Capitolo 2

Nozioni di base sulle varietà differenziabili

2.1 Spazio tangente e campi di vettori

Ricordiamo brevemente la nozione di spazio tangente in un punto p di $\mathbb{R}^n$. Un vettore tangente in p a $\mathbb{R}^n$ è definito da $v_p = (p, v)$ con $v \in \mathbb{R}^n$, p è la parte puntuale e v è la parte vettoriale del vettore tangente v_p. Lo spazio tangente

$$T_p\mathbb{R}^n = \{v_p = (p, v) : v \in \mathbb{R}^n\} = \{p\} \times \mathbb{R}^n$$

ha una struttura naturale di spazio vettoriale reale. Un vettore tangente v_p lo possiamo presentare come un operatore differenziale del primo ordine nullo sulle costanti. Tale presentazione si presta, come vedremo, ad essere generalizzata al caso delle varietà differenziabili. Sia $\mathcal{F}(p)$ l'algebra delle applicazioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabili in un intorno di p. Per ogni $f \in \mathcal{F}(p)$ e per ogni $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$, la *derivata direzionale* di f in p e nella direzione di v è definita da:

$$v_p(f) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} = ... = g_0((\nabla f)_p, v),$$

dove ∇f denota il gradiente di f e g_0 è il prodotto scalare euclideo. La derivata direzionale verifica le seguenti proprietà:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & v_p(af + bg) = av_p(f) + bv_p(g), \\ \text{(j)} & v_p(f \cdot g) = f(p)v_p(g) + g(p)v_p(f), \end{array}$$

per ogni $f, g \in \mathcal{F}(p)$ e per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. Poniamo

$$\mathcal{D}(p) = \{V_p : \mathcal{F}(p) \to \mathbb{R},\ V_p \text{ verifica le proprietà (i) e (j)}\}.$$

Chiaramente $\mathcal{D}(p)$ è uno spazio vettoriale reale e, per ogni $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$,

$$v_p^* : \mathcal{F}(p) \to \mathbb{R},\ f \mapsto v_p(f),$$

è un elemento di $\mathcal{D}(p)$. La corrispondenza

$$T_p\mathbb{R}^n \to \mathcal{D}(p),\ v_p \mapsto v_p^*,$$

è un isomorfismo tra spazi vettoriali che permette di identificare $T_p\mathbb{R}^n$ con $\mathcal{D}(p)$. In questa identificazione, i vettori della base canonica

$$e_{1_p} = (1, 0..., 0)_p,\ e_{2_p} = (0, 1, 0..., 0)_p, ..., e_{n_p} = (0, ..., 0, 1)_p$$

di $T_p\mathbb{R}^n$ si identificano con le derivate direzionali

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p.$$

Di conseguenza, ogni vettore $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$ si può esprimere con la scrittura

$$v_p = \sum_{i=1}^{n} v^i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p.$$

Inoltre, $T_p\mathbb{R}^n$ si può identificare con $\mathbb{R}^n$ mediante l'isomorfismo

$$\Phi : \mathbb{R}^n \to T_p\mathbb{R}^n,\ v \mapsto \Phi(v) = v_p.$$

Sia ora M una varietà differenziabile n-dimensionale. Ricordiamo che $\mathcal{F}(M)$ è l'algebra delle funzioni reali differenziabili su M e, per $p \in M$, $\mathcal{F}(p)$ è l'algebra delle funzioni reali differenziabili in un intorno di p.

Definizione 2.1. Un vettore tangente in p alla varietà M è un'applicazione $X_p : \mathcal{F}(p) \to \mathbb{R}$ che verifica, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $f, g \in \mathcal{F}(p)$, le seguenti proprietà :

(i) $X_p(af + bg) = aX_p(f) + bX_p(g)$,
(j) $X_p(f \cdot g) = f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f)$.

Il vettore X_p si dice anche derivazione di $\mathcal{F}(p)$. L'insieme T_pM di tutti i vettori tangenti in p ad M si dice *spazio tangente* in p ad M. T_pM ha una struttura naturale di spazio vettoriale reale rispetto alle seguenti operazioni:

$$(X_p + Y_p)(f) = X_p(f) + Y_p(f),$$
$$(aX_p)(f) = aX_p(f),$$

per ogni $X_p, Y_p \in T_pM$, per ogni $a \in \mathbb{R}$ e per ogni $f \in \mathcal{F}(p)$.

Proposizione 2.2. *Se $c \in \mathcal{F}(p)$ è una funzione costante, allora per ogni $X_p \in T_pM$ si ha $X_p(c) = 0$.*

Dimostrazione. Per esercizio. □

La seguente proposizione mette in evidenza il carattere locale della nozione di vettore tangente.

Proposizione 2.3. *Siano $f, g \in \mathcal{F}(p)$ e U un intorno aperto di p. Se $f_{|U} = g_{|U}$, allora per ogni $X_p \in T_pM$ si ha $X_p(f) = X_p(g)$.*

Dimostrazione. Basta verificare che, per ogni $h \in \mathcal{F}(p)$ con $h_{|U} = 0$, si ha $X_p(h) = 0$. Sia $\kappa \in \mathcal{F}(p)$ tale che $\kappa(p) = 0$ e $\kappa_{|M\setminus U} = 1$ ($\kappa = 1 - \xi$, dove ξ è la funzione della Proposizione 1.28). Allora $h = h \cdot \kappa$ e quindi

$$X_p(h) = X_p(h \cdot \kappa) = \kappa(p)X_p(h) + h(p)X_p(\kappa) = 0.$$

□

Vettori tangenti coordinati

Sia $(U, \varphi, (x_i))$ una carta locale con U intorno di p. Le applicazioni

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : \mathcal{F}(p) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(p) := \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i}(\varphi(p)),$$

sono vettori tangenti in p che vengono detti *vettori tangenti coordinati* in p rispetto alla carta (U, φ).

Lemma 2.4. *Dato $p_o \in M$, siano $(x_1, ..., x_n)$ coordinate locali definite in U intorno di p_o con $x_i(p_o) = 0$ per ogni i. Allora, per ogni $f \in \mathcal{F}(p_o)$ esistono $f_1, f_2, ..., f_n \in \mathcal{F}(p_o)$ ed esiste V intorno di p_0, $V \subset U$, tali che*

$$f_i(p_o) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_o) \quad \text{e} \quad f(p) = f(p_o) + \textstyle\sum_{i=1}^n x_i(p)f_i(p) \qquad \forall p \in V.$$

Dimostrazione. Sia $\varphi : U \to \varphi(U)$ l'applicazione coordinata che definisce le coordinate $(x_1, ..., x_n)$. Poniamo $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$. Poiché $\varphi(p_o) = 0$, esiste $r > 0$ tale che $B(0, r) \subset \varphi(U)$. Per ogni $(x_1, ..., x_n) \in B(0, r)$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x_1, ..., x_n) \;=\; & \tilde{f}(x_1, ..., x_n) - \tilde{f}(x_1, ..., x_{n-1}, 0) + \tilde{f}(x_1, ..., x_{n-1}, 0) \\
& - \tilde{f}(x_1, ..., x_{n-2}, 0, 0) + \tilde{f}(x_1, ..., x_{n-2}, 0, 0) + ... \\
& - \tilde{f}(x_1, 0, .., , 0) + \tilde{f}(x_1, 0, .., , 0) \\
& - \tilde{f}(0, 0, .., , 0) + \tilde{f}(0, 0, .., , 0).
\end{aligned}$$

La relazione precedente si può anche scrivere nella forma seguente:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x_1,...,x_n) &= \tilde{f}(0,...,0)+\sum_{i=1}^{n}\Big[\tilde{f}(x_1,...,x_{i-1},tx_i,0,...,0)\Big]_0^1\\ &= \tilde{f}(0,...,0)+\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 \frac{d}{dt}\tilde{f}(x_1,...,x_{i-1},tx_i,0,...,0)\,dt\\ &= \tilde{f}(0,...,0)+\sum_{i=1}^{n}x_i\int_0^1 \frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_i}(x_1,...,x_{i-1},tx_i,0,...,0)\,dt\\ &= \tilde{f}(0,...,0)+\sum_{i=1}^{n}x_i\tilde{f}_i(x_1,...,x_n),\end{aligned}$$

dove si è posto

$$\tilde{f}_i(x_1,...,x_n)=\int_0^1\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_i}(x_1,...,x_{i-1},tx_i,0,...,0)dt.$$

Le $\tilde{f}_i : B(0,r)\to\mathbb{R}$ sono differenziabili e quindi le $f_i=\tilde{f}_i\circ\varphi_{|V}$ sono elementi di $\mathcal{F}(p_o)$, dove $V=\varphi^{-1}(B(0,r))$. Inoltre,

$$f_i(p_o)=\tilde{f}_i(0,...,0)=\int_0^1\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_i}(0,...,0)dt=\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_i}(0,...,0)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_o),$$

e per ogni $p\in V$:

$$\begin{aligned}f(p)=\tilde{f}(\varphi(p))=\tilde{f}(x_1,...,x_n)=\tilde{f}(0,0,...,0)+\sum_{i=1}^{n}x_i(p)\tilde{f}_i(x_1,...,x_n)\\ =\tilde{f}(\varphi(p_o))+\sum_{i=1}^{n}x_i(p)\tilde{f}_i(\varphi(p))=f(p_o)+\sum_{i=1}^{n}x_i(p)f_i(p).\end{aligned}$$

□

Teorema 2.5. *Sia M una varietà differenziabile n-dimensionale. Se $p_o\in M$ e $(U,(x_i))$ è carta locale con $p_o\in U$, allora i vettori tangenti coordinati $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{p_o}$ $(i=1,...,n)$ costituiscono una base per $T_{p_o}M$. Inoltre, per ogni $X_{p_o}\in T_{p_o}M$ si ha:*

$$X_{p_o}=\sum_{i=1}^{n}\lambda^i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{p_o},\quad \textit{dove}\quad \lambda^i=X_{p_o}(x_i).$$

In particolare, $\dim T_{p_o}M=n=\dim M$.

