{R}_+^2 .

Dimostrazione. Per determinare le geodetiche del piano iperbolico consideriamo le seguenti isometrie di \mathbb{R}_+^2 (cfr. Proposizione 5.40):

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) &= (-x, y), \\ \psi_2(x, y) &= (1/\|p\|^2)p, \quad \text{dove } p = (x, y), \\ \psi_3(x, y) &= (x + a, y), \\ \psi_4(x, y) &= (ax, ay), \quad a > 0. \end{aligned}$$

Applicando la Proposizione 7.1 all'isometria ψ_1 , si ha che la semiretta $\gamma_1 : \begin{cases} y > 0 \\ x = 0 \end{cases}$ è una geodetica di \mathbb{R}_+^2 . Applicando la stessa proposizione a ψ_2 , si ha che la semicirconferenza $\gamma_2 : \begin{cases} y > 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ è una geodetica di \mathbb{R}_+^2 .

Ogni semiretta parallela all'asse y , cioè del tipo $\begin{cases} y > 0 \\ x = \lambda \end{cases}$, è una geodetica di \mathbb{R}_+^2 in quanto immagine di γ_1 mediante un'isometria del tipo ψ_3 . Ogni semicirconferenza di \mathbb{R}_+^2 del tipo $\gamma_3 : \begin{cases} y > 0 \\ x^2 + y^2 = \lambda^2 \end{cases}$, cioè di centro l'origine e raggio λ , è una geodetica in quanto immagine di γ_2 mediante un'isometria del tipo ψ_4 con $a = \lambda$. Infine, ogni semicirconferenza di \mathbb{R}_+^2 con centro $(a, 0)$ e raggio λ è una geodetica in quanto immagine di γ_3 mediante un'isometria del tipo ψ_3 . Le curve esaminate sono tutte e sole le geodetiche di \mathbb{R}_+^2 in quanto, per ogni $p \in \mathbb{R}_+^2$ e per ogni $v \in T_p\mathbb{R}_+^2$, esiste una geodetica del tipo di prima passante per p e avente v come vettore tangente in p (cfr. Figura 7.4). \square

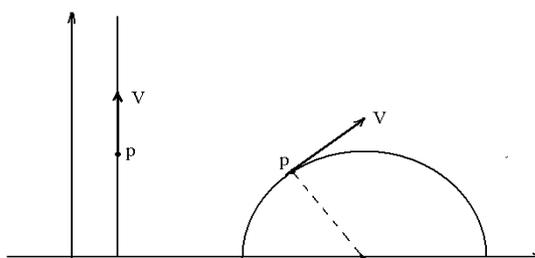


Figura 7.4: Geodetiche tangenti a vettori di $T_p\mathbb{R}_+^2$.

Osservazione 7.16. L'Esempio 7.15 determina le geodetiche del piano iperbolico come insiemi di punti. Osserviamo che il semiasse positivo delle y parametrizzato da $\gamma_1(t) = (0, e^t)$, $t \in \mathbb{R}$, è una curva geodetica, inclusa la parametrizzazione, in quanto il suo vettore velocità $\dot{\gamma}_1(t) = (0, e^t)$ ha lunghezza costante unitaria. Oppure, ricordando che il campo vettoriale $E_2 = y\partial_y$ è un campo geodetico (cfr. Esempio 6.41), basta osservare che il vettore velocità $\dot{\gamma}_1(t) = (E_2)_{\gamma_1(t)}$. Inoltre, osserviamo che le trasformazioni di Möbius (reali), espresse in coordinate reali da

$$z = (x, y) \longrightarrow \left(\frac{ac(x^2 + y^2) + (ad + bc)x + db}{(cx + d)^2 + (cy)^2}, \frac{(ad - bc)y}{(cx + d)^2 + (cy)^2} \right),$$

sono isometrie per il piano iperbolico (cfr. Sezione 5.6). In particolare, la trasformazione di Möbius ψ definita dai coefficienti $a = c = d = -b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ trasforma la geodetica $\gamma_1(t)$ nella geodetica

$$\gamma_2(t) = \psi(\gamma_1(t)) = \left(\frac{(e^{2t} - 1)}{(e^{2t} + 1)}, \frac{2e^t}{(e^{2t} + 1)} \right), t \in \mathbb{R},$$

che è la semicirconferenza di centro l'origine e raggio unitario. Procedendo in questo modo, tutte le geodetiche dell'Esempio 7.15 si possono ottenere come curve geodetiche parametrizzate.

Esercizio 7.17. Si consideri il semipiano \mathbb{R}_+^2 con la metrica iperbolica $g = (1/y^2)(dx^2 + dy^2)$. Si verifichi, usando l'Esercizio 6.56, che una curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ è una curva geodetica parametrizzata del piano iperbolico se, e solo se, è soddisfatto il seguente sistema di equazioni differenziali

$$x''(t) - 2\frac{x'(t)y'(t)}{y(t)} = 0, \quad y''(t) + \frac{x'^2(t) - y'^2(t)}{y(t)} = 0. \quad (*)$$

Quindi, si verifichi che le geodetiche parametrizzate $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ dell'Osservazione 7.16 soddisfano il sistema di equazioni differenziali (*). Pertanto, le geodetiche del piano iperbolico si possono parametrizzare con $\tilde{\gamma}_1(t) = (x_0, e^t)$, $t \in \mathbb{R}$, semiretta parallela all'asse delle y , e con

$$\tilde{\gamma}_2(t) = \left(x_0 + R\frac{(e^{2t} - 1)}{(e^{2t} + 1)}, R\frac{2e^t}{(e^{2t} + 1)} \right) = (x_0 + R \tanh t, R \operatorname{sech} t), \quad t \in \mathbb{R},$$

che è la semicirconferenza di centro $(x_0, 0)$ e raggio R .

Osservazione 7.18. Assumendo come "rette" del piano iperbolico \mathbb{R}_+^2 le sue geodetiche massimali, si ottiene un modello di geometria non euclidea iperbolica. In questo caso, rispetto al caso euclideo, il postulato delle parallele perde l'unicità: dati $p \in \mathbb{R}_+^2$ e γ "retta" con $p \notin \gamma$, esistono infinite geodetiche per p che non incontrano γ (cfr. Figura 7.5). Inoltre, per ogni $x, y \in \mathbb{R}_+^2$, $x \neq y$, esiste una sola "retta" che li congiunge.

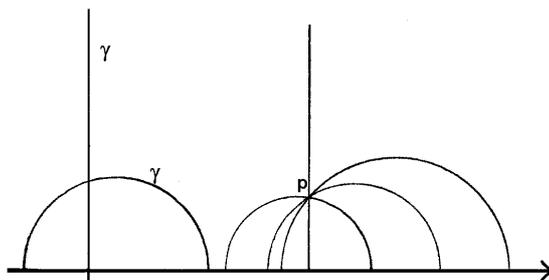


Figura 7.5: Esistenza di infinite geodetiche per p che non incontrano γ .

Esempio 7.19. Le geodetiche dello spazio iperbolico \mathbb{R}_+^n

Le geodetiche massimali dello spazio iperbolico \mathbb{R}_+^n , ossia del semispazio $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ con la metrica iperbolica $g = (1/x_n^2)(dx_1^2 + \dots + dx_n^2)$, sono tutte e sole le semirette parallele all'asse x_n e le semicirconferenze con centro sull'iperpiano $x_n = 0$ e ortogonali allo stesso iperpiano.

Dimostrazione. Consideriamo l'applicazione

$$\Phi : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-x_1, \dots, -x_{n-1}, x_n).$$

Φ è una simmetria rispetto al semiasse $\gamma_1 : \begin{cases} x_n > 0 \\ x_1 = \dots = x_{n-1} = 0 \end{cases}$, quindi una isometria euclidea che applica \mathbb{R}_+^n in \mathbb{R}_+^n , pertanto Φ è un'isometria dello spazio iperbolico \mathbb{R}_+^n . Di conseguenza, $\gamma_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi(x) = x\}$ è una geodetica per \mathbb{R}_+^n . Sia ora γ_j una generica semicirconferenza di centro O ortogonale all'iperpiano $\Pi_n : x_n = 0$. Consideriamo il piano $E_j = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x_h = 0, h = 1, \dots, n-1, h \neq j\}$ e la semisfera $\mathbb{S}_+^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$, allora $\gamma_j = E_j \cap \mathbb{S}_+^{n-1}$ è una semicirconferenza. Inoltre, i piani E_j sono ortogonali all'iperpiano Π_n . Infatti:

$$E_j = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x_1 = x_2 = \dots = x_{j-1} = x_{j+1} = \dots = x_{n-1} = 0\},$$

e

$$\Pi_n^\perp = \text{asse } x_n \subset E_j \quad \forall j = 1, \dots, n-1.$$

Quindi, la semicirconferenza $\gamma_j \subset E_j$ è ortogonale all'iperpiano $x_n = 0$. Denotiamo con ψ l'isometria di \mathbb{R}_+^n definita da

$$\psi : x = (x_i) \mapsto \psi(x) = \frac{x}{\|x\|^2}.$$

L'applicazione $\psi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che

$$x \mapsto \psi_j(x) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_{j-1}, x_j, -x_{j+1}, \dots, -x_{n-1}, x_n),$$

è un'isometria euclidea di \mathbb{R}^n che applica \mathbb{R}_+^n in \mathbb{R}_+^n , quindi anche ψ_j è un'isometria di \mathbb{R}_+^n . Siccome

$$\{x \in \mathbb{R}_+^n : \psi(x) = x\} \cap \{x \in \mathbb{R}_+^n : \psi_j(x) = x\} = \mathbb{S}_+^{n-1} \cap E_j = \gamma_j,$$

γ_j è una geodetica per \mathbb{R}_+^n . Proviamo ora che ogni semiretta γ'_1 di H^n parallela all'asse x_n , è una curva geodetica (opportunosamente parametrizzata). Infatti $\gamma'_1 = \psi(\gamma_1)$, dove ψ è un'isometria di \mathbb{R}_+^n del tipo

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = (\phi(x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$$

con ϕ traslazione dell'iperpiano \mathbb{R}^{n-1} di equazione $x_n = 0$. Anche la semicirconferenza $\gamma'_j = E_j \cap \mathbb{S}_+^{n-1}(\lambda)$, dove $\mathbb{S}_+^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}_+^n : \|x\|^2 = \lambda^2\}$, è una curva geodetica in quanto $\gamma'_j = \psi(\gamma_j)$, dove ψ è l'isometria di \mathbb{R}_+^n definita da $\psi(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$. Infine, ogni semicirconferenza γ''_j con centro sull'iperpiano $x_n = 0$ e ortogonale allo stesso iperpiano è una curva geodetica. Infatti, $\gamma''_j = \psi(\gamma'_j)$, dove ψ è un'isometria del tipo $\psi(x_1, \dots, x_n) = (\phi(x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$ con ϕ isometria dell'iperpiano $\mathbb{R}^{n-1} : x_n = 0$. Le curve esaminate sono tutte e sole le geodetiche di \mathbb{R}_+^n . Infatti, per ogni $p \in \mathbb{R}_+^n$ e per ogni $v \in T_p \mathbb{R}_+^n$, esiste certamente una geodetica del tipo di prima che passa per p con vettore tangente (in p) v . \square

