

# Capitolo 3

## Gruppi di Lie

I gruppi di Lie e le loro algebre di Lie giocano un ruolo importante in geometria e in Fisica teorica. Nella concezione del programma di Erlangen (1872) formulato da Felix Klein, la geometria è vista come lo studio delle proprietà invarianti rispetto a gruppi di trasformazioni: differenti gruppi di trasformazioni su uno stesso spazio definiscono differenti geometrie. I gruppi che emergono nelle geometrie più semplici vennero studiati per la prima volta Sophie Lie (un amico di Klein). In questo capitolo vengono studiati i principali esempi di gruppi di Lie (i gruppi classici) e loro algebre di Lie. Inoltre, si presentano brevemente alcune delle principali proprietà dei gruppi di Lie e delle algebre di Lie. Infine, si introducono i gruppi di Lie 3D unimodulari e non-unimodulari. Per maggiori dettagli e sviluppi si rinvia, oltre agli articoli citati nel corso della presentazione, a Boothby [14], Conlon [28], Kirillov[55], Milnor [69], Triccerri-Vanhecke [111], Warner [117].

### 3.1 Esempi di gruppi di Lie

**Definizione 3.1.** Un *gruppo di Lie* (reale) è una varietà differenziabile  $G$  munita di una struttura di gruppo tale che le applicazioni

$$G \times G \rightarrow G, (a, b) \mapsto ab, \quad \text{e} \quad G \rightarrow G, a \mapsto a^{-1},$$

siano differenziabili.

Se si assume che  $G$  sia soltanto uno spazio topologico di Hausdorff e che le applicazioni considerate siano solo continue, si ha la nozione di *gruppo topologico*. Nella definizione di gruppo di Lie si può sostituire la differenziabilità con la nozione di analiticità reale senza perdere di generalità (cfr. [28], pag.161).

Un *isomorfismo* tra due gruppi di Lie  $G$  e  $G'$ , è un omomorfismo  $f : G \rightarrow G'$  che è anche un diffeomorfismo. Un *isomorfismo locale* tra due gruppi di Lie  $G$  e  $G'$ , è un omomorfismo  $f : U \rightarrow U'$ , ossia  $f(ab) = f(a)f(b)$  per ogni  $a, b \in U$  con  $ab \in U$ , che è anche un diffeomorfismo, dove  $U$  (resp.  $U'$ ) è un intorno aperto di  $e$  (resp.  $e'$ ) elemento neutro di  $G$  (resp.  $G'$ ).

**Definizione 3.2.** Sia  $G$  un gruppo di Lie e sia  $H \subset G$ .  $H$  si dice *sottogruppo di Lie* di  $G$  se  $H$  è un sottogruppo algebrico e inoltre è una sottovarietà di  $G$ .

In particolare, applicando alcune proprietà della teoria delle sottovarietà, si vede che un sottogruppo di Lie ha una struttura di gruppo di Lie (cfr. [55], Definizione 3.39 e Proposizione 3.42). Se un sottogruppo di Lie  $H$  di  $G$  è una sottovarietà regolare, allora  $H$  è un chiuso come sottoinsieme di  $G$ . Se  $H$  è un sottogruppo algebrico di  $G$  che è anche un sottoinsieme chiuso di  $G$ , allora  $H$  è un sottogruppo di Lie di  $G$ , inoltre  $H$  è anche sottovarietà regolare (cfr. [14], [28], [55]). Di seguito alcuni esempi.

### La circonferenza $\mathbb{S}^1$

$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  è un gruppo di Lie rispetto al prodotto tra numeri complessi. Si noti che  $\mathbb{S}^1$  è isomorfo al gruppo delle rotazioni

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

e al toro unidimensionale  $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  (gruppo quoziente rispetto alla congruenza modulo  $\mathbb{Z}$ ).

Anche i gruppi moltiplicativi  $\mathbb{R}^*(\cdot)$  e  $\mathbb{R}_+(\cdot)$  sono gruppi di Lie di dimensione 1, dove  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$ .

### Il gruppo abeliano $\mathbb{R}^n(+)$

$\mathbb{R}^n(+)$  è un gruppo di Lie (abeliano) rispetto alla struttura differenziabile ordinaria.  $\mathbb{C}^n(+)$  è un gruppo di Lie (abeliano) complesso.

### Il gruppo lineare $GL(n, \mathbb{R})$

$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : \det A \neq 0\}$  è un gruppo rispetto al prodotto. Inoltre è una varietà differenziabile di dimensione  $n^2$  (cfr. Esempio 1.8) e l'operazione di gruppo  $(A, B) \mapsto AB$  è chiaramente differenziabile (analogamente per l'inversa  $A \mapsto A^{-1}$ ). Quindi  $GL(n, \mathbb{R})$  è un gruppo di Lie di dimensione  $n^2$ . Se  $E_n$  è uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$ , il gruppo degli automorfismi di  $E_n$ ,  $GL(E_n)$ , è un gruppo di Lie isomorfo a  $GL(n, \mathbb{R})$ .

### Il prodotto semidiretto

Dati due gruppi di Lie  $G$  e  $H$ , è possibile costruire altri gruppi di Lie nel modo seguente. Supponiamo che per ogni  $a \in G$  esista un automorfismo  $\alpha_a$  di  $H$  tale che

- (1) per ogni  $a, b \in G$  :  $\alpha_{ab} = \alpha_a \circ \alpha_b$ ,
- (2) l'applicazione  $H \times G \rightarrow H, (h, a) \mapsto \alpha_a(h)$ , è differenziabile.

In tal caso, si verifica che la varietà differenziabile  $H \times G$  dotata dell'operazione

$$(h, a)(h_1, b) = (h\alpha_a(h_1), ab) \quad \forall h, h_1 \in H, a, b \in G,$$

è un gruppo di Lie che viene detto *prodotto semidiretto* di  $H$  e  $G$  rispetto ad  $\alpha$ . Tale gruppo si indica con  $H \rtimes_{\alpha} G$ . Se per ogni  $a \in G$  l'automorfismo  $\alpha_a$

è l'identità su  $H$ , allora si ottiene il *prodotto diretto* che viene indicato con  $H \times G$ . Il toro  $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$  è un gruppo di Lie.

Siano dati i gruppi  $GL(n, \mathbb{R})$  e  $H = \mathbb{R}^n$ . Per ogni  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  consideriamo l'automorfismo  $\alpha_A : H \rightarrow H, u \mapsto Au$ . Allora,  $\mathbb{R}^n \times_\alpha GL(n, \mathbb{R})$  non è altro che il gruppo delle affinità di  $\mathbb{R}^n$  che si può identificare con il gruppo delle matrici

$$\left\{ B \in GL(n+1, \mathbb{R}) : B = \begin{pmatrix} A & u^t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A \in GL(n, \mathbb{R}), u \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

### Il semispazio $\mathbb{R}_+^n$

Siano dati i gruppi di Lie  $\mathbb{R}^{n-1}(+)$  e  $\mathbb{R}_+(\cdot)$ . Per ogni  $a \in \mathbb{R}_+$ , consideriamo l'automorfismo  $\alpha_a : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}, x \mapsto ax$ . Allora il gruppo di Lie prodotto semidiretto  $\mathbb{R}^{n-1} \times_\alpha \mathbb{R}_+$  non è altro che il semispazio  $\mathbb{R}_+^n = \{(x, a) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : a > 0\}$  con il prodotto

$$(x, a) \cdot (x', a') = (x + ax', aa'),$$

dove l'elemento neutro è  $e = (0, 1)$ . Si noti che la metrica iperbolica che definiremo su  $\mathbb{R}_+^n$  (cfr. Sezione 4.4) è invariante a sinistra rispetto alla suddetta struttura di gruppo.

### Il gruppo lineare speciale

$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$ , detto *gruppo lineare speciale*, è chiaramente un sottogruppo di  $GL(n, \mathbb{R})(\cdot)$ . Per verificare che è una varietà differenziabile, consideriamo l'applicazione  $F : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \det A$ . Posto  $A = (x_{ij})$ , siccome

$$F(A) = \det A = x_{i1}A_{i1} + x_{i2}A_{i2} \dots + x_{ij}A_{ij} + \dots + x_{in}A_{in},$$

si ha

$$\partial F / \partial x_{ij} = A_{ij}, \quad \text{dove } A_{ij} \text{ è il complemento algebrico di } x_{ij},$$

per cui il gradiente  $(\nabla F)_A \neq 0$  per ogni  $A \in SL(n, \mathbb{R})$  (altrimenti si avrebbe  $\det A = 0$ ). Applicando il Teorema 1.15 (oppure il Teorema 2.55) si ottiene che  $SL(n, \mathbb{R}) = F^{-1}(1)$  è una varietà differenziabile di dimensione  $n^2 - 1$ , anzi è una sottovarietà chiusa di  $GL(n, \mathbb{R})$ . Le operazioni  $(A, B) \mapsto AB$  e  $A \mapsto A^{-1}$  sono differenziabili anche quando ristrette a  $SL(n, \mathbb{R})$  (cfr. Proposizione 2.49). Quindi  $SL(n, \mathbb{R})$  è un gruppo di Lie, anzi è un sottogruppo di Lie di  $GL(n, \mathbb{R})$ .

### Il gruppo ortogonale

$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^T \cdot A = I\}$ , detto *gruppo ortogonale*, è un sottogruppo di  $GL(n, \mathbb{R})$ . Vediamo che è anche una varietà differenziabile avente dimensione  $\frac{n^2-n}{2}$ . Sia  $\mathbb{R}^{n,n}$  lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine  $n$  (che possiamo identificare con  $\mathbb{R}^{n^2}$ ). Consideriamo il sottospazio vettoriale  $\text{Sym}(\mathbb{R}^{n,n})$  di  $\mathbb{R}^{n,n}$  costituito dalle matrici simmetriche:

$$\text{Sym}(\mathbb{R}^{n,n}) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : A = A^T\}.$$

La dimensione di  $\text{Sym}(\mathbb{R}^{n,n})$  è  $n(n+1)/2$ , e quindi  $\text{Sym}(\mathbb{R}^{n,n})$  si può identificare con  $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ . Consideriamo l'applicazione

$$F : \mathbb{R}^{n^2} \equiv \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \equiv \text{Sym}(\mathbb{R}^{n,n}), A \mapsto F(A) = AA^T.$$

Chiaramente

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : AA^T = I\} = F^{-1}(I).$$

Quindi  $O(n)$  è un chiuso, inoltre è anche limitato per cui è un compatto. Per ogni  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ , il differenziale  $F_{*A}$ , pensato come applicazione lineare da  $\mathbb{R}^{n,n} = \mathbb{R}^{n^2} \equiv T_A \mathbb{R}^{n^2}$  in  $\text{Sym}(\mathbb{R}^{n,n}) = \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \equiv T_{F(A)} \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ , è dato da

$$F_{*A}(X) = AX^T + XA^T.$$

Per verificare l'espressione di  $F_{*A}$  si può procedere in questo modo. Data  $X \in \mathbb{R}^{n,n}$ , consideriamo una curva differenziabile  $\gamma(t)$  di  $\mathbb{R}^{n,n}$  con  $\gamma(0) = A$  e  $\dot{\gamma}(0) = X$ , allora

$$\begin{aligned} F_{*A}X &= F_{*A}\dot{\gamma}(0) = \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) \Big|_{t=0} = \frac{d(\gamma(t) \gamma^T(t))}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= \dot{\gamma}(0) \gamma^T(0) + \gamma(0) \dot{\gamma}^T(0) \\ &= XA^T + AX^T. \end{aligned}$$

Inoltre, data  $Y \in \text{Sym}(\mathbb{R}^{n,n})$ , la matrice  $X := \frac{1}{2}YA \in \mathbb{R}^{n,n}$  soddisfa

$$F_{*A}(X) = A \left( \frac{YA}{2} \right)^T + \frac{YA}{2} A^T = Y \quad \forall A \in O(n).$$

Quindi,  $F_{*A}$  è suriettivo per ogni  $A \in O(n)$ , ossia la matrice jacobiana  $J(F)_A$  ha rango costante  $k = n(n+1)/2$ . Applicando il risultato del Teorema 1.15, si ha che  $O(n)$  è una  $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ -superficie di  $\mathbb{R}^{n^2}$  e quindi una varietà differenziabile di dimensione  $n(n-1)/2$ . Si noti che la  $F$  si può anche pensare definita su  $GL(n, \mathbb{R})$  che è un aperto di  $\mathbb{R}^{n,n}$ , per cui  $O(n)$  è una sottovarietà di  $GL(n, \mathbb{R})$ . Come per gli altri gruppi matriciali, anche in questo caso le operazioni  $(A, B) \mapsto AB$  e  $A \mapsto A^{-1}$  sono differenziabili. Quindi  $O(n)$  è un gruppo di Lie, anzi è un sottogruppo di Lie di  $GL(n, \mathbb{R})$ . Si noti che  $O(n)$  ha due componenti connesse  $SO(n)$  e  $O^-(n)$  definite da:

$$SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}, O^-(n) = \{A \in O(n) : \det A = -1\}.$$

Inoltre,

$$O(n) = SO(n) \dot{\cup} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} SO(n).$$

$SO(n)$  è una sottovarietà aperta di  $O(n)$ , quindi è un sottogruppo di Lie di  $O(n)$ , detto *gruppo ortogonale speciale*,  $\dim SO(n) = \dim O(n) = \frac{n^2-n}{2}$ . Per  $n \geq 3$  il *gruppo spinoriale*  $Spin(n)$  è il rivestimento universale di  $SO(n)$ .

