Capitolo 5

Struttura di spazio metrico e isometrie

5.1 Distanza su una varietà riemanniana

Sia (M, g) una varietà riemanniana (connessa). La metrica g permette di definire la lunghezza di una curva e la distanza tra due punti di M. Se $v \in T_pM$, si pone

$$\|v\|^2 := g_p(v, v).$$

Sia $\sigma : [a, b] \to M$ una curva differenziabile. Assumiamo che $\sigma([a, b]) \subset U$, $(U, (x_i))$ carta locale, allora la *lunghezza* della curva σ è definita da:

$$L(\sigma) := \int_a^b \|\dot{\sigma}(t)\| \mathrm{d}t \geq 0, \quad \text{dove}$$

$$\|\dot{\sigma}(t)\|^2 = g_{\sigma(t)}(\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t)) = \sum_{i,j} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} g_{ij}(\sigma(t)).$$

Si noti che $\|\dot{\sigma}(t)\|$ non dipende dalle coordinate scelte. Se (y_α) sono altre coordinate definite in U, si ha

$$\begin{aligned}
\|\dot{\sigma}\|_y^2 &= \sum_{\alpha,\beta} \frac{\mathrm{d}y_\alpha}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}y_\beta}{\mathrm{d}t} g_{\alpha\beta}(\sigma(t)) = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\mathrm{d}y_\alpha}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}y_\beta}{\mathrm{d}t} g\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)(\sigma(t)) \\
&= \sum_{\alpha,\beta} \frac{\mathrm{d}y_\alpha}{dt} \frac{\mathrm{d}y_\beta}{\mathrm{d}t} g\left(\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\sigma(t)}, \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial y_\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{\sigma(t)}\right) \\
&= \sum_{\alpha,\beta,i,j} \frac{dy_\alpha}{\mathrm{d}t} \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{dy_\beta}{\mathrm{d}t} \frac{\partial x_j}{\partial y_\beta} g_{ij}(\sigma(t)) = \sum_{i,j} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} g_{ij}(\sigma(t)) = \|\dot{\sigma}\|_x^2.
\end{aligned}$$

Se $\sigma([a, b]) \not\subset$ in un intorno coordinato, $\sigma([a, b])$ (in quanto compatto) lo si può ricoprire con un numero finito di intorni coordinati e si pone

$$L(\sigma) := \sum_{i=1}^r L(\sigma_i) \geq 0,$$

dove ogni arco σ_i ha sostegno contenuto in un intorno coordinato. Si ha

$L(\sigma) = 0 \Leftrightarrow \|\dot{\sigma}(t)\| = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}t) = 0\,\forall i \Leftrightarrow x_i(t) = cost\,\forall i \Leftrightarrow \sigma(t) = cost.$

La lunghezza di una curva non dipende dalla parametrizzazione, cioè, se $\theta : [c,d] \to [a,b]$ è un diffeomorfismo, le curve $\sigma : [a,b] \to M$ e $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \theta : [c,d] \to M$ hanno la stessa lunghezza. Infatti:

$$L(\tilde{\sigma}) = \int_c^d \|\dot{\tilde{\sigma}}(t)\|\mathrm{d}t = \int_c^d \|\dot{\sigma}(\theta(t))\|\, |\theta'(t)|\, \mathrm{d}t,$$

dove $\theta'(t) > 0$ oppure $\theta'(t) < 0$ (essendo θ un diffeomorfismo). Se $\theta'(t) > 0$, e quindi $\theta(c) = a$ e $\theta(d) = b$, si ha

$$L(\tilde{\sigma}) = \int_c^d \|\dot{\sigma}(\theta(t))\|\ \theta'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \|\dot{\sigma}(\theta)\|\mathrm{d}\theta = L(\sigma).$$

Se $\theta'(t) < 0$, e quindi $\theta(c) = b$ e $\theta(d) = a$, si ha

$$L(\tilde{\sigma}) = -\int_c^d \|\dot{\sigma}(\theta(t))\|\ \theta'(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a \|\dot{\sigma}(\theta)\|\mathrm{d}\theta = L(\sigma).$$

Se σ è una curva differenziabile a tratti, $L(\sigma)$ è definita come somma finita delle lunghezze degli archi differenziabili. Inoltre, vale il seguente

Lemma 5.1. *Se M è una varietà differenziabile (connessa), allora M è connessa per archi differenziabili a tratti.*

Dimostrazione. Per ogni fissato $p \in M$, consideriamo l'insieme C_p costituito da tutti i punti $q \in M$ per cui esiste $\gamma(p,q)$ curva differenziabile a tratti che congiunge p e q. C_p è $\neq \emptyset$ ($p \in C_p$) e gode delle seguenti proprietà.
a) C_p è connesso per archi differenziabili a tratti (si noti che se $q \in C_p$, allora esiste $\gamma(p,q) \subset C_p$).
b) C_p è un aperto, ossia intorno di ogni suo punto. Infatti, se $q \in C_p$, considerando una carta locale (U,φ) con $q \in U$ e $\varphi(U)$ intorno sferico di centro $\varphi(q)$, si ha $U \subset C_p$.
c) $C_{p_1} \cap C_{p_2} \neq \emptyset$ implica $C_{p_1} = C_{p_2}$.

Quindi, $\{C_p\}_{p\in M}$ è una partizione di M. Da $a), b), c)$, segue che $C_p \neq \emptyset$ è connesso, aperto e chiuso, pertanto $C_p = M$. □

Per ogni $p, q \in M$, poniamo

$$C(p,q) = \{\text{curve differenziabili a tratti che congiungono } p \text{ e } q\}.$$

Poiché M è connessa, applicando il Lemma 5.1, risulta $C(p,q) \neq \emptyset$. Definiamo la funzione

$$d : M \times M \to \mathbb{R}^+,\ (p,q) \mapsto d(p,q) := \inf_{\sigma\in C(p,q)} L(\sigma) \geq 0.$$

Esempio 5.2. La distanza euclidea
Per lo spazio euclideo $(\mathbb{R}^n, g_0)$, la corrispondente funzione d_0 è la distanza euclidea:

$$d_0(p,q) = \big(\sum_{i=1}^n (q_i - p_i)^2\big)^{1/2} = \|q-p\| \quad \forall p,q \in \mathbb{R}^n.$$

Basta osservare che il segmento $\gamma_o(t) = (1-t)p + tq$, $t \in [0,1]$, ha $L(\gamma_o) = \|q-p\|$ e, per ogni $\gamma \in C(p,q)$,

$$\|\dot\gamma(t)\| \geq g_o\Big(\dot\gamma(t), \frac{q-p}{\|q-p\|}\Big) \text{ implica } L(\gamma) \geq \|q-p\| = L(\gamma_o).$$

Teorema 5.3. *Sia (M,g) una varietà riemanniana (connessa). Allora:*
(a) *d è una distanza (riemanniana) su M;*
(b) *la topologia indotta da d coincide con la topologia iniziale di M.*

Dimostrazione. Per provare la (a), dobbiamo dimostrare che per ogni p, q, x punti di M:
(1) $d(p,q) = d(q,p)$,
(2) $d(p,q) \leq d(p,x) + d(x,q)$,
(3) $d(p,q) \geq 0, \quad d(p,q) = 0 \iff p = q$.
Per la (1) basta osservare che se $\sigma : [0,1] \to M$ congiunge p a q, allora $\sigma^{-1}(t) = \sigma(1-t)$ congiunge q a p e $L(\sigma) = L(\sigma^{-1})$.
(2) Dalle definizioni di $d(p,x)$ e $d(x,q)$ segue che :

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \gamma_1 \in C(p,x), \ \exists \gamma_2 \in C(x,q) \quad \text{tali che:}$$
$$L(\gamma_1) < d(p,x) + \epsilon/2, \ L(\gamma_2) < d(x,q) + \epsilon/2.$$

Ciò implica che

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \in C(p,q), \quad L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) < d(p,x) + d(x,q) + \epsilon,$$

e quindi $\ d(p,q) = \inf_{\sigma \in C(p,q)} L(\sigma) < d(p,x) + d(x,q) + \epsilon \quad \forall \epsilon > 0.$

Pertanto, $d(p,q) \leq d(p,x) + d(x,q)$.
(3) Proviamo che $d(p,q) = 0 \Rightarrow p = q$, cioè $p \neq q \Rightarrow d(p,q) > 0$.
Supponiamo $p \neq q$. Sia (U, φ) carta locale con $\varphi(p) = (0, \dots, 0)$ e $q \notin U$. Sia $r > 0$ tale che $\bar B(O,r) \subset \varphi(U)$. $\forall x \in \varphi^{-1}(\bar B(O,r))$ e $\forall X \in \mathbb{S}^{n-1}$(sfera unitaria euclidea)$\subset T_xM$, poniamo

$$\vartheta(x,X) = (g_{x,\varphi}(X,X))^{1/2} > 0.$$

Poiché $\vartheta : \varphi^{-1}(\bar B(0,r)) \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, positiva e definita su un compatto, esistono $\lambda, \mu > 0$ tali che

$$0 < \lambda \leq (g_{x,\varphi}(X,X))^{1/2} \leq \mu, \tag{5.1}$$

dove λ e μ sono rispettivamente il max e il min per ϑ. Per ogni $X \in T_xM, X \neq 0$, $\frac{X}{\|X\|_{g_o}} \in \mathbb{S}^{n-1}$, dove $\|\ \|_{g_o}$ è la norma euclidea, la (5.1) diventa

$$\lambda \|X\|_{g_o} \leq (g_{x,\varphi}(X,X))^{1/2} \leq \mu \|X\|_{g_o} \tag{5.2}$$

per ogni $X \in T_xM$ e per ogni $x \in \varphi^{-1}(\bar{B}(O,r))$. Consideriamo ora una curva $\gamma : [0,1] \to M,\ \gamma \in C(p,q)$. Poiché $q = \gamma(1) \notin \varphi^{-1}(\bar{B}(O,r))$, la componente connessa di 0 in $\gamma^{-1}(\varphi^{-1}(\bar{B}(O,r))$ è del tipo $[0,\delta]$ con $\delta < 1$ (cfr. Figura 5.1).

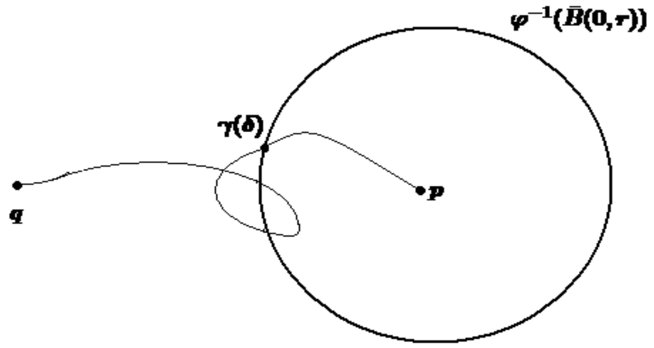

Figura 5.1: $d(p,q) > 0$.