Osservazione 7.20. (Geodetiche parametrizzate di \mathbb{R}_+^n)

Per determinare le geodetiche parametrizzate dello spazio iperbolico \mathbb{R}_+^n , possiamo procedere nel modo seguente. Sia E^2 un piano di \mathbb{R}^n contenente l'asse x_n , quindi $E^2 = \text{span}(e_n, v)$, dove $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ e v è un vettore unitario dell'iperpiano \mathbb{R}^{n-1} definito da $x_n = 0$, ovvero $v = (v_1, \dots, v_{n-1}, 0)$ e $g_0(v, v) = 1$. Quindi E^2 è un piano ortogonale all'iperpiano \mathbb{R}^{n-1} . Sia

$$E_+^2 = \{x \in E^2 : \lambda v + x_n e_n, \lambda \in \mathbb{R}, x_n > 0\}$$

il semipiano superiore. Il semiasse positivo delle x_n si può parametrizzare con $\gamma_1(t) = (0, \dots, 0, e^t)$. La semicirconferenza di centro l'origine e raggio R del semipiano E_+^2 si può parametrizzare, come visto nell'Esercizio 7.17, con $\gamma_2(t) = R(\tanh t)v + R(\text{sech } t)e_n$. Se $x_0 = (x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, 0)$ è un generico punto dell'iperpiano \mathbb{R}^{n-1} , la curva

$$\tilde{\gamma}_1(t) = (x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, e^t)$$

è una semiretta parallela al semiasse positivo delle x_n , e la curva

$$\tilde{\gamma}_2(t) = x_0 + R(\tanh t)v + R(\text{sech } t)e_n$$

è una semicirconferenza, ortogonale all'iperpiano \mathbb{R}^{n-1} , di centro x_0 e raggio R . D'altronde, usando i coefficienti Γ_{ij}^k dell'Esercizio 6.56, si ottiene che una curva $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ è una curva geodetica parametrizzata dello spazio iperbolico \mathbb{R}_+^n se, e solo se, è soddisfatto il seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_i}{dt^2} - \frac{2}{x_n(t)} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_n}{dt} &= 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \frac{d^2 x_n}{dt^2} + \frac{1}{x_n(t)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dx_n}{dt} \right)^2 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Le geodetiche parametrizzate $\tilde{\gamma}_1(t), \tilde{\gamma}_2(t)$ soddisfano il suddetto sistema di equazioni differenziali.

Esempio 7.21. Le geodetiche del disco iperbolico

Le geodetiche del disco iperbolico Δ^2 sono tutti e soli i diametri e gli archi di circonferenza che incontrano ortogonalmente il bordo $\partial\Delta^2$.

Dimostrazione. Sia H^2 la falda superiore dell'iperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = -1$. Consideriamo la proiezione stereografica $f : H^2 \rightarrow \Delta^2$, $P \mapsto f(P) = (\text{retta PS}) \cap (\text{piano } z=0) = (\text{retta PS}) \cap \Delta^2$, dove $S = (0, 0, -1)$. f è una isometria tra i due modelli iperbolici, quindi le geodetiche di Δ^2 sono tutte e sole le immagini tramite f delle geodetiche di H^2 . Se γ è una geodetica di H^2 data da $H^2 \cap E$, dove E è un piano contenente l'asse z , allora la sua proiezione $f(\gamma)$ su Δ^2 è chiaramente un diametro. Negli altri casi si ottengono invece archi di circonferenza che incontrano ortogonalmente $\partial\Delta^2$. \square

Il risultato dell'Esempio 7.21 vale anche per il disco iperbolico Δ^n .

Osservazione 7.22. Nel modello iperbolico proiettivo (o modello di Klein) sul disco Δ^n , le geodetiche sono segmenti di retta. Infatti, esse si ottengono

come immagini delle geodetiche di H^n mediante la φ_{n+1} (cfr. Osservazione 4.27). Nel modello iperbolico di Poincaré sulla semisfera \mathbb{S}_+^n , le geodetiche sono archi di circonferenza tracciati su \mathbb{S}_+^n che incontrano ortogonalmente $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\Delta^n$. Infatti, esse si ottengono come controimmagini delle geodetiche di Δ^n mediante la proiezione stereografica ψ (cfr. Osservazione 4.27).

7.2 Esponenziale e geodetiche minimali

Sia (M, g) una varietà riemanniana. In questa sezione studieremo l'esponenziale riemanniana e la questione: "dati due punti p e q di M , esiste una geodetica minimale che li congiunge?"

Definizione 7.23. Una geodetica $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ congiungente due punti p, q , si dice *geodetica minimale* se

$$L(\gamma) = d(p, q), \text{ cioè se } L(\gamma) \leq L(\sigma) \quad \forall \sigma \in C(p, q).$$

In generale, come vedremo, solo localmente le geodetiche hanno la proprietà di essere minimali. Vediamo ora con degli esempi le diverse situazioni che si possono presentare.

Esempio 7.24. Sia M lo spazio euclideo \mathbb{R}^n . Si verifica facilmente che: tra tutte le curve che congiungono due punti $p, q \in \mathbb{R}^n$, il segmento di retta $\gamma(t) = (1-t)p + tq$, $t \in [0, 1]$, è quello che realizza la minima distanza.

Esempio 7.25. La sfera canonica \mathbb{S}^n e lo spazio iperbolico \mathbb{R}_+^n , come vedremo nel seguito di questa sezione, sono varietà riemanniane geodeticamente complete e quindi, per il Teorema di Hopf-Rinow (cfr. Teorema 7.50) comunque prendiamo due punti esiste sempre una geodetica minimale che li congiunge. Se $p, q \in \mathbb{S}^n$ non sono antipodali, cioè $q \neq -p$, allora esiste un'unica geodetica minimale γ che li congiunge. Se $p, q \in \mathbb{S}^n$ sono antipodali, esistono infinite geodetiche minimali che li congiungono. Nel caso dello spazio iperbolico \mathbb{R}_+^n , comunque si considerano due punti distinti esiste un'unica geodetica minimale che li congiunge.

Esempio 7.26. Sia $(M, g) = (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, g_0)$. Se $p = (1, 0)$ e $q = (-1, 0)$, allora non esiste una geodetica che li congiunge.

Esempio 7.27. Sia $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ un cilindro circolare retto munito della metrica canonica g . Poiché il rivestimento $F : (\mathbb{R}^2, g_0) \rightarrow (M, g)$, $(\vartheta, \varphi) \mapsto (e^{i\vartheta}, \varphi)$ è riemanniano, le geodetiche di M sono le rette generatrici, le circonferenze e le eliche. Se p, q appartengono alla stessa circonferenza, allora esistono due archi di geodetica che li congiungono di cui uno minimale. Se p, q non appartengono alla stessa circonferenza, verifichiamo che esistono infinite geodetiche che li congiungono le cui lunghezze non sono uguali. L'isometria locale F sviluppa il cilindro sul piano (cfr. Figura 7.6). Poniamo $F(0, 0) = p$ e $F(\vartheta_0, \varphi_0) = q$ con $\vartheta_0 \neq 0$, quindi p, q non appartenenti alla stessa generatrice.

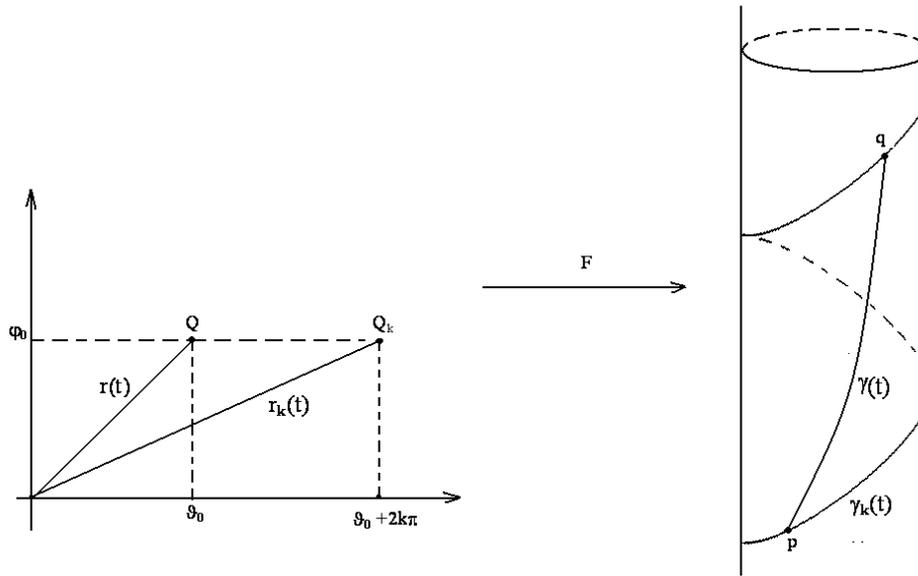


Figura 7.6: Le geodetiche del cilindro.

Se $r(t)$ è il segmento \overline{OQ} , $Q(\vartheta_0, \varphi_0)$, l'elica $\gamma(t) = F(r(t))$ è una geodetica che congiunge p e q . Se consideriamo $Q_k = (\vartheta_0 + 2k\pi, \varphi_0)$, $k \in \mathbb{Z}$, e $r_k(t)$ è il segmento $\overline{OQ_k}$, allora $\gamma_k(t) = F(r_k(t))$ è una geodetica che congiunge, per ogni k , gli stessi punti. La geodetica minimale è l'arco di elica che corrisponde al segmento \overline{OQ} con $Q(\vartheta_0, \varphi_0)$, $0 < \vartheta_0 < 2\pi$. In particolare, se p, q appartengono alla stessa generatrice, vale il discorso di prima: $F(\vartheta_0, \varphi_0) = p$, $F(\vartheta_0 + 2k\pi, \varphi_1) = F(\vartheta_0, \varphi_1) = q$, e la geodetica minimale è il segmento di generatrice che congiunge p e q .