Dimostrazione. Per ogni $p \in U$, poniamo $y_i(p) = x_i(p) - x_i(p_o)$. $(y_1, ..., y_n)$ sono coordinate locali definite in U con $y_i(p_o) = 0$ per ogni $i = 1, ..., n$. Applicando il Lemma 2.4, relativamente alle coordinate $(y_1, ..., y_n)$, per ogni $f \in \mathcal{F}(p_o)$ esistono $f_1, f_2, ..., f_n \in \mathcal{F}(p_o)$, con $f_i(p_o) = \frac{\partial f}{\partial y_i}(p_o) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_o)$, tali che

$$f(p) = f(p_o) + \sum_{i=1}^{n} y_i(p) f_i(p) \qquad \forall p \in V \text{ (intorno di } p_o), V \subset U.$$

Quindi, per ogni $X_{p_o} \in T_{p_o}M$ e per ogni $f \in \mathcal{F}(p_o)$ si ha:

$$\begin{aligned} X_{p_o}(f) &= X_{p_o}(f(p_o)) + \sum_{i=1}^{n} X_{p_o}(y_i \cdot f_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \{y_i(p_o) X_{p_o}(f_i) + f_i(p_o) X_{p_o}(y_i)\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_o) X_{p_o}(x_i) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{p_o} \right)(f), \end{aligned}$$

dove si è posto $\lambda^i = X_{p_o}(x_i)$. Resta da verificare che i vettori $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{p_o}$ sono linearmente indipendenti:

$$\sum_{i=1}^{n} a^i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{p_o} = 0, \quad a^i \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a^i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{p_o} (x_h) = 0, \quad \forall h \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} a^i \left(\frac{\partial x_h}{\partial x_i} \right)_{p_o} = 0, \quad \forall h \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a^i \delta_i^h = 0 \quad \forall h \quad \Rightarrow a^h = 0 \quad \forall h.$$

□

Esercizio 2.6. Siano $(x_1, ..., x_n)$ e $(y_1, ..., y_n)$ due sistemi di coordinate locali definiti in un intorno di un fissato punto p. Siano (λ^i) e (η^j) le componenti di un vettore tangente X_p rispetto alle basi $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ e $\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p$ rispettivamente. Osservare che la matrice del cambiamento di base è la matrice jacobiana del cambiamento di coordinate. Quindi, determinare le formule che esprimono le λ^i in funzione delle η^j e viceversa.

Campi di vettori

Sia A un aperto della varietà differenziabile n-dimensionale M. Poniamo $TA = \dot{\cup}_{p \in A} T_p M$.

Definizione 2.7. Un *campo di vettori* su A è una corrispondenza

$$X : A \to TA, \; p \longmapsto X(p) = X_p \in T_p M.$$

Se X, Y sono campi di vettori definiti su A, $h : A \to \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, si possono definire in modo naturale i campi di vettori $X + Y$, hX, λX:

$$(X + Y)_p = X_p + Y_p, \quad (hX)_p = h(p) X_p, \quad (\lambda X)_p = \lambda X_p.$$

Se X è un campo di vettori su A ed $f \in \mathcal{F}(A)$, possiamo definire la funzione

$$X(f) : A \to \mathbb{R}, \; p \longmapsto X(f)(p) := X_p(f).$$

Diremo che un campo di vettori X (definito su A) è differenziabile se

$$\forall f \in \mathcal{F}(A) : X(f) \in \mathcal{F}(A).$$

Denotiamo con $\mathfrak{X}(A)$ l'insieme di tutti i campi di vettori differenziabili definiti su A. $\mathfrak{X}(A)$ ha una struttura naturale di spazio vettoriale reale rispetto alle operazioni:

$$+ : \mathfrak{X}(A) \times \mathfrak{X}(A) \to \mathfrak{X}(A), \; (X, Y) \mapsto X + Y,$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathfrak{X}(A) \to \mathfrak{X}(A), \; (\lambda, X) \mapsto \lambda X.$$

Inoltre, il prodotto

$$\mathcal{F}(A) \times \mathfrak{X}(A) \to \mathfrak{X}(A), \; (f, X) \mapsto fX,$$

soddisfa le seguenti proprietà

$$f(\lambda X) = (\lambda f) X = \lambda (fX), \quad f(X + Y) = fX + fY,$$
$$(f + g)X = fX + gY, \quad f(gX) = (fg)X, \quad 1X = X,$$

per ogni $f, g \in \mathcal{F}(A)$ e per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(A)$. Quindi, $\mathfrak{X}(A)$ è un $\mathcal{F}(A)$-modulo. Anche per gli $\mathcal{F}$-moduli possiamo parlare di lineare indipendenza e di base, dove gli scalari sono gli elementi di $\mathcal{F}$.

Siano $(x_1, ..., x_n)$ coordinate locali definite in U, $U \subset A$. I campi di vettori

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : U \to TU, \; p \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)(p) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p,$$

sono chiaramente differenziabili e sono detti *campi di vettori coordinati.* Per ogni $X \in \mathfrak{X}(A)$ e per ogni $p \in U$, si ha:

$$\begin{aligned} X(p) = X_p &= \sum_{i=1}^{n} X_p(x_i) \Big(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big)_p = \sum_{i=1}^{n} X(x_i)(p) \Big(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big)(p) \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{n} X(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big)(p). \end{aligned}$$

Quindi, per ogni $X \in \mathfrak{X}(A)$ si ha

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \text{dove} \quad \xi^i = X(x_i) \in \mathcal{F}(U). \tag{2.1}$$

I campi di vettori coordinati $\big(\partial/\partial x_i\big)_i$ costituiscono una *base locale* per $\mathfrak{X}(A)$, tuttavia $\mathfrak{X}(A)$ come spazio vettoriale reale non ha dimensione finita. Le ξ^i si dicono *funzioni componenti* di X rispetto alle coordinate (x_i). La rappresentazione (2.1) vale anche per campi di vettori, in generale, non differenziabili con le ξ^i funzioni, in generale, non differenziabili. Siano $(y_1, ..., y_n)$ altre coordinate definite in U. Se X è un campo di vettori definito su A, localmente si ha

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad e \quad X = \sum_{j=1}^{n} \eta^j \frac{\partial}{\partial y_j},$$

dove ξ^i, η^j sono funzioni definite su U. Inoltre, siccome

$$\eta^j = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \quad e \quad \xi^j = \sum_{i=1}^{n} \eta^i \frac{\partial x_j}{\partial y_i},$$

$$\text{le } \xi^i \text{ sono differenziabili} \Leftrightarrow \text{le } \eta^i \text{ sono differenziabili.}$$

Quindi, la proprietà che X abbia funzioni componenti differenziabili non dipende dal particolare sistema di coordinate scelto, e di conseguenza vale la seguente proposizione.

Proposizione 2.8. *Sia X un campo di vettori definito su A. Allora, X è differenziabile se e solo se le sue funzioni componenti, in un fissato sistema di coordinate, sono differenziabili.*

Un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(A)$ si può presentare anche come una derivazione dell'algebra $\mathcal{F}(A)$

Proposizione 2.9. *Sia A un aperto di M. Allora, $X \in \mathfrak{X}(A)$ se e solo se X è una trasformazione $\mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(A)$ che soddisfa le seguenti proprietà:*
(i) $X(af + bg) = aX(f) + bX(g), \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(A), \ \forall a, b \in \mathbb{R}$,
(ii) $X(fg) = fX(g) + gX(f), \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(A)$.

Dimostrazione. Sia $X \in \mathfrak{X}(A)$. Allora, per ogni $f \in \mathcal{F}(A) : X(f) \in \mathcal{F}(A)$. Inoltre, per ogni $f, g \in \mathcal{F}(A)$, le proprietà $X(af + bg)(p) = X_p(af + bg)$ e $X(f \cdot g)(p) = X_p(f \cdot g)$ implicano (i) e (ii). Viceversa, se $X : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(A)$ soddisfa (i) e (ii), la corrispondenza $p \mapsto X_p$, dove $X_p(f) := X(f)(p)$, definisce un campo di vettori differenziabile su A. $\square$

Definizione 2.10. Sia $\mathcal{L}$ uno spazio vettoriale reale. $\mathcal{L}$ si dice *algebra di Lie* (reale) se è definito un prodotto $[,] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}, (X, Y) \mapsto [X, Y]$, detto *parentesi di Lie*, tale che

(1) $[,]$ è bilineare,
(2) $[,]$ è antisimmetrica : $[X, Y] = -[Y, X]$,
(3) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (identità di Jacobi).

$\mathbb{R}^3$ con l'usuale prodotto vettoriale e lo spazio vettoriale delle matrici quadrate $\mathbb{R}^{n,n}$ con $[A, B] := AB - BA$, dove AB denota l'usuale prodotto tra matrici, sono esempi di algebre di Lie. Se $\mathcal{L}$ è un'*algebra di Lie abeliana*, cioè $[X, Y] = [Y, X]$, allora la parentesi di Lie $[,] = 0$. Nello spazio vettoriale $\mathfrak{X}(A)$, A aperto di M, definiamo

$$[,] : \mathfrak{X}(A) \times \mathfrak{X}(A) \to \mathfrak{X}(A), \ (X, Y) \mapsto [X, Y], \quad \text{dove}$$

$$[X, Y](f) := XY(f) - YX(f).$$

É facile verificare che

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(A) : [X, Y] \in \mathfrak{X}(A).$$

Inoltre, valgono le seguenti proprietà :

$$(1) \quad [X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z],$$

$$\begin{aligned} &(2) \quad [X, Y] = -[Y, X], \\ &(3) \quad [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \\ &(4) \quad [fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X, \end{aligned}$$

per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(A)$ e per ogni $f, g \in \mathcal{F}(A)$. In particolare, se $a, b \in \mathbb{R}$ si ha $[aX, bY] = ab[X, Y]$, e quindi $\mathfrak{X}(A)$ è un'algebra di Lie.

Esercizio 2.11. Siano $X, Y \in \mathfrak{X}(A)$, localmente $X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = \sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Verificare che:

$$[X, Y] = \sum_{j=1}^n (X(\eta^j) - Y(\xi^j)) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Esercizio 2.12. Considerati i seguenti campi di vettori (come elementi di $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$): $X = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}$, $Y = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}$, $Z = -x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}$, verificare che

$$[X, Y] = Z, \ [Y, Z] = X, \ [Z, X] = Y.$$

2.2 TM come fibrato vettoriale

Sia M una varietà differenziabile n-dimensionale. Poniamo

$$TM := \dot{\bigcup}_{p\in M} T_pM \ \text{(unione disgiunta)}.$$

Consideriamo l'applicazione $\pi : TM \to M,\ X_p \mapsto p,$ tale applicazione è suriettiva e $\pi^{-1}\{p\} = T_pM$. Quindi un campo di vettori su M si può pensare come un'applicazione $X : M \to TM$ tale che $\pi \circ X = I_M$.