Allora, posto $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma_{|[0,\delta]}$, si ha

$$\begin{aligned} L(\gamma_{|[0,\delta]}) &= \int_0^\delta \|\dot{\gamma}(t)\|_{g,\varphi} \mathrm{d}t = \int_0^\delta \sqrt{g_{\gamma(t),\varphi}(\dot{\gamma}(t),\dot{\gamma}(t))}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\delta \sqrt{g_{\tilde{\gamma}(t)}(\dot{\tilde{\gamma}}(t),\dot{\tilde{\gamma}}(t))}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Applicando la (5.2), si ottiene

$$L(\gamma_{|[0,\delta]}) \geq \lambda \int_0^\delta \|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\|_{g_o} \mathrm{d}t = \lambda L_{g_o}(\tilde{\gamma}) \geq \lambda r$$

in quanto $\tilde{\gamma}(\delta) \in \partial \bar{B}(0,r) = \mathbb{S}^{n-1}(0,r)$. Pertanto

$$L(\gamma) \geq L(\gamma_{|[0,\delta]}) \geq \lambda r \quad \forall \gamma \in C(p,q),$$

e quindi

$$d(p,q) = \inf L(\gamma) \geq \lambda r > 0.$$

(b) Proviamo che per ogni V intorno di p nella topologia iniziale di M, esiste U' intorno di p nella topologia definita da d tale che $U' \subset V$. Sia (U,φ) intorno coordinato di p, $\varphi(p) = O$, $U \subset V$, e $r > 0$ tale che $\bar{B}(O,r) \subset \varphi(U)$. Preso $q \in U' = \{q \in M : d(q,p) < r' \leq \lambda r\}$, dove λ è definito dalla (5.1), necessariamente $q \in U$. Infatti, se fosse $q \notin U$, applicando la dimostrazione del punto (a) si avrebbe $d(p,q) \geq \lambda r \geq r'$, mentre $d(p,q) < r'$. Viceversa, per ogni intorno U' di p nella topologia definita da d, $U' = \{q \in M : d(q,p) < r'\}$, esiste V intorno di p nella topologia iniziale di M tale che $V \subset U'$. Sia (U,φ) una carta locale con $\varphi(p) = O$, e sia $r > 0$ tale che $\bar{B}(O,r) \subset \varphi(U)$. Consideriamo la palla $B(O,\rho) \subset B(O,r)$ tale che $\rho < \frac{r'}{\mu}$, dove μ è definito dalla (5.1). Allora, $V = \varphi^{-1}(B(O,\rho))$ è intorno di p ed è contenuto in U'. Infatti: per $q \in V$, consideriamo il segmento $\tilde{\gamma} = O\varphi(q)$ parametrizzato da $\tilde{\gamma}(t) = t\varphi(q)$, $0 \leq t \leq 1$; allora la curva $\gamma = \varphi^{-1} \circ \tilde{\gamma} \in C(p,q)$ e inoltre, applicando la (5.2), si ottiene

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_g \mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\tilde{\gamma}}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t))}\mathrm{d}t \\ &\leq \mu \int_0^1 \|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\|_{g_o} \mathrm{d}t = \mu \int_0^1 \|\varphi(q)\|_{g_o} \mathrm{d}t = \mu \|\varphi(q)\|_{g_o} < \mu\rho < r'. \end{aligned}$$

Pertanto $d(q,p) < r'$ e quindi $q \in U'$. □

Esempio 5.4. La distanza sulla sfera canonica
Sia $(\mathbb{S}^n, g)$ la sfera canonica di centro l'origine e raggio ρ. Per ogni $x, y \in \mathbb{S}^n$ esiste una geodetica minimale γ che li congiunge (ed è unica se $y \neq -x$) (cfr. Capitolo 7). Quindi,

$$d(x,y) = L(\gamma) = \rho\vartheta,$$

dove γ è l'arco più corto della circonferenza di raggio massimo che congiunge x a y, e ϑ è l'angolo convesso individuato da x e y (pensati come vettori).

Esempio 5.5. La distanza nel piano iperbolico $\mathbb{R}^2_+$
Indichiamo con g la metrica iperbolica su $\mathbb{R}^2_+$ (indicata con $\tilde{\tilde{g}}$ nella Sezione 4.4). Per ogni $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2_+$ esiste un'unica geodetica minimale che li congiunge (cfr. Capitolo 7). Se la retta che congiunge p_1, p_2 è parallela all'asse y, quindi $x_1 = x_2 = a$, la geodetica minimale che li congiunge è il segmento $\gamma_0(t) = t(p_2 - p_1) + p_1 = (a, y_1 + t(y_2 - y_1))$, $t \in [0,1]$, e

$$d(p_1, p_2) = L(\gamma_0) = |\ln \frac{y_2}{y_1}|.$$

Infatti: $\dot{\gamma_0}(t) = (0, y_2 - y_1)$, per cui

$$\|\dot{\gamma_0}(t)\|_g = \frac{1}{y_1 + t(y_2 - y_1)}(y_2 - y_1), \quad \text{(assumendo } y_2 \geq y_1\text{)},$$

e quindi

$$L(\gamma_0) = \int_0^1 \|\dot{\gamma_0}(t)\|_g \mathrm{d}t = [\ln(y_1 + t(y_2 - y_1))]_0^1 = \ln \frac{y_2}{y_1}.$$

Se la retta che congiunge p_1, p_2 non è parallela all'asse y, la geodetica minimale passante per p_1, p_2 è la curva

$$\gamma(t) = (c + r\cos t, r\sin t),\ t \in]0, \pi[.$$

γ è la semicirconferenza per p_1 e p_2 con centro c sull'asse x e di raggio r. Allora

$$\dot\gamma(t) = (-r\sin t, r\cos t) \quad \text{e} \quad \|\dot\gamma(t)\|_g = \frac{1}{\sin t}\,.$$

Quindi, posto $p_1 = (c+r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ e $p_2 = (c+r\cos\beta, r\sin\beta)$, con $\beta \geq \alpha$, si ha:

$$d(p_1, p_2) = L(\gamma_{|[\alpha,\beta]}) = \int_\alpha^\beta \|\dot\gamma(t)\|_g \mathrm{d}t = \left[\ln\tan\frac{t}{2}\right]_\alpha^\beta = \ln\frac{\tan\beta/2}{\tan\alpha/2}.$$

Per $\alpha, \beta \in]0, \pi[$ arbitrari, si ha:

$$d(p_1, p_2) = |\ln\frac{\tan\beta/2}{\tan\alpha/2}|.$$

Usando le formule di bisezione: $\frac{\tan\beta/2}{\tan\alpha/2} = \frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\beta}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$, e tenendo presente che $x_1 - c = r\cos\alpha,\ x_2 - c = r\cos\beta,\ y_1 = r\sin\alpha,\ y_2 = r\sin\beta,$ si ha

$$d(p_1, p_2) = \left|\ln\left(\frac{x_1 - c + r}{x_2 - c + r}\cdot\frac{y_2}{y_1}\right)\right|.$$

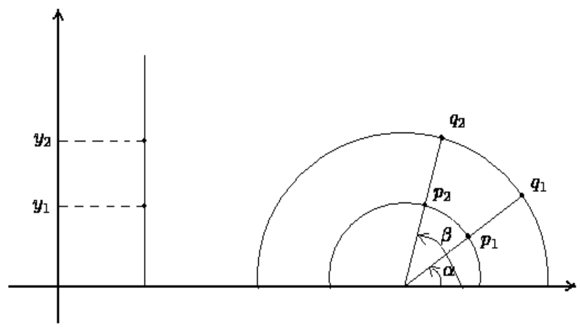

Figura 5.2: $d(p_1, p_2) = d(q_1, q_2)$

Osservazione 5.6. a) Si noti che negli esempi precedenti:

$$\forall p, q \in M \quad \exists\,\gamma(p, q) \quad \text{tale che} \quad L(\gamma) = d(p, q).$$

Ciò non vale sempre, ad esempio se consideriamo $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, g_0)$ e i punti $p = (-1, 0), q = (1, 0)$, si ha:

$$d(p, q) = 2, \text{ ma non esiste } \gamma(p, q) \text{ tale che } L(\gamma) = 2.$$

b) Nell'Esempio 5.5, se q_1, q_2 sono punti di una semicirconferenza concentrica con γ, con q_1, p_1, c allineati e q_2, p_2, c allineati, allora $d(q_1, q_2) = d(p_1, p_2)$ (cfr. Figura 5.2).

Esercizio 5.7. Sia $i : (M, g) \hookrightarrow (M', g')$ un'immersione isometrica e siano d, d' le corrispondenti distanze. Verificare che $d(p, q) \geq d'(p, q)$ per ogni $p, q \in M$.

Esercizio 5.8. Trovare un esempio di immersione isometrica $i : (M, g) \hookrightarrow (M', g')$ dove $d(p, q) > d'(p, q)$ per ogni $p, q \in M$ e un esempio dove $d(p, q) > d'(p, q)$ non accade per ogni $p, q \in M$.

5.2 Isometrie di una varietà riemanniana

Definizione 5.9. Un'applicazione $f : M \longrightarrow M'$ tra due varietà riemanniane (M, g) e (M', g'), si dice *isometria* se f è un diffeomorfismo e $f^*g' = g$, cioè

$$g'_{f(p)}(f_{*p}X_p, f_{*p}Y_p) = g_p(X_p, Y_p) \quad \forall X_p, Y_p \in T_pM, \quad \forall p \in M,$$

in modo equivalente

$$g'(f_*X, f_*Y) \circ f = g(X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

In particolare, la lunghezza di una curva è invariante per isometrie.

Definizione 5.10. Un'applicazione $f : M \to M'$ si dice *isometria locale* se per ogni $p \in M$ esistono U intorno aperto di p e V intorno aperto di $f(p)$ tali che $f_{|U} : (U, g_U) \to (V, {g'}_V)$ è isometria.

Se $f : (M, g) \to (M', g')$ è un'isometria, anche $f^{-1} : (M', g') \to (M, g)$ è un'isometria:

$$(f^{-1})^*g = (f^{-1})^*f^*g' = (f \circ f^{-1})^*g' = g'.$$

Inoltre, la composizione di isometrie è ancora un'isometria, pertanto l'insieme $\mathrm{Iso}(M, g)$ di tutte le isometrie di una varietà riemanniana (M, g), ha una struttura di gruppo rispetto alla composizione, anzi $\mathrm{Iso}(M, g)$ si può munire di una struttura di varietà differenziabile in modo tale che risulti un gruppo di Lie (cfr. [56] vol I, p.239). La topologia del gruppo di Lie $\mathrm{Iso}(M, g)$ coincide con la topologia della convergenza uniforme su sottoinsiemi compatti. Se (M, g) è una varietà riemanniana n-dimensionale, completa (ad esempio come spazio metrico), allora l'agebra di Lie di $\mathrm{Iso}(M, g)$ è isomorfa all'algebra di Lie dei campi vettoriali di Killing (cfr. Osservazione 9.8), inoltre

$$\dim \mathrm{Iso}(M, g) \leq n(n + 1)/2 = \dim O(n + 1),$$

dove l'uguaglianza vale se, e solo se, (M, g) è isometrica a una delle seguenti varietà riemanniane: lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$, lo spazio iperbolico H^n, la sfera canonica $\mathbb{S}^n$, o lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (cfr. [100], p.117-120).

Esercizio 5.11. Sia $f : (M, g) \to (M', g')$ un'isometria tra varietà riemanniane. Si verifichi che f è un'isometria anche tra i corrispondenti spazi metrici (M, d) e (M', d'), cioè
$$d'(f(p), f(q)) = d(p, q) \quad \forall p, q \in M.$$

Vale anche il seguente teorema (cfr. Petersen [97], p. 132]).

Teorema 5.12. *Se $f : M \to M'$ è un'applicazione suriettiva che conserva le distanze tra le varietà riemanniane (M, g) e (M', g'), allora f è un'isometria.*

Definizione 5.13. Una varietà riemanniana (M, g) è detta *omogenea* se il gruppo delle isometrie opera transitivamente su M, ossia: per ogni $p, q \in M$ esiste $f \in \mathrm{Iso}(M, g)$ tale che $f(p) = q$. (M, g) è detta *varietà riemanniana isotropa* (cfr. Thurston [108], p. 43) se per ogni $p \in M$ e per ogni $\mathcal{B} = \{e_i\}$, $\mathcal{B}' = \{e'_i\}$ basi ortonormali ordinate di T_pM, esiste $f \in \mathrm{Iso}(M, g)$ tale che $f(p) = p$ e $f_{*p}e_i = e'_i$ per ogni i.