L'applicazione esponenziale (riemanniana)

Sia (M, g) una varietà riemanniana. Nel seguito di questa sezione con $\| \cdot \|$ denoteremo, salvo avviso contrario, la norma rispetto alla metrica riemanniana g . Sia $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ il campo vettoriale flusso geodetico definito nella Appendice C. Fissato $p_0 \in M$, e quindi $z_0 \in TM$, $z_0 = (p_0, V_0)$, $V_0 = 0 \in T_{p_0}M$, applicando il Teorema 2.35 al campo di vettori ξ , si ha che esiste un intorno aperto \tilde{U} di z_0 che possiamo pensare del tipo $\tilde{U} = U \times B(0, \delta)$, dove U è un intorno aperto di p_0 in M e $B(0, \delta) = \{V \in T_{p_0}M : \|V\| < \delta\}$, ed esiste un $\epsilon > 0$ tale che per ogni $z \in \tilde{U}$, $z = (p, V)$, esiste un'unica curva $\tilde{\gamma}_z$ (curva integrale di ξ con inizio in z):

$$\tilde{\gamma}_z : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow TM, t \mapsto \tilde{\gamma}_z(t), \text{ con } \tilde{\gamma}_z(0) = z \text{ e } \dot{\tilde{\gamma}}_z(t) = \xi_{\tilde{\gamma}_z(t)}.$$

Siccome ξ è il flusso geodetico, $\tilde{\gamma}_z(t)$ è del tipo $\tilde{\gamma}_z(t) = (\gamma_z(t), \dot{\gamma}_z(t))$ con $\gamma_z(t)$ curva geodetica di M tale che $\gamma_z(0) = p$ e $\dot{\gamma}_z(0) = V$ (cioè, $\tilde{\gamma}_z(0) = z$).

Ricapitolando, possiamo descrivere il risultato ottenuto con la seguente proposizione.

Proposizione 7.28. *Per ogni fissato $p_0 \in M$, esistono un intorno aperto U di p_0 , un $\delta > 0$ e un $\epsilon > 0$ tali che per ogni $p \in U$ e per ogni $V \in T_p M$, $\|V\| < \delta$, esiste un'unica curva geodetica $\gamma_{p,V}(t)$, definita per $|t| < \epsilon$, con $\gamma_{p,V}(0) = p$ e $\dot{\gamma}_{p,V}(0) = V$.*

Consideriamo la geodetica $\gamma_{p,V}(t)$, definita per $|t| < \epsilon$. Se λ è una costante $\neq 0$, la curva $\sigma(t) := \gamma_{p,V}(\lambda t)$, $|\lambda t| < \epsilon$, è una geodetica e verifica le condizioni:

$$\sigma(0) = \gamma_{p,V}(0) = p \quad \text{e} \quad \dot{\sigma}(0) = \lambda \dot{\gamma}_{p,V}(0) = \lambda V.$$

Dunque, per l'unicità delle geodetiche con le fissate condizioni iniziali, deve essere $\sigma(t) = \gamma_{p,\lambda V}(t)$ con $|t| < \frac{\epsilon}{|\lambda|}$. Pertanto, abbiamo la seguente proprietà di omogeneità:

$$\gamma_{p,\lambda V}(t) = \gamma_{p,V}(\lambda t) \quad \text{con} \quad |t| < \frac{\epsilon}{|\lambda|}. \quad (7.2)$$

Quindi è possibile diminuire la velocità di una geodetica aumentando l'intervallo di tempo (cioè l'intervallo di t), e viceversa. In particolare, se $|\lambda| < 1$, allora anche $\gamma_{p,\lambda V}(t)$ è definita per $|t| < \epsilon$. Applicando la (7.2) per $\lambda = \frac{\epsilon}{2}$, con $\|V\| < \delta$ (dove δ è definito dalla Proposizione 7.28), si ha che

$$\gamma_{p,\frac{\epsilon}{2}V}(t) \text{ è definita per } |t| < \epsilon/(\epsilon/2) = 2, \text{ dove } \|(\epsilon/2)V\| < (\epsilon\delta)/2.$$

Di conseguenza, per ogni $W \in T_p M$, $\|W\| < \delta_0$, prendendo $\delta_0 < \epsilon\delta/2$, si ottiene che la geodetica $\gamma_{p,W}(t)$ è definita per $|t| < 2$. Pertanto, abbiamo la seguente proposizione.

Proposizione 7.29. *Per ogni $p_0 \in M$ esiste un intorno aperto U di p_0 e un $\delta_0 > 0$ tale che per ogni $p \in U$ e per ogni $W \in T_p M$, $\|W\| < \delta_0$, la geodetica $\gamma_{p,W}(t)$ è definita per $|t| < 2$ e quindi, in particolare, per $t = 1$.*

Nel seguito, quando il punto p è fissato, la geodetica $\gamma_{p,V}(t)$ la denoteremo semplicemente con $\gamma_V(t)$. La Proposizione 7.29 permette di introdurre la seguente definizione.

Definizione 7.30. *L'applicazione esponenziale in p è l'applicazione*

$$\begin{aligned} \exp_p : B(0, \delta_0) &= \{W \in T_p M : \|W\| < \delta_0\} \subset T_p M \rightarrow M, \\ \exp_p : W &\mapsto \exp_p W = \gamma_W(1). \end{aligned}$$

Si noti che \exp_p è definita, in generale, solo su un intorno del vettore nullo, e $\exp_p 0 = p$. Se \exp_p è definita in $W \in B(0, \delta_0)$, allora $\gamma_W(t)$ è definita per $t \in [-1, 1]$ e

$$\gamma_W(t) = \gamma_{tW}(1) = \exp_p(tW) \quad \forall t \in [-1, 1]. \quad (7.3)$$

Geometricamente, $\exp_p V = \gamma_V(1)$ è un punto di M che si trova sulla geodetica $\gamma_V(t)$ a distanza $\|V\|$ dal punto p nel verso di V . Infatti, siccome $\|\dot{\gamma}_V(t)\| = \text{cost.}$, abbiamo

$$L(\gamma_V|_{[0,1]}) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}_V(t)\| dt = \int_0^1 \|\dot{\gamma}_V(0)\| dt = \int_0^1 \|V\| dt = \|V\|.$$

In particolare, preso un r con $0 < r < \delta_0$, per ogni $V \in T_p M$, $\|V\| = 1$, si ha $\|tV\| \leq r$ per $|t| \leq r$, quindi:

la geodetica $\gamma_V(t) := \gamma_{tV}(1)$ è certamente definita per $|t| \leq r$.

Inoltre, $\gamma_V(t)$, $|t| \leq r < \delta_0$, è parametrizzata con l'ascissa curvilinea. La seguente proposizione evidenzia la naturalità dell'applicazione esponenziale.

Proposizione 7.31. *L'applicazione esponenziale commuta con le isometrie (locali). Più precisamente, se $f : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ è un'isometria (locale), allora*

$$f \circ \exp_p = \exp_{f(p)} \circ f_{*p} \quad \text{su } B(0, \delta_0) \subset T_p M.$$

Dimostrazione. Sia $V \in B(0, \delta_0)$ e $\gamma_V(t)$ la geodetica definita per $t \in [0, 1]$, con $\gamma_V(0) = p$ e $\dot{\gamma}_V(0) = V$. Poiché f è un'isometria locale, la curva $\tilde{\gamma}(t) = f \circ \gamma_V(t)$ è una geodetica, inoltre $\tilde{\gamma}(0) = f(\gamma_V(0)) = f(p)$ e $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = f_{*p} \dot{\gamma}_V(0) = f_{*p} V$. Pertanto, $f \circ \gamma_V(t) = \gamma_{f_{*p} V}(t)$ per ogni $t \in [0, 1]$, e quindi: $f(\exp_p V) = f(\gamma_V(1)) = \gamma_{f_{*p} V}(1) = \exp_{f(p)} f_{*p} V$. \square

Esempio 7.32. Consideriamo il gruppo di Lie $SO(n)$ con una metrica riemanniana bi-invariante (cfr. Esempio 5.19). In tal caso, i campi invarianti a sinistra sono geodetici, cioè $\nabla_X X = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{so}(n)$. Di conseguenza, $\phi_X(t) = e^{tX}$, le curve integrali uscenti da I dei campi di vettori invarianti a sinistra, sono curve geodetiche (cfr. Esempio 6.40) e quindi l'applicazione esponenziale riemanniana

$$\exp_I : T_I SO(n) = \mathfrak{so}(n) \rightarrow SO(n), X \mapsto \gamma_X(1) = \phi_X(1) = e^X,$$

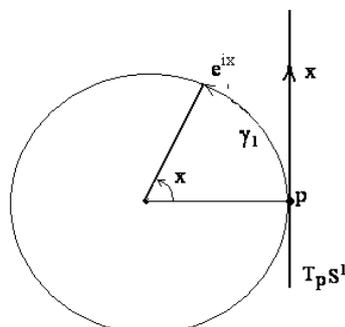
è l'usuale esponenziale di matrici (cfr. Sezione 3.5). Più in generale, se G è un gruppo di Lie compatto munito di una metrica bi-invariante, si ha che i sottogruppi ad un parametro $\phi_X(t)$, $X \in \mathfrak{g}$, sono le curve geodetiche uscenti dall'elemento neutro di G (cfr. (6.10)). Quindi, in questo caso, l'esponenziale del gruppo di Lie G coincide con l'esponenziale riemanniana.

Esempio 7.33. Nel caso dello spazio euclideo (\mathbb{R}^n, g_0) , per $V \in T_p \mathbb{R}^n$, la geodetica $\gamma_V(t) = p + tV$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$. Quindi,

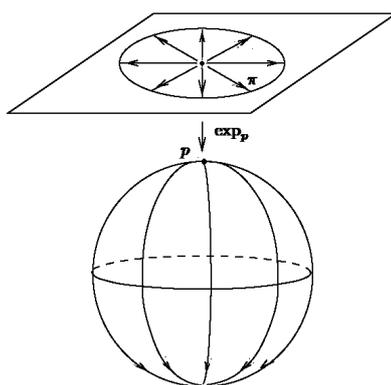
$$\exp_p : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, V \mapsto p + V.$$

Esempio 7.34. Nel caso di $M = \mathbb{S}^1$, per $x \in T_p \mathbb{S}^1$, la geodetica $\gamma_x(t)$, $t \in [0, 1]$, è l'arco di circonferenza γ_1 uscente da p , nel verso definito da x , con $L(\gamma_1) = \|x\|$ (cfr. Figura 7.7). Siccome x si può pensare come la misura in radianti di un angolo, si ha:

$$\exp_p : T_p \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1, x \mapsto \gamma_x(1) = e^{ix}.$$

Figura 7.7: \exp su \mathbb{S}^1

Esempio 7.35. Nel caso della sfera \mathbb{S}^n , l'applicazione esponenziale, in un fissato punto p della stessa sfera, è definita su tutto lo spazio tangente $T_p \mathbb{S}^n$

Figura 7.8: \exp su \mathbb{S}^n

e applica la palla aperta $B(0, \pi)$ di centro l'origine e raggio π di $T_p \mathbb{S}^n$ iniettivamente su $\mathbb{S}^n \setminus \{q\}$, dove q è il punto antipodale di p . Inoltre, \exp_p applica il bordo di $B(0, \pi)$ nel punto q (cfr. Figura 7.8).