### Il gruppo unitario

Una matrice  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  si dice *hermitiana* se  $A^* = A$ , dove  $A^* = \bar{A}^T$ , mentre si dice *unitaria* se  $A^*A = I$ . Si noti che  $(AB)^* = \overline{AB}^T = \bar{B}^T \bar{A}^T = B^*A^*$ . L'insieme

$$U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : A^* \cdot A = I\}$$

è chiaramente un gruppo, detto *gruppo unitario*. L'insieme

$$C_{her}^{n,n} = \{A \in \mathbb{C}^{n,n} : A^* = A\}$$

è uno spazio vettoriale reale di dimensione  $k = n + 2\frac{n^2-n}{2} = n^2$ . Consideriamo l'applicazione

$$F : \mathbb{C}^{n,n} \equiv \mathbb{R}^{2n^2} \rightarrow C_{her}^{n,n} \equiv \mathbb{R}^{n^2}, \quad A \mapsto F(A) = A^*A = \bar{A}^T A.$$

$F$  è differenziabile e, procedendo come nel caso di  $O(n)$ , si ha  $F_{*A}X = X^*A + A^*X$  per ogni  $X \in \mathbb{C}^{n,n} \equiv T_A C_{her}^{n,n}$ . Inoltre, per ogni  $A \in U(n)$ , il differenziale  $F_{*A}$  è suriettivo. Infatti, data  $Y \in C_{her}^{n,n}$ , quindi  $Y^* = Y$ , prendendo  $X = \frac{1}{2}AY$ , si ha

$$F_{*A}X = (1/2)Y^*A^*A + (1/2)A^*AY = (1/2)Y^* + (1/2)Y = Y.$$

Quindi per ogni  $A \in U(n) = F^{-1}(I)$ , la matrice jacobiana di  $F$  in  $A$  ha rango costante  $k = n^2$ . Pertanto  $U(n)$  ha una struttura di varietà differenziabile di dimensione  $2n^2 - n^2 = n^2$ . Inoltre, le operazioni  $(A, B) \mapsto AB$  e  $A \mapsto A^{-1}$  sono differenziabili, per cui  $U(n)$  è un gruppo di Lie reale di dimensione  $n^2$ .  $U(n)$  è compatto in quanto chiuso e limitato, Il *gruppo unitario speciale* è il sottogruppo algebrico di  $U(n)$  definito da

$$SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\}.$$

Per  $A \in U(n)$ ,  $|\det A| = 1$  e quindi  $SU(n) = \det^{-1}\{1\}$  è un chiuso di  $U(n)$ . Pertanto  $SU(n)$  è un gruppo di Lie di dimensione  $n^2 - 1$ , anzi un sottogruppo di Lie di  $U(n)$ . Così come  $O(n)$  è il gruppo delle trasformazioni ortogonali di  $\mathbb{R}^n$  munito di un prodotto scalare definito positivo, il gruppo unitario è legato alla presenza di un prodotto hermitiano su  $\mathbb{C}^n$ .

**Esercizio 3.3.** Verificare che

$$U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : \langle Az, Aw \rangle = \langle z, w \rangle\},$$

dove

$$\langle z, w \rangle := \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i,$$

è il prodotto scalare hermitiano su  $\mathbb{C}^n$ .

**Osservazione 3.4.** Il gruppo lineare complesso  $GL(n, \mathbb{C})$  può essere identificato con il sottogruppo di  $GL(2n, \mathbb{R})$  costituito dalle matrici che commutano con la matrice  $J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ . Questa rappresentazione di  $GL(n, \mathbb{C})$  in

$GL(2n, \mathbb{R})$ , detta *rappresentazione reale* di  $GL(n, \mathbb{C})$ , è data dall'omomorfismo iniettivo (tra gruppi)

$$A + iB \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \quad \forall A + iB \in GL(n, \mathbb{C}),$$

dove  $A, B$  sono matrici reali di ordine  $n$ . Inoltre, si noti che

$$SO(1) \cong SU(1) \cong \{e\}, \quad O(1) \cong S^0, \quad SO(2) \cong U(1) \cong \mathbb{S}^1,$$

dove il simbolo  $\cong$  indica che i gruppi sono isomorfi.

### Il gruppo simplettico reale

Sia  $E_m$  uno spazio vettoriale reale di dimensione  $m$  e sia  $\Phi$  una forma bilineare antisimmetrica non degenera su  $E_m$ . Poiché  $\Phi$  è antisimmetrica, si ha

$$\det \Phi = \det(-\Phi^T) = (-1)^m \det \Phi^T = (-1)^m \det \Phi,$$

inoltre  $\Phi$  è non degenera per cui la dimensione  $m$  deve essere pari,  $m = 2n$ . Quindi esiste una base  $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n\}$  tale che

$$\Phi(v_i, v_j) = 0, \quad \Phi(v_i, w_j) = \delta_{ij}, \quad \Phi(w_i, v_j) = -\delta_{ij}, \quad \Phi(w_i, w_j) = 0.$$

Posto  $e_i = v_i$  per  $i = 1, \dots, n$  e  $e_i = w_i$  per  $i = n+1, \dots, 2n$ , si ha  $\Phi = (\Phi(e_i, e_j)) = J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ . La matrice  $J_n$  soddisfa

$$J_n^T = -J_n, \quad J_n^2 = -I_{2n} \quad \text{e} \quad J_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Inoltre,

$$\Phi(u, v) = g_0(u, J_n v) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^{2n},$$

dove  $g_0$  è il prodotto scalare euclideo di  $\mathbb{R}^{2n}$ . Per  $A \in \mathbb{R}^{2n, 2n}$  abbiamo

$$\Phi(Au, Av) = g_0(Au, J_n Av) = g_0(u, A^T J_n Av).$$

Quindi:

$$\Phi(Au, Av) = \Phi(u, v) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^{2n} \iff A^T J_n A = J_n.$$

Una matrice che soddisfa la precedente condizione si dice *matrice simplettica*. L'insieme

$$Sp(2n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(2n, \mathbb{R}) : A^T J_n A = J_n\}$$

è il *gruppo simplettico reale*. Si noti che  $(A^T J_n A)^T = -A^T J_n A$ . Consideriamo l'applicazione

$$F : \mathbb{R}^{2n, 2n} \rightarrow \mathbb{R}_{\text{antsim}}^{2n, 2n} \cong \mathbb{R}^{2n^2 - n}, \quad A \mapsto F(A) = A^T J_n A.$$

$F$  è differenziabile e  $F_{*A} X = X^T J_n A + A^T J_n X$  per ogni  $X \in \mathbb{R}^{2n, 2n} \cong T_A \mathbb{R}^{2n, 2n}$ . Inoltre, per ogni  $A \in Sp(2n, \mathbb{R})$ , il differenziale  $F_{*A}$  è suriettivo: data  $Y$  antisimmetrica, quindi  $Y^T = -Y$ , considerando  $X = -\frac{1}{2} A J Y$ , si ha

$$F_{*A}X = Y.$$

Quindi per ogni  $A \in Sp(2n, \mathbb{R}) = F^{-1}(I)$ , la matrice jacobiana di  $F$  in  $A$  ha rango costante  $k = 2n^2 - n$ . Pertanto  $Sp(2n, \mathbb{R})$  ha una struttura di varietà differenziabile di dimensione  $4n^2 - 2n^2 + n = n(2n+1)$ . Inoltre, le applicazioni  $(A, B) \mapsto AB$  e  $A \mapsto A^{-1}$  sono differenziabili, per cui  $Sp(2n, \mathbb{R})$  è un gruppo di Lie di dimensione  $n(2n+1)$ .  $Sp(2n, \mathbb{R})$  è compatto in quanto chiuso e limitato. In modo analogo si può definire il *gruppo simplettico complesso*

$$Sp(2n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(2n, \mathbb{C}) : A^T J_n A = J_n\},$$

$$\dim_{\mathbb{C}} Sp(2n, \mathbb{C}) = n(2n+1).$$

### Il gruppo simplettico quaternionico

Richiamiamo brevemente il corpo dei *quaternioni*. Considerata la base canonica  $\{1, i, j, k\}$  di  $\mathbb{R}^4$ , si definisce un prodotto tra gli elementi di  $\mathbb{R}^4$  ponendo  $1i = i, 1j = j, 1k = k, i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, ik = -j, ki = j, kj = -i, jk = i$ , e si estende per linearità tale prodotto a tutti gli elementi di  $\mathbb{R}^4$ .  $\mathbb{R}^4$ , con tale prodotto, è un corpo (non commutativo), detto corpo dei quaternioni che si indica con  $\mathbb{H}$ . Se  $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ , il suo coniugato è  $\bar{q} = a - bi - cj - dk$ . Si verificano facilmente le seguenti proprietà:

$$\overline{p+q} = \bar{p} + \bar{q}; \quad \overline{pq} = \bar{q}\bar{p}; \quad \bar{q}q = \|q\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0.$$

Considerato  $\mathbb{H}^n$  come spazio vettoriale a destra su  $\mathbb{H}$  ( $(q, \lambda) \mapsto q\lambda$ ), il prodotto

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i q_i, \quad \text{dove } p = (p_1, \dots, p_n), q = (q_1, \dots, q_n),$$

soddisfa le seguenti proprietà:

- 1)  $\langle p, q + q' \rangle = \langle p, q \rangle + \langle p, q' \rangle$ ,
- 2)  $\langle p, q \rangle = \overline{\langle q, p \rangle}$ ,
- 3)  $\langle p\lambda, q \rangle = \bar{\lambda} \langle p, q \rangle, \quad \langle p, q\lambda \rangle = \langle p, q \rangle \lambda$ ,
- 4)  $\langle q, q \rangle \geq 0$  e  $\langle q, q \rangle = 0$  se e solo se  $q = 0$ ,
- 5)  $\langle Ap, q \rangle = \langle p, \bar{A}^T q \rangle$ ,

per ogni  $p, q, q' \in \mathbb{H}^n$  e per ogni  $\lambda \in \mathbb{H}$ .  $\langle, \rangle$  è detto *prodotto scalare quaternionico*. In particolare  $\langle, \rangle$  è  $\mathbb{R}$ -lineare. Un'applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare  $A : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  si dice  $\mathbb{H}$ -lineare se  $A(q\lambda) = A(q)\lambda$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{H}$  e  $q \in \mathbb{H}^n$ . L'insieme di tutte le applicazioni  $\mathbb{R}$ -lineari di  $\mathbb{H}^n$  è uno spazio vettoriale reale isomorfo allo spazio vettoriale reale  $\mathbb{H}^{n,n}$  di dimensione  $4n^2$  delle matrici di ordine  $n$  a elementi in  $\mathbb{H}$ . Un'applicazione  $\mathbb{H}$ -lineare  $A$  si dice  $\mathbb{H}$ -*isometria*, oppure *quaternionica unitaria*, se

$$\langle Ap, Aq \rangle = \langle p, q \rangle \quad \forall p, q \in \mathbb{H}^n.$$