Omogeneità e isotropia insieme sono condizioni molto forti, esse implicano che lo spazio ha curvatura sezionale costante (cfr. Teorema 8.37). In ogni dimensione esistono, a meno di isometrie, solo tre tipi di geometrie omogenee, isotrope e semplicemente connesse (cfr. Teorema 8.44) e sono quelle che corrispondono agli spazi semplicemente connessi con curvatura sezionale costante $K = 0$ (geometria euclidea), $K > 0$ (geometria sferica) e $K < 0$ (geometria iperbolica). Si noti che la definizione di isotropia data in [62] (cfr. p. 33 e p. 153) è meno forte di quella data in [108]. Infine, ricordiamo (cfr. [56] vol.I, p. 187–192)) il seguente

Teorema 5.14. (di decomposizione di de Rham)
Una varietà riemanniana completa semplicemente connessa (M, g) è isometrica a un prodotto riemanniano $M_0 \times M_1 \times \ldots \times M_k$, dove M_0 è una varietà rimanniana piatta e M_i $(i = 1, \ldots, k)$ sono varietà riemanniane irriducibili complete semplicemente connesse. Tale decomposizione è unica a meno dell'ordine.

5.3 Metriche invarianti a sinistra

Tra tutte le metriche riemanniane che possono essere definite su un gruppo di Lie, hanno una particolare importanza quelle che sono collegate al prodotto del gruppo.

Definizione 5.15. Una metrica riemanniana g su un gruppo di Lie G si dice metrica riemanniana *invariante a sinistra* se, per ogni $a \in G$, la traslazione sinistra L_a è un'isometria di (G, g). In tal caso, (G, g) si dice *gruppo di Lie riemanniano*

Proposizione 5.16. *Sia G un gruppo di Lie n-dimensionale e sia g una metrica riemanniana su G. Allora, le seguenti proprietà sono equivalenti.*
(1) *g è invariante a sinistra;*
(2) *$g(X,Y) =$ costante $= g(X,Y)(e)$ per ogni $X,Y \in \mathfrak{g}$;*
(3) *$\exists$ una base g-ortonormale di campi vettoriali invarianti a sinistra.*

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2). Siano $X,Y \in \mathfrak{g}$, allora

$$\begin{aligned}(L_a^*g)(X,Y) = g(X,Y) &\Longleftrightarrow g_{ax}((L_a)_{*x}X_x, (L_a)_{*x}Y_x) = g_x(X_x,Y_x)\\ &\qquad \forall x \in G,\\ &\Longleftrightarrow g_{ax}(X_{ax},Y_{ax}) = g_x(X_x,Y_x) \quad \forall x \in G,\\ &\Longleftrightarrow g(X,Y)(ax) = g(X,Y)(x) \quad \forall x \in G.\end{aligned}$$

Quindi, se g è invariante a sinistra, ossia $L_a^*g = g$ per ogni $a \in G$, allora $g(X,Y)$ è costante per ogni $X,Y \in \mathfrak{g}$.
(2) $\Rightarrow$ (3). Assumiamo che la metrica g soddisfi la proprietà
$$g(X,Y)(x) = \text{ costante} = g(X,Y)(e) = g_e(X_e,Y_e) \quad \forall X,Y \in \mathfrak{g}.$$
Se $\{v_1,...,v_n\}$ è una base ortonormale di $T_eG = \mathfrak{g}$, e $\xi_1,...,\xi_n$ è la corrispondente base di campi di vettori invarianti a sinistra, allora
$$g(\xi_i,\xi_j) = \text{costante} = g_e(\xi_{ie},\xi_{je}) = g_e(v_i,v_j) = \delta_{ij}.$$
Quindi, esiste una base g-ortonormale di campi vettoriali invarianti a sinistra.
(3) $\Rightarrow$ (1). Sia $\{\xi_1,...,\xi_n\}$ una base g-ortonormale di campi vettoriali invarianti a sinistra. Per $X = \sum_{i=1}^n X^i\xi_i$ e $Y = \sum_{j=1}^n Y^j\xi_j \in \mathfrak{X}(G)$:

$$\begin{aligned}((L_a^*g)(X,Y))(x) &= g_{ax}((L_a)_{*x}X_x, (L_a)_{*x}Y_x)\\ &= \sum_{i,j=1}^n X^i(x)Y^j(x)g_{ax}((L_a)_{*x}\xi_{ix}, (L_a)_{*x}\xi_{jx})\\ &= \sum_{i,j=1}^n X^i(x)Y^j(x)g_{ax}(\xi_{iax},\xi_{jax})\\ &= \sum_{i,j=1}^n X^i(x)Y^j(x)\delta_{ij} = g(X,Y)(x).\end{aligned}$$

Pertanto, la g è invariante a sinistra. □

Proposizione 5.17. *Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle metriche invarianti a sinistra su G e l'insieme dei prodotti scalari su T_eG.*

Dimostrazione. Sia F la corrispondenza che ad ogni metrica riemanniana invariante a sinistra g su G associa il prodotto scalare g_e su T_eG. Se g_1 e g_2

sono due metriche riemanniane invarianti a sinistra con $F(g_1) = F(g_2) = g_e$, allora $g_1 = g_2$. Infatti, se $\{v_1, ..., v_n\}$ è una base g_e-ortonormale di $T_eG = \mathfrak{g}$ e $\xi_1, ..., \xi_n$ è la corrispondente base di campi di vettori invarianti a sinistra, allora (cfr. Proposizione 5.16)

$$g_1(\xi_i, \xi_j) = \text{costante} = g_{1e}(\xi_{ie}, \xi_{je}) = g_e(v_i, v_j) = \delta_{ij} = ... = g_2(\xi_i, \xi_j).$$

D'altronde, dato un prodotto scalare g_0 su T_eG, se $\{v_1, ..., v_n\}$ è una base g_0-ortonormale di $T_eG = \mathfrak{g}$ e $\xi_1, ..., \xi_n$ è la corrispondente base di campi di vettori invarianti a sinistra, si può sempre definire una metrica invariante a sinistra ponendo $g(X, Y) := \sum_{i=1}^n X^i Y^i$ per $X = \sum_{i=1}^n X^i \xi_i$ e $Y = \sum_{j=1}^n Y^j \xi_j \in \mathfrak{X}(G)$, ovvero imponendo che $\xi_1, ..., \xi_n$ sia una base ortonomale. Naturalmente $g_e = g_0$. □

Si possono definire, in modo ovvio, le metriche invarianti a destra: esse hanno proprietà del tutto speculari rispetto a quelle invarianti a sinistra. Una metrica riemanniana g su un gruppo di Lie G si dice *metrica bi-invariante* se è invariante a destra e sinistra. Si può dimostrare che una metrica riemanniana g su G è bi-invariante se, e solo se, è soddisfatta la seguente relazione (cfr. Do Carmo [32], p. 40,41):

$$g([X, Y], Z) = g([Y, Z], X) \quad \forall\, X, Y, Z \in \mathfrak{g}. \tag{5.3}$$

Ogni gruppo di Lie compatto ammette una metrica bi-invariante (cfr. Do Carmo [32], p. 46-47).

Esempio 5.18. Una metrica invariante a sinistra su Nil^3

Consideriamo il gruppo di Heisenberg

$$Nil^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lo spazio tangente $T_I Nil^3$ è dato da $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\}$ e, come osservato nella Sezione 3.6, una sua base è data da

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I corrispondenti campi vettoriali invarianti a sinistra si ottengono applicando il differenziale $(L_A)_*$, $A \in Nil^3$, a queste matrici. Se consideriamo due matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_3 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_3 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la traslazione sinistra L_A è data da

$$L_A : Nil^3 \longrightarrow Nil^3, B \longmapsto L_A B = AB = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + b_1 & b_3 + a_1 b_2 + a_3 \\ 0 & 1 & a_2 + b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considerando le coordinate globali (x_1, x_2, x_3) su Nil^3, si ha

$$\begin{aligned} x_1(B) &= b_1, \quad x_2(B) = b_2, \quad x_3(B) = b_3, \\ x_1(AB) &= x_1(B) + a_1, \\ x_2(AB) &= x_2(B) + a_2, \\ x_3(AB) &= x_3(B) + a_1 x_2(B) + a_3. \end{aligned}$$

Si deduce facilmente che

$$(L_A)_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi i corrispondenti campi vettoriali invarianti a sinistra sono

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad E_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial x_3},$$

i quali costituiscono una base per l'algebra di Lie di Nil^3 e soddisfano

$$[E_1, E_2] = E_3, \; [E_1, E_3] = [E_2, E_3] = 0.$$

I campi vettoriali (E_1, E_2, E_3) si possono ottenere anche nel modo seguente:

$$\begin{aligned} (E_1)_A = Ae_1 &= \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_3 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_A, \\ (E_2)_A = Ae_2 &= \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_3 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)_A + x_1(A) \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right)_A, \\ (E_3)_A = Ae_3 &= \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_3 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right)_A. \end{aligned}$$

Una metrica riemanniana g su Nil^3 invariante a sinistra si ottiene imponendo che $\{E_1, E_2, E_3\}$ sia una base g-ortonormale. Siccome $\partial_1 = E_1$, $\partial_2 = E_2 - x_1 E_3$ e $\partial_3 = E_3$, posto $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$, si ha $g_{11} = 1$, $g_{22} = 1 + x_1^2$, $g_{33} = 1$, $g_{23} = -x_1$, $g_{12} = g_{13} = 0$. Pertanto,

$$g = \mathrm{d}x_1 \otimes \mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2 \otimes \mathrm{d}x_2 + (\mathrm{d}x_3 - x_1 \mathrm{d}x_2) \otimes (\mathrm{d}x_3 - x_1 \mathrm{d}x_2)$$

è una metrica riemanniana su Nil^3 invariante a sinistra. Si noti che $\omega_1 = \mathrm{d}x_1$, $\omega_2 = \mathrm{d}x_2$, $\omega_3 = \mathrm{d}x_3 - x_1 \mathrm{d}x_2$, sono le 1-forme (invarianti a sinistra) duali di E_1, E_2, E_3. In particolare, ω_3 è una 1-forma di contatto.

Esempio 5.19. Una metrica bi-invariante su $SO(n)$

La metrica euclidea g_0 di $\mathbb{R}^{n,n} \equiv \mathbb{R}^{n^2}$ si può esprimere in termini matriciali in questo modo:

$$g_0(X, Y) = \mathrm{Tr}(X^T Y) = \sum X_{ik} Y_{ik} = \mathrm{Tr}(Y^T X) = \mathrm{Tr}(X Y^T)$$

per ogni $X = (X_{ij}), Y = (Y_{ij}) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n,n})$. Il gruppo di Lie $SO(n)$ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^{n,n}$ e quindi possiamo considerare la metrica riemanniana indotta dalla metrica euclidea che indichiamo con lo stesso simbolo. Per ogni $X, Y \in \mathfrak{so}(n)$ (algebra di Lie di $SO(n)$) e per ogni $A, B \in SO(n)$:

$$\begin{aligned} g_0\big((L_B)_* X_A, (L_B)_* Y_A\big) &= g_0\big(X_{BA}, Y_{BA}\big) = g_0\big(BAX, BAY\big) \\ &= \mathrm{Tr}\big((BAX)^T BAY\big) = \mathrm{Tr}\big(X^T A^T B^T BAY\big) \\ &= \mathrm{Tr}(X^T Y) = g_0(X, Y). \end{aligned}$$

Quindi la metrica indotta su $SO(n)$ è invariante a sinistra. Inoltre, con un calcolo diretto si può vedere che tale metrica è anche invariante a destra tenendo conto che $(R_B)_* X_A = X_{AB} = XAB$, oppure verificando la (5.3).