Tornando al caso di una arbitraria (M, g) , fissato $z_0 \in TM$, $z_0 = (p_0, V_0)$, $p_0 \in M$ e $V_0 = 0 \in T_{p_0} M$, sempre dal Teorema 2.35 applicato al campo di vettori ξ , si ha che l'applicazione

$$\Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times \tilde{U} \rightarrow TM, (t, z) \mapsto \Phi(t, z) = \tilde{\gamma}_z(t),$$

è differenziabile. In particolare, prendendo l'aperto \tilde{U} definito dalla Proposizione 7.29, l'applicazione

$$\Phi_1 : \tilde{U} \rightarrow TM, z \mapsto \tilde{\gamma}_z(1) = \Phi(1, z) = \tilde{\gamma}_z(1) = (\gamma_z(1), \dot{\gamma}_z(1)),$$

è differenziabile. Di conseguenza, indicata con f_1 l'applicazione

$$\{p\} \times B(0, \delta_0) \rightarrow \tilde{U} = U \times B(0, \delta_0), (p, V) \mapsto (p, V),$$

e con $\pi : TM \rightarrow M$ la proiezione, la seguente applicazione

$$\pi \circ \Phi_1 \circ f_1 : \{p\} \times B(0, \delta_0) \rightarrow M, (p, V) \mapsto \gamma_{p,V}(1),$$

è differenziabile e quindi l'applicazione \exp_p è differenziabile. In generale, l'applicazione esponenziale in un fissato punto $p \in M$ definisce solo un diffeomorfismo locale.

Teorema 7.36. *Per ogni $p \in M$ esiste un intorno aperto $B(0)$ dell'origine in T_pM e un intorno aperto $U(p)$ di p in M per cui*

$$\exp_p : B(0) \rightarrow U(p), V \mapsto \gamma_V(1), \text{ è un diffeomorfismo.}$$

Dimostrazione. Sappiamo che $\exp_p : B(0, \delta_0) \subset T_pM \rightarrow M$. Indichiamo con f l'applicazione esponenziale \exp_p e consideriamo il suo differenziale nell'origine $f_* : T_0(T_pM) \rightarrow T_pM$. Per ogni fissato V in $T_0(T_pM)$, che possiamo identificare con T_pM , consideriamo la curva differenziabile $\sigma(t) = tV$ di T_pM . Siccome $\sigma(0) = 0$ e $\dot{\sigma}(0) = V$, abbiamo

$$f_*(V) = f_*(\dot{\sigma}(0)) = \frac{d}{dt}(f \circ \sigma)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma_V(t))|_{t=0} = \dot{\gamma}_V(0) = V.$$

Dunque, f_* è l'identità e quindi, applicando il teorema sulle funzioni inverse, esiste un intorno $B(0)$ dell'origine in T_pM diffeomorfo, mediante l'applicazione \exp_p , a un intorno $U(p)$ di p in M . \square

L'aperto U di M definito nel Teorema 7.36 è detto *intorno normale* del punto p . In particolare, prendendo l'aperto $B(0)$ del tipo $B(0, r)$, l'intorno normale corrispondente $U = \exp_p B(0, r)$ viene detto *palla geodetica* di M centrata in p , in tal caso le geodetiche di U uscenti da p sono dette **geodetiche radiali**. Per $\delta < r$, l'ipersuperficie $S(p, \delta) = \exp_p(\partial \bar{B}(0, \delta))$, è detta *sfera geodetica* di M centrata in p .

Nel caso dello spazio euclideo, e analogamente per lo spazio di Minkowski, un'isometria è completamente determinata dal suo valore in punto e dal suo differenziale nello stesso punto. In altre parole, se due isometrie e i loro differenziali coincidono in un punto, allora le due isometrie coincidono su tutto lo spazio. Tale risultato vale più in generale per un'arbitraria varietà riemanniana. Infatti, vale la seguente

Proposizione 7.37. *Siano f_1, f_2 due isometrie di una varietà riemanniana che soddisfano la seguente proprietà: $f_1(p_0) = f_2(p_0)$ e $(f_{1*})_{p_0} = (f_{2*})_{p_0}$. Allora $f_1 = f_2$.*

Dimostrazione. 1) Intanto proviamo che f_1, f_2 coincidono in un intorno normale $U = \exp_{p_0} B(0)$ del punto p_0 . Siano p un punto di U e $V \in B(0)$ tali che $p = \exp_{p_0} V$. La geodetica $\gamma_V(t)$, definita per $t \in [0, 1]$, soddisfa $\gamma_V(0) = p_0, \gamma_V(1) = p$ e $\dot{\gamma}_V(0) = V$. Siccome f_1, f_2 sono isometrie, le curve $\gamma_1(t) = f_1(\gamma_V(t))$ e $\gamma_2(t) = f_2(\gamma_V(t))$ sono geodetiche, e soddisfano (usando le ipotesi della proposizione) $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ e $\dot{\gamma}_1(0) = \dot{\gamma}_2(0)$. Pertanto, applicando il teorema di esistenza e unicità delle curve geodetiche con le fissate condizioni iniziali, si ha $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ per ogni $t \in [0, 1]$, e in particolare si ha $f_1(p) = f_2(p)$ con p arbitrario punto di U .

2) Sia ora p un arbitrario punto di M e sia $\sigma(t)$ una curva differenziabile a tratti che congiunge p_0 a p . Poniamo $I = \{t \in [0, 1] : f_1(\sigma(t)) = f_2(\sigma(t))\}$. Applicando 1), si ottiene facilmente che $\text{Sup} I = 1$ e quindi $f_1(p) = f_2(p)$. \square

Osservazione 7.38. Riferimento geodetico

Sia U una palla geodetica centrata in p_0 . Per ogni fissato vettore tangente $V \in T_{p_0} M$ esiste $X \in \mathfrak{X}(U)$ tale che

$$X(p_0) = V \quad \text{e} \quad (\nabla X)_{p_0} = 0.$$

Basta definire, per ogni $p \in U$, $X(p) = \tau_\gamma(V)$, dove $\gamma(t)$ è la geodetica radiale congiungente p_0 a p , e $\tau_\gamma : T_{p_0} M \rightarrow T_p M$ è lo spostamento parallelo lungo γ . Allora, per come definito X , $X(p_0) = V$ e per ogni $Y \in \mathfrak{X}(M)$:

$$(\nabla_Y X)_{p_0} = \nabla_{Y_{p_0}} X = \nabla_{\dot{\gamma}(0)} X = \frac{DX}{dt}(0) = 0,$$

dove $\gamma(t)$, $-\epsilon < t < \epsilon$, è la geodetica uscente da p_0 con $\dot{\gamma}(0) = Y_{p_0}$. In modo analogo, una base ortonormale $\{e_i\}$ di $T_{p_0} M$ si può estendere a una base ortonormale $\{E_i\}$ di $\mathfrak{X}(U)$. E_i è ottenuto da e_i come X da $X(p_0)$, e quindi

$$(\nabla_{E_i} E_j)_{p_0} = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Siccome ∇ è simmetrica, abbiamo anche

$$[E_i, E_j]_{p_0} = (\nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_j} E_i)_{p_0} = 0.$$

Inoltre, $g(E_i, E_j) = \delta_{ij}$ in quanto $\{e_i\}$ è una base ortonormale di $T_{p_0} M$ e lo spostamento parallelo è una isometria. La base ortonormale $\{E_i\}$ è detta *riferimento geodetico* (o *adattato*) in p_0 .

Raggio di iniettività

Il raggio di iniettività di un fissato punto $p \in M$ è definito da

$$i(p) := \sup \{r > 0 : \exp_p \text{ è definita su } B(0, r) \subset T_p M \text{ ed è iniettiva}\}.$$

Il raggio di iniettività di M è definito da

$$i(M) := \inf \{i(p) : p \in M\}.$$

Ad esempio, il raggio di iniettività della sfera \mathbb{S}^n è π . Infatti, l'applicazione esponenziale in un fissato punto $p \in \mathbb{S}^n$ applica la palla aperta di centro l'origine e raggio π di $T_p\mathbb{S}^n$ iniettivamente sul complementare del punto antipodale di p . Nel caso dello spazio iperbolico \mathbb{R}_+^n , per ogni fissato punto $p \in \mathbb{R}_+^n$, l'applicazione esponenziale definisce un diffeomorfismo tra lo spazio tangente $T_p\mathbb{R}_+^n$ e \mathbb{R}_+^n .

Proprietà di geodetiche radiali

Sia $f : N \rightarrow M$ un'applicazione differenziabile tra due varietà. Un *campo di vettori lungo f* è un'applicazione

$$V : N \rightarrow f^{-1}(TM) = \dot{\sqcup}_{p \in N} T_{f(p)}M, \quad p \mapsto V(p) \in T_{f(p)}M.$$

Consideriamo il caso particolare in cui $N = A$ è un aperto connesso di \mathbb{R}^2 ed $f = u : A \rightarrow M, (t, s) \mapsto u(t, s)$. u si può pensare come una *superficie parametrizzata* di M . Localmente, se (x_i) è un sistema di coordinate locali definito su M , abbiamo

$$V(t, s) = \sum V^i(t, s) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{u(t, s)}.$$

Sia V un campo differenziabile di vettori definito lungo u , ossia le funzioni componenti $V^i(t, s)$ sono differenziabili. Le restrizioni di V alle curve

$$u_t : s \mapsto u_t(s) = u(t, s) \quad \text{e} \quad u_s : t \mapsto u_s(t) = u(t, s)$$

definiscono campi differenziabili di vettori lungo queste curve. Denotiamo con $\frac{D}{dt}$ la derivata covariante lungo la curva $u_s(t)$, con $\frac{D}{ds}$ la derivata covariante lungo la curva $u_t(s)$, con $\frac{\partial u}{\partial t}$ il campo di vettori tangenti lungo la curva $u_s(t)$ e con $\frac{\partial u}{\partial s}$ il campo di vettori tangenti lungo la curva $u_t(s)$. Risulta

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{(t_0, s_0)} = \left(\frac{d}{dt} u(t, s_0) \right)_{t=t_0} \in T_{u(t_0, s_0)}M$$

e

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_{(t_0, s_0)} = \left(\frac{d}{ds} u(t_0, s) \right)_{s=s_0} \in T_{u(t_0, s_0)}M.$$

Quindi,

$$\frac{\partial u}{\partial t} : (t, s) \mapsto \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{(t, s)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial s} : (t, s) \mapsto \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_{(t, s)}$$

sono campi (differenziabili) di vettori lungo u .