Per  $A \in \mathbb{H}^{n,n}$ , siccome  $\langle p, Aq \rangle = \langle \bar{A}^T p, q \rangle$ , abbiamo

$$\langle Ap, Aq \rangle = \langle \bar{A}^T Ap, q \rangle.$$

Quindi

$$\langle Ap, Aq \rangle = \langle p, q \rangle \quad \forall p, q \in \mathbb{H}^n \iff \bar{A}^T A = I.$$

L'insieme

$$\begin{aligned} Sp(n) &= Sp(n, \mathbb{H}) = \{A \in \mathbb{H}^{n,n} : A \text{ } \mathbb{H}\text{-isometria}\} \\ &= \{A \in \mathbb{H}^{n,n} : \bar{A}^T A = I\} \end{aligned}$$

è un gruppo, che viene detto *gruppo simplettico quaternionico* oppure *gruppo quaternionico unitario*.  $Sp(n)$  è un gruppo compatto ed è l'analogo di  $U(n)$  e  $O(n)$  nel caso quaternionico. Si noti però che non esiste un gruppo simplettico quaternionico speciale in quanto si dimostra che  $Sp(n)$  è già speciale. Posto  $A^* = \bar{A}^T$ , una matrice  $A \in \mathbb{H}^{n,n}$  si dice  $\mathbb{H}$ -hermitiana se  $A^* = A$ . Notiamo che  $A^*A$  è hermitiana, inoltre  $(AB)^* = B^*A^*$  e  $\mathbb{H}_{herm}^{n,n}$  ha dimensione reale  $k = n + 4\frac{n^2-n}{2} = 2n^2 - n$ . Consideriamo l'applicazione

$$F : \mathbb{H}^{n,n} \cong \mathbb{R}^{4n^2} \rightarrow \mathbb{H}_{herm}^{n,n} \cong \mathbb{R}^{2n^2-n}, \quad A \mapsto F(A) = A^*A.$$

$F$  è differenziabile e  $F_{*A}X = X^*A + A^*X$  per ogni  $X \in \mathbb{R}^{4n^2}$ . Per ogni  $A \in Sp(n)$ , il differenziale  $F_{*A}$  è suriettivo. Infatti, data  $Y$   $\mathbb{H}$ -hermitiana, quindi  $Y^* = Y$ , considerando  $X = (1/2)AY$ , si ha

$$F_{*A}X = X^*A + A^*X = (1/2)(Y^*A^*A + A^*AY) = Y.$$

Quindi per ogni  $A \in Sp(n) = F^{-1}(I)$ , la matrice jacobiana di  $F$  in  $A$  ha rango costante  $k = 2n^2 - n$ . Pertanto,  $Sp(n)$  ha una struttura di varietà differenziabile di dimensione  $4n^2 - 2n^2 + n = n(2n+1)$ . Inoltre, le applicazioni  $(A, B) \mapsto AB$  e  $A \mapsto A^{-1}$  sono differenziabili, per cui  $Sp(n)$  è un gruppo di Lie reale di dimensione  $n(2n+1)$ .  $Sp(n)$  è compatto in quanto chiuso e limitato.

### La sfera $\mathbb{S}^3$

Sia  $\mathbb{H}$  il corpo non commutativo dei quaternioni.  $\mathbb{H}^*(\cdot) = \mathbb{H} - \{0\}(\cdot)$  è un gruppo algebrico (non commutativo) con  $q^{-1} = \bar{q}/\|q\|^2$ , che è chiaramente anche un gruppo di Lie (come varietà differenziabile  $\mathbb{H}^* = \mathbb{R}^4 - \{0\}$  è un aperto di  $\mathbb{R}^4$ ). La sfera unitaria  $\mathbb{S}^3$  la possiamo pensare come il gruppo dei quaternioni unitari:

$$\mathbb{S}^3 = \{q \in \mathbb{H}^* : \|q\|^2 = \bar{q}q = 1\} = \{q \in \mathbb{H}^* : q^{-1} = \bar{q}\},$$

quindi si vede facilmente che  $\mathbb{S}^3$  è un sottogruppo algebrico di  $\mathbb{H}^*$ . Inoltre,  $\mathbb{S}^3$  è una sottovarietà (regolare) di  $\mathbb{H}^* = \mathbb{R}^4 - \{0\}$ . Pertanto  $\mathbb{S}^3$  è un sottogruppo di Lie di  $\mathbb{H}^*$ , e quindi ha una struttura di gruppo di Lie. Tuttavia, si poteva osservare subito che  $\mathbb{S}^3$  è un gruppo di Lie in quanto  $\mathbb{S}^3 = Sp(1)$ . Altra presentazione di  $\mathbb{S}^3$  come gruppo di Lie è data dal gruppo unitario speciale

$$\begin{aligned} SU(2) &= \{A \in GL(2, \mathbb{C}) : \bar{A}^T A = I\} \\ &= \left\{ A \in GL(2, \mathbb{C}) : A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}, |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\} = \mathbb{S}^3. \end{aligned}$$

L'applicazione



$$\Phi : \mathbb{S}^3 \longrightarrow SU(2), q = a + xi + yj + zk \longmapsto A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix},$$

dove  $z = a + xi$  e  $w = y + zi$ , è un isomorfismo tra gruppi di Lie che identifica  $\mathbb{S}^3$  con  $SU(2)$ .

Si noti che  $\mathbb{S}^1 = SO(2)$  e  $\mathbb{S}^3 = SU(2)$  sono le sole sfere che ammettono una struttura di gruppo di Lie (cfr. [98], p.197).

**Osservazione 3.5.** I gruppi matriciali studiati in questa sezione sono noti in letteratura col nome di *gruppi classici*. Riguardo alla topologia di questi gruppi, osserviamo che  $SO(n)$ ,  $SU(n)$ ,  $U(n)$  e  $Sp(n, \mathbb{H})$  sono connessi e compatti;  $O(n)$  è compatto ma ha due componenti connesse;  $SL(n, \mathbb{R})$  è connesso ma non compatto;  $SU(n)$  e  $Sp(n, \mathbb{H})$  sono semplicemente connessi;  $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$  per  $n \geq 3$  e  $\pi_1(SO(2)) = \mathbb{Z}$ . I gruppi simplettici  $Sp(2n, \mathbb{R})$  e  $Sp(2n, \mathbb{C})$  sono connessi ma non compatti.

## 3.2 Relazioni tra un gruppo di Lie e la sua algebra di Lie

Iniziamo con una breve premessa sulle algebre di Lie. Ricordiamo che una *algebra di Lie* (reale) è uno spazio vettoriale reale  $\mathfrak{g}$  munito di un prodotto

$$[, ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, (X, Y) \mapsto [X, Y], \text{ detto } \textit{parentesi di Lie},$$

che soddisfa le seguenti proprietà

- (1) è bilineare,
- (2) è antisimmetrico :  $[X, Y] = -[Y, X]$ ,
- (3) vale l'identità di Jacobi:  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ .

Un'algebra di Lie è *abeliana* se, e solo se, la parentesi di Lie è identicamente nulla. Un sottospazio vettoriale  $\mathfrak{h}$  di  $\mathfrak{g}$  si dice *sottoalgebra di Lie* di  $\mathfrak{g}$  se  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$ , cioè  $[X, Y] \in \mathfrak{h}$  per ogni  $X, Y \in \mathfrak{h}$ . Un sottospazio vettoriale  $\mathfrak{h}$  di  $\mathfrak{g}$  si dice *ideale* di  $\mathfrak{g}$  se  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}$ ; in particolare, gli ideali sono sottoalgebre di Lie.

Se  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$  sono due algebre di Lie, si può definire la *somma diretta di algebre di Lie*  $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}$ . Basta considerare  $\mathfrak{h} \times \mathfrak{g}$  dotato della struttura di spazio vettoriale somma diretta e definire il prodotto parentesi di Lie  $[, ]$  in  $\mathfrak{h} \times \mathfrak{g}$  nel modo seguente

$$[(U, X), (V, Y)] = ([U, V], [X, Y]) \quad \forall U, V \in \mathfrak{h} \text{ e } \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Un *omomorfismo tra algebre di Lie* è un'applicazione lineare  $\Psi$  tra due algebre di Lie tale che  $\Psi[X, Y] = [\Psi X, \Psi Y]$ . Un *isomorfismo tra algebre di Lie* è un omomorfismo bigettivo tra algebre di Lie.

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie. Un endomorfismo (di spazi vettoriali)  $\phi$  di  $\mathfrak{g}$  si dice *derivazione* di  $\mathfrak{g}$  se

$$\phi([Y, Z]) = [\phi(Y), Z] + [Y, \phi(Z)], \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Se  $\phi, \psi$  sono derivazioni di  $\mathfrak{g}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , allora anche

$$\phi + \psi, \lambda\phi \text{ e } [\phi, \psi] := \phi \circ \psi - \psi \circ \phi \text{ sono derivazioni di } \mathfrak{g}.$$

Quindi l'insieme  $Der(\mathfrak{g})$  di tutte le derivazioni di  $\mathfrak{g}$  è una algebra di Lie che viene detta *algebra di Lie delle derivazioni di  $\mathfrak{g}$* . In particolare, per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ , l'endomorfismo

$$ad_X : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, Y \mapsto ad_X Y = [X, Y],$$

è una derivazione di  $\mathfrak{g}$ , detta *derivazione interna*. Infatti, applicando l'identità di Jacobi, si ha la relazione  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$  per ogni  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ , la quale si può anche esprimere nella forma

$$[ad_X, ad_Y] = ad_X \circ ad_Y - ad_Y \circ ad_X = ad_{[X, Y]}.$$

Sia  $G$  un gruppo di Lie. Per ogni  $a \in G$ , consideriamo le seguenti applicazioni

$$L_a : G \rightarrow G, b \mapsto L_a(b) = ab, \quad R_a : G \rightarrow G, b \mapsto R_a(b) = ba.$$

$L_a$  e  $R_a$  sono diffeomorfismi (ma non omomorfismi di gruppi), detti *traslazione sinistra* e *traslazione destra*.

**Definizione 3.6.** Sia  $X \in \mathfrak{X}(G)$ .  $X$  si dice *invariante a sinistra* (risp. *invariante a destra*) se  $(L_a)_* X = X$  (risp.  $(R_a)_* X = X$ ), cioè

$$(L_a)_* X_b = X_{L_a(b)} = X_{ab} \quad (\text{risp. } (R_a)_* X_b = X_{ba}) \quad \forall a, b \in G.$$

Se  $X$  e  $Y$  sono due campi di vettori invarianti a sinistra (risp. a destra) anche i campi  $X + Y$ ,  $\lambda X$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e  $[X, Y]$  sono invarianti a sinistra (risp. a destra). Quest'ultima proprietà segue dal fatto che  $L_a$  è un diffeomorfismo e quindi vale (cfr. Proposizione 2.27):

$$L_{a*}[X, Y] = [L_{a*}X, L_{a*}Y] = [X, Y].$$

Da tali proprietà segue che l'insieme  $\mathfrak{g}$  dei campi vettoriali invarianti a sinistra ha una struttura di algebra di Lie, detta *algebra di Lie del gruppo di Lie  $G$* .

Tra gli spazi vettoriali  $\mathfrak{g}$  e  $T_e G$ , spazio tangente a  $G$  nell'elemento neutro  $e$  di  $G$ , possiamo definire l'applicazione

$$\Phi : \mathfrak{g} \rightarrow T_e G, X \mapsto \Phi(X) = X_e.$$

La corrispondenza  $\Phi$  è chiaramente lineare. Inoltre, fissato  $v \in T_e G$ , esiste un unico  $X \in \mathfrak{g}$  tale che  $X_e = v$ . Basta definire, per ogni  $a \in G$ ,

$$X_a := (L_a)_* v. \tag{3.1}$$

Tale  $X$  è invariante a sinistra in quanto

$$\begin{aligned} X_{ab} &:= (L_{ab})_* v = (L_a \circ L_b)_* v \\ &= (L_a)_* (L_b)_* v = (L_a)_* X_b. \end{aligned}$$

Inoltre, si dimostra che  $X$  è differenziabile (anzi analitico). Pertanto, abbiamo il seguente teorema.