Esempio 5.20. La metrica iperbolica di $\mathbb{R}^n_+(\cdot)$

Facciamo vedere che la metrica iperbolica di $\mathbb{R}^n_+(\cdot)$ è invariante a sinistra. Per il gruppo di Lie $\mathbb{R}^n_+(\cdot)$ (cfr. Sezione 3.1), le traslazioni sinistre sono definite da

$$L_{(x_o, a_o)} : p = (x, a) \mapsto (x_o, a_o) \cdot (x, a) = (x_o + a_o x, a_o a).$$

Quindi il differenziale $(L_{p_o})_{*p}$, dove $p_o = (x_o, a_o)$, soddisfa

$$(L_{p_o})_{*p} V_p = \sum_j a_o b^j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{p_o p}, \quad \text{dove} \quad V_p = \sum_j b^j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p.$$

Di conseguenza, come già osservato nella Sezione 3.4, i campi vettoriali $(V_i)_p = x_n(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$, $i = 1, ..., n$, sono invarianti a sinistra, dove $x_n(p) = a(p)$ se $p = (x, a)$. Poiché la metrica iperbolica g in $\mathbb{R}^n_+(\cdot)$ è definita da

$$g_p(V_p, W_p) = (1/x_n^2(p)) g_0(V_p, W_p),$$

i campi di vettori $V_i (i = 1, ..., n)$ costituiscono una base g-ortonormale di campi di vettori invarianti a sinistra, e quindi, applicando la Proposizione

5.16, la metrica riemanniana iperbolica g è invariante a sinistra. g non è bi-invariante in quanto, come è facile verificare, non soddisfa la (5.3).

Diamo ora un'altra presentazione dello spazio iperbolico come gruppo di Lie. Sia G il sottogruppo di Lie di $GL(n,\mathbb{R})$ costituito da tutte le matrici del tipo

$$A = \begin{pmatrix} e^{x_n} & 0 & \dots & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & e^{x_n} & 0 & \dots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & e^{x_n} & x_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le cooordinate $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sono coordinate globali su G. Una base di campi vettoriali invarianti a sinistra è data da

$$E_n = c\,\frac{\partial}{\partial x_n}, \quad E_i = c\,e^{x_n}\frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

e la parentesi di Lie soddisfa

$$[E_n, E_i] = c\,E_i, \quad [E_i, E_j] = 0 \ \ \text{(negli altri casi)}.$$

La metrica riemanniana $\tilde{g}$ su G definita da: $\tilde{g}(E_i, E_j) = \delta_{ij}$ è invariante a sinistra ed è isometrica alla metrica iperbolica del semispazio di Poincaré $(\mathbb{R}^n_+, g)$: $\mathbb{R}^n_+ = \{y \in \mathbb{R}^n : y_n > 0\}$ e $g = \frac{1}{(cy_n)^2}\sum_i \mathrm{d}y_i \otimes \mathrm{d}y_i$. L'applicazione $\psi : G \to \mathbb{R}^n_+$ definita da

$$A \equiv (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, e^{x_n}),$$

è un'isometria e un isomorfismo tra gruppi.

5.4 Isometrie dello spazio euclideo e della sfera canonica

Teorema 5.21. *Le isometrie di* $(\mathbb{R}^n, g_0)$ *sono tutte e sole le trasformazioni* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *del tipo*

$$f(x) = h(x) + v$$

dove h *è una trasformazione ortogonale e* v *è un fissato elemento di* $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Indichiamo con $\|\cdot\|$ e con d_0 rispettivamente la norma e la distanza euclidea di $\mathbb{R}^n$. Ricordiamo che un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale se, e solo se,

$$\|h(x)\| = \|x\|, \ \text{ equivalentemente } \ g_0(x,y) = g_0(hx, hy), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Sia f un'applicazione del tipo

$$f(x) = h(x) + v,$$

dove h è una trasformazione ortogonale e v è un fissato elemento di $\mathbb{R}^n$. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} d_0(f(x), f(y)) &= \|f(x) - f(y)\| = \|h(x) - h(y)\| = \|h(x-y)\| \\ &= \|x - y\| = d_0(x, y)\,, \end{aligned}$$

e quindi f è un'isometria per $(\mathbb{R}^n, g_0)$. Oppure, bastava osservare che il differenziale $f_* = h$. Viceversa, sia ora $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una isometria. Basta provare che l'applicazione $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ così definita:

$$h(x) = f(x) - f(0)$$

è una trasformazione ortogonale. Poiché f è una isometria, f conserva le distanze e quindi per ogni $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|h(x)\| = \|f(x) - f(0)\| = d_0(f(x), f(0)) = d_0(x, 0) = \|x - 0\| = \|x\|.$$

Inoltre, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\|h(x) - h(y)\| = \|f(x) - f(y)\| = d_0(f(x), f(y)) = d_0(x, y) = \|x - y\|,$$

$$\|x - y\|^2 = g_0(x - y, x - y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2g_0(x, y),$$

$$\|h(x) - h(y)\|^2 = \|h(x)\|^2 + \|h(y)\|^2 - 2g_0(h(x), h(y)).$$

Quindi,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \quad g_0(h(x), h(y)) = g_0(x, y).$$

Sia ora $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, poiché h conserva il prodotto scalare anche $\{h(e_1), \ldots, h(e_n)\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. L'applicazione h è lineare in quanto, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum x_i e_i$, si ha:

$$h(x) = \textstyle\sum_i g_0(h(x), h(e_i))h(e_i) = \sum_i g_0(x, e_i)h(e_i) = \sum_i x_i h(e_i).$$

□

Teorema 5.22. *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\mathcal{B} = \{e_i\}$, $\mathcal{B}' = \{e'_i\}$ basi ortonormali ordinate di $T_x\mathbb{R}^n$ e $T_y\mathbb{R}^n$ rispettivamente, esiste $f \in Iso(\mathbb{R}^n, g_0)$ tale che $f(x) = y$ e $f_*e_i = e'_i$ per ogni $i = 1, ..., n$. In particolare, lo spazio euclideo è omogeneo e isotropo.*

Dimostrazione. Fissati $x, y \in \mathbb{R}^n$, siano $\mathcal{B} = \{e_i\}$, $\mathcal{B}' = \{e'_i\}$ basi ortonormali ordinate di $T_x\mathbb{R}^n$ e $T_y\mathbb{R}^n$ rispettivamente. Identifichiamo i vettori tangenti $e_i \in T_x\mathbb{R}^n$ e ${e'}_i \in T_y\mathbb{R}^n$ con le loro parti vettoriali. Consideriamo la trasformazione ortogonale h definita da $he_i = e'_i$ $\forall i = 1 \ldots n$. Posto $v = (y - hx) \in \mathbb{R}^n$, l'isometria $f = h + v$ verifica: $f(x) = h(x) + v = y$, $f_* = h$ e quindi $f_*e_i = e'_i$. □

Il gruppo euclideo $E(n)$

Diamo ora una diversa presentazione del gruppo delle isometrie dello spazio euclideo. Sia

$$E(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \in O(n), v \in \mathbb{R}^n \right\},$$

dove v è pensato come matrice colonna. $E(n)$ è un sottogruppo di $GL(n+1, \mathbb{R})(\cdot)$ che viene detto *gruppo euclideo*. Quindi, $E(n)$ è un gruppo rispetto al prodotto:

$$\begin{pmatrix} A' & v' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'A & A'v + v' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$E(n)$ agisce su $\mathbb{R}^n$, quando $\mathbb{R}^n$ è identificato con $\{(x,1) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ x \in \mathbb{R}^n\}$, in questo modo:

$$\begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + v \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sia $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. Ricordiamo che una trasformazione lineare h di $\mathbb{R}^n$ è ortogonale se, e solo se, la matrice $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(h) \in O(n)$. Un'isometria $f \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ è data da $f = h + v$ con h trasformazione ortogonale e $v \in \mathbb{R}^n$. Inoltre, per ogni $f, f' \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$, $f = h + v$, $f' = h' + v'$, si ha

$$f' \circ f = h' \circ h + h'v + v'.$$

Pertanto, la corrispondenza

$$\Phi : \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n) \to E(n) \quad \text{t.c.} \quad f = h + v \longmapsto \Phi(f) = \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è un isomorfismo tra gruppi. Abbiamo quindi la seguente proposizione.

Proposizione 5.23. *$E(n)$ è isomorfo a Iso$(\mathbb{R}^n)$.*

Inoltre, abbiamo

Proposizione 5.24. *Il gruppo euclideo $E(n)$ è isomorfo al prodotto semidiretto $\mathbb{R}^n(+) \rtimes_\alpha O(n)(\cdot)$, dove α denota l'azione naturale di $O(n)$ su $\mathbb{R}^n(+)$:*

$$\forall A \in O(n), \quad \alpha_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, v \mapsto \alpha_A(v) = Av.$$

Dimostrazione. Per ogni $A \in O(n)$, α_A è un automorfismo e

$$\alpha_{AA'} = \alpha_A \circ \alpha_{A'} \quad \forall A, A' \in O(n).$$

Ricordiamo che il prodotto semidiretto $O(n) \rtimes_\alpha \mathbb{R}^n(+)$ (cfr. Sezione 3.1) è definito nel modo seguente.

$$\forall\, (v, A), (v', A') \in \mathbb{R}^n(+) \rtimes_\alpha O(n) :$$

$$(v, A) \cdot (v', A') = (v + \alpha_A v', A \cdot A') = (v + Av', A \cdot A').$$

Allora, l'applicazione $\psi : E(n) \to \mathbb{R}^n \rtimes_\alpha O(n)$ definita da

$$\psi : \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto (v, A),$$

soddisfa:

$$\psi(\begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A' & v' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \psi \begin{pmatrix} AA' & Av' + v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (Av' + v, AA').$$

Pertanto, ψ definisce un isomorfismo tra $E(n)$ e $\mathbb{R}^n(+) \rtimes_\alpha O(n)$. □

Osservazione 5.25. Per $n = 2$, con $E(2)$ spesso viene indicato anche il gruppo euclideo speciale $\mathbb{R}^2(+) \rtimes_\alpha SO(2)$, dove l'azione di $SO(2)$ su $\mathbb{R}^2$ è definita da

$$\alpha(t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{con} \quad \alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in SO(2).$$

Il seguente teorema classifica le isometrie della sfera canonica.