Teorema 2.13. *L'insieme TM, detto varietà tangente (o fibrato tangente), ha una struttura di varietà differenziabile $2n$-dimensionale rispetto alla quale l'applicazione π è differenziabile.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ un atlante differenziabile di M. Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di TM:

$$\pi^{-1}(U_i) = \{X_p \in TM : \pi(X_p) = p \in U_i\} = TU_i\,.$$

$\{\pi^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ è un ricoprimento di TM in quanto $\{U_i\}_{i\in I}$ è un ricoprimento di M. L'applicazione

$$\tilde{\varphi}_i : \pi^{-1}(U_i) \to \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n,\ X_p \mapsto \left(x_1(p), ..., x_n(p), \xi^1(p), ..., \xi^n(p)\right),$$

dove $\varphi_i(p) = (x_1(p), ..., x_n(p))$ e $X_p = \sum_{i=1}^n \xi^i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$, è una corrispondenza biunivoca. Si noti che, per ogni $p \in U_i$,

$$\tilde{\varphi}_{ip} := \tilde{\varphi}_{i|T_pM} : T_pM = \pi^{-1}\{p\} \to \{\varphi_i(p)\} \times \mathbb{R}^n = T_{\varphi_i(p)}\mathbb{R}^n$$

è un isomorfismo (tra spazi vettoriali). Consideriamo la seguente famiglia di sottoinsiemi di TM:

$$\mathcal{F}_T = \left\{\tilde{\varphi}^{-1}(W) :\ W \text{ aperto di } \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n},\ (U, \varphi) \in \mathcal{A}\ \right\}.$$

Tale famiglia soddisfa le seguenti proprietà:
a) per ogni $X_p \in TM$, esiste un elemento B di $\mathcal{F}_T$ tale che $X_p \in B$;
b) se B_1 e B_2 sono due elementi di $\mathcal{F}_T$ con $B_1 \cap B_2$ non vuoto, e $X_p \in B_1 \cap B_2$, allora esiste un elemento $B \in \mathcal{F}_T$ tale che $X_p \in B \subset B_1 \cap B_2$.
Pertanto esiste un'unica topologia su TM avente $\mathcal{F}_T$ come base, questa è la topologia che si considera su TM. Rispetto a tale topologia, i sottoinsiemi $\pi^{-1}(U_i)$ sono aperti di TM e le $\tilde{\varphi}_i$ sono omeomorfismi. Inoltre, TM è uno spazio topologico separato. Quindi TM è una varietà topologica $2n$-dimensionale. Verifichiamo che l'atlante $\{(\pi^{-1}(U_i), \tilde{\varphi}_i)\}_i$ è differenziabile: siano $(\pi^{-1}(U_i), \tilde{\varphi}_i)$ e $(\pi^{-1}(U_j), \tilde{\varphi}_j)$ due carte con $\pi^{-1}(U_i) \cap \pi^{-1}(U_j) \neq \emptyset$ (e quindi $U_i \cap U_j \neq \emptyset$), allora l'applicazione

$$\tilde{\varphi}_j \circ \tilde{\varphi}_i^{-1} :\ \tilde{\varphi}_i\left(\pi^{-1}(U_i \cap U_j)\right) = \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \to \varphi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n,$$
$$(x_1(p), ..., x_n(p), \xi^1(p), ..., \xi^n(p)) \mapsto (y_1(p), ..., y_n(p), \eta^1(p), ..., \eta^n(p))\,,$$

è differenziabile (insieme alla sua inversa) in quanto $y_j = y_j(x_1, ..., x_n)$ è il cambio di coordinate su $U_i \cap U_j$ e $\eta^j = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$. Quindi TM è una varietà differenziabile di dimensione $2n$. Infine, la proiezione π è differenziabile in quanto in coordinate locali è espressa dall'usuale proiezione $(x_i, \xi^i) \mapsto (x_i)$. $\square$

Il fibrato tangente è solo un esempio della seguente nozione.

Definizione 2.14. Siano date due varietà differenziabili E, M e un'applicazione differenziabile $\pi : E \to M$. Diremo che E, o più precisamente la terna (E, M, π), è un *fibrato vettoriale* su M di rango k se:
(1) $\forall p \in M$, la fibra $E_p = \pi^{-1}(p)$ ha una struttura di spazio vettoriale reale k-dimensionale;
(2) $\forall p \in M$, $\exists\, U$ (intorno aperto di p) e un diffeomorfismo $\tilde{\psi} : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ che conserva le fibre, cioè $\pi_1 \circ \tilde{\psi} = \pi$ dove $\pi_1 : U \times \mathbb{R}^k \to U$ è la proiezione sul primo fattore;
(3) $\forall q \in U$, la restrizione di $\tilde{\psi}$ alla fibra $\tilde{\psi}_q := \tilde{\psi}_{|E_q} : E_q \to \{q\} \times \mathbb{R}^k$ è un isomorfismo (tra spazi vettoriali).

La coppia $(U, \tilde{\psi})$ si dice carta locale del fibrato (E, M, π). Siano $(U_i, \tilde{\psi}_i)$ e $(U_j, \tilde{\psi}_j)$ due carte locali del fibrato (E, M, π) con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Le funzioni

$$\tilde{\psi}_{ji} : U_i \cap U_j \to GL(k, \mathbb{R}),\ p \mapsto \tilde{\psi}_{jp} \circ \tilde{\psi}_{1p}^{-i} \in GL(k, \mathbb{R}),$$

si dicono *funzioni di transizione*. Sia G un sottogruppo di $GL(k, \mathbb{R})$, ad esempio $GL^+(k, \mathbb{R})$, $O(k)$ o $SO(k)$. Si dice che il fibrato vettoriale (E, M, π) ha *gruppo strutturale riducibile* a G se esiste un atlante $\{(U_\alpha, \tilde{\psi}_\alpha)\}$ di carte locali del fibrato, quindi $\cup U_\alpha = M$, le cui funzioni di transizione hanno i loro valori in G, cioè

$$\forall p \in U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset\ : \tilde{\psi}_{\beta p} \circ \tilde{\psi}_{\alpha p}^{-1} \in G.$$

Un fibrato vettoriale di rango k si dice *orientabile* se il gruppo strutturale $GL(k, \mathbb{R})$ è riducibile al sottogruppo $GL^+(k, \mathbb{R})$.

Il più semplice esempio di fibrato vettoriale di rango k è la varietà prodotto $E_0 = M \times \mathbb{R}^k$ con $\pi = \pi_1 : E_0 \to M$ (proiezione sul primo fattore). La varietà tangente TM è un fibrato vettoriale di rango $n = \dim M$ con gruppo strutturale $GL(n, \mathbb{R})$, se M ha una struttura riemanniana allora il suo gruppo strutturale è riducibile a $O(n)$ (cf. Teorema 4.5). Siano (E_1, M, π_1) e (E_2, M, π_2) due fibrati vettoriali sulla stessa varietà base M. Un'applicazione differenziabile (risp. un diffeomorfismo) $f : E_1 \longrightarrow E_2$ che conserva le fibre, cioè con $\pi_2 \circ f = \pi_1$, e con $f_p : E_{1p} \longrightarrow E_{2p}$ applicazione lineare (risp. isomorfismo), è detta *omomorfismo* (risp. *isomorfismo) tra fibrati.* Un **fibrato vettoriale** (E, M, π) è detto **banale** se è isomorfo a $E_0 = M \times \mathbb{R}^k$. Un fibrato vettoriale $\pi : E \to M$ di rango k è localmente una varietà prodotto $U \times \mathbb{R}^k$ con U aperto di M, quindi si può pensare come una famiglia di spazi vettoriali $\{E_p\}_{p \in M}$, isomorfi a R^k, parametrizzata (in modo localmente banale) da M. Sia (E, M, π) un fibrato vettoriale di rango k. Sia E' una sottovarietà immersa in E, poniamo $\pi' = \pi_{|E'}$, e supponiamo che per ogni $p \in M$ esista una carta locale $(U, \tilde{\psi})$ del fibrato, con $p \in U$, tale che

$$\tilde{\psi}\,(\pi^{-1}(U) \cap E') = U \times \mathbb{R}^h (\subset U \times \mathbb{R}^k, h \leq k).$$

Il fibrato vettoriale ottenuto (E', M, π') è detto *sottofibrato* di E di rango h.

Definizione 2.15. Una *sezione* (differenziabile) del fibrato vettoriale (E, M, π) è un'applicazione (differenziabile) $s : M \to E$ tale che $\pi \circ s = I_M$.

Sia ora $f : M \longrightarrow N$ un'applicazione differenziabile e sia (E, N, π) un fibrato vettoriale su N. L'applicazione f induce un fibrato vettoriale su M, che si indica con $f^{-1}E$ oppure con f^*E, le cui fibre sono $E_{f(p)}$, $p \in M$. Le carte locali del fibrato $f^{-1}E$, detto *pull back* di E via f, sono del tipo $\big(f^{-1}(U), \tilde{\psi} \circ f\big)$, dove $(U, \tilde{\psi})$ è una carta locale del fibrato vettoriale E. In particolare: $f^{-1}TN = \dot{\bigcup}_{p\in M} T_{f(p)}N$ e le sezioni di $f^{-1}TN$ sono esattamente le applicazioni differenziabili $\tilde{X} : M \to f^{-1}TN, p \mapsto \tilde{X}_p \in T_{f(p)}N$, dette anche campi di vettori lungo f.

Proposizione 2.16. *Sia M una varietà differenziabile. Allora, $X \in \mathfrak{X}(M)$ se e solo se X è una sezione differenziabile di TM, ovvero $X : M \to TM$ è differenziabile e $\pi \circ X = I_M$. Pertanto, l'insieme delle sezioni differenziabili di TM è esattamente l'insieme $\mathfrak{X}(M)$.*

Dimostrazione. Ricordiamo (cfr. Definizione 2.7) che un campo di vettori X su M si può pensare come un'applicazione $X : M \to TM$ tale che $\pi \circ X = I_M$, quindi come una sezione di TM. Inoltre, X (come sezione) localmente è l'applicazione

$$X : p = (x_1, ..., x_n) \mapsto (x_1, ..., x_n, \xi^1(x_i), ..., \xi^n(x_i)),$$

dove $X_p = \sum_{j=1}^n \xi^j(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p$. Quindi, la sezione $X : M \to TM$ è differenziabile se e solo se le funzioni $\xi^i(x_1, ..., x_n)$ sono differenziabili, ma ciò equivale a dire che X come campo di vettori ha funzioni componenti (locali) differenziabili e quindi $X \in \mathfrak{X}(M)$. $\square$

Molte nozioni in geometria differenziale possono essere viste come sezioni di un appropriato fibrato vettoriale. Oltre ai campi vettoriali su M che si possono pensare come sezioni di TM, i tensori di tipo (s, r) su M possono essere visti come sezioni del fibrato vettoriale $\mathcal{T}^{s,r}M = \cup_{p\in M}\mathcal{T}^{s,r}(T_pM)$, le k-fome differenziali su M possono essere viste come sezioni del fibrato vettoriale $\Lambda^k TM = \cup_{p\in M}\Lambda^k(T_pM)$, in particolare $\Lambda^1 TM = TM^* = \cup_{p\in M}T_pM^*$ è il fibrato tangente duale. Se nella definizione di fibrato vettoriale si sostituisce $\mathbb{R}$ con $\mathbb{C}$, si ha la nozione *fibrato vettoriale complesso* di rango k. Un fibrato vettoriale complesso E su M è detto *olomorfo* se E ed M sono varietà complesse, π è un'applicazione olomorfa e $\tilde{\psi}$ è un diffeomorfismo olomorfo (cioè $\tilde{\psi}$ e $\tilde{\psi}^{-1}$ sono olomorfe). Il gruppo lineare complesso $GL(k,\mathbb{C})$ può essere identificato con il sottogruppo di $GL(2k,\mathbb{R})$ costituito dalle matrici che commutano con la matrice $J_k = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix}$. Questa rappresentazione di $GL(k,\mathbb{C})$ in $GL(2k,\mathbb{R})$, detta *rappresentazione reale* di $GL(k,\mathbb{C})$, è data da

$$A+iB \longmapsto \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \quad \text{per ogni} \quad A+iB \in GL(k,\mathbb{C}),$$

dove A, B sono matrici reali di ordine k. Un fibrato vettoriale complesso E su M di rango k può essere considerato come un fibrato vettoriale reale di rango $2k$. Siccome il suo gruppo strutturale $GL(k,\mathbb{C}) \subset GL^+(2k,\mathbb{R})$, E è orientato in modo naturale come fibrato vettoriale reale.