Lemma 7.39. *Sia $u : A \rightarrow M, (t, s) \mapsto u(t, s)$, una superficie parametrizzata. Allora,*

$$\frac{D}{dt} \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{D}{ds} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (7.4)$$

Dimostrazione. Sia (x_1, \dots, x_n) un sistema di coordinate locali. Localmente $u(t, s) = (x_1(t, s), \dots, x_n(t, s))$, quindi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i(t, s)}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{u(t, s)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i(t, s)}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{u(t, s)}.$$

Applicando la (6.4) ai campi vettoriali $\frac{\partial u}{\partial s}$ e $\frac{\partial u}{\partial t}$, otteniamo

$$\frac{D}{dt} \frac{\partial u}{\partial s} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 x_k}{\partial t \partial s} + \sum_{i, j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial x_j}{\partial s} \right\} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_{u(t, s)}$$

e un'analogha formula per $\frac{D}{ds} \frac{\partial u}{\partial t}$. Poiché $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ (∇ è simmetrica), e $\frac{\partial^2 x_k}{\partial t \partial s} = \frac{\partial^2 x_k}{\partial s \partial t}$, dalla formula precedente segue la (7.4). \square

Una *variazione di una curva* $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ è un'applicazione differenziabile

$$H : [0, 1] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M, \quad (t, s) \mapsto H(t, s) = \sigma_s(t), \text{ tale che}$$

$$H(t, 0) = \sigma_0(t) = \sigma(t).$$

Lemma 7.40. *Sia $H(t, s) = \sigma_s(t)$ una variazione di una geodetica $\sigma(t)$. Se $L(s)$ denota la lunghezza della curva $\sigma_s(t)$, allora*

$$\frac{dL}{ds}(0) = g \left(\frac{\partial H}{\partial s}(1, 0), \frac{\dot{\sigma}(1)}{\|\dot{\sigma}(1)\|} \right) - g \left(\frac{\partial H}{\partial s}(0, 0), \frac{\dot{\sigma}(0)}{\|\dot{\sigma}(0)\|} \right).$$

Dimostrazione. Dalla definizione di lunghezza di curva, si ha

$$\begin{aligned} \frac{dL}{ds} &= \frac{d}{ds} L(\sigma_s(t)) = \frac{d}{ds} \int_0^1 \|\dot{\sigma}_s(t)\| dt = \int_0^1 \frac{d}{ds} \|\dot{\sigma}_s(t)\| dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2 \|\dot{\sigma}_s(t)\|} \frac{d}{ds} \|\dot{\sigma}_s(t)\|^2 dt = \int_0^1 \frac{1}{2 \|\dot{\sigma}_s(t)\|} \frac{d}{ds} g \left(\frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt. \end{aligned}$$

Tenendo presente la compatibilità della connessione di Levi-Civita ∇ con la metrica g , e il Lemma 7.39, otteniamo

$$\frac{d}{ds} g \left(\frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) = 2g \left(\frac{D}{ds} \frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) = 2g \left(\frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t} \right),$$

e la formula precedente diventa

$$\frac{dL}{ds} = \int_0^1 \frac{1}{\|\dot{\sigma}_s(t)\|} g \left(\frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt.$$

Per $s = 0$, risulta

$$\frac{dL}{ds}(0) = \int_0^1 g \left(\frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial s}(t, 0), \frac{\dot{\sigma}(t)}{\|\dot{\sigma}(t)\|} \right) dt.$$

Una primitiva dell'integrando è la funzione

$$t \mapsto g \left(\frac{\partial H}{\partial s}(t, 0), \frac{\dot{\sigma}(t)}{\|\dot{\sigma}(t)\|} \right).$$

Infatti, tenendo conto che $\sigma(t)$ è una geodetica, si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g \left(\frac{\partial H}{\partial s}(t, 0), \frac{\dot{\sigma}(t)}{\|\dot{\sigma}(t)\|} \right) &= g \left(\frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial s}(t, 0), \frac{\dot{\sigma}(t)}{\|\dot{\sigma}(t)\|} \right) \\ &\quad + g \left(\frac{\partial H}{\partial s}(t, 0), \frac{D}{dt} \frac{\dot{\sigma}(t)}{\|\dot{\sigma}(t)\|} \right) \\ &= g \left(\frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial s}(t, 0), \frac{\dot{\sigma}(t)}{\|\dot{\sigma}(t)\|} \right). \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\frac{dL}{ds}(0) = g \left(\frac{\partial H}{\partial s}(1, 0), \frac{\dot{\sigma}(1)}{\|\dot{\sigma}(1)\|} \right) - g \left(\frac{\partial H}{\partial s}(0, 0), \frac{\dot{\sigma}(0)}{\|\dot{\sigma}(0)\|} \right).$$

□

Teorema 7.41. (Lemma di Gauss) *Se U è una palla geodetica di M centrata in p , allora ogni geodetica uscente da p è ortogonale alle sfere geodetiche di U centrate in p . In altre parole, se $U = \exp_p B(0, r)$, ogni geodetica γ uscente da p incontra ortogonalmente l'ipersuperficie $\exp_p \bar{B}(0, r_0)$, $r_0 < r$.*

Dimostrazione. Sia σ una geodetica uscente da p , $\sigma(t) = \exp t X_0$, $\|X_0\| = r_0 < r$. Consideriamo una curva $X(s)$ di vettori tangenti in p , $\|X_s\| = r_0$ e con $X(0) = X_0$. Quindi, $\gamma(s) = \exp_p X(s)$ è una curva dell'ipersuperficie $\exp_p \bar{B}(0, r_0)$. L'applicazione $H(t, s) = \exp_p t X(s)$, $t \in [0, 1]$, definisce una variazione della curva geodetica $\sigma(t)$. Per ogni fissato s , la curva $\sigma_s(t) = H(t, s)$ è una geodetica di lunghezza r_0 , pertanto $L(s) = L(\sigma_s(t)) = \text{cost.}$ e quindi applicando il Lemma 7.40:

$$0 = \frac{dL}{ds}(0) = g \left(\frac{\partial H}{\partial s}(1, 0), \frac{\dot{\sigma}(1)}{\|\dot{\sigma}(1)\|} \right) - g \left(\frac{\partial H}{\partial s}(0, 0), \frac{\dot{\sigma}(0)}{\|\dot{\sigma}(0)\|} \right).$$

Siccome $H(0, s) = \exp_p 0 = p$ e $H(1, s) = \exp_p X(s) = \gamma(s)$, si ha $\frac{\partial H}{\partial s}(0, 0) = 0$ e $\frac{\partial H}{\partial s}(1, 0) = \left(\frac{d}{ds} \exp_p X(s) \right) (0) = \dot{\gamma}(0)$ e quindi otteniamo

$$g(\dot{\gamma}(0), \dot{\sigma}(1)) = 0$$

che mostra l'ortogonalità di σ con $\exp_p \bar{B}(0, r_0)$. □

Il seguente teorema esprime la minimalità delle geodetiche radiali.

Teorema 7.42. *Sia $\gamma : [0, c] \rightarrow M$ una geodetica radiale contenuta in $U = \exp_p B(0, r)$ palla geodetica centrata in $p = \gamma(0)$. Allora, per ogni $q \in \gamma([0, c])$, l'arco geodetico radiale $\gamma(p, q)$ è l'unica curva minimale che congiunge p e q .*

Dimostrazione. La metrica riemanniana g di M induce una metrica riemanniana su U , che indichiamo sempre con g . Il diffeomorfismo $\phi = \exp_p : B(0, r) \rightarrow U$ induce una metrica $\tilde{g} = \phi^*g$ sull'aperto $B(0, r)$ di $T_p M \cong \mathbb{R}^n$. Di conseguenza, $\phi : (B(0, r), \tilde{g}) \rightarrow (U, g)$ è un'isometria. Per ogni fissato $q \in \gamma([0, c])$, l'arco geodetico $\gamma = \gamma(p, q)$ si può esprimere, per come costruita l'applicazione esponenziale, con

$$\gamma(t) = \gamma_W(t) = \exp_p tW, \quad t \in [0, 1], \quad W \in B(0, r), \quad L(\gamma) = \|W\| = \delta < r.$$

Sia $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$, con $\sigma(0) = p$ e $\sigma(1) = q$, un arco di curva differenziabile a tratti. Proviamo che:

$$L(\sigma) \geq L(\gamma).$$

Sia $t = a_0 \in [0, 1]$ l'ultimo t per cui $\sigma(a_0) = p$ e sia b_0 il primo $t \in [0, 1]$ per cui $\sigma(b_0) \in S(p, \delta)$ sfera geodetica di centro p e raggio δ (cfr. Figura 7.9).

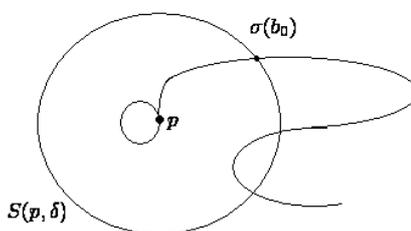


Figura 7.9: Curva uscente da p .

Allora, $\sigma([a_0, b_0]) \subset U$. La curva di $B(0, r)$ (aperto di $T_p M \cong \mathbb{R}^n$) $\tilde{\gamma} = \phi^{-1} \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow B(0, r)$, $t \mapsto tW$, congiunge $\tilde{\gamma}(0) = 0$ con $\tilde{\gamma}(1) = W$. Inoltre, $\tilde{\sigma} = \phi^{-1} \circ \sigma : [a_0, b_0] \rightarrow B(0, r)$ è una curva uscente da $\tilde{\sigma}(a_0) = \phi^{-1}(p) = 0$ con $\tilde{\sigma}(b_0) \in S(0, \delta)$ e quindi $\|\tilde{\sigma}(b_0)\| = \delta = \|W\|$. Poiché ϕ è una isometria, $L(\tilde{\sigma}) = L(\sigma) = \|W\|$ e $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$. La curva $\tilde{\sigma}$ si può pensare come un campo di vettori lungo se stessa, consideriamo quindi il campo radiale unitario (per $t > a_0$)

$$\tilde{\sigma}_{rad} : t \mapsto \left(\tilde{\sigma}(t), \frac{\dot{\tilde{\sigma}}(t)}{\|\dot{\tilde{\sigma}}(t)\|} \right).$$

Per ogni $t \in [a_0, b_0]$, escludendo al più un numero finito di punti, possiamo decomporre il campo tangente $\dot{\tilde{\sigma}}(t)$ come:

$$\dot{\tilde{\sigma}}(t) = \dot{\tilde{\sigma}}_{rad}(t) + N_{\tilde{\sigma}}(t),$$

dove $\dot{\tilde{\sigma}}_{rad}(t)$ denota la componente radiale e $N_{\tilde{\sigma}}(t)$ denota la componente normale al campo radiale (cfr. Figura 7.10).

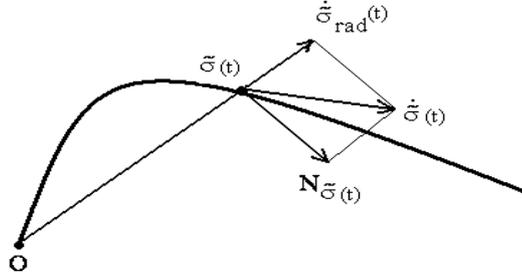


Figura 7.10: Decomposizione del vettore tangente $\dot{\tilde{\sigma}}(t)$.