Teorema 5.26. *Le isometrie di $(\mathbb{S}^n, g)$, $g = i^* g_0$, sono tutte e sole le restrizioni a $\mathbb{S}^n$ delle trasformazioni ortogonali di $\mathbb{R}^{n+1}$. Quindi, Iso$(\mathbb{S}^n)$ si può identificare con $O(n+1)$.*

Dimostrazione. Sia $h : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ una trasformazione ortogonale, allora h è un'isometria di $(\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$ e $h(0) = 0$. Di conseguenza $h(\mathbb{S}^n) = \mathbb{S}^n$. Infatti:

$$\|h^{-1}(x)\| = \|x\| = \|h(x)\| \;\Rightarrow\; h(\mathbb{S}^n) \subset \mathbb{S}^n \text{ e } h^{-1}(\mathbb{S}^n) \subset \mathbb{S}^n \;\Rightarrow\; h(\mathbb{S}^n) = \mathbb{S}^n.$$

Inoltre $h_1 = h_{|\mathbb{S}^n}$ è un diffeomorfismo di $\mathbb{S}^n$ e dalla commutatività del diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \overset{i}{\hookrightarrow} & \mathbb{R}^{n+1} \\ h_1 \Big\downarrow & & \Big\downarrow h, \\ \mathbb{S}^n & \overset{i}{\hookrightarrow} & \mathbb{R}^{n+1} \end{array} \qquad \text{cioè} \quad h \circ i = i \circ h_1,$$

si ottiene che h_1 è un'isometria di $\mathbb{S}^n$:

$$h_1^* g = h_1^* i^* g_0 = (i \circ h_1)^* g_0 = (h \circ i)^* g_0 = i^* h^* g_0 = i^* g_0 = g.$$

Viceversa, sia ora f un'isometria di $(\mathbb{S}^n, g)$. Proviamo che f è la restrizione ad $\mathbb{S}^n$ di una trasformazione ortogonale h di $\mathbb{R}^{n+1}$. Ricordiamo che la distanza su $\mathbb{S}^n$ è definita in questo modo:

$$d(x, y) = \vartheta(\widehat{x, y}) \quad \forall x, y \in \mathbb{S}^n,$$

dove ϑ è l'angolo convesso tra x e y. Poiché f è un'isometria di $\mathbb{S}^n$:

$$\vartheta(\widehat{x,y}) = \vartheta(\widehat{f(x),f(y)})$$

e quindi

$$g_0(x,y) = g_0(f(x), f(y)) \qquad \forall x, y \in \mathbb{S}^n,$$

cioè f conserva il prodotto scalare di vettori unitari di $\mathbb{R}^{n+1}$. Definiamo

$$h : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1},\ x \mapsto h(x) := \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ \|x\| f(\frac{x}{\|x\|}) & \text{se} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Allora $h_{|\mathbb{S}^n} = f$. Inoltre h conserva il prodotto scalare di $\mathbb{R}^{n+1}$, infatti per $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}, x, y \neq 0$,

$$g_0(hx, hy) = \|x\| \cdot \|y\| \; g_0\left(f\left(\frac{x}{\|x\|}\right), f\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right) = g_0(x,y).$$

Poiché h conserva il prodotto scalare, come visto nella dimostrazione del Teorema 5.21, h è lineare e quindi una trasformazione ortogonale. □

Teorema 5.27. *Per ogni $p, q \in \mathbb{S}^n$ e per ogni $\mathcal{B} = \{v_i\}, \mathcal{B}' = \{w_i\}$ basi ortonormali ordinate di $T_p\mathbb{S}^n$ e $T_q\mathbb{S}^n$ rispettivamente, esiste $f \in O(n+1)$ tale che $f(p) = q$ e $f_* v_i = w_i, i = 1, \dots, n$. In particolare, $\mathbb{S}^n$ è uno spazio omogeneo e isotropo.*

Dimostrazione. Siano $p, q \in \mathbb{S}^n$ e $\mathcal{B} = \{v_i\}$, $\mathcal{B}' = \{w_i\}$ basi ortonormali ordinate di $T_p\mathbb{S}^n$ e $T_q\mathbb{S}^n$ rispettivamente. Possiamo pensare $v = p$ e $w = q$ come vettori unitari ortogonali a $T_p\mathbb{S}^n$ e $T_q\mathbb{S}^n$ rispettivamente. Pertanto $\mathcal{B}_1 = \{v, v_i\}$, $\mathcal{B}'_1 = \{w, w_i\}$ sono basi ortonormali di $T_p\mathbb{R}^{n+1} \equiv \mathbb{R}^{n+1}$ e $T_q\mathbb{R}^{n+1} \equiv \mathbb{R}^{n+1}$. Consideriamo la trasformazione ortogonale $f \in O(n+1)$ definita da $fv = w$ e $fv_i = w_i$. Tale trasformazione definisce una isometria di $\mathbb{S}^n$ che soddisfa $\; f(p) = q \;$ e $\; f_* v_i = f v_i = w_i$. □

Osservazione 5.28. Dalla dimostrazione del Teorema 5.27 segue che anche $SO(n+1)$ agisce transitivamente su $\mathbb{S}^n$. Infatti, sostituendo in $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ (se necessario) v_1 con $-v_1$ e w_1 con $-w_1$, possiamo assumere $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}'_1$ basi ortonormali positive e di conseguenza sarà $\det f = +1$.

Esercizio 5.29. Sia λ un numero complesso unitario. Si verifichi che l'applicazione $f_\lambda : z \mapsto \lambda z$ è un'isometria della sfera unitaria $\mathbb{S}^{2n+1}$.

5.5 Isometrie dello spazio iperbolico

Isometrie del modello iperbolico H^n

Consideriamo lo spazio di Minkowski $\mathbb{R}^{n+1}_1 = (\mathbb{R}^{n+1}, q)$, dove q è la metrica di segnatura $(n, 1)$. Sia $O(n,1)$ il gruppo delle matrici che corrispondono alle trasformazioni lineari di $\mathbb{R}^{n+1}$ che conservano q:

$$O(n,1) = \{A : q(Ax, Ay) = q(x,y)\}.$$

Posto $\bar{I}_{n+1} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, risulta

$$O(n,1) = \{A \in GL(n+1,\mathbb{R}) : A^t \cdot \bar{I}_{n+1} \cdot A = \bar{I}_{n+1}\}.$$

$O(n,1)$ è il gruppo di Lorentz della fisica (cfr. [78], p. 235) ed è un gruppo di Lie di dimensione $n(n+1)/2$ uguale alla dimensione di $O(n+1)$. Gli elementi di $O(n,1)$ applicano l'iperboloide a due fogli $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : q(x,x) = -1\}$ in sè. Tale iperboloide ha due componenti connesse. Sia $O_+(n,1)$ il sottogruppo di $O(n,1)$ costituito dalle trasformazioni di Lorentz che applicano H^n (cioè la componente con $x_{n+1} > 0$) in sè:

$$O_+(n,1) = \{A \in O(n,1) : A(H^n) = H^n\}.$$

Sia

$$SO_+(n,1) = \{A \in O_+(n,1) : detA = +1\}.$$

Si noti che $O(n,1)$ ha 4 componenti connesse ($\det A = \pm 1$, A applica H^n in sè oppure no). $O(n,1)$ è l'analogo del gruppo ortogonale $O(n+1)$ di $(\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$ che ha due componenti connesse. Inoltre, mentre $O(n+1)$ è compatto, $O(n,1)$ non è compatto. Ad esempio, elementi di $O(2,1)$ del tipo

$$\begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix}$$

costituiscono un sottoinsieme illimitato di $\mathbb{R}^{3,3}$.

Sia $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^{n+1}, q)$ il gruppo di isometrie dello spazio di Minkowski. Come nel caso euclideo:

$$f \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^{n+1}, q) \Leftrightarrow \|f(x) - f(y)\|_q^2 = \|x - y\|_q^2 \Leftrightarrow f = h + v,$$

dove $h \in O(n,1)$ e $v \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Sia

$$E(n,1) = \left\{ \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \in O(n,1), v \in \mathbb{R}^{n+1} \right\},$$

$E(n,1)$ è un sottogruppo di $GL(n+2,\mathbb{R})(\cdot)$. Come nel caso euclideo, i gruppi

$$\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^{n+1}, q), \quad E(n,1) \ \text{ e } \ \mathbb{R}^{n+1} \rtimes_\alpha O(n,1)$$

sono isomorfi. Nel caso particolare di $n = 1$, si ha

$$A \in O(1,1) \Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ tale che } A^t \bar{I}_2 A = \bar{I}_2, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}.$$

$$A^t \bar{I}_2 A = \bar{I}_2 \Longleftrightarrow a^2 - c^2 = 1, \quad d^2 - b^2 = 1 \ \ e \ \ ab - cd = 0$$

$$\Longleftrightarrow c = b \quad \text{e} \quad d = a \quad \text{oppure} \quad c = -b \quad \text{e} \quad d = -a, \ \ a^2 - c^2 = 1$$

$$\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad a^2 - b^2 = 1$$

$$\iff A = \pm \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad A = \pm \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ \sinh t & -\cosh t \end{pmatrix},$$

dove $2\cosh t = e^t + e^{-t}$, $2\sinh t = e^t - e^{-t}$ e quindi $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, $t \in \mathbb{R}$. $O(1,1)$ ha 4 componenti connesse che corrispondono ai 4 rami delle due iperboli $a^2 - b^2 = 1$ e $a^2 - b^2 = -1$. Infine, si noti che con $E(1,1)$ spesso si indica anche il *gruppo speciale delle isometrie del piano di Minkowski*, ossia il prodotto semidiretto

$$\mathbb{R}^2(+) \rtimes_\alpha \mathbb{R}(+), \text{ dove } \alpha(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}.$$

Teorema 5.30. *Le isometrie dello spazio iperbolico $(H^n, g = i^*q)$ sono tutte e sole le restrizioni ad H^n degli elementi di $O_+(n,1)$. Quindi, Iso(H^n) si può identificare con $O_+(n,1)$.*

Dimostrazione. Sia $\tilde{f} \in O_+(n,1)$, allora $\tilde{f}(H^n) = H^n$ e quindi abbiamo $f = \tilde{f}_{|H^n} : H^n \to H^n$. Inoltre, f è un diffeomorfismo e soddisfa

$$f^*g = f^*i^*q = (i \circ f)^*q = (\tilde{f} \circ i)^*q = i^*\tilde{f}^*q = i^*q = g.$$

Pertanto f è un'isometria di H^n. Viceversa, sia $f \in \mathrm{Iso}(H^n)$ e, dato $x \in H^n$, sia $y = f(x)$. Consideriamo $\{e_i\}$ base ortonormale di $T_x(H^n)$ e quindi $\{v_i = f_{*x}e_i\}$ base ortonormale di $T_y(H^n)$. Poiché $e_0 = x$ ha $\|e_0\|_q^2 = -1$ ed è ortogonale (rispetto a q) a T_xH^n, analogamente per $v_0 = y$, allora $\{e_0, e_i\}, \{v_0, v_i\}$ si possono pensare come basi ortonormali di $(\mathbb{R}^{n+1}, q)$. Consideriamo la trasformazione $F \in O_+(n,1)$ definita da $Fx = y$ e $Fe_i = v_i = f_{*x}e_i$. Posto $F_0 = F_{|H^n}$, $F_0 \in \mathrm{Iso}(H^n)$; inoltre $F_0(x) = y = f(x)$, $(F_0)_{*x} = F = f_{*x}$. Poiché un'isometria di una varietà riemanniana è univocamente determinata dal suo valore in un punto p e dal suo differenziale nello stesso punto p (cfr. Proposizione 7.37), $f = F_0$ cioè f è la restrizione a H^n di una $F \in O_+(n,1)$. □

Teorema 5.31. *Per ogni $x, y \in H^n$ e per ogni $\mathcal{B} = \{v_i\}$, $\mathcal{B}' = \{w_i\}$ basi ortonormali ordinate di T_xH^n e T_yH^n rispettivamente, esiste $f \in O_+(n,1) =$ Iso(H^n) tale che $f(x) = y$ e $f_*v_i = w_i, i = 1, \dots, n$. In particolare, lo spazio iperbolico H^n è omogeneo e isotropo.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in H^n$ e $\mathcal{B} = \{v_i\}$, $\mathcal{B}' = \{w_i\}$ basi ortonormali come nell'enunciato. Possiamo pensare $v = x$ e $w = y$ come vettori q-ortogonali a T_xH^n e T_yH^n rispettivamente e con $\|x\|_q^2 = \|y\|_q^2 = -1$. Pertanto, $\mathcal{B}_1 = \{v, v_i\}$, $\mathcal{B}'{}_1 = \{w, w_i\}$ sono basi q-ortonormali di $T_x\mathbb{R}^{n+1} \equiv \mathbb{R}^{n+1}$ e $T_y\mathbb{R}^{n+1} \equiv \mathbb{R}^{n+1}$ rispettivamente. Consideriamo la trasformazione lineare f tale che $f(v) = w$ e $f(v_i) = w_i$. $f \in O_+(n,1)$ in quanto trasforma $\mathcal{B}_1$ base q-ortonormale in $\mathcal{B}'_1$ base q-ortonormale e inoltre $f(x) = y$ con $x, y \in H^n$. Si noti che anche $SO_+(n,1)$ agisce transitivamente su H^n. Infatti, sostituendo in $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ (se necessario) v_1 con $-v_1$ e w_1 con $-w_1$, possiamo assumere $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}'_1$ basi q-ortonormali positive e di conseguenza sarà $\det f = +1$. $\square$

Isometrie del modello iperbolico $\mathbb{R}^n_+$

Le isometrie del modello iperbolico $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ sono relative alle applicazioni conformi di $\mathbb{R}^n$. Ricordiamo che la metrica iperbolica di $\mathbb{R}^n_+$ è $g = (1/x_n^2)g_0$.