Teorema 2.17. *Il fibrato tangente TM è banale se, e solo se, esistono n ($n = \dim M$) campi vettoriali $E_1, ..., E_n \in \mathfrak{X}(M)$ linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Supponiamo TM banale e sia $f : M \times \mathbb{R}^n \to TM$ un diffeomorfismo che conserva le fibre, cioè $\pi \circ f = \pi_1$, e con $f_p : \{p\} \times \mathbb{R}^n \to T_pM, (p,v) \mapsto f(p,v) \in T_pM$, isomorfismo tra spazi vettoriali. Sia $(e_1, ..., e_n)$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Definiamo

$$E_i : M \longrightarrow TM,\ p \longmapsto E_i(p) := f(p, e_i), \quad i = 1, ..., n.$$

Questi E_i sono campi vettoriali in quanto $\pi \circ E_i(p) = \pi \circ f(p,e_i) = \pi_1(p,e_i) = p$, sono differenziabili in quanto f è un diffeomorfismo, e sono linearmente indipendenti in quanto $f_p : \{p\} \times \mathbb{R}^n \to T_pM, (p,e_i) \mapsto f(p,e_i) = E_i(p)$ è un isomorfismo tra spazi vettoriali. Viceversa, se $E_1, ..., E_n \in \mathfrak{X}(M)$ sono linearmente indipendenti, basta definire

$$f : M \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TM,\ (p,(v^1, ..., v^n)) \longmapsto \textstyle\sum_{i=1}^n v^i E_i(p) \in T_pM.$$

Questa f chiaramente conserva le fibre ($\pi \circ f(p,v) = p = \pi_1(p,v)$) con $f_p : \{p\} \times \mathbb{R}^n \to T_pM, (p,v) \mapsto \sum_{i=1}^n v^i E_i(p)$, isomorfismo tra spazi vettoriali. Inoltre f è un diffeomorfismo in quanto localmente, posto $E_i = \sum_{j=1}^n a_i^j \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, si ha

$$f : (x_1, ..., x_n, v^1, ..., v^n) \mapsto \left(x_1, ..., x_n, \textstyle\sum_{i=1}^n v^i a_i^1, ..., \sum_{i=1}^n v^i a_i^n\right)$$

con $\det(a_i^j) \neq 0$. $\square$

Se una varietà differenziabile M di dimensione n ammette n campi vettoriali $E_1, ..., E_n \in \mathfrak{X}(M)$ linearmente indipendenti, allora M è detta **varietà parallelizzabile**. $\mathbb{R}^n$ è chiaramente parallelizzabile. Inoltre, le sfere $\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^7$ sono parallelizzabili, ciò dipende essenzialmente dall'esistenza di un prodotto in $\mathbb{R}^2$ (tra numeri complessi), in $\mathbb{R}^4$ (tra quaternioni) e in $\mathbb{R}^8$ (tra numeri di Cayley).
L'applicazione

$$X : \mathbb{S}^1 \to T\mathbb{R}^2, p = (a_1, a_2) \mapsto X_p = -a_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + a_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p,$$

definisce un campo differenziabile di vettori unitari tangenti a $\mathbb{S}^1$.
Le applicazioni $X, Y, Z : \mathbb{S}^3 \to T\mathbb{R}^4$, definite da

$$X_p = a_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p - a_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p + a_4 \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)_p - a_3 \left(\frac{\partial}{\partial x_4}\right)_p,$$
$$Y_p = a_3 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p - a_4 \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p - a_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)_p + a_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_4}\right)_p,$$
$$Z_p = a_4 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + a_3 \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p - a_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)_p - a_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_4}\right)_p,$$

per ogni $p = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{S}^3$, definiscono tre campi differenziabili di vettori ortonormali tangenti alla sfera $\mathbb{S}^3$.

Nel caso della sfera $\mathbb{S}^7$, identifichiamo il vettore $X_p = \sum_{i=1}^{8} a_i \left(\partial/\partial x_i\right)_p$ con $X_p = (a_1, a_2, ..., a_8)$, e quindi consideriamo le applicazioni $X_i : \mathbb{S}^7 \to T\mathbb{R}^8, i = 1, ..., 7$, definite, per ogni $p = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8) \in \mathbb{S}^7$, da

$$\begin{aligned}
X_1(p) &= (a_2, -a_1, a_4, -a_3, a_6, -a_5, a_8, -a_7),\\
X_2(p) &= (a_3, -a_4, -a_1, a_2, a_7, -a_8, -a_5, a_6),\\
X_3(p) &= (a_4, a_3, -a_2, -a_1, -a_8, -a_7, a_6, a_5),\\
X_4(p) &= (a_5, -a_6, -a_7, a_8, -a_1, a_2, a_3, -a_4),\\
X_5(p) &= (a_6, a_5, a_8, a_7, -a_2, -a_1, -a_4, -a_3),\\
X_6(p) &= (a_7, -a_8, a_5, -a_6, -a_3, a_4, -a_1, a_2),\\
X_7(p) &= (a_8, a_7, -a_6, -a_5, a_4, a_3, -a_2, -a_1).
\end{aligned}$$

Anche in questo caso, $X_i, i = 1, ..., 7$, sono campi differenziabili di vettori ortonormali e tangenti a $\mathbb{S}^7$.

Si noti che le sfere $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{S}^7$ sono le sole sfere parallelizzabili [15]. Inoltre, si può vedere che esiste un campo vettoriale non nullo (in ogni punto) su $\mathbb{S}^n$ se e solo se n è dispari (cioè se e solo se la caratteristica di Eulero-Poincaré $\chi(\mathbb{S}^n)$ è nulla). Questo è un caso particolare del seguente risultato generale (cfr. [105], p.203).

Teorema 2.18. *Sia M una varietà differenziabile (connessa) compatta. Allora esiste su M un campo vettoriale continuo non nullo (in ogni punto) se, e solo se, la caratteristica di Eulero-Poincaré $\chi(M) = 0$.*

In particolare, per una superficie connessa compatta orientabile M esiste un campo vettoriale continuo non nullo (in ogni punto) se, e solo se, M è una superficie torica.

2.3 Il differenziale di funzioni

Siano M una varietà differenziabile, p un punto di M ed $f : M \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in un intorno di p. Il *differenziale* di f *nel punto* p è definito dall'applicazione

$$(\mathrm{d}f)_p : T_pM \to \mathbb{R},\ X_p \mapsto (\mathrm{d}f)_p(X_p) := X_p(f).$$

In altre parole, il differenziale $(\mathrm{d}f)_p$ è un operatore che assegna ad ogni vettore tangente in p la derivata direzionale della funzione nella direzione di quel vettore. $(\mathrm{d}f)_p$ è un'applicazione lineare, quindi un elemento dello spazio vettoriale duale T_p^*M. Se $(x_1, ..., x_n)$ sono coordinate locali definite in un intorno di p, allora

$$(\mathrm{d}f)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(p).$$

Prendendo come f la funzione coordinata $x_h : U \subset M \to \mathbb{R},\ p \mapsto x_h(p)$, si ha

$$(\mathrm{d}x_h)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \left(\frac{\partial x_h}{\partial x_i}\right)_p = \delta_i^h.$$

Dunque i differenziali $(\mathrm{d}x_1)_p, ..., (\mathrm{d}x_n)_p$ costituiscono la base di T_p^*M duale della base coordinata $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$ di T_pM. Pertanto:

$$(\mathrm{d}f)_p = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p (dx_i)_p.$$

Esercizio 2.19. Verificare che:

$$(\mathrm{d}(f \cdot g))_p = f(p)(\mathrm{d}g)_p + g(p)(\mathrm{d}f)_p \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(p).$$

Se $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile su A aperto di M, il *differenziale* di f è l'applicazione

$$\mathrm{d}f : \mathfrak{X}(A) \to \mathcal{F}(A),\ X \mapsto (\mathrm{d}f)(X) := X(f).$$

$\mathrm{d}f$ è una applicazione $\mathcal{F}(A)$-lineare, dunque $\mathrm{d}f \in \Lambda^1(A) = \mathfrak{X}^*(A)$ $\mathcal{F}(A)$-modulo duale di $\mathfrak{X}(A)$. $\Lambda^1(A)$ è anche detto $\mathcal{F}(A)$-modulo delle 1-forme differenziali su A. Se $(x_1, ..., x_n)$ è un sistema di coordinate locali, allora

$$(\mathrm{d}f)\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Prendendo come f la funzione coordinata x_h, si ha

$$(\mathrm{d}x_h)\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial x_h}{\partial x_i} = \delta_i^h.$$

Dunque i differenziali $\mathrm{d}x_1, ..., \mathrm{d}x_n$ costituiscono una base locale di $\Lambda^1(A)$ duale della base locale $\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}$ di $\mathfrak{X}(A)$. Pertanto, $\mathrm{d}f$ localmente si può esprimere con

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Si noti che per ogni $\omega \in \Lambda^1(A)$ e per ogni $p \in A$, si può definire la forma lineare $\omega_p : T_pM \to \mathbb{R}$ tale che $\omega_p\big(\frac{\partial}{\partial x_i}\big)_p = \big(\omega(\frac{\partial}{\partial x_i})\big)(p)$ per ogni $i = 1, ..., n$. Quindi, per ogni $\omega \in \Lambda^1(A)$ e per ogni $p \in A$, si ha $\omega_p \in T_p^*M$.

Siano ora M e N due varietà differenziabili, $p \in M$ ed $F : M \to N$ un'applicazione differenziabile in un intorno di p.

Definizione 2.20. Si definisce *differenziale* di F in p l'applicazione

$$F_{*p} : T_pM \to T_{F(p)}N,\ X_p \mapsto F_{*p}X_p, \quad \text{tale che}$$
$$F_{*p}(X_p)(g) := X_p(g \circ F) \quad \forall g \in \mathcal{F}(F(p)).$$

F_{*p} è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare. Siano $(x_1, ..., x_m)$ coordinate locali definite in un intorno U di p e siano $(y_1, ..., y_n)$ coordinate locali definite in un intorno V di $F(p)$ con $F(U) \subset V$, siano inoltre φ e ψ le corrispondenti applicazioni coordinate. Possiamo determinare la matrice associata a $(F_*)_p$ rispetto alle basi coordinate $\{(\partial/\partial x_i)_p\}$ e $\{(\partial/\partial y_j)_{F(p)}\}$ di T_pM e $T_{F(p)}N$ rispettivamente. Poiché

$$\begin{aligned} F_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p &= \sum_{j=1}^n F_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (y_j)\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{F(p)} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial y_j \circ F}{\partial x_i}\right)(p)\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{F(p)}, \end{aligned}$$

la suddetta matrice è data da:

$$\left(\frac{\partial(y_j \circ F)}{\partial x_i}\right)(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(y_1\circ F)}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial(y_1\circ F)}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial(y_1\circ F)}{\partial x_m}(p) \\ \frac{\partial(y_2\circ F)}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial(y_2\circ F)}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial(y_2\circ F)}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial(y_n\circ F)}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial(y_n\circ F)}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial(y_n\circ F)}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix}.$$

Questa matrice viene detta *matrice jacobiana* di F nel punto p rispetto ai fissati sistemi di coordinate. Si noti che la matrice jacobiana di F in p è esattamente la matrice jacobiana di $\tilde{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ in $\varphi(p)$. Se F è un'applicazione differenziabile da $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$, il differenziale F_{*p} si può identificare con la matrice jacobiana $J(F)_p$ come un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^m \equiv T_p\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n \equiv T_{F(p)}\mathbb{R}^n$.