**Teorema 3.7.** *L'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di un gruppo di Lie  $G$  è isomorfa (come spazio vettoriale) a  $T_e G$ . Quindi,  $\dim \mathfrak{g} = \dim G$ .*

In particolare, ogni gruppo di Lie è parallelizzabile e orientabile. In base al risultato precedente, si può introdurre su  $T_e G$  una struttura di algebra di Lie definendo, per ogni  $v, w \in T_e G$ ,

$$[v, w] = [\Phi X, \Phi Y] := \Phi[X, Y] = [X, Y]_e. \quad (3.2)$$

In tal modo,  $\Phi$  risulta un isomorfismo tra algebre di Lie. Di solito le due algebre di Lie  $T_e G$  e  $\mathfrak{g}$ , in quanto isomorfe, vengono identificate.

La seguente proposizione fornisce una caratterizzazione dei campi vettoriali invarianti a sinistra.

**Proposizione 3.8.** *Sia  $G$  un gruppo di Lie e  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  una base della sua algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ . Allora per ogni  $X \in \mathfrak{X}(G)$ ,  $X = \sum_i X^i \xi_i$ , risulta che:*

$$X \text{ è invariante a sinistra} \iff \text{le } X^i \text{ sono funzioni costanti.}$$

*Dimostrazione.* Sia  $X \in \mathfrak{X}(G)$ , allora

$$\begin{aligned} X(x) &= \sum_{i=1}^n X^i(x) \xi_{ix}, & X(ax) &= \sum_{i=1}^n X^i(ax) \xi_{iax}, \\ (L_a)_* X_x &= (L_a)_* \sum_{i=1}^n X^i(x) \xi_{ix} \\ &= \sum_{i=1}^n X^i(x) (L_a)_* \xi_{ix} = \sum_{i=1}^n X^i(x) \xi_{iax}. \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} X \in \mathfrak{g} &\iff X_{ax} = (L_a)_* X_x \\ &\iff \sum_{i=1}^n X^i(ax) \xi_{iax} = \sum_{i=1}^n X^i(x) \xi_{iax} \\ &\iff X^i(ax) = X^i(x) \\ &\iff X^i \text{ sono costanti.} \end{aligned}$$

□

## I teoremi di Lie

Sia  $f : G \rightarrow G'$  un omomorfismo differenziabile tra due gruppi di Lie  $G$  e  $G'$ , quindi

$$f(ab) = f(a)f(b), \quad \text{cioè} \quad (f \circ L_a)(b) = (L_{f(a)} \circ f)(b), \quad \forall a, b \in G.$$

Inoltre  $f(e) = e'$ . L'omomorfismo  $f$  induce un omomorfismo (tra spazi vettoriali)  $f_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ ,  $X \mapsto X' = f_*X := (\Phi'^{-1} \circ f_{*e} \circ \Phi)X$ , cioè

$$f_* : \mathfrak{g} \rightarrow T_e G \rightarrow T_{e'} G' \rightarrow \mathfrak{g}', \quad X \mapsto X_e \mapsto f_{*e} X_e \mapsto X',$$

quindi

$$X'_{e'} = f_{*e} X_e \quad \text{e} \quad X'_{a'} = L_{a'*} X'_e.$$

Ovviamente  $f_*$  è un isomorfismo se, e solo se,  $f_{*e}$  è un isomorfismo. I campi vettoriali  $X$  e  $X'$  risultano  $f$ -riferiti, i.e, soddisfano

$$X'_{f(a)} = f_{*a} X_a.$$

Infatti

$$X'_{f(a)} = L_{f(a)*} X'_{e'} = L_{f(a)*} f_{*e} X_e = (L_{f(a)} \circ f)_{*e} X_e = (f \circ L_a)_{*e} X_e = f_{*a} X_a.$$

Inoltre, notiamo che

$$X \text{ e } X' \text{ } f\text{-riferiti} \Leftrightarrow X'(\varphi) \circ f = X(\varphi \circ f) \quad \forall \varphi \in \mathcal{F}(G'). \quad (3.3)$$

Infatti,

$$\begin{aligned} X \text{ e } X' \text{ } f\text{-riferiti} &\Leftrightarrow X'_{f(a)} = f_{*a} X_a \quad \forall a \in G, \\ &\Leftrightarrow X'_{f(a)}(\varphi) = (f_{*a} X_a)(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{F}(G'), \quad \forall a \in G, \\ &\Leftrightarrow X'(\varphi)(f(a)) = X_a(\varphi \circ f) \quad \forall \varphi \in \mathcal{F}(G'), \quad \forall a \in G, \\ &\Leftrightarrow X'(\varphi) \circ f = X(\varphi \circ f) \quad \forall \varphi \in \mathcal{F}(G'). \end{aligned}$$

Se  $X'$  e  $Y'$  sono  $f$ -riferiti a  $X$  e  $Y$  rispettivamente, dalla (3.3) segue che

$$(X'Y'(\varphi)) \circ f = X'(Y'(\varphi)) \circ f = X(Y'(\varphi) \circ f) = X(Y(\varphi \circ f)).$$

e quindi  $[X', Y']$  è  $f$ -riferito a  $[X, Y]$ , cioè  $f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y]$ . Dunque,  $f_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ ,  $X \mapsto X' = f_*X$ , è un omomorfismo tra algebre di Lie e di conseguenza  $f_*(\mathfrak{g})$  è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{g}'$ . Abbiamo quindi dimostrato la seguente

**Proposizione 3.9.** *Se  $f : G \rightarrow G'$  è un omomorfismo differenziabile tra due gruppi di Lie  $G$  e  $G'$ , allora resta definito un omomorfismo tra algebre di Lie  $f_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ . In particolare,  $f_*(\mathfrak{g})$  è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{g}'$ .*

Se  $G$  è un sottogruppo di Lie di  $G'$ , l'immersione  $i : G \hookrightarrow G'$  è un omomorfismo iniettivo e il differenziale  $i_{*e}$  soddisfa  $i_{*e}T_e G = T_e G$ . Dalla Proposizione 3.9 segue quindi il seguente

**Corollario 3.10.** *Se  $G$  è un sottogruppo di Lie di  $G'$ , allora  $\mathfrak{g}$  è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{g}'$ .*

Si osservi che il risultato precedente è valido anche per un *omomorfismo locale* tra due gruppi di Lie  $G$  e  $G'$ , cioè per un'applicazione differenziabile  $f : U \rightarrow U'$  (dove  $U$  è un intorno di  $e$  e  $U'$  è un intorno di  $e'$ ) che soddisfa

$$f(ab) = f(a)f(b), \quad \text{cioè} \quad (f \circ L_a)(b) = (L_{f(a)} \circ f)(b)$$

per ogni  $a, b \in U$  tale che  $ab \in U$  e  $f(ab) \in U'$ . Infatti, per costruire  $f_*$  si utilizza solo il differenziale di  $f$  in  $e$ , e quindi, è sufficiente conoscere il valore di  $f$  in un intorno dell'elemento neutro. Se  $f : U \rightarrow U'$  è un diffeomorfismo,  $f_*$  è un isomorfismo di algebre di Lie. Dalla Proposizione 3.9 segue quindi che se due gruppi di Lie sono localmente isomorfi, allora le corrispondenti algebre di Lie sono isomorfe. Viceversa, anche un'algebra di Lie determina univocamente un gruppo di Lie. Valgono infatti i seguenti teoremi.

**Teorema 3.11.** (primo e secondo Teorema di Lie). *Siano  $G$  e  $G'$  due gruppi di Lie. Se  $G$  e  $G'$  sono localmente isomorfi, allora le loro algebre di Lie  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{g}'$  sono isomorfe. Viceversa, se le algebre di Lie  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{g}'$  sono isomorfe, allora  $G$  e  $G'$  sono localmente isomorfi.*

**Teorema 3.12.** *Se  $G$  è semplicemente connesso, ogni omomorfismo locale  $f : U \subseteq G \rightarrow G'$  si può estendere in modo unico ad un omomorfismo differenziabile globale  $\tilde{f} : G \rightarrow G'$ .*

**Teorema 3.13.** *Due gruppi di Lie semplicemente connessi sono isomorfi se, e solo se, le loro algebre di Lie sono isomorfe.*

**Teorema 3.14.** (terzo Teorema di Lie). *Data un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  esiste sempre un gruppo di Lie  $G$  la cui algebra di Lie è isomorfa a  $\mathfrak{g}$ .*

Infine definiamo alcune classi speciali di algebre di Lie. Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie. L'applicazione

$$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad (X, Y) \mapsto \text{tr}(ad_X \circ ad_Y),$$

è una forma bilineare simmetrica, detta *forma di Killing*, invariante rispetto agli automorfismi di  $\mathfrak{g}$ . Un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  si dice *semisemplice* se  $B$  è non degenera.  $\mathfrak{g}$  si dice *semplice* se è semisemplice e contiene solo ideali banali. Quindi, un gruppo di Lie  $G$  si dice *semplice* (risp. *semisemplice*) se la sua algebra di Lie è *semplice* (risp. *semisemplice*).  $\mathcal{D}^1 \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ , che è un ideale di  $\mathfrak{g}$ , viene detto *derivato primo*, o *algebra derivata*, di  $\mathfrak{g}$ . Per induzione si definiscono i derivati successivi:

$$\mathcal{D}^n \mathfrak{g} = \mathcal{D}(\mathcal{D}^{n-1} \mathfrak{g}).$$

$\mathfrak{g}$  si dice *risolubile* se esiste un intero  $n$  tale che  $\mathcal{D}^n \mathfrak{g} = \{0\}$ . Poniamo

$$\mathfrak{g}^1 = \mathcal{D}^1 \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1], \quad \dots, \quad \mathfrak{g}^n = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{n-1}].$$

$\mathfrak{g}$  si dice *nilpotente* se esiste un intero  $n$  tale che  $\mathfrak{g}^n = \{0\}$ . Da notare che *ogni algebra di Lie nilpotente è risolubile* (non vale il viceversa). Un gruppo di Lie  $G$  si dice *risolubile* (risp. *nilpotente*) se la sua algebra di Lie è *risolubile* (risp. *nilpotente*).

### 3.3 Le costanti di struttura

Sia  $G$  un gruppo di Lie con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ . Una 1-forma differenziale  $\omega$  su  $G$  si dice *invariante a sinistra* se

$$(L_a)^*\omega = \omega \quad \forall a \in G,$$

dove  $(L_a)^*\omega$  è la 1-forma definita da

$$((L_a)^*\omega)_b X_b = \omega_{ab}((L_a)_* X_b) = \omega_{ab}(X_{ab})$$

per ogni  $b \in G$  e  $X \in \mathfrak{g}$ . Quindi,  $\omega$  è invariante a sinistra se, e solo se,

$$\omega_{ab}(X_{ab}) = \omega_b(X_b) \quad \forall a, b \in G \quad \text{e} \quad \forall X \in \mathfrak{g},$$

$$\text{ovvero} \quad \omega_a(X_a) = \omega_e(X_e) \quad \forall a \in G \quad \text{e} \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Segue che  $\omega$  è una 1-forma invariante a sinistra se, e solo se, la funzione  $\omega(X)$  è costante per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ . Pertanto, vale la proprietà:

$$\omega \text{ è invariante a sinistra se, e solo se, } \omega(X)(a) = \text{cost.} \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Ora, fissata una base  $(E_1, \dots, E_n)$  di  $\mathfrak{g}$ , poniamo

$$[E_i, E_j] = \sum_k c_{ij}^k E_k, \quad c_{ij}^k \in \mathbb{R}.$$

Le  $c_{ij}^k$  si dicono *costanti di struttura* dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ , rispetto alla base  $(E_i)$ , e verificano le seguenti proprietà

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k, \quad \sum_m (c_{ij}^m c_{mh}^k + c_{jh}^m c_{mi}^k + c_{hi}^m c_{mj}^k) = 0 \quad (\text{identità di Jacobi}).$$

Viceversa, assegnate  $n^3$  costanti  $c_{ij}^k$  che verificano le precedenti due proprietà, allora esiste una sola algebra di Lie le cui costanti di struttura siano proprio le  $c_{ij}^k$  date. Se tutte le costanti di struttura sono nulle, allora l'algebra di Lie è abeliana.