Definizione 5.32. Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$. Un'applicazione differenziabile $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dice *conforme* se il suo *differenziale conserva gli angoli*:

$$\forall p \in A \quad \text{e} \quad \forall v, w \in T_pA \equiv \mathbb{R}^n : \vartheta(\widehat{v, w}) = \vartheta(\widehat{f_{*p}v, f_{*p}w})$$

Esercizio 5.33. Sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile con A aperto di $\mathbb{R}^n$. Si verifichi che le seguenti proprietà sono equivalenti:
1) f è conforme;
2) $\|f_{*p}v\| = \lambda(p)\|v\|$ con $\lambda(p) > 0$, $\forall p \in A$ *e* $\forall v \in T_pA$;
3) $g_0(f_{*p}v, f_{*p}w) = \lambda^2(p)g_0(v,w)$, $\forall p \in A$ *e* $\forall v, w \in T_pA$.
La 3) si può anche esprimere nella forma $f^*g_0 = \lambda^2 g_0$. La funzione positiva $\lambda : A \to \mathbb{R},\ p \mapsto \lambda(p)$, si dice *coefficiente* dell'applicazione conforme.

Esempio 5.34. Le isometrie dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ sono applicazioni conformi con coefficiente $\lambda = 1$.

Esempio 5.35. Le dilatazioni (dette anche omotetie), ossia le trasformazioni di $\mathbb{R}^n$ del tipo $f(x) = kx + v$, sono applicazioni conformi con coefficiente $\lambda = k =$cost.> 0. Più in generale, le similitudini, ossia le trasformazioni di $\mathbb{R}^n$ del tipo $f(x) = kAx + v$, con A trasformazione ortogonale, sono applicazioni conformi con coefficiente $\lambda = k =$cost.> 0.

Esempio 5.36. Se $f_1 : A \to A' \subset \mathbb{R}^n$ e $f_2 : A' \to \mathbb{R}^n$ sono applicazioni conformi, con A e A' aperti di $\mathbb{R}^n$, allora $f_2 \circ f_1 : A \to \mathbb{R}^n$ è conforme con coefficiente $\lambda = (\lambda_2 \circ f_1) \cdot \lambda_1$, dove λ_1, λ_2 sono i coefficienti delle applicazioni conformi f_1, f_2 rispettivamente.

Esempio 5.37. L'inversione rispetto alla sfera $\mathbb{S}^{n-1}(x_0, r)$:

$$J : \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}, \quad x \mapsto x_0 + \tfrac{r^2}{\|x-x_0\|^2}(x - x_0),$$

è un'applicazione conforme con coefficiente $\frac{r^2}{\|x-x_0\|^2}$. Per verificare ciò, consideriamo prima il caso dell'inversione J_0 cioè con $x_0 = 0$. Per semplicità assumiamo $n = 2$, analogamente per $n > 2$. Risulta

$$J_0(x) = \frac{r^2}{\|x\|^2}x = \left(y_1 = \frac{r^2 x_1}{x_1^2 + x_2^2}, y_2 = \frac{r^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right),$$

$$(J_0)_{*x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \frac{r^2}{\|x\|^4}\begin{pmatrix} x_2^2 - x_1^2 & -2x_1x_2 \\ -2x_1x_2 & x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix}$$

e

$$
\begin{aligned}
(J_0)_{*x}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \frac{r^2}{\|x\|^4}\begin{pmatrix} (x_2^2 - x_1^2)v_1 - 2x_1x_2v_2 \\ -2x_1x_2v_1 + (x_1^2 - x_2^2)v_2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{r^2}{\|x\|^4}\left\{\|x\|^2\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x_1(v_1x_1 + v_2x_2) \\ 2x_2(v_2x_2 + v_1x_1) \end{pmatrix}\right\}.
\end{aligned}
$$

Pertanto,

$$(J_0)_{*x}v = \frac{r^2}{\|x\|^4}\big(\|x\|^2 v - 2g_0(v,x)x\big)$$

e

$$\|(J_0)_{*x}v\|^2 = \frac{r^4}{\|x\|^4}\|v\|^2.$$

Quindi J_0 è un'applicazione conforme con coefficiente $\lambda = \frac{r^2}{\|x\|^2}$. Consideriamo ora la traslazione $T : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}, x \mapsto T(x) = x_0 + x$. Allora,

$$T \circ J_0 \circ T^{-1}(x) = T\left(r^2\frac{(x-x_0)}{\|x-x_0\|^2}\right) = x_0 + \frac{r^2(x-x_0)}{\|x-x_0\|^2} = J(x)$$

e quindi $J(x)$ è conforme in quanto composizione di applicazioni conformi. Inoltre, J ha coefficiente $\lambda = \dfrac{r^2}{\|x-x_0\|^2}$ (basta applicare il risultato dell'Esempio 5.36).

Per le applicazioni conformi vale il seguente risultato (cfr. [32], p. 170).

Teorema 5.38. (di Liouville) *Se $f : A \to \mathbb{R}^n$, A aperto di $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$, è un'applicazione conforme, allora f è la restrizione ad A di una composizione di isometrie, dilatazioni e inversioni, ognuna delle quali compare al più una volta, di $\mathbb{R}^n$.*

Proposizione 5.39. *L'inversione $J_0(p) = (r^2/\|p\|^2)p$ definisce un'isometria dello spazio iperbolico $(\mathbb{R}^n_+, g)$.*

Dimostrazione. Intanto J_0 applica $\mathbb{R}^n_+$ in $\mathbb{R}^n_+$. Inoltre, poiché J_0 è conforme con coefficiente $\lambda(p) = r^2/\|p\|^2$, per ogni $p \in \mathbb{R}^n_+$ e per ogni $v, w \in T_p\mathbb{R}^n_+$ risulta:

$$
\begin{aligned}
g_{J_0(p)}((J_0)_{*p}v, (J_0)_{*p}w) &= \frac{1}{x_n^2(J_0(p))}g_0((J_0)_{*p}v, (J_0)_{*p}w) \\
&= \frac{\|p\|^4}{r^4x_n^2(p)}g_0((J_0)_{*p}v, (J_0)_{*p}w) \\
&= \frac{1}{x_n^2(p)}g_0(v,w) \\
&= g_p(v,w).
\end{aligned}
$$

□

Proposizione 5.40. *Le seguenti applicazioni, accanto sono presentate con notazione complessa* ($z = x+iy$)*, sono isometrie del piano iperbolico* $(\mathbb{R}^2_+, g)$*.*

1) $f_1 = J : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+,\ p = (x, y) \mapsto (r^2/\|p\|^2)p;\ \ J(z) = r^2/\bar{z}.$

2) $f_2 : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+,\ p = (x, y) \mapsto (-x, y);\ \ f_2(z) = -\bar{z}.$

3) $f_3 : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+,\ p = (x, y) \mapsto (x + a, y);\ \ f_3(z) = z + a.$

4) $f_4 : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+,\ p = (x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y),\ \lambda = \mathrm{cost} > 0;\ \ f_4(z) = \lambda z.$

Dimostrazione. La f_1 è un'inversione, quindi un'isometria (applicando la Proposizione 5.39). Le applicazioni f_2, f_3, f_4, che sono rispettivamente una simmetria (rispetto all'asse y), una traslazione (parallela all'asse x) e una dilatazione, si vede facilmente che sono isometrie del piano iperbolico. □

Sia ora $f : (\mathbb{R}^n_+, g) \to (\mathbb{R}^n_+, g)$ un'isometria per la metrica iperbolica. Allora,

$$g_p(v, w) = g_{f(p)}(f_{*p}v, f_{*p}w) \Rightarrow g_0(f_{*p}v, f_{*p}w) = \tfrac{x_n^2(f(p))}{x_n^2(p)} g_0(v, w)$$

per ogni $p \in \mathbb{R}^n_+$ e per ogni $v, w \in T_p\mathbb{R}^n$. Quindi f è un'applicazione conforme. Più in generale vale il seguente teorema.

Teorema 5.41. ([32], p. 175) *Le isometrie di* $(\mathbb{R}^n_+, g)$ *sono tutte e sole le restrizioni a* $\mathbb{R}^n_+$ *delle applicazioni conformi di* $\mathbb{R}^n$ *che applicano* $\mathbb{R}^n_+$ *in* $\mathbb{R}^n_+$*.*

Osservazione 5.42. Per quanto visto nella Sezione 4.4, la proiezione stereografica iperbolica, che indichiamo con ψ, definisce un'isometria tra lo spazio iperbolico H^n e il modello di Poincaré $\triangle^n$. Quindi $\mathrm{Iso}(\triangle^n) = \{\psi \circ f \circ \psi^{-1} : f \in \mathrm{Iso}(H^n)\}$. Analogamente, l'inversione (rispetto alla sfera di centro $x_0 = (0, ..., 0, -1)$ e raggio $r = \sqrt{2}$) e la proiezione stereografica iperbolica definiscono un'isometria, che indichiamo con ϕ, tra lo spazio iperbolico H^n e il modello di Poincaré $\mathbb{R}^n_+$. Quindi,

$$\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n_+) = \{\phi \circ f \circ \phi^{-1} : f \in Iso(H^n)\}.$$

Inoltre, poiché H^n è omogeneo e isotropo, anche i modelli iperbolici $\mathbb{R}^n_+$ e $\triangle^n$ sono omogenei e isotropi in quanto isometrici ad H^n.

5.6 Trasformazioni di Möbius e isometrie del piano iperbolico

In questa sezione esaminiamo più in dettaglio le isometrie del piano iperbolico $\mathbb{R}^2_+$. Trasformazioni del tipo

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z) = (az + b)/(cz + d),$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, sono dette *trasformazioni di Möbius.* Esse sono invertibili con

$$f^{-1}(z) = (dz - b)/(a - cz).$$

Se $c \neq 0$:
$$f(z) = \alpha + \beta/(cz+d), \text{ dove } \alpha = a/c \text{ e } \beta = (bc-ad)/c.$$
Se $c = 0$:
$$f(z) = \alpha z + \beta, \text{ dove } \alpha = a/d \text{ e } \beta = b/d.$$
Quindi $f(z)$ si può esprimere come composizione di trasformazioni di Möbius "semplici" del tipo:
$$\psi_1(z) = z + b, \quad b \in \mathbb{C} \quad \text{(traslazione)}; \quad \psi_2(z) = e^{i\vartheta}z \quad \text{(rotazione)};$$
$$\psi_3(z) = \rho z, \quad \rho > 0 \quad \text{(dilatazione)}; \quad \psi_4(z) = 1/z.$$
Si noti che la trasformazione $f(z) = az, a \in \mathbb{C}$, è composizione di trasformazioni del tipo ψ_2 e ψ_3. In particolare, le trasformazioni di Möbius reali
$$f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+, \quad z \longmapsto (az+b)/(cz+d), \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc > 0,$$
in coordinate reali
$$z = (x,y) \longrightarrow \left(\frac{ac(x^2+y^2) + (ad+bc)x + db}{(cx+d)^2 + (cy)^2}, \frac{(ad-bc)y}{(cx+d)^2+(cy)^2} \right),$$
sono isometrie per $(\mathbb{R}^2_+, g)$. Infatti, ogni trasformazione di Möbius reale è composizione di trasformazioni del seguente tipo:
$$\varphi_1(z) = z + b, \ b \in \mathbb{R} \text{ (traslazioni)},$$
$$\varphi_2(z) = az, \ a > 0 \text{ (dilatazioni)}; \ \varphi_3(z) = -1/z,$$
le quali sono isometrie per la metrica iperbolica. Si noti che anche la trasformazione φ_3 è un'isometria del piano iperbolico in quanto composizione di un'inversione ($z \mapsto \frac{1}{\bar z}$) e di una simmetria ($z \mapsto -\bar z$).
Poiché la simmetria $s : z \to -\bar z$ è un'isometria del piano iperbolico, allora anche le trasformazioni di Möbius del tipo:
$$s \circ f(z) = -(a\bar z + b)/(c\bar z + d), \quad \text{con} \quad ad - bc > 0,$$
sono isometrie per $(\mathbb{R}^2_+, g)$. Più precisamente, si dimostra il seguente teorema (cfr. [104], p. 141).