La componente radiale è definita dal campo vettoriale

$$\dot{\tilde{\sigma}}_{rad}(t) : t \mapsto \left(\tilde{\sigma}(t), \frac{\tilde{g}(\dot{\tilde{\sigma}}(t), \tilde{\sigma}(t))}{\|\tilde{\sigma}(t)\|^2} \tilde{\sigma}(t) \right).$$

Quindi:

$$\|\dot{\tilde{\sigma}}_{rad}(t)\| = \frac{|\tilde{g}(\dot{\tilde{\sigma}}(t), \tilde{\sigma}(t))|}{\|\tilde{\sigma}(t)\|}, \quad (7.5)$$

e applicando la disuguaglianza di Schwarz:

$$|\tilde{g}(\dot{\tilde{\sigma}}(t), \tilde{\sigma}(t))| \leq \|\dot{\tilde{\sigma}}(t)\| \|\tilde{\sigma}(t)\|,$$

si ha

$$\|\dot{\tilde{\sigma}}_{rad}(t)\| \leq \|\dot{\tilde{\sigma}}(t)\|. \quad (7.6)$$

Inoltre,

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{\sigma}(t)\| = \frac{1}{2\|\tilde{\sigma}(t)\|} \frac{d}{dt} \tilde{g}(\tilde{\sigma}(t), \tilde{\sigma}(t)) = \frac{1}{\|\tilde{\sigma}(t)\|} \tilde{g}(\dot{\tilde{\sigma}}(t), \tilde{\sigma}(t)). \quad (7.7)$$

Applicando nell'ordine le identità (7.6), (7.5) e (7.7), si ha

$$\begin{aligned} L(\sigma) &\geq L(\sigma|_{[a_0, b_0]}) = L(\tilde{\sigma}) = \int_{a_0}^{b_0} \|\dot{\tilde{\sigma}}(t)\| dt \\ &\geq \int_{a_0}^{b_0} \|\dot{\tilde{\sigma}}_{rad}(t)\| dt = \int_{a_0}^{b_0} \frac{|\tilde{g}(\dot{\tilde{\sigma}}(t), \tilde{\sigma}(t))|}{\|\tilde{\sigma}(t)\|} dt \\ &= \int_{a_0}^{b_0} \left| \frac{d}{dt} \|\tilde{\sigma}(t)\| \right| dt \geq \int_{a_0}^{b_0} \left(\frac{d}{dt} \|\tilde{\sigma}(t)\| \right) dt \\ &= \|\tilde{\sigma}(b_0)\| - \|\tilde{\sigma}(a_0)\| = \|W\| = L(\gamma). \end{aligned}$$

Ora assumiamo che $L(\sigma) = L(\gamma)$ e proviamo che $\sigma([0, 1]) = \gamma([0, 1])$. Assumendo $L(\sigma) = L(\gamma)$, tutte le precedenti disuguaglianze diventano uguaglianze. La prima uguaglianza $L(\sigma) = L(\sigma|_{[a_0, b_0]})$ implica che $a_0 = 0$ e $b_0 = 1$, altrimenti gli archi di σ prima di $t = a_0$ e dopo $t = b_0$ dovrebbero contribuire con lunghezze positive. In particolare, $\tilde{\sigma} = \phi^{-1} \circ \sigma$ è una curva di $B(0, r)$ che congiunge $\tilde{\sigma}(0) = 0$ con $\tilde{\sigma}(1) = \phi^{-1}(\sigma(1)) = \phi^{-1}(q) = W$. La seconda uguaglianza implica

$$\|\dot{\tilde{\sigma}}(t)\| = \|\dot{\tilde{\sigma}}_{rad}(t)\|. \quad (7.8)$$

Siccome

$$\|\dot{\tilde{\sigma}}(t)\|^2 = \|\dot{\tilde{\sigma}}_{rad}(t)\|^2 + \|N_{\tilde{\sigma}}(t)\|^2,$$

la (7.8) implica che la componente normale $N_{\tilde{\sigma}}(t) = 0$. Quindi, il campo vettoriale $\dot{\tilde{\sigma}}(t)$ ha soltanto componente radiale e di conseguenza $\tilde{\sigma}(t)$ sarà del tipo

$$\tilde{\sigma}(t) = r(t)V_0 \quad \text{con} \quad \|V_0\| = 1.$$

In tal caso $|\frac{d}{dt} \|\tilde{\sigma}(t)\|| = |r'(t)| \geq r'(t)$ e quindi la terza disuguaglianza (diventando uguaglianza) implica $r'(t) = |r'(t)| > 0$. D'altronde $\tilde{\sigma}(1) = \tilde{\gamma}(1) = W$ implica $V_0 = \frac{W}{\|W\|}$. Pertanto

$$\tilde{\sigma}(t) = (r(t)/\|W\|)W \quad \text{con} \quad r'(t) > 0,$$

ossia $\tilde{\sigma}(t)$ è ottenuta da $\tilde{\gamma}(t)$ mediante una riparametrizzazione crescente (in generale non lineare) e quindi $\tilde{\sigma}([0, 1]) = \tilde{\gamma}([0, 1])$, da cui $\sigma([0, 1]) = \gamma([0, 1])$. \square

Dal Teorema 7.42 segue che la palla geodetica $\exp_p B(0, r)$ e la sfera geodetica $\exp_p \partial B(0, \delta)$, $\delta < r$, si possono esprimere in termini di distanza riemanniana:

$$\exp_p B(0, r) = B(p, r) := \{q \in M : d(p, q) < r\},$$

$$\exp_p \partial B(0, \delta) = S(p, \delta) := \{q \in M : d(p, q) = \delta\}.$$

Infatti, se $q \in \exp_p B(0, r)$, esiste $V \in B(0, r)$, $\exp_p V = q$, $\|V\| = \delta < r$, e la geodetica radiale $\gamma_V(t)$, definita per $t \in [0, 1]$, è la geodetica minimale che congiunge p a q . Quindi

$$d(p, q) = L(\gamma_V|_{[0, 1]}) = \|V\| = \delta < r \Rightarrow q \in B(p, r).$$

Viceversa, se $q \in B(p, r)$, allora esiste una curva σ da p a q di lunghezza minore di r ; d'altronde le curve (con inizio in p) che escono fuori da $\exp_p B(0, r)$ devono avere lunghezza almeno uguale a r , per cui $q \in \exp_p B(0, r)$.

Sia γ una curva geodetica di M e siano p_1, p_2 due punti nel sostegno di γ . Se p_2 è abbastanza vicino a p_1 , in altre parole se p_2 è contenuto in una palla geodetica centrata in p_1 , allora l'arco geodetico $\gamma(p_1, p_2)$ è radiale e quindi, per il Teorema 7.42, è l'unica curva minimale che congiunge p_1 e p_2 . Pertanto, vale la seguente

Proposizione 7.43. *Ogni curva geodetica di (M, g) è localmente minimale.*

Il seguente teorema fornisce l'esistenza di intorno totalmente normali.

Teorema 7.44. *Per ogni $p_0 \in M$ esiste un intorno aperto W di p_0 ed esiste un $\delta_1 > 0$ tale che per ogni $p \in W$, l'applicazione $\exp_p : B(0, \delta_1) \rightarrow B(p, \delta_1)$ è un diffeomorfismo con $W \subset B(p, \delta_1)$.*

Dimostrazione. Siano U e δ_0 come nella Proposizione 7.29. Possiamo quindi considerare l'applicazione

$$F : U \times B(0, \delta_0) \rightarrow M \times M, (p, V) \mapsto (p, \exp_p V).$$

In particolare, $F(p, 0) = (p, p)$. Siccome il differenziale $(\exp_p)_{*0}$ è l'identità (cfr. dimostrazione della Proposizione 7.36), il differenziale $(F_*)_{(p,0)}$ è rappresentato dalla matrice jacobiana

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ * & I \end{pmatrix}.$$

Allora, fissato $p_0 \in M$, per il teorema delle funzioni inverse si ha che F è un diffeomorfismo in un intorno di $(p_0, 0)$. Questo significa che esistono U' intorno di p_0 , $U' \subset U$, $\delta_1 > 0$, $\delta_1 < \delta_0$, ed esiste W' intorno di (p, p) in $M \times M$, per cui

$$F : U' \times B(0, \delta_1) \rightarrow W'$$

è un diffeomorfismo. Scegliendo W intorno di p_0 tale che $W \times W \subset W'$, allora W e δ_1 soddisfano la proprietà del teorema. Infatti, per $p \in W$, siccome F è un diffeomorfismo su $U' \times B(0, \delta_1)$ abbiamo $F(\{p\} \times B(0, \delta_1)) \supset \{p\} \times W$ e quindi dalla definizione di F segue che $W \subset B(p, \delta_1) = \exp_p B(0, \delta_1)$. \square

Il Teorema 7.44 implica che W è intorno normale di ogni suo punto, e tale intorno viene detto *intorno totalmente normale*.

Osservazione 7.45. Per ogni $p_1, p_2 \in W$ esiste un'unica geodetica minimale, di lunghezza minore di δ_1 , congiungente p_1 e p_2 . Basta osservare, applicando il Teorema 7.44, che se $p_1, p_2 \in W$, allora $p_2 \in B(p_1, \delta_1)$ palla geodetica centrata in p_1 , e quindi, applicando il Teorema 7.42, la geodetica radiale $\gamma(p_1, p_2)$ uscente da p_1 è l'unica geodetica minimale congiungente p_1 e p_2 . Si noti che $\gamma(p_1, p_2)$ è contenuta in $B(p_1, \delta_1)$ ma può non essere contenuta in W . Tuttavia, si può provare che per ogni $p \in M$ esiste una palla geodetica $B(p, \delta)$ *strettamente convessa*, cioè: per ogni $q_1, q_2 \in \bar{B}(p, \delta)$, chiusura di $B(p, \delta)$, esiste un'unica geodetica minimale $\gamma(q_1, q_2)$ il cui interno è contenuto in $B(p, \delta)$ ([32], p.76).

Il seguente risultato caratterizza le geodetiche dal punto di vista metrico.