**Osservazione 3.15.** (cfr. Conlon [28], p. 167-168)

**a)** Un gruppo di Lie è *abeliano* se, e solo se, la sua algebra di Lie è abeliana.  
**b)** Ogni gruppo di Lie (connesso) abeliano  $n$ -dimensionale è isomorfo a  $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  per qualche  $k = 0, 1, \dots, n$ . In particolare, ogni gruppo di Lie (connesso) compatto abeliano è un toro.

**Teorema 3.16.** (cfr. Tricerri-Vanhecke [111], pag.10) *Sia  $M$  una varietà differenziabile semplicemente connessa di dimensione  $n$ . Supponiamo che esistano  $n$  campi di vettori  $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(M)$  completi, linearmente indipendenti e tali che*

$$[E_i, E_j] = \sum_k c_{ij}^k E_k \quad \text{dove} \quad c_{ij}^k \in \mathbb{R}.$$

*Allora, per ogni fissato  $p \in M$ ,  $M$  ha un'unica struttura di gruppo di Lie avente  $p$  come elemento neutro ed  $E_1, \dots, E_n$  come campi di vettori invarianti a sinistra.*

Se  $\omega$  è una 1-forma differenziale, il differenziale di  $\omega$  è la 2-forma  $d\omega$  definita da

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]),$$

per ogni coppia di campi di vettori  $X$  e  $Y$ . In particolare, se  $X$  e  $Y$  sono campi invarianti a sinistra e  $\omega$  è una 1-forma invariante a sinistra di un gruppo di Lie  $G$ , l'espressione precedente si riduce a

$$d\omega(X, Y) = -\omega([X, Y]).$$

Quindi, se  $(\omega^1, \dots, \omega^n)$  è la base duale della base  $(E_1, \dots, E_n)$  di  $\mathfrak{g}$ , si ha

$$d\omega^k(E_i, E_j) = -\omega^k([E_i, E_j]) = -\sum_l c_{ij}^l \omega^k(E_l) = -c_{ij}^k$$

da cui, tenendo conto che  $(\omega_1 \wedge \omega_2)(X, Y) = \omega_1(X)\omega_2(Y) - \omega_1(Y)\omega_2(X)$ , si ricava

$$d\omega^k = -\sum_{i,j} c_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j.$$

Queste equazioni sono dette *equazioni di Maurer-Cartan*. Si dimostra che esse determinano (localmente) l'operazione prodotto in  $G$ . Per determinare le equazioni di Maurer-Cartan abbiamo usato per  $d\omega$  e  $\omega_1 \wedge \omega_2$  le formule (2.9) e (2.3). Usando (2.10) e (2.11) si ottengono le equazioni di Maurer-Cartan nella stessa forma.

### 3.4 Esempi di algebre di Lie

#### L'algebra di Lie di $\mathbb{R}^n(+)$

Per il gruppo di Lie  $\mathbb{R}^n(+)$ , le traslazioni sinistre sono le usuali traslazioni e quindi i campi di vettori  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  sono invarianti a sinistra. Infatti la funzione  $x_j \circ L_{p_o} = x_j + x_j(p_o) = x_j + \text{cost.}$ , e quindi

$$(L_{p_o})_* \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 = \sum_j \frac{\partial x_j \circ L_{p_o}}{\partial x_i}(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_{L_{p_o}(0)} = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{p_o}.$$

Un arbitrario campo di vettori invariante a sinistra  $X$  è definito, per ogni  $p \in \mathbb{R}^n$ , da  $X(p) = (L_p)_* v$ , dove  $v$  è un fissato vettore di  $T_0\mathbb{R}^n$ . Se  $v = \sum_i v^i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0$ , allora  $X_p = \sum_i v^i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$ . Di conseguenza i campi di vettori invarianti a sinistra su  $\mathbb{R}^n$  sono del tipo  $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$  con  $X^i$  funzioni costanti. In particolare:  $[X, Y] = 0$  per ogni  $X, Y$  invarianti a sinistra. Pertanto l'algebra di Lie di  $\mathbb{R}^n(+)$  è abeliana.

In generale, l'algebra di Lie di un gruppo abeliano è abeliana.

**L'algebra di Lie di  $\mathbb{R}_+^n(\cdot)$** 

Per il gruppo di Lie  $\mathbb{R}_+^n(\cdot)$  le traslazioni sinistre sono definite da

$$L_{(x_o, a_o)} : p = (x, a) \mapsto (x_o, a_o) \cdot (x, a) = (x_o + a_o x, a_o a),$$

e quindi i campi vettoriali

$$V_i(p) = \alpha a(p) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p, \quad \alpha = \text{cost.} \neq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

sono invarianti a sinistra. Pertanto,  $V_1, \dots, V_n$  generano l'algebra di Lie di  $\mathbb{R}_+^n(\cdot)$  e soddisfano

$$[V_n, V_j] = \alpha V_j \quad \text{e} \quad [V_i, V_j] = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n-1. \quad (3.4)$$

**L'algebra di Lie di  $GL(n, \mathbb{R})$** 

Sia  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  lo spazio vettoriale di tutte le matrici reali di ordine  $n$ .  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  è un'algebra di Lie rispetto al prodotto

$$[A, B] := AB - BA, \quad \forall A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}).$$

Vogliamo provare che  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  è l'algebra di Lie del gruppo di Lie  $GL(n, \mathbb{R})$ . Introduciamo un sistema di coordinate globali su  $GL(n, \mathbb{R})$  ponendo

$$x_{ij}(a) = a_{ij}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n, \quad \forall a = (a_{ij}) \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Denotiamo con  $I$  l'elemento neutro del gruppo  $GL(n, \mathbb{R})$ . Ogni vettore  $v$  dello spazio tangente  $T_I GL(n, \mathbb{R})$  si può scrivere nel modo seguente

$$v = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \left( \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right)_I, \quad A_{ij} \in \mathbb{R},$$

e quindi possiamo considerare l'isomorfismo tra spazi vettoriali

$$\Psi : T_I(GL(n, \mathbb{R})) \longrightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), \quad v \longmapsto A = (A_{ij}).$$

Per verificare che  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  è l'algebra di Lie di  $GL(n, \mathbb{R})$ , verifichiamo che la struttura di algebra di Lie di  $T_I(GL(n, \mathbb{R}))$ , ossia quella definita dalla (3.2), è isomorfa tramite  $\Psi$  a quella di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ :

$$\Psi[v, w] = [\Psi v, \Psi w].$$

Dato  $v \in T_I(GL(n, \mathbb{R}))$ , consideriamo il campo di vettori invariante a sinistra  $X$  tale che  $\Phi X = X_I = v$ , e quindi  $X_a = (L_a)_* I v$  per ogni  $a \in GL(n, \mathbb{R})$ . Sia  $\gamma(t)$  una curva differenziabile di  $GL(n, \mathbb{R})$  (cfr. Proposizione 2.33) tale che

$$\gamma(0) = I, \quad \dot{\gamma}(0) = v \equiv A = \Psi(v).$$

Sia  $a \in GL(n, \mathbb{R})$ , dalla definizione di differenziale segue che



$$X_a = (L_a)_* v = \dot{\tilde{\gamma}}(0), \quad \text{dove} \quad \tilde{\gamma}(t) = (L_a \circ \gamma)(t) = a \gamma(t).$$

Quindi,  $\tilde{\gamma}(0) = a$  e

$$\begin{aligned} X_a &= \dot{\tilde{\gamma}}(0) = \sum_{i,j=1}^n \frac{d}{dt} (a \gamma(t))_{ij}(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right)_a \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n x_{ik}(a) (\dot{\gamma}(0))_{kj} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right)_a \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n x_{ik}(a) A_{kj} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right)_a. \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$X = \sum_{i,j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n x_{ik} A_{kj} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right).$$

In termini matriciali:

$$X_a = aA = x(a)A \quad \forall a \in GL(n, \mathbb{R}), \quad \text{si pone quindi} \quad X = xA.$$

Analogamente considerato un secondo vettore  $w \in T_I(GL(n, \mathbb{R}))$  del tipo

$$w = \sum_{i,j=1}^n B_{ij} \left( \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right)_I, \quad B_{ij} \in \mathbb{R},$$

allora  $\Psi(v) = B$  e il campo invariante a sinistra  $Y$  tale che  $Y_I = w$  è dato da

$$Y = \sum_{i,j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n x_{ik} B_{kj} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right), \quad Y = xB.$$

Pertanto, dopo qualche calcolo, si ottiene

$$[X, Y] = \sum_{i,j,k,s=1}^n x_{ik} (A_{kj} B_{js} - B_{kj} A_{js}) \left( \frac{\partial}{\partial x_{is}} \right) = \sum_{i,k,s=1}^n x_{ik} [A, B]_{ks} \left( \frac{\partial}{\partial x_{is}} \right),$$

ossia in termini matriciali

$$[X, Y] = x[A, B],$$

e quindi

$$\Psi[X, Y]_I = [A, B].$$

Di conseguenza,

$$\Psi[v, w] = \Psi[\Phi X, \Phi Y] = \Psi\Phi[X, Y] = \Psi[X, Y]_I = [A, B] = [\Psi v, \Psi w]$$

e  $T_I(GL(n, \mathbb{R}))$  è isomorfo, come algebra di Lie, a  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ . Si noti che identificando il campo di vettori invariante a sinistra  $X$  con il vettore tangente  $\Phi(X) = X_I = v \equiv A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ , si può scrivere

$$X_a = aX \quad \forall a \in GL(n, \mathbb{R}).$$

**Osservazione 3.17.** Si noti che ogni algebra di Lie reale  $\mathfrak{g}$  è isomorfa ad una sottoalgebra di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ , per qualche  $n$ , quindi esiste un sottogruppo di Lie di  $GL(n, \mathbb{R})$  la cui algebra di Lie è isomorfa a  $\mathfrak{g}$  (cfr. Ado [3]).

### L'algebra di Lie di $SL(n, \mathbb{R})$

Indichiamo con  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  l'insieme di tutte le matrici di ordine  $n$  a traccia nulla, quindi  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : \text{tr}X = 0\}$ .  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  è un'algebra di Lie, anzi una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ , infatti è un sottospazio vettoriale e inoltre

$$\text{tr}[X, Y] = \text{tr}(XY) - \text{tr}(YX) = 0 \quad \text{per } X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}).$$

Per vedere che  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  è l'algebra di Lie di  $SL(n, \mathbb{R})$ , basta far vedere, tenendo presente il Corollario 3.10, che  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  coincide con lo spazio tangente  $T_I SL(n, \mathbb{R})$ . Premettiamo il seguente

**Lemma 3.18.** Sia  $A(t) = (a_{ij}(t))$  una matrice di ordine  $n$  i cui elementi sono funzioni differenziabili di  $t$  variabile in un aperto di  $\mathbb{R}$ . Sia  $\text{adj}(A) = (A_{ij})^T$  l'aggiunta classica di  $A$ , dove  $A_{ij}$  è il complemento algebrico dell'elemento  $a_{ij}$  di  $A$ . Posto  $D(t) = \det A(t)$ , si ha

$$D'(t) = \text{tr}(\text{adj}(A)(t) \cdot A'(t)).$$

In particolare se  $A(t)$  è invertibile, abbiamo

$$D'(t) = (\det A(t)) \text{tr}(A^{-1}(t) \cdot A'(t)). \quad (3.5)$$

*Dimostrazione.* Per la regola di derivazione delle funzioni composte

$$D'(t) = \sum_{i,j} \frac{\partial D}{\partial a_{ij}} \frac{da_{ij}}{dt}.$$

Siccome

$$D(t) = \det A(t) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{in}A_{in},$$

allora

$$\frac{\partial D}{\partial a_{ij}} = A_{ij} \quad \text{e quindi} \quad D'(t) = \sum_{i,j} a'_{ij}(t) A_{ij}(t).$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \text{tr}(\text{adj}(A) \cdot A') &= \sum_i (\text{adj}(A) \cdot A')_{ii} \\ &= \sum_i \sum_j (\text{adj}(A))_{ij} a'_{ji} \\ &= \sum_{i,j} A_{ji} a'_{ji} = D'. \end{aligned}$$

□

Sia ora  $X \in T_I SL(n, \mathbb{R})$  e  $A(t)$  una curva differenziabile di  $SL(n, \mathbb{R})$  con  $A(0) = I$  e  $A'(0) = X$ . Siccome  $D(t) := \det A(t) = 1$  per ogni  $t$ , applicando la (3.5), si ottiene  $0 = D'(t) = (\det A(t))\text{tr}(A^{-1}(t) \cdot A'(t))$  e quindi

$$0 = D'(0) = (\det A(0))\text{tr}(A^{-1}(0) \cdot A'(0)) = \text{tr}A'(0) = \text{tr}X.$$

Dunque  $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ . D'altronde  $\dim \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = n^2 - 1 = \dim SL(n, \mathbb{R})$  per cui  $T_I SL(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ .

**Esercizio 3.19.** Si verifichi che le matrici

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

costituiscono una base di  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  e soddisfano

$$[X_1, X_2] = -2X_3, \quad [X_1, X_3] = 2X_2, \quad [X_2, X_3] = 2X_1.$$

**L'algebra di Lie di  $SO(n)$**

Indichiamo con  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$  l'insieme di tutte le matrici reali di ordine  $n$  e antisimmetriche, quindi

$$\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : X^T + X = 0\}.$$

Vogliamo provare che  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$  è l'algebra di Lie di  $SO(n)$ . Intanto, osserviamo che  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$  è un'algebra di Lie, anzi una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  e di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ , infatti è un sottospazio vettoriale e inoltre

$$[X, Y]^T = (XY)^T - (YX)^T = Y^T X^T - X^T Y^T = YX - XY = -[X, Y]$$

per ogni  $X, Y \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ . Sia  $X \in T_I SO(n)$  e  $A(t)$  una curva differenziabile di  $SO(n)$  con  $A(0) = I$  e  $A'(0) = X$ . Siccome  $A(t) \cdot A(t)^T = I$ ,

$$0 = (A(t) \cdot A(t)^T)'(0) = A'(0) \cdot A(0)^T + A(0) \cdot A'(0)^T = X + X^T.$$

Poiché  $\dim \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = \frac{n^2-n}{2} = \dim T_I SO(n)$ ,  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$  coincide con lo spazio tangente  $T_I SO(n)$  e quindi è l'algebra di Lie di  $SO(n)$ . D'altronde,  $SO(n)$  è una componente connessa di  $O(n)$  e  $T_I SO(n) = T_I O(n)$ , per cui  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$  è anche l'algebra di Lie di  $O(n)$ .

**Esercizio 3.20.** Si verifichi che le matrici

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

costituiscono una base di  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$  e soddisfano

$$[Y_1, Y_2] = Y_3, \quad [Y_3, Y_1] = Y_2, \quad [Y_2, Y_3] = Y_1.$$

Concludere che l'algebra di Lie  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$  è isomorfa all'algebra di Lie dei vettori dello spazio euclideo rispetto al prodotto vettoriale.

Riportiamo brevemente le algebre di Lie degli altri gruppi matriciali introdotti nella Sezione 3.1:

*L'algebra di Lie del gruppo unitario  $U(n)$*  è lo spazio delle matrici hermitiane antisimmetriche

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : X^T + \bar{X} = 0\}.$$

*L'algebra di Lie del gruppo unitario speciale  $SU(n)$*  è

$$\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n) : \text{Tr}X = 0\}.$$

Una base di  $\mathfrak{su}(2)$  è data da

$$X_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Tali matrici soddisfano

$$[X_1, X_2] = 2X_3, \quad [X_3, X_1] = 2X_2, \quad [X_2, X_3] = 2X_1.$$

*L'algebra di Lie del gruppo simplettico reale  $Sp(2n, \mathbb{R})$*  è

$$\begin{aligned} \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}) &= \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R}) : J_n X \text{ è simmetrica}\} \\ &= \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R}) : J_n X^T + X J_n = 0\} \\ &= \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R}) : X^T J_n + J_n X = 0\}. \end{aligned}$$

*L'algebra di Lie del gruppo simplettico quaternionico  $Sp(n)$*  è lo spazio delle matrici hermitiane quaternioniche antisimmetriche

$$\mathfrak{sp}(n) = \{X \in \mathbb{H}^{n,n} : \bar{X}^T = -X\}.$$

### 3.5 L'applicazione esponenziale

Consideriamo lo spazio  $\mathbb{R}^{n,n}$  munito della metrica euclidea:

$$\forall A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad \langle A, B \rangle = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}, \quad \|A\|^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2.$$

**Lemma 3.21.**  $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ :

- 1)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- 2)  $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$  e quindi  $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ .

*Dimostrazione.* La 1) è la ben nota disuguaglianza triangolare. Per provare la 2), indichiamo con  $r_1, \dots, r_n$  le righe della matrice  $A$  e con  $c_1, \dots, c_n$  le colonne di  $B$ . Allora

$$A \cdot B = (d_{ij}) = (\langle r_i, c_j \rangle), \quad \text{dove } \langle r_i, c_j \rangle = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

e quindi, applicando la disuguaglianza di Schwarz, si ha

$$\begin{aligned}\|A \cdot B\|^2 &= \sum_{i,j} (\langle r_i, c_j \rangle)^2 \leq \sum_{i,j} \|r_i\|^2 \cdot \|c_j\|^2 \\ &= \left( \sum_i \|r_i\|^2 \right) \cdot \left( \sum_j \|c_j\|^2 \right) = \|A\|^2 \cdot \|B\|^2.\end{aligned}$$

□

Per ogni  $X \in \mathbb{R}^{n,n}$ , consideriamo la seguente serie di matrici:

$$e^X = I + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}.$$

**Lemma 3.22.** *Siano  $X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n,n}$ , allora:*

- (1) *la serie  $e^X$  è convergente;*
- (2) *se  $X, Y$  commutano, cioè  $XY = YX$ , allora  $e^{X+Y} = e^X e^Y$ ;*
- (3) *la matrice  $e^X \in GL(n, \mathbb{R})$  e  $(e^X)^{-1} = e^{-X}$ ;*
- (4)  $\det(e^X) = e^{\text{tr}X}$ ;
- (5)  $e^{X^T} = (e^X)^T$ .

*Dimostrazione.* (1) Applicando il Lemma 3.21, si ha

$$\left\| \frac{X^m}{m!} + \frac{X^{m+1}}{(m+1)!} + \dots + \frac{X^{m+k-1}}{(m+k-1)!} \right\| \leq \frac{\|X\|^m}{m!} + \dots + \frac{\|X\|^{m+k-1}}{(m+k-1)!}.$$

Siccome la serie numerica  $e^{\|X\|}$  è convergente per ogni  $X$ , le somme parziali di  $e^X$  costituiscono una successione di Cauchy nella norma delle matrici per cui anche la serie  $e^X$  è convergente.

(2) Se  $X, Y$  commutano, per calcolare  $(X + Y)^p$  si usa la formula binomiale come per gli scalari, per cui

$$\begin{aligned}e^X e^Y &= \left( \sum_{r=0}^{\infty} \frac{X^r}{r!} \right) \left( \sum_{s=0}^{\infty} \frac{Y^s}{s!} \right) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left( \sum_{r+s=p} \frac{p!}{r!s!} X^r Y^s \right) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (X + Y)^p = e^{X+Y}.\end{aligned}$$

(3) Poiché  $X$  e  $-X$  commutano, applicando la proprietà (2), si ha

$$I = e^0 = e^{X+(-X)} = e^X e^{-X}$$

e quindi  $\det e^X \neq 0$  e  $e^{-X} = (e^X)^{-1}$ .

(4) Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  gli autovalori (eventualmente complessi) di  $X$ . Allora

$\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$  sono gli autovalori di  $X^k$  e quindi  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$  saranno gli autovalori di  $e^X$ . Pertanto

$$\det e^X = e^{\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = e^{\text{tr}X}.$$

(5) Segue dalla definizione di  $e^X$  tenendo conto che  $(X^T)^k = (X^k)^T$ .  $\square$

Il Lemma 3.22 permette di considerare l'applicazione

$$e : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R}), \quad X \mapsto e^X,$$

che viene detta *applicazione esponenziale* di matrici. Inoltre, sempre come conseguenza del Lemma 3.22, risulta che: se  $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ , allora  $\text{tr}X = 0$  e  $\det(e^X) = e^{\text{tr}X} = e^0 = 1$  e quindi

$$e : \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow SL(n, \mathbb{R}).$$

Se  $X \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ , allora  $X^T = -X$  e  $X$  commutano e quindi  $(e^X)^T e^X = e^{X^T} e^X = e^{X^T + X} = e^0 = I$ . Inoltre,  $\det(e^X) = e^{\text{tr}X} = e^0 = 1$  e quindi

$$e : \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \rightarrow SO(n) \subset O(n).$$

Questa proprietà vale per ogni gruppo di Lie matriciale  $G$ , cioè:  $e^X \in G$  per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ . Ricordiamo che per  $X \in T_I G$  il corrispondente campo vettoriale invariante a sinistra, che per semplicità denotiamo con lo stesso simbolo  $X$ , è definito da  $X_A = (L_A)_* X_I$ ,  $X_I = X$ , per ogni matrice  $A \in G$ . Detta  $\gamma(t)$  una curva differenziabile di  $G$  con  $\gamma(0) = I$  e  $\dot{\gamma}(0) = X_I$ , si ha  $X_A = (L_A)_* \dot{\gamma}(0) = (L_A \gamma(t))'(0) = (A \cdot \gamma(t))'(0) = A \cdot \dot{\gamma}(0) = A \cdot X$ . Quindi,

$$X_A = A \cdot X \quad \forall X \in \mathfrak{g} \text{ e } \forall A \in G.$$

Osserviamo che, fissato  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $\phi_X(t) = e^{tX}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , è una curva differenziabile di  $G$  che soddisfa

$$\begin{aligned} \phi_X(0) &= e^0 = I, & \phi_X(t+s) &= \phi_X(t)\phi_X(s), \\ \frac{d}{dt}\phi_X(t) &= e^{tX} \cdot X = X_{e^{tX}} = X_{\phi_X(t)}. \end{aligned}$$

Quindi  $\phi_X(t) = e^{tX}$  è la curva integrale di  $X$  uscente dall'elemento neutro  $I$  e l'applicazione  $t \mapsto e^{tX}$  è un omomorfismo tra i gruppi  $\mathbb{R}(+)$  e  $G(\cdot)$ .

**Esempio 3.23.** Prendendo la matrice  $X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  come elemento di

$T_I GL(3, \mathbb{R})$ , si ha  $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  e  $X^k = 0$  per ogni  $k \geq 3$ . Quindi,

$e^{tX} = I + tX + (t^2/2)X^2$  e

$$X_{e^{tX}} = e^{tX} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & a & b + tac \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (e^{tX})'.$$

Le considerazioni fatte per l'esponenziale dei gruppi di Lie matriciali si estendono per un arbitrario gruppo di Lie. Sia quindi  $G$  un arbitrario gruppo

di Lie. Dato un campo di vettori  $X \in \mathfrak{g}$ , indichiamo con  $\phi_X(t)$  la curva integrale di  $X$  passante per l'elemento neutro  $e$  di  $G$ , quindi

$$\phi_X(0) = e, \quad \frac{d}{dt}\phi_X(t) = X_{\phi_X(t)}, \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

In generale, una curva integrale è definita solo per  $t$  sufficientemente piccolo. Tuttavia, poiché  $X$  è invariante a sinistra,  $\phi_X$  è definita su tutto  $\mathbb{R}$ . Infatti, se  $\phi_X(t)$  è definita per  $|t| \leq \epsilon$ , la curva

$$\gamma(t) = \phi_X(\epsilon)\phi_X(t - \epsilon) = L_{\phi_X(\epsilon)}\phi_X(t - \epsilon), \quad \epsilon \leq t \leq 2\epsilon,$$

soddisfa  $\dot{\gamma}(\epsilon) = \phi_X(\epsilon)$  e

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= (L_{\phi_X(\epsilon)}\phi_X(t - \epsilon))_{*t} \left( \frac{d}{dt} \right) \\ &= (L_{\phi_X(\epsilon)})_{*|\phi_X(t-\epsilon)} \dot{\phi}_X(t - \epsilon) \\ &= (L_{\phi_X(\epsilon)})_{*|\phi_X(t-\epsilon)} X_{\phi_X(t-\epsilon)} \\ &= X_{\phi_X(\epsilon)\phi_X(t-\epsilon)} = X_{\gamma(t)}. \end{aligned}$$

Pertanto, ponendo

$$\tilde{\phi}_X(t) = \begin{cases} \phi_X(t) & \text{se } |t| \leq \epsilon, \\ \gamma(t) & \text{se } \epsilon \leq t \leq 2\epsilon, \end{cases}$$

si ottiene una curva integrale di  $X$  che estende  $\phi_X(t)$  all'intervallo  $(-\epsilon, 2\epsilon)$ . Così procedendo si estende  $\phi_X(t)$  su tutto  $\mathbb{R}$ .