Teorema 5.43. (di Poincaré) *Le isometrie del piano iperbolico* $(\mathbb{R}^2_+, g)$ *sono tutte e sole le trasformazioni di Möbius reali del tipo:*
$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc > 0; \quad \textit{oppure} \quad f(z) = \frac{a\bar z + b}{c\bar z + d}, \quad ad - bc < 0.$$

Poniamo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Poiché
$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} \quad \text{e} \quad \frac{\lambda a\bar z + \lambda b}{\lambda c\bar z + \lambda d} = \frac{a\bar z + b}{c\bar z + d} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda \neq 0,$$

il gruppo $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2_+, g) = \mathrm{Iso}^+ \cup \mathrm{Iso}^-$, ossia si può esprimere con

$$\{f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},\ \det A = 1\} \cup \{f : z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d},\ \det A = -1\}.$$

Iso^+ è un sottogruppo di $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2_+, g)$. Si vede subito che

$$Is^+ \cap Is^- = \emptyset \ \text{ e } \ Is^- = \{s \circ f : f \in Is^+\}, \text{dove}\, s : z \to -\bar{z}.$$

Consideriamo i seguenti sottogruppi di $GL(2, \mathbb{R})$:

$$SL(2,\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} : \det A = +1 \right\}$$

e

$$L(2,\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} : \det A = \pm 1 \right\}.$$

L'applicazione $\Phi : L(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2_+, g)$ tale che:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \Big(f : z \mapsto (az+b)/(cz+d)\Big) \quad \text{se} \quad detA = 1,$$

e

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \Big(f : z \mapsto (a\bar{z}+b)/(c\bar{z}+d)\Big) \quad \text{se} \quad detA = -1,$$

è un omomorfismo suriettivo con

$$\ker \Phi = \big\{A : \Phi(A) = I\big\} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Di conseguenza, l'epimorfismo Φ induce l'isomorfismo

$$\tilde{\Phi} : L(2,\mathbb{R})/\{\pm Id\} \to \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2_+, g), \quad [A] \to \Phi(A).$$

Si può dimostrare (cfr. [62], p. 45]) che:

$$PSL(2,\mathbb{R}) := SL(2,\mathbb{R})/\{\pm I\} \quad \text{è isomorfo a} \quad SO_+(2,1),$$

e quindi opera transitivamente su $\mathbb{R}^2_+$.

Isometrie del modello iperbolico nel disco $\triangle^2$

La metrica iperbolica di $\triangle^n$ è ottenuta da quella di $\mathbb{R}^n_+$ mediante l'inversione $J : \triangle^n \to \mathbb{R}^n_+$, $Jx = x_0 + \frac{2}{\|x-x_0\|^2}(x - x_0)$ con $x_0 = (0, \ldots 0, -1)$, che di conseguenza sarà un'isometria. Per $n = 2$, in coordinate complesse:

$$J : \triangle^2 \to \mathbb{R}^2_+,\ z \mapsto Jz = -i(\bar{z}+i)/(\bar{z}-i).$$

Consideriamo $c : \triangle^2 \to \triangle^2$, $z \longmapsto c(z) = \bar{z}$, coniugazione complessa; c è un'isometria del disco iperbolico (in quanto è un'isometria lineare del piano euclideo). Quindi $u : \mathbb{R}^2_+ \to \triangle^2$ definita da $u = c \circ J$ è un'isometria e $u(z) = \frac{iz+1}{z+i}$. L'isometria inversa è $v(z) = u^{-1}(z) = \frac{iz-1}{-z+i}$. Di conseguenza,

$$\mathrm{Iso}(\triangle^2) = \{\tilde{f} = u \circ f \circ v : f \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2_+)\}.$$

Tenendo conto del Teorema 5.43 che descrive le isometrie di $\mathbb{R}^2_+$, si ottiene la seguente proposizione (cfr. anche [104], p. 215).

Proposizione 5.44. *Le isometrie del disco iperbolico sono le trasformazioni di Möbius del tipo:*

$$f(z) = (a\bar{z} + \bar{b})/(b\bar{z} + \bar{a}), \quad \textit{oppure} \quad f(z) = (-a\bar{z} + \bar{b})/(-b\bar{z} + \bar{a}), \quad a, b \in \mathbb{C},$$

$$\textit{con} \quad |a|^2 - |b|^2 > 0 \quad (\textit{che in particolare si può porre} = 1).$$

5.7 Rivestimenti riemanniani

Siano M, $\tilde{M}$ due varietà differenziabili. Ricordiamo che un'applicazione differenziabile $p : \tilde{M} \to M$ è detta applicazione di rivestimento se per ogni $x \in M$ esiste un intorno aperto U di x tale che $p^{-1}(U)$ sia unione disgiunta di aperti $\tilde{U}_i$ (di $\tilde{M}$) con $p_{|\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i \to U$ diffeomorfismo per ogni i. Gli aperti $\tilde{U}_i$ si dicono fogli su U, U è detto aperto "ben coperto"e $p^{-1}(x)$ è detta fibra su x.

Definizione 5.45. Siano (M, g), $(\tilde{M}, \tilde{g})$ due varietà riemanniane. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ si dice *rivestimento riemanniano* di (M, g) con proiezione $p : \tilde{M} \to M$ se p è un'applicazione di rivestimento e inoltre $p^*g = \tilde{g}$.

Nel caso di un rivestimento riemanniano, $p : \tilde{M} \to M$ è un'isometria locale e se $f : \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}$ è una trasformazione di rivestimento, cioè $p \circ f = p$, allora f è un'isometria di $(\tilde{M}, \tilde{g})$.

Proposizione 5.46. *Siano M, $\tilde{M}$ due varietà differenziabili e $p : \tilde{M} \to M$ un'applicazine di rivestimento. Se g è una metrica riemanniana su M, allora esiste un'unica metrica $\tilde{g}$ su $\tilde{M}$ tale che $(\tilde{M}, \tilde{g})$ sia rivestimento riemanniano di (M, g).*

Dimostrazione. L'unicità segue dal fatto che la metrica $\tilde{g}$ verifica la proprietà $p^*g = \tilde{g}$. Per l'esistenza basta provare che $\tilde{g} := p^*g$ è una metrica riemanniana. Dalla definizione segue facilmente che $\tilde{g}$ è un tensore covariante di ordine 2 simmetrico. Inoltre, $\tilde{g}$ è definito positivo in quanto p è un diffeomorfismo locale e quindi $(p_*)_{\tilde{x}}$ è un isomorfismo per ogni $\tilde{x} \in \tilde{M}$. □

In generale, se $p : \tilde{M} \to M$ è un'applicazione di rivestimento, una metrica riemanniana $\tilde{g}$ su $\tilde{M}$ non induce una metrica riemanniana su M. Tuttavia, in alcuni casi, ciò accade come risulta dalla seguente proposizione.

Proposizione 5.47. *Siano M, $\tilde{M}$ due varietà differenziabili e $p : \tilde{M} \to M$ un'applicazione di rivestimento. Se $\tilde{g}$ è una metrica riemanniana su $\tilde{M}$ e il* *rivestimento è definito da un gruppo G discreto e propriamente discontinuo di isometrie di $(\tilde{M}, \tilde{g})$, allora esiste un'unica metrica g su M tale che $(\tilde{M}, \tilde{g})$ sia rivestimento riemanniano di (M, g) con proiezione p.*

Dimostrazione. Nel caso in esame, $M = \tilde{M}/G$ e l'applicazione di rivestimento $p : \tilde{M} \to M = \tilde{M}/G$ è la proiezione definita da $p(\tilde{x}) = G\tilde{x}$ (orbita di $\tilde{x}$ rispetto all'azione di G). Se U è un aperto "ben coperto" di M, i fogli su U sono del tipo $f\tilde{U}$ con $f \in G$ e $\tilde{U}$ aperto di $\tilde{M}$. Inoltre, gli elementi di G sono trasformazioni di rivestimento. Consideriamo un foglio $\tilde{U}_1$ su U, $\tilde{U}_1 = f_1\tilde{U}$ con $f_1 \in G$, e il diffeomorfismo $p_1 = p_{|\tilde{U}_1} : \tilde{U}_1 \to U$. Ponendo

$$g = ({p_1}^{-1})^*\tilde{g}_1, \quad \text{dove} \quad \tilde{g}_1 = \tilde{g}_{|\tilde{U}_1},$$

otteniamo una metrica riemanniana sull'aperto U. Tale definizione di g su U non dipende dalla scelta del foglio. Sia $\tilde{U}_2 = f_2\tilde{U}$, $f_2 \in G$, un altro foglio su U e sia $p_2 = p_{|\tilde{U}_2} : \tilde{U}_2 \to U$ il diffeomorfismo corrispondente. Allora, l'isometria $f = f_2 \circ {f_1}^{-1}$ verifica le proprietà

$$f(\tilde{U}_1) = \tilde{U}_2 \quad \text{e} \quad p_2 \circ f_{|\tilde{U}_1} = p_1 \quad \text{cioè} \qquad f_{|\tilde{U}_1} \circ {p_1}^{-1} = {p_2}^{-1}$$

e quindi (denotando, con abuso di notazione, $f_{|\tilde{U}_1}$ con f) si ha:

$$({p_2}^{-1})^*\tilde{g}_2 = (f \circ {p_1}^{-1})^*\tilde{g}_2 = ({p_1}^{-1})^* f^*\tilde{g}_2 = ({p_1}^{-1})^*\tilde{g}_1.$$

Inoltre, se U e U' sono due aperti "ben coperti" a intersezione non vuota, indicate con g e g' le metriche definite su U e U' rispettivamente, come prima si può vedere che $g_{|U\cap U'} = {g'}_{|U\cap U'}$. Infine, poiché M si può ricoprire con una famiglia di aperti "ben coperti", le considerazioni precedenti assicurano che possiamo definire una metrica riemanniana g su M per cui $p^*g = \tilde{g}$. Tale proprietà assicura anche l'unicità di g. □

Un rivestimento riemanniano è chiaramente un'isometria locale, e se $\tilde{M}$ è compatta vale anche il viceversa. Vale infatti la seguente

Proposizione 5.48. ([100], p. 116; [62], p. 197) *Siano (M, g), $(\tilde{M}, \tilde{g})$ due varietà riemanniane e $p : \tilde{M} \to M$ un'isometria locale con $(\tilde{M}, \tilde{g})$ completa. Allora, $(\tilde{M}, \tilde{g})$ è un rivestimento riemanniano di (M, g) con proiezione p.*

Esempio 5.49. $G = \{I, -I\}$ è un gruppo di isometrie della sfera canonica $(\mathbb{S}^n, g)$, la cui azione è propriamente discontinua su $\mathbb{S}^n$. Quindi, la proiezione quoziente

$$p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^n/G$$

definisce un rivestimento dello *spazio proiettivo* $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Pertanto, possiamo definire su $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ una metrica riemanniana g_1 per cui $p^*g_1 = g$ (cfr. Proposizione 5.47).