Esercizio 2.21. Sia $f : M \to \mathbb{R}$ una applicazione differenziabile. Indicata con t la coordinata su $\mathbb{R}$, si verifichi che

$$f_{*p}(X_p) = (\mathrm{d}f)_p(X_p)\big(\mathrm{d}/\mathrm{d}t\big)_{f(p)} \quad \forall\ X_p \in T_pM.$$

Esercizio 2.22. Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \mapsto F(x) = Ax + v$, dove A rappresenta un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ e v è un fissato vettore di $\mathbb{R}^m$. Determinare F_{*x} per ogni fissato $x \in \mathbb{R}^n$.

Esercizio 2.23. Sia $F : M \to N$ una applicazione differenziabile tra varietà. Verificare che

$$F_* : TM \to TN,\ X_p \mapsto F_{*p}X_p,$$

è un'applicazione differenziabile tra le varietà tangenti.

Proposizione 2.24. *Siano M, N, P, tre varietà differenziabili ed $F : M \to N,\ G : N \to P$ due applicazioni differenziabili. Allora*

$$(G \circ F)_{*p} = G_{*F(p)} \circ F_{*p} \quad \forall p \in M.$$

Dimostrazione. Basta osservare che per ogni $X_p \in T_pM$ e per ogni $h \in \mathcal{F}(G(F(p))$:

$$\begin{aligned}(G \circ F)_{*p}(X_p)(h) &= X_p(h \circ G \circ F),\\ \big(G_{*F(p)} \circ F_{*p}\big)\,(X_p)(h) &= \big(G_{*F(p)}(F_{*p}(X_p))\big)\,(h) = (F_{*p}X_p)\,(h \circ G)\\ &= X_p(h \circ G \circ F).\end{aligned}$$

□

Corollario 2.25. *Se $F : M \to N$ è un diffeomorfismo, allora F_{*p} è un isomorfismo e $F_{*p}^{-1} = (F^{-1})_{*F(p)}$ per ogni $p \in M$. In particolare,* $\dim M = \dim N$ *e la matrice jacobiana* $\left(\frac{\partial(y_j \circ F)}{\partial x_i}\right)_p \in GL(n, \mathbb{R})$.

Dimostrazione. Basta osservare che $F \circ F^{-1} = I_N$, $F^{-1} \circ F = I_M$ e applicare la Proposizione 2.24. □

Esercizio 2.26. Sia M una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$ rappresentata, localmente, con equazioni parametriche $x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v)$. Siano $\phi^0_u = (x_u, y_u, z_u)_p$ e $\phi^0_v = (x_v, y_v, z_v)_p$ i vettori tangenti, in un fissato punto p, alle linee coordinate $v = cost.$ e $u = cost.$ rispettivamente. Si noti che l'inclusione $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, espressa in coordinate locali da $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, è differenziabile. Determinare i vettori tangenti $i_*(\frac{\partial}{\partial u})_p$, $i_*(\frac{\partial}{\partial v})_p$, quindi trovare il legame tra le basi $\big((\frac{\partial}{\partial u})_p, (\frac{\partial}{\partial v})_p\big)$ e (ϕ^0_u, ϕ^0_v) del piano tangente T_pM.

Nel caso di un diffeomorfismo $F : M \to N$, possiamo definire un differenziale che opera sui campi di vettori. Per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$, F_*X è il campo di vettori su N definito, per ogni $q \in N, F(p) = q$, da

$$(F_*X)_q = F_{*p}X_p.$$

Inoltre, per $f \in \mathcal{F}(M)$, si pone

$$F_*f = f \circ F^{-1} \in \mathcal{F}(N).$$

Proposizione 2.27. *Se $F : M \to N$ è un diffeomorfismo, il differenziale F_* definisce una corrispondenza $\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(N), X \mapsto F_*X$, che verifica le seguenti proprietà:*
(1) $F_*(X)(g) = X(g \circ F) \circ F^{-1}$ *(in particolare $F_*X \in \mathfrak{X}(N)$),*
(2) F_* *è una corrispondenza biunivoca,*
(3) $F_*(X + Y) = F_*(X) + F_*(Y)$ *e* $F_*(fX) = F_*(f)F_*(X)$,
(4) $F_*[X, Y] = [F_*X, F_*Y]$,
per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $g \in \mathcal{F}(N)$ ed $f \in \mathcal{F}(M)$. In particolare, F_* è un isomorfismo tra le algebre di Lie $\mathfrak{X}(M)$ e $\mathfrak{X}(N)$.

Dimostrazione. (1) Per ogni $q \in N, q = F(p)$, si ha:

$$\begin{aligned}(F_*X)(g)(q) &= (F_*X)_q(g) = (F_{*p}X_p)(g) = X_p(g \circ F) = X(g \circ F)(p)\\ &= X(g \circ F)(F^{-1}(q)) = \big(X(g \circ F) \circ F^{-1}\big)(q).\end{aligned}$$

(2) Iniettività : $F_*X = F_*Y \Rightarrow (F_*X)_q = (F_*Y)_q \, \forall q \in N \Rightarrow F_{*p}X_p = F_{*p}Y_p \quad \forall p \in M \Rightarrow X_p = Y_p \;\forall p \in M \;\Rightarrow\; X = Y$.
Suriettività : dato $Y \in \mathfrak{X}(N)$, prendendo $X = (F^{-1})_*Y$ elemento di $\mathfrak{X}(M)$, si ha $F_*X = Y$.
(3) $F_*(X + Y) = F_*(X) + F_*(Y)$ è ovvia. Verifichiamo che $F_*(fX) = F_*(f)F_*(X)$. Applicando la definizione di F_*, per ogni $q \in N, q = F(p)$:

$$\begin{aligned}(F_*(fX))_q &= F_{*p}(fX)_p = f(p)F_{*p}X_p\\ &= f(F^{-1}(q))(F_*X)q\\ &= \big((f \circ F^{-1})F_*X\big)_q .\end{aligned}$$

(4) Applicando la (1), si ha

$$\begin{aligned}(F_*[X, Y])(g) &= ([X, Y](g \circ F)) \circ F^{-1}\\ &= (XY(g \circ F)) \circ F^{-1} - (YX(g \circ F)) \circ F^{-1}.\end{aligned}$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}(F_*X)(F_*Y)(g) &= (F_*X)(Y(g \circ F) \circ F^{-1})\\ &= \big(X(Y(g \circ F) \circ F^{-1} \circ F)\big) \circ F^{-1}\\ &= (XY(g \circ F)) \circ F^{-1}.\end{aligned}$$

Pertanto,

$$(F_*[X, Y])(g) = (F_*X)(F_*Y)(g) - (F_*Y)(F_*X)(g) = [F_*X, F_*Y](g). \qquad \square$$

F_*X **in coordinate locali**.

Siano $(U,(x_i))$ e $(V,(y_j))$, $F(U)=V$, carte locali di M ed N rispettivamente. Assumiamo $X=\sum_{i=1}^m \xi^i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ con $\xi^i \in \mathcal{F}(U)$. Allora $F_*X = \sum_{i=1}^m (F_*\xi^i) F_* \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, dove $F_*\xi^i = \xi^i \circ F^{-1}$ e

$$F_*\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \Big(F_*\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)(y_j)\frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{j=1}^n \frac{(\partial y_j \circ F)}{\partial x_i} \circ F^{-1} \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Quindi,

$$F_*X = \sum_{j=1}^n \Big\{ \sum_{i=1}^m (\xi^i \circ F^{-1}) \Big(\frac{(\partial y_j \circ F)}{\partial x_i} \circ F^{-1} \Big) \Big\} \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Osservazione 2.28. Si noti che se $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ è l'applicazione coordinata relativa alle coordinate (x_i), allora $\varphi_* \dfrac{\partial}{\partial x_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ e quindi

$$X = \sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{si può identificare con} \quad \tilde{X} = \varphi_* X = \sum_{i=1}^m \tilde{\xi}^i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

dove $\xi^i \in \mathcal{F}(U)$ e $\tilde{\xi}^i = \xi \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{F}(\varphi(U))$.

Il *rango* di un'applicazione differenziabile $F : M \to N$ in un fissato punto $p \in M$ è, per definizione, il rango del differenziale F_{*p}. Quindi:

$$\begin{aligned} \text{rango}(F)_p &:= \text{rango} F_{*p} = \dim F_{*p}(T_pM), \quad F_{*p}(T_pM) \subset T_{F(p)}N, \\ &= \text{rango della matrice jacobiana di } F \text{ in } p \\ &= \dim T_pM - \dim\ker F_{*p} \ \ (\leq \min\{\dim M, \dim N\}). \end{aligned}$$

Si noti che:

$$\text{rango}(F)_p = \dim M \ (\text{risp. } \dim N) \ \Leftrightarrow \ F_{*p} \text{ è iniettivo (risp. suriettivo).}$$

Teorema 2.29. (delle funzioni inverse) *Se $F : M \to N$ è un'applicazione differenziabile tra varietà, le seguenti proprietà sono equivalenti.*

(1) $F_{*p} : T_pM \to T_{F(p)}N$ *è un isomorfismo.*

(2) $\text{rango}(F)_p = \dim M = \dim N = n$.