**Proposizione 3.24.** Per  $X \in \mathfrak{g}$ , la curva integrale  $\phi_X(t)$  soddisfa:

(a)  $\phi_X(t+s) = \phi_X(t)\phi_X(s)$  per ogni  $t, s \in \mathbb{R}$ ;

(b)  $\phi_X(ts) = \phi_{tX}(s)$  per ogni  $t, s \in \mathbb{R}$ ;

(c) la curva integrale di  $X$  passante per  $a \in G$  è :

$$\gamma(t) = a\phi_X(t) = (L_a \circ \phi_X)(t).$$

*Dimostrazione.* (a) Fissato  $t \in \mathbb{R}$ , consideriamo le curve  $\gamma_1(s) = \phi_X(t+s)$  e  $\gamma_2(s) = \phi_X(t)\phi_X(s)$ . Chiaramente  $\gamma_1(s)$  è curva integrale di  $X$  passante per il punto  $\gamma_1(0) = \phi_X(t)$ . Anche  $\gamma_2(s)$  passa per  $\gamma_2(0) = \phi_X(t)\phi_X(0) = \phi_X(t)$ , inoltre è curva integrale di  $X$  in quanto:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_2(s) &= (L_{\phi_X(t)}\phi_X(s))_{*s} \left( \frac{d}{ds} \right) = (L_{\phi_X(t)})_{*\phi_X(s)} X_{\phi_X(s)} \\ &= X_{L_{\phi_X(t)}\phi_X(s)} = X_{\gamma_2(s)}. \end{aligned}$$

Per l'unicità delle curve integrali passanti per uno stesso punto, si può concludere che  $\gamma_1(s) = \gamma_2(s)$ .

(b) Si prova in modo analogo, in questo caso  $\gamma_1(s) = \phi_X(ts)$  e  $\gamma_2(s) = \phi_{tX}(s)$  sono entrambe curve integrali di  $tX$  passanti per  $e$ .

(c) Basta osservare che

$$\left( \frac{d}{dt} a\phi_X(t) \right) = (L_a)_{*|\phi_X(t)} \left( \frac{d}{dt} \phi_X(t) \right) = (L_a)_{*|\phi_X(t)} X_{\phi_X(t)} = X_{a\phi_X(t)}.$$

□

Dalla Proposizione 3.24 segue che, per ogni fissato  $X \in \mathfrak{g}$ , l'applicazione

$$\phi_X : \mathbb{R} \longrightarrow G, \quad t \longmapsto \phi_X(t),$$

è un omomorfismo tra gruppi. Per questo motivo,  $\phi_X(t)$  prende il nome di *sottogruppo ad un parametro* di  $G$ . L'*applicazione esponenziale* di un gruppo di Lie  $G$  è l'applicazione

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G, \quad X \mapsto \exp X = \phi_X(1),$$

dove  $\phi_X(t)$  è il gruppo ad un parametro generato da  $X$ .

**Proposizione 3.25.** *L'applicazione  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  soddisfa:*

$$\exp(t+s)X = (\exp tX)(\exp sX) \quad e \quad \phi_X(t) = \exp tX,$$

per ogni  $t, s \in \mathbb{R}$  e per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ . Inoltre,  $\exp$  è un diffeomorfismo da un intorno di  $0 \in \mathfrak{g}$  in un intorno di  $e \in G$ .

*Dimostrazione.* La prima parte segue dalla Proposizione 3.25. Ricordiamo che per un sistema di equazioni differenziabili ordinarie che dipendono dai parametri  $(a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n$  (componenti di un fissato campo di vettori invariante a sinistra), le soluzioni dipendono in modo differenziabile dai parametri in un intorno dell'origine di  $\mathbb{R}^n$ , ciò implica che  $\exp$  è differenziabile in un intorno di  $0 \in \mathfrak{g}$ . Per vedere che è un diffeomorfismo in un intorno di  $0 \in \mathfrak{g}$ , basta verificare che il differenziale  $(\exp)_{*0}$  è un isomorfismo. Poiché  $\mathfrak{g}$  è uno spazio vettoriale, identifichiamo  $\mathfrak{g}$  con lo spazio tangente  $T_0\mathfrak{g}$ . Sia  $X \in \mathfrak{g}$ , allora  $\gamma(t) = tX$  è una curva di  $\mathfrak{g}$  con  $\gamma(0) = 0$  e  $\dot{\gamma}(0) = X$ , per cui posto  $\alpha(t) = \exp \circ \gamma(t) = \exp(tX) = \phi_X(t)$ , si ha  $(\exp)_{*0}(X) = \dot{\alpha}(0) = \dot{\phi}_X(0) = X_{\phi_X(0)} = X_e$  e quindi  $(\exp)_{*0} : \mathfrak{g} \cong T_0\mathfrak{g} \rightarrow T_eG$  è un isomorfismo.  $\square$

**Osservazione 3.26.** Si noti che, se  $f : G \rightarrow G'$  è un omomorfismo differenziabile, dalla definizione di applicazione esponenziale segue che l'omomorfismo tra le algebre di Lie  $f_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  commuta con l'esponenziale, cioè  $f(\exp_G X) = \exp_{G'}(f_* X)$ .

## 3.6 Gruppi di Lie 3D

### Gruppi di Lie unimodulari

Siano  $V$  uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$  e  $G$  un gruppo di Lie. Una *rappresentazione di  $G$  su  $V$*  è un omomorfismo differenziabile

$$\phi : G \rightarrow GL(V).$$

In particolare, se  $V = \mathbb{R}^n$ , la rappresentazione si dice *matriciale*. Se  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie reale, una *rappresentazione di  $\mathfrak{g}$  su  $V$*  di rango  $n$ , è un omomorfismo di algebre di Lie  $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ .

La *rappresentazione aggiunta* di  $\mathfrak{g}$  su  $\mathfrak{g}$  è definita da

$$ad : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \quad X \mapsto ad_X,$$

dove



$$ad_X : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, Y \mapsto ad_X(Y) = [X, Y].$$

Si noti che  $ad(\mathfrak{g}) \subseteq Der(\mathfrak{g})$ , inoltre il nucleo dell'omomorfismo  $ad$ , ossia

$$\zeta(\mathfrak{g}) = \ker ad = \{X \in \mathfrak{g} : ad_X = 0\} = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0 \forall Y \in \mathfrak{g}\},$$

si dice *centro* di  $\mathfrak{g}$ . Ogni gruppo di Lie ammette una rappresentazione molto importante sulla sua algebra di Lie, costruita nel modo seguente. Se  $a \in G$ ,  $I_a : G \rightarrow G, b \mapsto aba^{-1}$ , è un automorfismo di  $G$  e quindi  $(I_a)_*$  è un isomorfismo dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di  $G$ . Pertanto, si può definire l'applicazione

$$Ad : G \rightarrow GL(\mathfrak{g}), a \mapsto Ad(a) = (I_a)_*.$$

$Ad$  è una rappresentazione di  $G$  in  $\mathfrak{g}$  che viene detta *rappresentazione aggiunta di  $G$  in  $\mathfrak{g}$* . Se  $(E_1, E_2, \dots, E_n)$  è una base di  $\mathfrak{g}$  e  $(\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^n)$  è la corrispondente base duale, la  $n$ -forma differenziale

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^n$$

è non nulla in ogni punto di  $G$  ed è invariante rispetto alle traslazioni sinistre, vale a dire  $(L_a)^*\Omega = \Omega$  per ogni  $a \in G$ . In particolare, ciò implica che *ogni gruppo di Lie è orientabile*. Un'altra importante conseguenza è la possibilità di estendere ai gruppi di Lie la nozione di integrale. Indicato con  $\mathcal{F}_c(G)$  l'insieme delle funzioni continue su  $G$ , a valori reali e a supporto compatto, si dimostra che esiste un'unica funzione (a meno di un fattore costante), detta *misura di Haar*,

$$\mu : \mathcal{F}_c(G) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \mu(f) = \int_G f \Omega,$$

avente le seguenti proprietà

- (1)  $\mu(af + bh) = a\mu(f) + b\mu(h)$ ,  $\forall f, h \in \mathcal{F}_c(G)$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ;
- (2) se  $f \in \mathcal{F}_c(G)$  e  $f \geq 0$ , allora  $\mu(f) \geq 0$ ;
- (3) è invariante rispetto alle traslazioni sinistre:

$$\mu(f \circ L_a) = \mu(f), \text{ per ogni } f \in \mathcal{F}_c(G) \text{ e per ogni } a \in G.$$

**Definizione 3.27.** Un gruppo di Lie  $G$  si dice *unimodulare* se la sua misura di Haar (invariante a sinistra per definizione) è anche invariante a destra.

Una caratterizzazione dei gruppi di Lie unimodulari è data dal seguente

**Teorema 3.28.** *Un gruppo di Lie  $G$  è unimodulare se e solo se*

$$|\det Ad(a)| = 1 \quad \forall a \in G.$$

Sia  $\mathfrak{g}$  l'algebra di Lie di un gruppo di Lie  $G$ . L'applicazione

$$\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}, X \mapsto \text{tr}(ad_X),$$

è un omomorfismo tra algebre di Lie.  $\mathfrak{u} = \ker \phi$  si dice *nucleo unimodulare* ed è un ideale di  $\mathfrak{g}$ .

**Definizione 3.29.** Un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  si dice unimodulare se  $\ker \phi = \mathfrak{g}$ , cioè  $\text{tr}(ad_X) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}$ .

**Proposizione 3.30.** *Siano  $G$  un gruppo di Lie e  $\mathfrak{g}$  la sua algebra di Lie. Allora,  $G$  è unimodulare se, e solo se, la sua algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  è unimodulare.*

Sia  $G$  un gruppo di Lie compatto. L'applicazione

$$\alpha : G \rightarrow \mathbb{R}_+(\cdot), \quad a \mapsto \alpha(a) = |\det Ad(a)|,$$

è analitica ed è anche un omomorfismo:

$$\alpha(ab) = |\det Ad(ab)| = |\det(Ad(a)Ad(b))| = \alpha(a)\alpha(b).$$

Quindi  $\alpha(G)$  è un sottogruppo compatto di  $\mathbb{R}_+(\cdot)$  e di conseguenza sarà  $\alpha(G) = \{+1\}$ . Pertanto, dal Teorema 3.28 segue il

**Corollario 3.31.** *Ogni gruppo di Lie compatto è unimodulare.*

### 3.6.1 Gruppi di Lie 3D unimodulari

Diamo ora una rapida descrizione dei gruppi di Lie unimodulari 3D (ovvero di dimensione tre), gruppi che si sono rivelati particolarmente significativi in diversi contesti. Consideriamo un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  3D munita di un prodotto scalare  $\langle, \rangle$ . Fissata una orientazione su  $\mathfrak{g}$ , si può identificare  $\mathfrak{g}$  con  $\mathbb{R}^3$  e definire un prodotto vettoriale  $X \wedge Y$  per ogni  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . Si noti che  $\wedge$  dipende dall'orientazione scelta. Consideriamo l'endomorfismo

$$L : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \quad \text{tale che} \quad L(X \wedge Y) = [X, Y].$$

Tale endomorfismo è univocamente determinato, infatti se  $(e_1, e_2, e_3)$  è una base ortonormale positiva di  $\mathfrak{g}$  si ha:

$$L(e_1) = L(e_2 \wedge e_3) = [e_2, e_3],$$

$$L(e_2) = L(e_3 \wedge e_1) = [e_3, e_1],$$

$$L(e_3) = L(e_1 \wedge e_2) = [e_1, e_2].$$

La condizione di unimodularità  $\text{tr}(ad_X) = 0$ , applicata a  $X = e_1$ , diventa:

$$\langle [e_1, e_2], e_2 \rangle + \langle [e_1, e_3], e_3 \rangle = 0, \quad \text{cioè} \quad \langle L(e_3), e_2 \rangle = \langle L(e_2), e_3 \rangle.$$

Ripetendo il discorso per gli altri vettori della base, si ottiene che

$\mathfrak{g}$  è unimodulare se, e solo se,  $L$  è un endomorfismo simmetrico.