Esempio 5.50. Il gruppo G delle traslazioni di $\mathbb{R}^n$, definite da vettori a coordinate intere, isomorfo a $\mathbb{Z}^n$, è un gruppo di isometrie di $(\mathbb{R}^n, g_0)$ la cui azione è propriamente discontinua. Quindi, la proiezione quoziente

$$p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$$

definisce un rivestimento del toro n-dimensionale $\mathbb{T}^n$. Pertanto, possiamo definire su $\mathbb{T}^n$ una metrica riemanniana g_1 per cui $p^*g_1 = g_0$. $\mathbb{T}^n$ munito di tale metrica è un *toro piatto.* Un toro piatto può essere definito anche nel modo seguente. Siano $\xi_1, ..., \xi_n$ n-vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$. Indichiamo con G il sottogruppo di $\mathbb{R}^n$ generato da $\xi_1, ..., \xi_n$: $G = \{\xi = \sum m_i\xi_i, m_i \in \mathbb{Z}\}$. L'azione di G su $\mathbb{R}^n$ è propriamente discontinua e quindi $\mathbb{R}^n$ è il rivestimento universale di $\mathbb{R}^n/G$. Inoltre, la varietà quoziente $\mathbb{R}^n/G$ è diffeomorfa al toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ e la metrica euclidea $g_0 = \mathrm{d}x_1^2 + ... + \mathrm{d}x_n^2$ (dove per ogni $x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_i x_i\xi_i$) è invariante per l'azione di G. Pertanto g_0, come nel caso di $G = \mathbb{Z}^n$, induce una metrica riemanniana piatta su $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/G$ (cfr. [56] vol.I, p. 210). Inoltre, due tori piatti $\mathbb{R}^n/G$ e $\mathbb{R}^n/G'$ sono isometrici se, e solo se, esiste una isometria dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ che scambia i sottogruppi G e G' (cfr. [7], p. 5).

Esempio 5.51. Consideriamo una superficie torica $\mathbb{T}^2$ di $\mathbb{R}^3$ simmetrica rispetto all'origine, con una metrica riemanniana piatta, che indichiamo con g, come definita nell'esempio precedente. $G = \{I, -I\}$ è un gruppo di isometrie del toro piatto $(\mathbb{T}^2, g)$, inoltre G opera in modo propriamente discontinuo su $\mathbb{T}^2$. Quindi, la proiezione quoziente

$$p : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{K} = \mathbb{T}^2/G$$

definisce un rivestimento della *bottiglia di Klein* $\mathbb{K}$. Pertanto, possiamo definire una metrica riemanniana piatta g_1 su $\mathbb{K}$ per cui $p^*g_1 = g$. La classificazione delle 2-varietà riemanniane compatte piatte si può trovare in [56] vol.I, p. 223.

5.8 Isometrie degli spazi modello della geometria semi-riemanniana (cenni)

Maggiori dettagli su questa sezione si possono trovare in [79]. Iniziamo introducendo brevemente gli spazi modello della geometria semi-riemanniana. Sia M una sottovarietà di una varietà semi-riemanniana $(\tilde{M}, \tilde{g})$, con immersione $i : M \hookrightarrow \tilde{M}$. Se il tensore $g = i^*\tilde{g}$ è una metrica semi-riemanniana, allora (M, g) è detta sottovarietà semi-riemanniana di $(\tilde{M}, \tilde{g})$.

Gli spazi modello della geometria semi-riemanniana sono :

• Lo spazio semi-euclideo $\mathbb{R}^n_\nu$, ossia $\mathbb{R}^n$ con la metrica semi-euclidea g_0 definita da

$$g_0 = -\sum_{i=1}^{\nu} \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_i + \sum_{i=\nu+1}^{n} \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_i.$$

g_0 è una metrica semi-riemanniana di indice ν.

- La *pseudosfera* di raggio $r > 0$ di $\mathbb{R}^{n+1}_\nu$, $n \geq 2$, è l'ipersuperficie

$$\mathbb{S}^n_\nu(r) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_\nu : -\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 + \sum_{i=\nu+1}^{n+1} x_i^2 = r^2\}.$$

La metrica semi-riemanniana $g = i^* g_0$, di segnatura $(n-\nu, \nu)$, è la metrica canonica della pseudosfera $\mathbb{S}^n_\nu(r)$. Per $\nu = 0$, $\mathbb{S}^n_0(r)$ è la sfera canonica $\mathbb{S}^n(r)$ dello spazio euclideo $\mathbb{R}^{n+1}_0 = \mathbb{R}^{n+1}$.

- Lo *spazio pseudoiperbolico* di raggio $r > 0$ di $\mathbb{R}^{n+1}_{\nu+1}$, $n \geq 2$, è l'ipersuperficie

$$H^n_\nu(r) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_{\nu+1} : -\sum_{i=1}^{\nu+1} x_i^2 + \sum_{i=\nu+2}^{n+1} x_i^2 = -r^2\}.$$

La metrica semi-riemanniana $g = i^* g_0$, di segnatura $(n-\nu, \nu)$, è la metrica canonica dello spazio pseudoiperbolico $\mathbb{H}^n_\nu(r)$. Per $\nu = 0$, $H^n_0(r)$ ha due componenti connesse, la falda superiore di $H^n_0(r)$ è l'iperboloide $H^n(r)$, $x_1 > 0$, con la metrica riemanniana iperbolica indotta dallo spazio di Minkowski $\mathbb{R}^{n+1}_1$. Lo spazio di Minkowski $(\mathbb{R}^{n+1}, q)$ considerato nella Sezione 4.4 si ottiene da $\mathbb{R}^{n+1}_1$ scambiando la coordinata x_1 con la coordinata x_{n+1}.

Si noti (tenendo conto che $\mathbb{R}^0$ consiste di un singolo punto, mentre $\mathbb{S}^0$ consiste di due punti) che:

- la pseudosfera $\mathbb{S}^n_\nu(r)$ è diffeomorfa alla varietà $\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{S}^{n-\nu}$, e
- lo *spazio pseudoiperbolico* $H^n_\nu(r)$ è diffeomorfo alla varietà $\mathbb{S}^\nu \times \mathbb{R}^{n-\nu}$.

Un diffeomorfismo f tra due varietà semi-riemanniane (M, g) e (M', g') tale che $f^* g' = cg$, $c=$ cost.$\neq 0$, è una omotetia. Naturalmente se la costante $c = 1$, f è una isometria. Se la costante $c = -1$, f è detta *anti-isometria.* L'applicazione $F : \mathbb{R}^{n+1}_\nu \to \mathbb{R}^{n+1}_{n+1-\nu}$ data da

$$(x_1, ..., x_{n+1}) \mapsto (x_{\nu+1}, ..., x_{n+1}, x_1, ..., x_\nu)$$

è una anti-isometria che trasforma la pseudosfera $\mathbb{S}^n_\nu(r)$ nello spazio pseudo-iperbolico $H^n_{n-\nu}(r)$ e viceversa. Di conseguenza, anche l'applicazione

$$F : \mathbb{S}^n_\nu(r) \to H^n_{n-\nu}(r)$$

è una anti-isometria.

Come vedremo nel capitolo successivo, la connessione di Levi-Civita è invariante per omotetie (anche nel caso semi-riemanniano) e quindi tutte le nozioni geometriche che derivano da essa sono invarianti per omotetie (cfr. Osservazione 6.47).

Isometrie degli spazi $\mathbb{R}^n_\nu$, $\mathbb{S}^n_\nu$, H^n_ν

Sia I_ε la matrice segnatura relativa alla metrica semi-euclidea g_0 dello spazio $\mathbb{R}^n_\nu$. I_ε è la matrice diagonale (ε_{ij}) dove

$$\varepsilon_{ij} = 0 \text{ per } i \neq j,\ \varepsilon_{ii} = -1 \text{ per per } i = 1, ..., \nu, \text{ e } \varepsilon_{ii} = +1 \text{ per } i = \nu+1, ..., n.$$

In altre parole, se (e_i) è una base pseudo-ortonormale di $\mathbb{R}^n_\nu$, allora

$$g_0(e_i, e_j) = \varepsilon_{ij} \quad \text{e} \quad I_\varepsilon = (g_0(e_i, e_j)).$$

Si noti che

$I^t_\varepsilon = I_\varepsilon = I^{-1}_\varepsilon$ e, per $\nu = 0$, $I_\varepsilon = I_n$ (matrice identità di ordine n).

Indichiamo con $O_\nu(n)$ il gruppo delle matrici A che corrispondono, rispetto a una fissata base pseudo-ortonormale (e_i), alle trasformazioni pseudo-ortogonali di $\mathbb{R}^n_\nu$: trasformazioni lineari di $\mathbb{R}^n_\nu$ che conservano g_0. Posto $A = (a_{ij})$, siccome

$$g_0(Ae_i, Ae_j) = g_0(e_i, e_j) \Leftrightarrow \sum_{k,h} a_{ki}\, a_{hj}\, \varepsilon_{kh} = \varepsilon_{ij},$$

allora $O_\nu(n)$ corrisponde al sottogruppo delle matrici A di $GL(n, \mathbb{R})$ che soddisfano:

$$A^t I_\varepsilon A = I_\varepsilon \text{ (ovvero } A^t = I_\varepsilon A^{-1} I_\varepsilon).$$

Per i gruppi di isometrie, abbiamo quanto segue (cfr. [78], p.233-240).

- Il gruppo di isometrie di $\mathbb{R}^n_\nu$ è il gruppo $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n_\nu)$ di tutte le trasformazioni del tipo

$$f = A + p, \quad \text{dove} \quad A \in O_\nu(n) \text{ e } p \in \mathbb{R}^n_\nu.$$

$\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n_\nu)$ è un gruppo di Lie che ha dimensione

$$\dim \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n_\nu) = \dim \mathbb{R}^n + \dim O_\nu(n) = n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2.$$

$\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n_\nu)$, $0 < \nu < n$, ha quattro componenti connesse.

- Il gruppo di isometrie della pseudosfera $\mathbb{S}^n_\nu$, $\nu < n$, è il gruppo $O_\nu(n+1)$;
- Il gruppo di isometrie dello spazio pseudoiperbolico H^n_ν, $\nu > 0$, è il gruppo $O_{\nu+1}(n+1)$.

Anche $O_\nu(n)$ è un gruppo di Lie di dimensione $n(n-1)/2$ che non dipende da ν. Per $\nu = 0$, $O_0(n)$ è chiaramente il gruppo ortogonale $O(n)$ che ha due componenti connesse. $O_\nu(n)$, $0 < \nu < n$, ha quattro componenti connesse.

In particolare, nel caso del gruppo ortogonale $O(2)$ il sottogruppo $SO(2)$ delle rotazioni è definito dalle matrici ortogonali del tipo

$$R_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}, \ \vartheta \in \mathbb{R};$$

$SO(2)$ è la componente connessa dell'identità in $O(2)$ ed è diffeomorfo alla circonferenza $\mathbb{S}^1$.

Nel caso del gruppo pseudo-ortogonale $O_1(2)$, il sottogruppo B definito dalle matrici pseudo-ortogonali del tipo

$$B_\vartheta = \begin{pmatrix} \cosh\vartheta & \sinh\vartheta \\ \sinh\vartheta & \cosh\vartheta \end{pmatrix}, \ \vartheta \in \mathbb{R},$$

è la componente connessa dell'identità in $O_1(2)$, ed è diffeomorfo a $\mathbb{R}$. Ogni matrice B_ϑ, detta *boost* di $\mathbb{R}^2_1$ di angolo lorentziano ϑ, conserva ognuno dei quattro rami delle iperboli $x^2 - y^2 = \pm 1$.