(3) *Esistono U, V intorni aperti di p ed $F(p)$ rispettivamente, tali che*
$$F_{|U} : U \to V \ \textit{sia un diffeomorfismo.}$$

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2) segue facilmente dalle relazioni precedenti. (2) $\Rightarrow$ (3): basta ricondursi, mediante carte locali, al caso di una applicazione differenziabile $\tilde{F}$ tra aperti di $\mathbb{R}^n$ e applicare il relativo teorema delle funzioni inverse. (3) $\Rightarrow$ (1): se $F_{|U} : U \to V$ è un diffeomorfismo, allora $(F_{|U})_{*p} : T_pU = T_pM \to T_{F(p)}V = T_{F(p)}N$ è un isomorfismo e quindi $F_{*p} = (F_{|U})_{*p}$ è un isomorfismo. $\square$

Proposizione 2.30. *Sia $F : M \to N$ una applicazione differenziabile tra varietà (con M connessa). Se $F_{*p} = 0$ per ogni $p \in M$, allora F è un'applicazione costante.*

Dimostrazione. Sia $q \in F(M)$. Proviamo che $F^{-1}(q) = M$. $F^{-1}(q)$ è un sottoinsieme chiuso e non vuoto di M. Poiché M è connessa, per provare che F è costante basta provare che $F^{-1}(q)$ è anche aperto. Proviamo che $F^{-1}(q)$ è intorno di ogni suo punto. Dato $p_0 \in F^{-1}(q)$, consideriamo (U, φ) carta locale di M e (V, ψ) carta locale di N con $p_0 \in U$ e $F(U) \subset V$. Poniamo $\tilde{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$; $F_{*p} = 0$ per ogni $p \in U$ implica che la matrice jacobiana di F in p è la matrice nulla per ogni $p \in U$, ossia la matrice jacobiana di $\tilde{F}$ è la matrice nulla per ogni punto di $\varphi(U)$. Di conseguenza, $\tilde{F}$ è costante su $\varphi(U)$ è quindi F è costante su U. Pertanto $F(p) = cost. = F(p_0) = q$ per ogni $p \in U$, implica $U \subset F^{-1}(q)$ e quindi $F^{-1}(q)$ è intorno di p_0. $\square$

Esercizio 2.31. Sia $\pi : \tilde{M} \to M$ un'applicazione di rivestimento tra varietà differenziabili. Si verifichi che:

$$\forall X \in \mathfrak{X}(M) \;\; \exists| \tilde{X} \in \mathfrak{X}(\tilde{M}) \;\text{ tale che }\; \pi_{*\tilde{p}}\tilde{X}_{\tilde{p}} = X_{\pi(\tilde{p})} \quad \forall \tilde{p} \in \tilde{M}.$$

2.4 Curve differenziabili

Sia M una varietà differenziabile di dimensione n. Una *curva differenziabile* di M è un'applicazione differenziabile $\sigma : I \to M$ con I aperto di $\mathbb{R}$. Quando si considera $\sigma : [a, b] \to M$, si intende che σ è definita su un aperto che contiene $[a, b]$. Una curva $\sigma : [a, b] \to M$ si dice differenziabile a tratti se esiste una suddivisione $a = a_0 < a_1 < a_2 ... < a_{k-1} < a_k = b$ di $[a, b]$ tale che $\sigma_{|[a_i,a_{i+1}]}$ sia differenziabile per ogni $i = 0, 1, ..., k-1$. Se $\sigma : I \to M$ è una curva differenziabile, diremo *vettore tangente a* σ nel punto $\sigma(t_0)$ il vettore

$$\dot{\sigma}(t_0) := (\sigma_*)_{t_0} \left(d/dt\right)_{t_0}, \quad \text{dove} \quad (\sigma_*)_{t_0} : T_{t_0}\mathbb{R} \to T_{\sigma(t_0)}M.$$

Sia $(U, \varphi, (x_i))$ una carta locale con $\sigma(t_0) \in U$; posto $\tilde{\sigma}(t) = \varphi \circ \sigma(t)$ e $x_i(t) = (x_i \circ \sigma)(t) = (x_i \circ \tilde{\sigma})(t)$, si ha

$$\dot{\sigma}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} (\sigma_*)_{t_0} \left(\frac{d}{dt}\right)_{t_0} (x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\sigma(t_0)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dx_i(t)}{dt}(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\sigma(t_0)}.$$

Quindi,

$$\dot{\sigma}(t_0) = \varphi^{-1}_{*\sigma(t_0)}\dot{\tilde{\sigma}}(t_0).$$

Se $M = \mathbb{R}^n$, $\dot{\sigma}(t)$ è l'usuale vettore velocità per le curve parametrizzate di $\mathbb{R}^n$.

Significato geometrico del differenziale: sia $F : M \to M'$ un'applicazione differenziabile tra varietà. Se $\sigma : I \to M$ è una curva differenziabile di M,

$\tau = F \circ \sigma$ è una curva differenziabile di M' e

$$\dot{\tau}(t_0) = (F \circ \sigma)_{*t_0} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} = (F_{*\sigma(t_0)} \circ \sigma_{*t_0}) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} = (F_*)_{\sigma(t_0)}(\dot{\sigma}(t_0)).$$

Quindi il differenziale trasforma vettori tangenti alla curva $\sigma(t)$ in vettori tangenti alla curva $\tau(t) = F \circ \sigma(t)$.

Proposizione 2.32. *Sia $\sigma : I \to M$ una curva differenziabile ed $f \in \mathcal{F}(\sigma(t_0))$. Posto $f(t) = f(\sigma(t))$, si ha*

$$\dot{\sigma}(t_0)(f) = \left(\frac{df}{dt}\right)(t_0).$$

Dimostrazione. Poniamo $f(t) = f(\sigma(t))$ e consideriamo una carta locale $(U, (x_i))$ con $\sigma(t_0) \in U$. Allora

$$\dot{\sigma}(t_0)(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}(t_0) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\sigma(t_0)} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t_0).$$

□

Vediamo ora che, così come per le superfici di $\mathbb{R}^3$, anche per una arbitraria varietà differenziabile lo spazio tangente T_pM è costituito dai vettori tangenti a curve della stessa varietà passanti per il punto p. Più precisamente abbiamo la seguente

Proposizione 2.33. *Sia p un fissato punto di M. Allora, per ogni $V_p \in T_pM$ esiste $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ (differenziabile) tale che*

$$\sigma(0) = p \ \text{ e } \ \dot{\sigma}(0) = V_p.$$

Dimostrazione. Sia $V_p \in T_pM$ e sia $(U, \varphi, (x_i))$ una carta locale con $p \in U$. Poniamo

$$x_0 = \varphi(p) \in \varphi(U) \quad \text{e} \quad \tilde{V} = (V^1, ..., V^n) \in \mathbb{R}^n,$$

dove $\sum_{i=1}^n V^i \left(\partial/\partial x_i\right)_p = V$. Consideriamo in $\mathbb{R}^n$ il segmento $\tilde{\sigma}(t) = x_0 + t\tilde{V}$, $|t| < \epsilon$. Prendendo ϵ abbastanza piccolo, possiamo assumere che $\tilde{\sigma}$ abbia sostegno in $\varphi(U)$ (aperto di $\mathbb{R}^n$). Tale curva soddisfa: $\tilde{\sigma}(0) = x_0$ e $\dot{\tilde{\sigma}}(0) = \tilde{V}$. Poniamo ora $\sigma(t) := \varphi^{-1}(\tilde{\sigma}(t))$. $\sigma(t)$ è una curva differenziabile di M che soddisfa

$$\sigma(0) = \varphi^{-1}(\tilde{\sigma}(0)) = \varphi^{-1}(\varphi(p)) = p, \quad x_i(t) = x_i(\sigma(t)) = x_{0i} + tV^i$$

e

$$\dot{\sigma}(0) = \textstyle\sum_{i=1}^n \dfrac{dx_i}{dt}(0) \left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\sigma(0)} = \textstyle\sum_{i=1}^n V^i \left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = V_p.$$

□

Gruppo locale a un parametro

Siano M una varietà differenziabile, A un aperto di M, $X \in \mathfrak{X}(A)$, e $\sigma : I =]-\epsilon, \epsilon[\to A \subset M$ una curva differenziabile di M. La curva σ si dice *curva integrale* del campo di vettori X con inizio in p_0 se:

$$\sigma(0) = p_0 \ \text{ e } \ \dot{\sigma}(t) = X_{\sigma(t)} \ \ \forall t \in I.$$

Teorema 2.34. *Sia $X \in \mathfrak{X}(A)$ con A aperto di M. Allora, per ogni fissato punto $p_0 \in A$, esiste un $\epsilon > 0$ ed esiste un'unica curva differenziabile $\sigma : I =]-\epsilon, \epsilon[\to M$ curva integrale di X con inizio in p_0.*

Dimostrazione. Sia $(U, \varphi, (x_i))$ una carta locale di M con $p_0 \in U \subset A$ e $\varphi(p_0) = (a_1, ..., a_n)$. Allora, su U: $X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ con $\xi^i \in \mathcal{F}(U)$. Se $\sigma(t)$ è una curva differenziabile di M con sostegno in U, poniamo $\tilde{\sigma}(t) := \varphi(\sigma(t)) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ e $\tilde{\xi}^i := \xi^i \circ \varphi^{-1}$. Allora le condizioni $\sigma(0) = p_0$e$\dot{\sigma}(t) = X_{\sigma(t)}$, in termini di coordinate locali, diventano:

$$x_i(0) = a_i \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \xi^i(\sigma(t)) = \tilde{\xi}^i(x_1(t), ..., x_n(t)), \; i = 1, ..., n. \tag{2.2}$$

Questo è un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine insieme a n condizioni iniziali. Dalla teoria delle equazioni differenziali segue l'esistenza e l'unicità della n-pla di funzioni differenziabili $(x_1(t), ..., x_n(t)) \in \varphi(U)$, definita per $t \in I =]-\epsilon, \epsilon[$, che verifica il suddetto sistema. La curva $\sigma(t) = \varphi^{-1}(x_1(t), ..., x_n(t))$ è la curva integrale di X con inizio in p_0 definita per $t \in I$. □

Si noti che la curva integrale σ determinata nel Teorema 2.34 non è detto che sia quella massimale. Sempre dalla teoria delle equazioni differenziali ordinarie, tenendo conto del teorema d'esistenza locale, di unicità e dipendenza C^∞ dai dati iniziali, applicato al sistema di equazioni differenziali ordinarie (2.2), si ottiene il seguente risultato.

Teorema 2.35. *Sia $X \in \mathfrak{X}(A)$, A aperto di M. Per ogni fissato punto $p_0 \in A$, esistono un intorno aperto U di p_0, $U \subset A$, un $\epsilon > 0$ e una applicazione differenziabile $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to M, (t, p) \mapsto \sigma_p(t)$, dove $\sigma_p(t)$ è l'unica curva integrale di X con inizio in p definita per $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ e per ogni $p \in U$. Inoltre, per ogni fissato $|t| < \epsilon$, si ha che $\phi_t : U \to \phi_t(U),\ p \mapsto \phi_t(p) = \sigma_p(t)$, è un diffeomorfismo che soddisfa*

$$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s} \quad \forall t, s \in (-\epsilon, \epsilon) \text{ con } t + s \in (-\epsilon, \epsilon).$$

ϕ_t è detto *flusso locale* di X, oppure *gruppo locale a un parametro*, generato da X. Un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ si dice *completo* se genera un gruppo globale ad un parametro, cioè $(-\epsilon, \epsilon) \times U = \mathbb{R} \times M$. Se M è compatta, ogni campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ è completo. Un campo di vettori invariante a sinistra su un gruppo di Lie è completo. Per approfondimenti sul flusso locale generato da un campo di vettori si rinvia al testo [14] (Cap.IV, Sez. 3).