Corollario 7.46. *Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva differenziabile (anche a tratti), parametrizzata con l'ascissa curvilinea, con $p = \gamma(a)$ e $q = \gamma(b)$. Se γ è minimale, cioè $L(\gamma) = d(p, q)$, allora γ è una curva geodetica (come insieme di punti).*

Dimostrazione. Intanto osserviamo che se γ è minimale e $[c, d] \subset [a, b]$, allora anche $\gamma_1 = \gamma|_{[c, d]}$ è minimale. Infatti, se γ_1 non fosse minimale esisterebbe una curva α congiungente $\gamma(c)$ e $\gamma(d)$ con $L(\alpha) < L(\gamma_1)$. Allora la curva σ definita da $\sigma(t) = \gamma(t)$ se $t \in [a, c] \cup [d, b]$ e $\sigma(t) = \alpha(t)$ se $t \in [c, d]$, avrebbe lunghezza minore di γ ottenendo una contraddizione al fatto che $L(\gamma) = d(p, q)$. Per provare che γ è una curva geodetica, basta provare che γ è geodetica in un intorno di ogni suo punto. Dato $p_0 = \gamma(t_0)$, consideriamo un intorno W totalmente normale del punto p_0 . Sia $I = [t_1, t_2] \subset [a, b]$, tale che $t_0 \in]t_1, t_2[$ e $\gamma(I) \subset W$. Poiché W è totalmente normale, $\gamma(I) \subset B(p_1, \delta)$, per qualche $\delta > 0$, dove $p_1 = \gamma(t_1)$. Inoltre, poiché $\gamma(I)$ è una curva minimale, applicando il Teorema 7.42, $\gamma|_I$ è una curva geodetica. \square

Si noti che se γ è una curva differenziabile (a tratti) localmente minimale, cioè γ è minimale in un intorno di ogni suo punto, dalla dimostrazione del Corollario 7.46 segue che γ è localmente una geodetica e quindi una geodetica.

Coordinate normali

Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una fissata base ortonormale di $T_p M$. La corrispondenza che ad ogni $V \in T_p M$, $V = \sum_i y_i e_i$, associa la n -pla $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, identifica $T_p M$ con \mathbb{R}^n . Se U è un intorno normale di p , in particolare si può considerare una palla geodetica $B(p, \delta)$, l'applicazione

$$\varphi : U \rightarrow \exp_p^{-1}(U) = B(0, \delta),$$

$$q = \exp_p V = \exp_p \left(\sum_i y_i e_i \right) \mapsto \exp_p^{-1}(q) = (y_1, \dots, y_n),$$

è un'applicazione coordinata per M . (y_1, \dots, y_n) si dicono *coordinate normali* centrate in p , e la coppia $(U, \varphi = \exp_p^{-1}|_U)$ si dice *carta normale*, rispetto alla base $\{e_i\}$. Si noti che $y_i(p) = 0$ per ogni i .

Proposizione 7.47. *Sia (y_1, \dots, y_n) un sistema di coordinate normali centrate in p , rispetto alla base ortonormale $\{e_i\}$, definito nella palla geodetica $B(p, \delta)$. Allora per ogni $V \in T_p M$, $V = \sum_i v_i e_i$, la geodetica $\gamma_V(t)$ si rappresenta, rispetto al fissato sistema di coordinate, con equazioni parametriche lineari $y_i(t) = tv_i$ ($i = 1, \dots, n$), $|t| < \epsilon$. In particolare, si ha $(\partial/\partial y_k)_p = e_k$.*

Dimostrazione. Consideriamo il caso non banale $V \neq 0$. Per ogni $t > 0$ tale che $tV \in B(0, \delta)$, cioè per $|t| < \epsilon := \frac{\delta}{\|V\|}$, abbiamo

$$\gamma_V(t) = \gamma_{tV}(1) = \exp_p(tV) = \exp_p \left(\sum_i tv_i e_i \right)$$

e quindi

$$y_i(t) = y_i(\gamma_V(t)) = tv_i.$$

Siccome

$$V = \dot{\gamma}_V(0) = \sum_i \frac{dy_i}{dt}(0) \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)_p = \sum_i v_i \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)_p,$$

prendendo $V = e_k$, si ha $e_k = (\partial/\partial y_k)_p$. \square

Osservazione 7.48. Le componenti g_{ij} della metrica g , rispetto a un sistema di coordinate normali centrate in p , soddisfano:

$$g_{ij}(p) = g\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right)(p) = g_p(e_i, e_j) = \delta_{ij}.$$

Quindi $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p\right\}$ è una base ortonormale di T_pM . Usando coordinate normali (y_i) , dal sistema di equazioni differenziali che definisce la geodetica $\gamma_V(t)$, siccome $y_i(t) = y_i(\gamma_V(t)) = tv_i$, si ottiene $\sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(y(t))v_iv_j = 0$ per ogni k . Quindi, per $t = 0$, $\sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(p)v_iv_j = 0$ per ogni $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ e per ogni k . Poiché $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, la precedente relazione implica

$$\Gamma_{ij}^k(p) = 0, \quad \text{cioè} \quad (\nabla_{\partial_i} \partial_j)(p) = 0,$$

dove $\partial_i = \partial/\partial y_i$. Di conseguenza,

$$(\partial_k g_{ij})(p) = g(\nabla_{\partial_k} \partial_i, \partial_j)(p) + g(\partial_i, \nabla_{\partial_k} \partial_j)(p) = 0.$$

7.3 Varietà riemanniane complete

Concludiamo questo capitolo con il Teorema di Hopf-Rinow relativo alle varietà riemanniane geodeticamente complete.

Definizione 7.49. Una varietà riemanniana (M, g) si dice *geodeticamente completa* se ogni geodetica massimale $\gamma(t)$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Lo spazio euclideo, la sfera canonica e lo spazio iperbolico sono varietà riemanniane geodeticamente complete in quanto le loro geodetiche massimali sono definite per ogni $t \in \mathbb{R}$. Più precisamente, indicata con $\gamma_{p,V}(t)$ la geodetica uscente da p con vettore velocità V , si ha

per lo spazio euclideo \mathbb{R}^n : $\gamma_{p,V}(t) = p + tV$, $t \in \mathbb{R}$;

per lo sfera canonica \mathbb{S}^n : $\gamma_{p,V}(t) = (\cos t)p + (\sin t)V$, $t \in \mathbb{R}$;

per lo spazio iperbolico modello H^n : $\gamma_{p,V}(t) = (\cosh t)p + (\sinh t)V$, $t \in \mathbb{R}$.

Ricordiamo che esiste anche la nozione di completezza nell'ambito degli spazi metrici: uno spazio metrico si dice *completo* se ogni successione di Cauchy è convergente. D'altronde una varietà riemanniana è uno spazio metrico rispetto alla distanza indotta dalla metrica riemanniana. L'importante teorema di Hopf-Rinow (1931) ci dice non solo che le due nozioni di completezza sono equivalenti, ma sono anche una condizione sufficiente per l'esistenza di geodetiche minimali.

Teorema 7.50. (di Hopf-Rinow, 1ª parte) *Se M è una varietà riemanniana geodeticamente completa, allora per ogni $p, q \in M$ esiste una geodetica minimale (non necessariamente unica) che li congiunge.*

Dimostrazione. Dati $p, q \in M$, poniamo $r = d(p, q)$. Scegliamo $\epsilon > 0$ tale che $B(p, 2\epsilon)$ sia una palla geodetica di centro p . Se $q \in B(p, 2\epsilon)$, sappiamo che esiste una geodetica minimale che congiunge p a q e quindi vale quanto enunciato. Supponiamo che $q \notin B(p, 2\epsilon)$, siccome la funzione distanza

$$d(\cdot, q) : \partial\bar{B}(p, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d(x, q),$$

è continua, allora esiste un punto $x_0 \in \partial\bar{B}(p, \epsilon)$ dove $d(x, q)$ ottiene il suo minimo. Sia $\gamma_V(s)$, $0 \leq s \leq \epsilon$, $V \in T_p M$, $\|V\| = 1$, la geodetica minimale radiale che collega p a $x_0 = \gamma_V(\epsilon)$. Per ipotesi sappiamo che $\gamma_V(s)$ è definita per ogni $s \in \mathbb{R}$. Per provare il teorema è sufficiente provare che $\gamma_V(r) = q$. Infatti, in tal caso:

$$L(\gamma_V|_{[0,r]}) = L(\gamma_{rV}|_{[0,1]}) = \|rV\| = r = d(p, q).$$

Proviamo quindi che $\gamma_V(r) = q$. Poniamo

$$S = \{s \in [0, r] : d(\gamma_V(s), q) = r - s\}.$$

Si noti che S è non vuoto in quanto $0 \in S$. Sia $a = \sup S$. Per la continuità della funzione distanza, S è un chiuso e quindi $a \in S$. A questo punto basta verificare che $\sup S = r$. Infatti, in tal caso $d(\gamma_V(r), q) = 0$ e quindi $\gamma_V(r) = q$. Supponiamo che sia $a < r$ e facciamo vedere che si ottiene una contraddizione mostrando che $(a + \delta) \in S$ per qualche $\delta > 0$. Scegliamo un $\delta > 0$ tale che $\bar{B}(\gamma_V(a), \delta)$ sia una palla geodetica chiusa. Poniamo $y = \gamma_V(a)$. Il fatto che $a \in S$ significa che

$$d(y, q) = r - a. \tag{7.9}$$

Consideriamo la funzione distanza $d(\cdot, q) : \partial\bar{B}(y, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_1 \in \partial\bar{B}(y, \delta)$ dove $d(\cdot, q)$ ottiene il suo minimo. Sia $\sigma : [0, \delta] \rightarrow M$ la geodetica minimale radiale che collega y e x_1 (cfr. Figura 7.11).

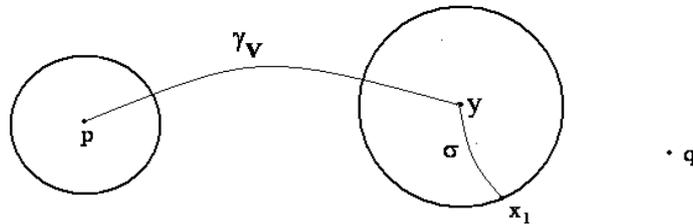


Figura 7.11: La geodetica γ_V e la geodetica radiale minimale σ .

Osserviamo che: $d(y, q) = \delta + \min \{d(x, q) : x \in \partial\bar{B}(y, \delta)\} = \delta + d(x_1, q)$. Questa formula e la (7.9) implicano:

$$r - a = \delta + d(x_1, q), \quad (7.10)$$

dalla quale, usando la disuguaglianza triangolare, si ottiene

$$d(p, x_1) \geq d(p, q) - d(x_1, q) = r - (r - a - \delta) = a + \delta.$$

D'altronde, la curva $\tilde{\gamma}$ unione di $\gamma_V|_{[0,a]}$ (di lunghezza a) con σ (di lunghezza δ) è una curva che collega p a x_1 e ha lunghezza $L(\tilde{\gamma}) = (a + \delta)$. Quindi $d(p, x_1) = L(\tilde{\gamma})$, per cui la curva $\tilde{\gamma}$ è minimale e quindi (applicando il Corollario 7.46) è una curva geodetica e in particolare differenziabile. Di conseguenza, sarà $x_1 = \gamma_V(a + \delta)$ e la (7.10) diventa

$$r - a = \delta + d(x_1, q) = \delta + d(\gamma_V(a + \delta), q),$$

da cui segue che $(a + \delta) \in S$ che contraddice $a = \sup S$. \square

Esistono varietà riemanniane complete in cui la geodetica minimale non sempre è unica. Ad esempio, se consideriamo due punti antipodali della sfera canonica, la geodetica minimale che li congiunge non è univocamente determinata. Inoltre, se consideriamo (\mathbb{R}_+^2, g_0) , ovvero il semipiano con la metrica euclidea, questa è una varietà riemanniana in cui comunque prendiamo due punti esiste una geodetica minimale che li congiunge, tuttavia non è una varietà riemanniana completa. Quindi, del Teorema 7.50 non vale il viceversa.