Quindi se  $\mathfrak{g}$  è unimodulare, esiste una base ortonormale  $(e_1, e_2, e_3)$  di  $\mathfrak{g}$  che diagonalizza l'endomorfismo  $L$ :

$$[e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2, \quad [e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad (3.6)$$

dove  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ . La classificazione, a meno di isomorfismi, delle algebre di Lie 3D è ben nota [69]. Cambiando, se necessario, l'orientazione di  $\mathfrak{g}$ , si hanno i seguenti casi:

1)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$  che corrisponde a  $\mathfrak{su}(2)$  (algebra di Lie del gruppo di Lie  $SU(2)$ );

- 2)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$  che corrisponde a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  (algebra di Lie del gruppo di Lie  $SL(2, \mathbb{R})$ );
- 3)  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$  che corrisponde a  $\mathfrak{e}(1, 1)$  (algebra di Lie del gruppo di Lie  $E(1, 1)$ , gruppo speciale delle isometrie del piano di Minkowski);
- 4)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$  che corrisponde a  $\mathfrak{e}(2)$  (algebra di Lie del gruppo di Lie  $E(2)$ , gruppo speciale delle isometrie del piano euclideo);
- 5)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  che corrisponde a  $\mathfrak{h}^3$  (algebra di Lie del gruppo di Heisenberg  $Nil^3$ );
- 6)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  che corrisponde all'algebra di Lie del gruppo abeliano  $\mathbb{R}^3$ .

In questo capitolo abbiamo già incontrato i gruppi di Lie unimodulari  $SU(2)$  e  $SL(2, \mathbb{R})$ , entrambi semplici, e il gruppo abeliano  $\mathbb{R}^3$ . Diamo ora una presentazione dei rimanenti gruppi di Lie 3D unimodulari.

### Il gruppo di Heisenberg $Nil^3$

Il gruppo di Heisenberg  $Nil^3$  (a volte indicato anche con  $H^3$ ) è il gruppo di Lie dato da

$$Nil^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \subset GL(3, \mathbb{R})(\cdot).$$

La sua algebra di Lie è generata dalle matrici

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

le quali soddisfano

$$[e_1, e_2] = e_3 \quad \text{e} \quad [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0.$$

Si può vedere che  $Nil^3$  è un gruppo di Lie nilpotente.

### Il gruppo $E(2)$

Con  $E(2)$  denotiamo il gruppo speciale delle isometrie del piano euclideo.  $E(2)$  è il gruppo di Lie prodotto semidiretto

$$\mathbb{R}^2(+) \rtimes_{\alpha} SO(2) \quad \text{dove} \quad \alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Il rivestimento universale  $\tilde{E}(2)$  è  $\mathbb{R}^2(+)$   $\rtimes_{\alpha}$   $\mathbb{R}$ , quindi  $\tilde{E}(2)$  si può identificare con il seguente gruppo matriciale

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & x \\ \sin t & \cos t & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

La sua algebra di Lie è generata dalle matrici

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

le quali soddisfano

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_3, e_1] = e_2 \quad \text{e} \quad [e_2, e_3] = e_1.$$

$\tilde{E}(2)$  è un gruppo di Lie semplicemente connesso risolubile.

### Il gruppo $E(1, 1)$

Denotiamo con  $E(1, 1)$  il gruppo speciale delle isometrie del piano di Minkowski (a volte indicato anche con  $Sol^3$ ).  $E(1, 1)$  è il gruppo di Lie prodotto semidiretto

$$\mathbb{R}^2(+)$$
  $\rtimes_{\alpha}$   $\mathbb{R}(+)$ , dove  $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$ .

Quindi

$$E(1, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & x \\ \sinh t & \cosh t & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

La sua algebra di Lie è generata dalle seguenti matrici

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_3, e_1] = e_2 \quad \text{e} \quad [e_2, e_3] = -e_1.$$

Anche  $E(1, 1)$  è un gruppo di Lie semplicemente connesso risolubile.

### 3.6.2 Gruppi di Lie 3D non-unimodulari

Un modo naturale di presentare i gruppi di Lie semplicemente connessi non-unimodulari 3D è considerare prodotti semidiretti  $\mathcal{G} = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ , dove  $A$  è una matrice reale  $2 \times 2$  con  $\text{tr} A \neq 0$ . Più precisamente, seguendo [67], indicata con  $e^{tA}$  l'usuale matrice esponenziale, ossia  $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ , allora un gruppo di Lie  $\mathcal{G}$  semplicemente connesso 3D è non-unimodulare se, e solo se, è isomorfo a un gruppo di Lie prodotto semidiretto  $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R} = (\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, *)$ ,  $\text{tr} A \neq 0$ , dove il prodotto  $*$  è definito da

$$(p_1, t_1) * (p_2, t_2) = (p_1 + e^{t_1 A} p_2, t_1 + t_2).$$

Se  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $a + d \neq 0$ , allora esiste una base di campi vettoriali invarianti a sinistra  $(e_1, e_2, e_3)$  tale che

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_3, e_1] = a e_1 + c e_2, \quad [e_3, e_2] = b e_1 + d e_2. \quad (3.7)$$

L'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  definita dalla (3.7) si dice che è l'algebra di Lie in *forma canonica* del prodotto semidiretto  $\mathcal{G} = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ . In tal caso il nucleo unimodulare  $\mathfrak{u} = \text{span}(e_1, e_2)$  è un ideale 2-dimensionale, e  $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \{0\}$  è il sottogruppo normale 2-dimensionale di  $\mathcal{G}$  associato ad  $\mathfrak{u}$ .

Possiamo distinguere due casi:  $A = \alpha I_2$  e  $A \neq \alpha I_2$ .

- Se la matrice  $A = \alpha I_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ , l'algebra di Lie è definita da

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_3, e_1] = \alpha e_1, \quad [e_3, e_2] = \alpha e_2.$$

In questo caso il gruppo di Lie non-unimodulare  $\mathcal{G}$  è isomorfo al gruppo di Lie  $\mathbb{R}_+^3(\cdot)$  con la struttura naturale di gruppo di Lie definita dalla (3.4). Infatti, in tal caso, posto  $\mathbb{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^3 : t > 0\}$ , i campi vettoriali

$$E_1 = \alpha t \partial_1, \quad E_2 = \alpha t \partial_2, \quad E_3 = \alpha t \partial_t$$

sono invarianti a sinistra e generano l'algebra di Lie di  $\mathbb{R}_+^3(\cdot)$ . Inoltre, soddisfano

$$[E_3, E_1] = \alpha E_1, \quad [E_3, E_2] = \alpha E_2 \quad \text{e} \quad [E_1, E_2] = 0.$$

Questo gruppo di Lie si indica anche con  $H^3(-\alpha^2)$ .

- Il seguente è un esempio con  $A \neq \alpha I_2$ .

**Esempio 3.32.** Consideriamo  $\mathbb{R}_+^2(\cdot)$ ,  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ , con l'usuale struttura di gruppo di Lie, quindi i campi vettoriali

$$E_1 = \alpha x_2 \partial_1, \quad E_3 = \alpha x_2 \partial_2, \quad \alpha \neq 0,$$

sono invarianti a sinistra. Ora consideriamo il gruppo di Lie prodotto diretto

$$\mathcal{G}_\alpha = \mathbb{R}_+^2(\cdot) \times \mathbb{R}, \quad \text{che si indica anche con } H^2(-\alpha^2) \times \mathbb{R},$$

allora  $E_1, E_2 = \partial_t, E_3$  sono invarianti a sinistra e soddisfano

$$[E_1, E_2] = 0, \quad [E_3, E_1] = \alpha E_1, \quad [E_3, E_2] = 0.$$

Quindi,  $\mathcal{G}_\alpha$  è il gruppo di Lie non-unimodulare dato dal prodotto semidiretto

$$\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}, \quad \text{dove } A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Proposizione 3.33.** *Ogni gruppo di Lie non-unimodulare  $\mathcal{G} = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ , con  $A \neq \alpha I_2$ ,  $T = \text{tr} A \neq 0$  e  $D = \det A$ , è isomorfo al gruppo di Lie*

$$\tilde{\mathcal{G}} = \mathbb{R}^2 \rtimes_{\tilde{A}} \mathbb{R}, \quad \text{dove } \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -D \\ 1 & T \end{pmatrix}.$$

In particolare, ogni gruppo di Lie non-unimodulare

$$\mathcal{G}_{ac} = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}, \quad \text{dove } A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0,$$

è isomorfo al gruppo di Lie

$$\mathcal{G}_a = H^2(-a^2) \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}, \quad \text{dove } A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Dimostrazione.* Assumiamo che il gruppo di Lie non-unimodulare  $\mathcal{G}$  sia definito dall'algebra di Lie (3.7). Siccome la matrice  $A \neq \alpha I_2$ , è facile vedere che esiste un campo vettoriale  $E_1 = \alpha e_1 + \beta e_2$  tale che  $E_1, E_2 := [e_3, E_1]$  siano linearmente indipendenti (ad esempio, se  $c \neq 0$  si può prendere  $E_1 = e_1$  e  $E_2 = [e_3, e_1] = \alpha e_1 + c e_2$ ). Quindi, consideriamo i nuovi campi vettoriali invarianti a sinistra, linearmente indipendenti,

$$E_1, \quad E_2 = [e_3, E_1], \quad E_3 = e_3.$$

Allora,  $[E_1, E_2] = 0$ , e  $[E_3, E_1] = E_2$ . Per determinare  $[E_3, E_2]$ : se  $c \neq 0$ , usando la (3.7), si ha

$$[E_3, E_2] = aE_2 + c[e_3, e_2] = aE_2 + cbE_1 + d(E_2 - aE_1) = -DE_1 + TE_2;$$

se  $c = 0$ , sempre usando la (3.7), si ha

$$\begin{aligned} [E_3, E_2] &= [e_3, [e_3, E_1]] = [e_3, [e_3, \alpha e_1 + \beta e_2]] \\ &= (\alpha a^2 + \beta ba + \beta bd)e_1 + \beta d^2 e_2 \\ &= -DE_1 + TE_2. \end{aligned}$$

Per la seconda parte, basta osservare che entrambi i gruppi di Lie  $\mathcal{G}_{ac}$  e  $\mathcal{G}_a$  sono isomorfi al gruppo di Lie non-unimodulare definito dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -D \\ 1 & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}.$$

□

Più in generale vale quanto segue.

Se  $\mathcal{G} = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$  con la matrice  $A \neq \alpha I_2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , allora lo scalare

$$\mathcal{D} = 4 \frac{(ad - bc)}{(a + d)^2},$$

detto *invariante di Milnor*, determina l'algebra di Lie (e quindi il corrispondente gruppo di Lie) a meno di isomorfismi ([69], p. 309, 321).

**Osservazione 3.34.** Si noti che esistono gruppi di Lie unimodulari 3D che si possono esprimere come prodotti semidiretti del tipo  $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ . Sia  $G$  un gruppo di Lie unimodulare semplicemente connesso 3D la cui algebra di Lie è definita dalla (3.6) con  $\lambda_3 = 0$ , ossia:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2, \quad [e_3, e_2] = -\lambda_1 e_1.$$

Allora,  $G$  è il gruppo di Lie prodotto semidiretto  $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$  dove la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$  con  $b = -\lambda_1$  e  $c = \lambda_2$ . Pertanto, si distinguono i seguenti casi:

- Se  $A = 0$ ,  $G$  è l'usuale prodotto diretto di gruppi  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ , ossia il gruppo abeliano  $\mathbb{R}^3$ .
- Se  $A \neq 0$  e  $\det A = 0$ , il gruppo di Lie unimodulare  $G$  è il gruppo di Heisenberg  $Nil^3$ .
- Se  $A \neq 0$  and  $\det A > 0$ , il gruppo di Lie unimodulare  $G$  è  $\tilde{E}(2)$ .
- Se  $A \neq 0$  and  $\det A < 0$ , il gruppo di Lie unimodulare  $G$  è  $E(1, 1)$ .