Esempio 2.36. Siano $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ definiti rispettivamente da

$$X = x_1\partial_1 + x_2\partial_2,\ Y = x_2\partial_1 - x_1\partial_2,\ Z = x_1\partial_1 - x_2\partial_2, \text{ dove } \partial_i = \tfrac{\partial}{\partial x_i}.$$

La curva integrale di X con inizio in $p = (a_1, a_2) \neq (0, 0)$ è data da $\sigma(t) = (a_1e^t, a_2e^t)$, $t \in \mathbb{R}$. Quindi, le curve integrali di X sono semirette radiali (il parametro non è affine). Si noti che

$$\phi_t(\phi_s(a_1, a_2)) = \phi_t(a_1e^s, a_2e^s) = (a_1e^{t+s}, a_2e^{t+s}) = \phi_{t+s}(a_1, a_2).$$

La curva integrale di Y con inizio in $p = (a_1, a_2) \neq (0, 0)$ è data da $\sigma(t) = (a_1 \cos t - a_2 \sin t, a_1 \sin t + a_2 \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$, che è una circonferenza di centro l'origine e passante per p. Anche in questo caso, usando le formule di somma per seno e coseno, si ha $\phi_t(\phi_s(a_1, a_2)) = \phi_{t+s}(a_1, a_2)$. La curva integrale di Z con inizio in $p = (a_1, a_2) \neq (0, 0)$ è data da $\sigma(t) = (a_1 e^t, a_2 e^{-t})$, $t \in \mathbb{R}$. In questo caso una curva integrale è un semiasse coordinato oppure un ramo di iperbole equilatera. Inoltre, come prima, si ha $\phi_t(\phi_s(a_1, a_2)) = \phi_{t+s}(a_1, a_2)$.

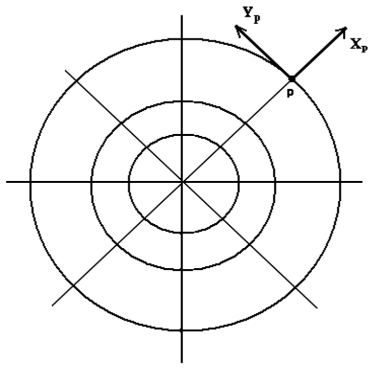

Figura 2.1: Curve integrali di X e Y.

2.5 Immersioni e sottovarietà

Definizione 2.37. Siano M, M' varietà differenziabili ed $f : M \to M'$ un'applicazione differenziabile. Diremo che f è una *immersione* se il suo differenziale f_{*p} è iniettivo per ogni $p \in M$. In tal caso $n' = \dim T_{f(p)}M' \geq \text{rango} f_{*p} = \dim T_pM = n$.

Se f è un'immersione iniettiva, diremo che M è una *sottovarietà immersa* di M'. Data l'immersione iniettiva $f : M \to M'$ e considerata su $f(M)$ la topologia indotta da M', se $f : M \to f(M)$ è un omeomorfismo, allora diremo che f è un *imbedding* e in tal caso $f(M)$ è detta *sottovarietà imbedded* di M'. Chiaramente l'immersione $i : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}, (x_1, ..., x_n) \mapsto (x_1, ..., x_n, 0..., 0)$, è un imbedding.

Esercizio 2.38. Verificare che l'applicazione
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t),$$
è un'immersione non iniettiva.

Esercizio 2.39. Verificare che l'applicazione
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t),$$
è un imbedding. Di conseguenza, l'elica cilindrica con la topologia indotta è una sottovarietà imbedded di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2.40. a) Verificare che l'applicazione
$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto F(t) = (2\cos(t - \tfrac{\pi}{2}), \sin 2(t - \tfrac{\pi}{2})),$$
è un'immersione non iniettiva.
b) Sia data $g :]-\infty, +\infty[\to]0, 2\pi[, t \mapsto g(t) = \pi + 2\mathrm{arctg}\, t$, e sia F quella dell'esercizio precedente. Verificare che l'applicazione $G(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto G(t) = F(g(t))$, è una immersione iniettiva che non è un imbedding e quindi $G(\mathbb{R})$ "*figura a otto*" è una sottovarietà immersa non imbedded di $\mathbb{R}^2$.

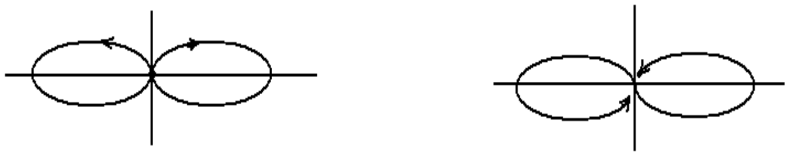

Figura 2.2: figure relative all'Esercizio 2.40.

Esercizio 2.41. Sia $X \in \mathfrak{X}(M)$. Si verifichi che $X : M \to TM$ è un'immersione iniettiva.

Il classico teorema del rango costante per applicazioni differenziabili da A (aperto di $\mathbb{R}^n$) in B (aperto di $\mathbb{R}^{n'}$) la cui dimostrazione (cf. ad esempio [28], p.56) è abbastanza simile a quella del Teorema 1.15, è un teorema di natura locale. Pertanto possiamo enunciarlo direttamente per applicazioni tra varietà differenziabili.

Teorema 2.42. (del rango costante) *Sia $f : A \subset M \to B \subset M'$ un'applicazione differenziabile, con* rango$f_{*p} = k$ *per ogni $p \in A$, dove A e un aperto di M e B è un aperto di M', $\dim M = n, \dim M' = n'$. Allora, per ogni $p_0 \in A$ esistono due carte locali $(U, \varphi, (x_i))$, $p_0 \in U \subset A$, e $(V, \psi, (y_j))$ con $f(U) \subset V \subset B$, tali che*

$$\begin{aligned} &\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V), \\ &\qquad (x_1, x_2, ..., x_n) \longmapsto (y_1, y_2, ..., y_{n'}) = (x_1, x_2, ..., x_k, 0, ..., 0). \end{aligned}$$

In particolare, se $k = n \le n'$, allora

$$\begin{aligned} &\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(f(U)) \cap \mathbb{R}^n, \\ &\qquad (x_1, x_2, ..., x_n) \longmapsto (y_1, y_2, ..., y_{n'}) = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, ..., 0), \end{aligned}$$

definisce chiaramente un diffeomorfismo; inoltre,
$$f(U) = \{q \in V : y_j(q) = 0, j = n+1, ..., n'\} \quad \text{e}$$

$$y_j(f(p)) = x_j(p) \text{ per ogni } i = 1,..,n \text{ e per ogni } p \in U.$$

Pertanto, una conseguenza del Teorema 2.42 è il seguente risultato il quale mostra che la differenza tra sottovarietà immerse e sottovarietà imbedded è solo globale e non locale.

Teorema 2.43. *Siano M, M' varietà differenziabili,* $\dim M = n$, $\dim M' = n'$ *ed* $f : M \to M'$ *un'immersione (quindi* $\operatorname{rango} f_{*p} = n \leq n'$ *per ogni* $p \in M$*). Allora, per ogni $p_0 \in M$ esistono $(U, (x_i))$ intorno coordinato di p_0, $(V, (y_j))$ intorno coordinato di $f(p_0)$, tali che*
(1) $f_{|U} : U \to M'$ è un imbedding,
(2) $f(U) = \{q \in V : y_j(q) = 0, j = n+1, ..., n'\}$ e $y_j(f(p)) = x_j(p)$ per ogni $j = 1,..,n$ e per ogni $p \in U$.

Definizione 2.44. Siano $M, \bar{M}$ varietà differenziabili con $\dim M = n \leq \bar{n} = \dim \bar{M}$. Diremo che M è una *sottovarietà* di $\bar{M}$ se $M \subset \bar{M}$ e inoltre per ogni $p_0 \in M$ esiste $(\bar{U}, \bar{\varphi})$ carta locale di $\bar{M}$, con $p_0 \in \bar{U}$, e funzioni coordinate $(y_1, ..., y_{\bar{n}})$, avente la seguente proprietà:
$U := \{p \in \bar{U} : y_{n+1}(p) = ... = y_{\bar{n}}(p) = 0\} \subset \bar{U}$ è intorno coordinato di p_0 in M con funzioni coordinate $x_i = y_{i|U}$, $i = 1, ..., n$; quindi (U, φ) è carta locale di M con $\varphi(p) = (y_1(p), ..., y_n(p))$ per ogni $p \in U$. Le carte (U, φ) e $(\bar{U}, \bar{\varphi})$ sono dette *carte locali speciali.*

Si noti che nella definizione di sottovarietà non è richiesto che $U = \bar{U} \cap M$, cioè non è detto che la topologia di M sia quella indotta da $\bar{M}$, in ogni caso la topologia di M è più fine di quella indotta da $\bar{M}$, cioè per ogni aperto $\bar{A}$ di $\bar{M}$, $\bar{A} \cap M$ è un aperto di M (basta osservare che l'inclusione $i : M \hookrightarrow \bar{M}$ è differenziabile e quindi continua). In particolare $\bar{U} \cap M$ è un aperto di M. La sottovarietà M è detta *sottovarietà regolare* di $\bar{M}$ se la topologia di M coincide con quella indotta da $\bar{M}$. Una *sottovarietà aperta* di $\bar{M}$ è costituita da un aperto A di $\bar{M}$ con la struttura differenziabile indotta.

Proposizione 2.45. *Se M è una sottovarietà (risp. regolare) di $\bar{M}$, allora l'inclusione $i : M \hookrightarrow \bar{M}$ è un'immersione iniettiva (risp. un imbedding).*

Dimostrazione. i è chiaramente iniettiva. Inoltre, fissato $p \in M$ e considerate carte locali speciali $(U, \varphi, (x_k))$ e $(\bar{U}, \bar{\varphi}, (y_h))$, si ha

$$i : (x_1, ..., x_n) \mapsto (x_1, , ..., x_n, 0, ..., 0), \text{ e quindi}$$
$$i_{*p}\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big)_p = \Big(\frac{\partial}{\partial y_k}\Big)_p \ \forall k = 1, ..., n.$$

Di conseguenza, $\operatorname{rg}(i_{*p}) = \dim M$. Se M è anche regolare, allora la sua topologia è quella indotta da $\bar{M}$ e quindi $i : M \hookrightarrow \bar{M}$ è un imbedding. □

Vale anche la proposizione inversa.

Proposizione 2.46. *Siano $M, \bar{M}$ varietà differenziabili con $M \subset \bar{M}$. Se l'inclusione $i : M \hookrightarrow \bar{M}$ è un'immersione (risp. un imbedding), allora M è una sottovarietà (risp. regolare) di $\bar{M}$.*

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema 2.43 e notare che se $i : M \hookrightarrow \bar{M}$ è un imbedding allora la topologia di M è quella indotta da $\bar{M}$. □

Osservazione 2.47. Sia M una sottovarietà immersa (risp. imbedded) di M' con immersione iniettiva (risp. imbedding) $f : M \to M'$. Sia $N = f(M) \subset M'$. Poiché $f_\sharp : M \to N$ è una corrispondenza biunivoca, possiamo trasportare su N la topologia e la struttura differenziabile di M in modo naturale. Di conseguenza $f_\sharp$ è un diffeomorfismo e quindi, essendo f un'immersione (risp. un imbedding), l'inclusione

$$i = f \circ f_\sharp^{-1} : N \to M \to M'$$

è un'immersione (risp. un imbedding). Pertanto, tenendo anche conto della Proposizione 2.46, le sottovarietà immerse (risp. imbedded) si possono identificare con le sottovarietà (risp. regolari).