Teorema 7.51. (di Hopf-Rinow, 2^a parte) *Sia (M, g) una varietà riemanniana. Se d è la distanza indotta dalla metrica g , allora le seguenti proprietà sono equivalenti:*

- 1) *l'applicazione esponenziale \exp_p è definita su tutto $T_p M$ per ogni $p \in M$;*
- 2) *(M, g) è geodeticamente completa;*
- 3) *chiusi e limitati di (M, d) sono compatti;*
- 4) *(M, d) è uno spazio metrico completo.*

Dimostrazione. 1) \Rightarrow 2). Per ipotesi $\exp_p(tV) = \gamma_{tV}(1)$ è definita per ogni $V \in T_p M$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$. Di conseguenza, la curva geodetica $\gamma_V(t) = \gamma_{tV}(1)$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ quale che sia $V \in T_p M$. Ciò implica che M è geodeticamente completa. L'implicazione inversa 2) \Rightarrow 1) è ovvia.

2) \Rightarrow 3). Sia C un sottoinsieme chiuso e limitato di M . Allora C , in quanto limitato, è contenuto in una palla $B(p, r)$, rispetto alla distanza d , di centro p . Applicando il Teorema 7.50, se $q \in B(p, r)$, allora esiste una curva geodetica minimale $\gamma_V(t), t \in [0, 1]$, che collega p a q . Quindi, $q = \exp_p V$ e $\|V\| = L(\gamma_V) = d(p, q) < r$. Di conseguenza, considerata la palla $B(0, r)$ di $T_p M$, si ha $B(p, r) \subset \exp_p \bar{B}(0, r)$. D'altronde, $\exp_p \bar{B}(0, r)$ è un compatto in quanto immagine continua di un compatto. Pertanto, C è un sottoinsieme chiuso di un compatto e quindi è un compatto.

3) \Leftrightarrow 4). È un risultato classico di topologia generale.

4) \Rightarrow 1): basta provare che per ogni $p \in M$ e per ogni $V \in T_p M$ la geodetica $\gamma_V(t)$ è definita su tutto \mathbb{R} . Supponiamo per assurdo che $[0, t_0)$, con t_0 finito,

sia il piú grande intervallo aperto a destra su cui $\gamma_V(t)$ è definita. Sia $(t_k) \subset [0, t_0)$ una successione crescente che converge a t_0 . Siccome

$$d(\gamma_V(t_{k_1}), \gamma_V(t_{k_2})) \leq L(\gamma_V|_{[t_{k_1}, t_{k_2}])} = \|V\| |t_{k_1} - t_{k_2}|,$$

$(\gamma_V(t_k))$ è una successione di Cauchy in M per la distanza d e quindi converge a un punto $q \in M$ che non dipende dalla particolare successione scelta. Ponendo $\gamma_V(t_0) = q$, otteniamo un'applicazione continua da $[0, t_0]$ in M . Sia $W(q, \delta)$ un intorno totalmente normale del punto q . Fissato $\delta_1 < \delta$, per ogni k abbastanza grande, abbiamo $|t_k - t_0| < \frac{\delta_1}{\|V\|}$ e $\gamma_V(t_k) \in W$. Siccome, le geodetiche radiali uscenti da $\gamma_V(t_k)$ si possono prolungare di una lunghezza almeno uguale a δ_1 , e siccome $L(\gamma_V|_{[t_k, t_0]}) = |t_k - t_0| \|V\| < \delta_1$, la geodetica γ_V si può prolungare per $t > t_0$ ottenendo quindi una contraddizione. Pertanto, $t_0 = +\infty$ e γ_V è definita su $[0, +\infty)$. Siccome $\gamma_{-V}(t) = \gamma_V(-t)$, lo stesso ragionamento applicato a γ_{-V} prova che γ_V è definita su tutto \mathbb{R} . \square

Corollario 7.52. *Ogni sottovarietà riemanniana chiusa di una varietà riemanniana completa è completa. In particolare, le sottovarietà riemanniane chiuse dello spazio euclideo sono complete.*

Dimostrazione. Sia (M, g) una sottovarietà riemanniana della varietà riemanniana (\bar{M}, \bar{g}) . Per semplicità assumiamo $M \subset \bar{M}$, quindi $g = i^* \bar{g}$ dove $i : M \hookrightarrow \bar{M}$. Se γ è una curva differenziabile di M , allora $\bar{\gamma} = i \circ \gamma$ è una curva differenziabile di \bar{M} e $L(\bar{\gamma}) = L(\gamma)$. Di conseguenza $\bar{d}(p, q) \leq d(p, q)$ per ogni $p, q \in M$, e quindi ogni successione di Cauchy in M è di Cauchy anche in \bar{M} . Siccome M è un chiuso di \bar{M} ed \bar{M} è uno spazio metrico completo, allora anche M è completo. \square

Un'altra conseguenza del Teorema 7.51 è data dal seguente

Corollario 7.53. *Ogni varietà riemanniana compatta è geodeticamente completa.*

Osservazione 7.54. In generale, non vale il viceversa del Corollario 7.53, infatti vi sono varietà riemanniane complete ma non compatte, ad esempio lo spazio iperbolico H^n è completo ma non è compatto. Tuttavia, con opportune ipotesi sulla curvatura si ottiene il viceversa. Vale infatti il Teorema di Myers (cfr. Teorema 8.58).

Osservazione 7.55. Varietà riemanniane complete sono l'ambiente naturale per lo studio di proprietà globali in geometria riemanniana. Se (M, g) è una varietà riemanniana completa con curvatura sezionale non positiva, allora l'applicazione esponenziale è un'applicazione di rivestimento, che diventa un diffeomorfismo se M è semplicemente connessa (questo è il Teorema di Cartan-Hadamard). In particolare, per lo spazio iperbolico, l'esponenziale è un diffeomorfismo.

Osservazione 7.56. Si noti che se (M, g) è una varietà riemanniana completa e X è un campo vettoriale che soddisfa $\|X\|^2 = g(X, X) \leq k$, $k \in \mathbb{R}$, allora X è un campo vettoriale completo (cfr. [111], p.3).

Se $p : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ è un rivestimento riemanniano, le geodetiche di (M, g) sono tutte e sole le proiezioni delle geodetiche di (\tilde{M}, \tilde{g}) . Pertanto, vale la seguente

Proposizione 7.57. *Se $p : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ è un rivestimento riemanniano, allora (\tilde{M}, \tilde{g}) è completa se, e solo se, (M, g) è completa. In particolare, lo spazio proiettivo con la metrica riemanniana indotta dalla metrica canonica di \mathbb{S}^n è un spazio completo.*

Teorema 7.58. *Ogni varietà riemanniana omogenea è completa.*

Dimostrazione. Sia M una varietà riemanniana omogenea. Ricordiamo che, applicando la Proposizione 7.29 (cfr. anche (7.3)), per ogni fissato punto $p \in M$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $V \in T_p M$, $\|V\| = 1$, la geodetica $\gamma_V(s)$ è definita per $0 \leq s \leq r$, per ogni fissato $r < \delta$, con s ascissa curvilinea. Infatti, per $W = rV$, $r < \delta$, si ha $\|W\| = r < \delta$, $\gamma_W(s)$ è definita per $0 \leq s \leq 1$, e quindi $\gamma_V(s) = \gamma_W(s/r)$ è definita per $0 \leq s \leq r$. Sia ora $\sigma(s)$, $-a \leq s \leq a$, $\sigma(0) = p$, un'arbitraria curva geodetica di M parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Per provare il teorema, basta provare che la geodetica $\sigma(s)$, $-a \leq s \leq a$, si può estendere per $-a \leq s \leq a+r$. Poiché M è omogenea, esiste un'isometria f tale che $f(p) = \sigma(a)$. Sia $V_1 = \dot{\sigma}(a) \in T_{f(p)}M$, allora $V = f_{*p}^{-1}V_1 \in T_p M$ e $\|V\| = \|V_1\| = 1$. In corrispondenza a questo vettore, consideriamo la geodetica $\gamma_V(s)$ definita per $0 \leq s \leq r$. Allora, la curva $\sigma(a+s) := f(\gamma_V(s))$, $0 \leq s \leq r$, è geodetica con $f(\gamma_V(0)) = f(p) = \sigma(a)$. Di conseguenza, $\sigma(s)$ è curva geodetica per $-a \leq s \leq a+r$. \square

Esempi 7.59. Applicando il Teorema 7.58, ritroviamo che la sfera canonica \mathbb{S}^n , lo spazio euclideo (\mathbb{R}^n, g_0) e lo spazio iperbolico $(\mathbb{R}_+^n, g = (1/x_n^2)g_0)$ sono varietà riemanniane geodeticamente complete in quanto varietà riemanniane omogenee. Si noti che le sole varietà riemanniane complete di dimensione 1 sono (\mathbb{R}, g_0) (di lunghezza infinita) e (\mathbb{S}^1, g_0) (di lunghezza finita).

Esempio 7.60. La varietà riemanniana $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, g_0)$ non è geodeticamente completa, ad esempio $p = (1, 0)$ e $q = (-1, 0)$ non si possono congiungere con una geodetica minimale oppure si può giustificare osservando che la successione $\{p_n = (1/n, 1/n)\}_n$ è una successione di Cauchy che non è convergente in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Esercizio 7.61. Siano $(M_1, g_1), (M_2, g_2)$ varietà riemanniane con distanze riemanniane d_1, d_2 rispettivamente. Sia d la distanza riemanniana della varietà riemanniana prodotto $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$. Se $(M_1, g_1), (M_2, g_2)$ sono varietà riemanniane complete, si verifichi che:

- 1) la varietà riemanniana prodotto $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$ è completa;
- 2) $d^2(p, q) = d_1^2(p_1, q_1) + d_2^2(p_2, q_2) \quad \forall p = (p_1, p_2), q = (q_1, q_2) \in M_1 \times M_2$.

Infine, osserviamo quanto segue.

Osservazione 7.62. Per ogni varietà riemanniana (M, g) esiste sempre una metrica riemanniana completa conforme a g (cfr. Nomizu-Ozeki [76]).