Proposizione 2.48. *Ogni sottovarietà immersa compatta è imbedded.*

Dimostrazione. Sia M una sottovarietà compatta immersa in M', con immersione $f : M \to M'$. Consideriamo su $f(M)$ la topologia indotta da M'. Allora $f : M \to f(M)$ è un'applicazione bigettiva e continua. Inoltre, $f(M)$ è separato in quanto sottospazio di uno spazio separato. Pertanto, l'applicazione $f : M \to f(M)$ è un omeomorfismo in quanto applicazione bigettiva e continua da uno spazio compatto in uno separato. □

Se M è una sottovarietà di $\bar{M}$, fissato $p \in M$ e considerate carte locali speciali $(U, (x_k))$ e $(\bar{U}, (y_h))$, $i_{*p} : T_pM \to i_{*p}T_pM \subset T_p\bar{M}$ è un isomorfismo e inoltre $i_{*p}\big(\partial/\partial x_k\big)_p = \big(\partial/\partial y_k\big)_p$. Quindi i_{*p} permette di identificare T_pM con $i_{*p}T_pM$; inoltre, indicato con E_p il sottospazio generato da $\big(\partial/\partial y_h\big)_p$ $(h = n+1, ..., \bar{n})$, si ha

$$T_p\bar{M} = i_{*p}T_pM \oplus E_p = T_pM \oplus E_p.$$

Sia ora $X \in \mathfrak{X}(U)$, un campo di vettori $\bar{X} \in \mathfrak{X}(\bar{U})$ si dice *estensione* di X su $\bar{U}$, e si scrive $\bar{X}_{|U} = X$, se $\bar{X}_p = i_{*p}X_p \in i_{*p}T_pM \equiv T_pM \ \forall p \in U$. Risulta:

$$\bar{X}_{|U} = X \ \Leftrightarrow \bar{X}(\bar{f})_{|U} = X(\bar{f}_{|U}) \ \ \forall \bar{f} \in \mathcal{F}\left(\bar{U}\right),$$

dove $\bar{f}_{|U} = \bar{f} \circ i \in \mathcal{F}(U)$. Infatti,

$$\begin{aligned}\bar{X}_p(\bar{f}) = i_{*p}X_p(\bar{f}) \ \ \forall p \in U &\Leftrightarrow \bar{X}(\bar{f})(p) = X_p(\bar{f} \circ i) \, \forall p \in U \\ &\Leftrightarrow \bar{X}(\bar{f})_{|U} = X(\bar{f}_{|U}).\end{aligned}$$

Proposizione 2.49. *Siano M_1,M_2 sottovarietà di $\bar{M}_1, \bar{M}_2$ rispettivamente. Inoltre, sia $\bar{f} : \bar{M}_1 \to \bar{M}_2$ un'applicazione differenziabile. Allora:*

(j_1) $f_1 = \bar{f}_{|M_1} : M_1 \to \bar{M}_2$ *è differenziabile* (*in particolare, se* M *è sottovarietà di* $\bar{M}$ *si ha* $g = \bar{g}_{|M} \in \mathcal{F}(M)$ $\forall \bar{g} \in \mathcal{F}(\bar{M})$)*;*

(j_2) *se* $\bar{f}(M_1) \subset M_2$, $f_2 = \bar{f}_{|M_1} : M_1 \to M_2$ *è differenziabile.*

Dimostrazione. Per la (j_1) basta osservare che $f_1 = \bar{f} \circ i$ dove $i : M_1 \hookrightarrow \bar{M}_1$. Proviamo la (j_2). Dato $p_0 \in M_1$, consideriamo (U, φ) carta locale di M_1, $p_0 \in U$, (V, ψ), $(\bar{V}, \bar{\psi})$ carte locali speciali di M_2 e $\bar{M}_2$ con $\bar{f}(p_o) \in V$. Siccome $\bar{f}(M_1) \subset M_2$, possiamo assumere $\bar{f}(U) \subset V$. Poiché f_1 è differenziabile, si ha che $\bar{\psi} \circ f_1 \circ \varphi^{-1}$ è differenziabile. D'altronde $\bar{f}(U) \subset V \subset \bar{V}$, per cui

$$\bar{\psi} \circ f_1 \circ \varphi^{-1} : (x_i) \to (y_1(x_i), ..., y_{n_2}(x_i), 0, ...0).$$

Di conseguenza anche

$$\psi \circ f_2 \circ \varphi^{-1} : (x_i) \to (y_1(x_i), ..., y_{n_2}(x_i))$$

è differenziabile, ossia f_2 è differenziabile in un intorno di p_0. □

Corollario 2.50. *Sia* M *una sottovarietà di* $\bar{M}$*. Allora* TM *è una sottovarietà di* $T\bar{M}$*. Inoltre, se* $\bar{X} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$*, si ha*

(a) $\bar{X}_{|M} : M \to T\bar{M}$ *è differenziabile;*

(b) *se* $\bar{X}(M) \subset TM$*, ossia* $\bar{X}_p \in T_pM$ *per ogni* $p \in M$*, allora*

$$X = \bar{X}_{|M} \in \mathfrak{X}(M).$$

Dimostrazione. Se M è una sottovarietà di $\bar{M}$, allora $M \subset \bar{M}$ e $T_pM \subset T_p\bar{M}$ per ogni $p \in M$, quindi $TM \subset T\bar{M}$. Inoltre, l'inclusione $i : TM \hookrightarrow T\bar{M}$, considerando coordinate locali speciali su M e $\bar{M}$, è data da

$$i : (x_1, ..., x_n, \xi^1, ..., \xi^n) \mapsto (x_1, ..., x_n, 0, ..., 0, \xi^1, ..., \xi^n, 0, ..., 0).$$

Pertanto $i : TM \hookrightarrow T\bar{M}$ è un'immersione e quindi, per la Proposizione 2.46, TM è una sottovarietà di $T\bar{M}$. Inoltre, $\bar{X} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ si può pensare come una applicazione differenziabile da $\bar{M}$ in $T\bar{M}$. Quindi, per avere (a) e (b), basta applicare la Proposizione 2.49 con $\bar{M}_1 = \bar{M}$, $\bar{M}_2 = T\bar{M}$, $M_1 = M$ e $M_2 = TM$. □

Il Corollario 2.50 implica in particolare che i campi vettoriali X, Y, Z (considerati dopo il Teorema 2.17) che parallelizzano $\mathbb{S}^3$ sono elementi di $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)$ (cf. anche Esempio 2.56).

Proposizione 2.51. *Sia* M *una sottovarietà di* $\bar{M}$ *con* $n = \dim M$ *e* $\bar{n} = \dim \bar{M}$*. Per ogni* $p_0 \in M$*, esistono* (U, φ) *e* $(\bar{U}, \bar{\varphi})$ *intorni coordinati speciali di* p_0*, tali che:*

(1) $\forall f \in \mathcal{F}(U)$, $\exists \bar{f} \in \mathcal{F}(\bar{U})$ *tale che* $\bar{f}_{|U} = f$*;*

(2) $\forall X \in \mathfrak{X}(U)$ $\exists \bar{X} \in \mathfrak{X}(\bar{U})$ *estensione di* X*;*

(3) *se* $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{X}\left(\bar{U}\right)$ *sono estensioni di* $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$*, allora*

$$\left[\bar{X}, \bar{Y}\right] \text{ è un'estensione di } [X, Y].$$

Dimostrazione. Siano $(U, \varphi, (x_i))$ e $(\bar{U}, \bar{\varphi}, (y_j))$ carte locali speciali con $p_0 \in U$. Poiché $\bar{\varphi}\left(\bar{U}\right)$ è un intorno aperto di $\bar{\varphi}(p_0)$, possiamo assumere che sia un intorno sferico aperto di centro il punto $\bar{\varphi}(p_0) = (y_1^0, ..., y_n^0, 0, ..., 0)$. Componendo con la traslazione definita da $\bar{\varphi}(p_0)$, possiamo assumere che $\bar{\varphi}(p_0) = 0$. Inoltre, componendo entrambe le applicazioni coordinate speciali con tale traslazione otteniamo ancora applicazioni coordinate speciali. Sia quindi $\bar{\varphi}\left(\bar{U}\right) = B^{\bar{n}}$ intorno sferico aperto di $\mathbb{R}^{\bar{n}}$ di centro $0 = \bar{\varphi}\left(p_0\right) = \varphi(p_0)$ e raggio r, allora $\varphi(U) = \{y \in B^{\bar{n}} \ : \ y_{n+1} = ... = y_{\bar{n}} = 0\} = B^n$ intorno sferico di $\mathbb{R}^n$ di centro 0 e raggio r. La proiezione

$$\pi : B^{\bar{n}} \to B^n,\ (y_1, ..., y_n, ..., y_{\bar{n}}) \mapsto (x_1, ..., x_n) := (y_1, ..., y_n)$$

è differenziabile. Pertanto, l'applicazione $\zeta = \varphi^{-1} \circ \pi \circ \bar{\varphi} : \bar{U} \to U$ è differenziabile e

$$\forall p \in U : \quad \zeta(p) = \varphi^{-1}(\pi(\bar{\varphi}(p))) = \varphi^{-1}(\varphi(p)) = p.$$

Adesso verifichiamo le proprietà enunciate.

(1) $\forall f \in \mathcal{F}(U)$, $\bar{f} = f \circ \zeta \in \mathcal{F}\left(\bar{U}\right)$ e $\bar{f}_{|U} = f$.

(2) Sia $X \in \mathfrak{X}(U)$, $X = \sum_{j=1}^n \xi^j \frac{\partial}{\partial x_j}$ con $\xi^j \in \mathcal{F}(U)$.

Posto $\bar{\xi}^j = \xi^j \circ \zeta \in \mathcal{F}\left(\bar{U}\right)$, $\bar{\xi}^j_{|U} = \xi^j$, allora $\bar{X} = \sum_{j=1}^n \bar{\xi}^j \frac{\partial}{\partial y_j} \in \mathfrak{X}(\bar{U})$ e

$$\bar{X}_p = \sum_{j=1}^n \bar{\xi}^j(p) \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p = \sum_{j=1}^n \xi^j(p)(i_*)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = (i_*)_p X_p \quad \forall p \in U.$$

La (3) segue da

$$\begin{aligned}\left[\bar{X}, \bar{Y}\right](\bar{f})_{|U} &= \left(\bar{X}\bar{Y}\left(\bar{f}\right)\right)_{|U} - \left(\bar{Y}\bar{X}(\bar{f})\right)_{|U} = X\big(\bar{Y}\big(\bar{f}\big)_{|U}\big) - Y\big(\bar{X}\big(\bar{f}\big)_{|U}\big) \\ &= X\big(Y(\bar{f}_{|U})\big) - Y\big(X(\bar{f}_{|U})\big) = [X, Y]\left(\bar{f}_{|U}\right), \ \forall \bar{f} \in \mathcal{F}\left(\bar{U}\right).\end{aligned}$$

□

Osservazione 2.52. Siano U e $\bar{U}$ intorni coordinati speciali come nella Proposizione 2.51. Sia V un campo differenziabile di vettori tangenti a $\bar{M}$ definito su U (aperto di M), ciò vuol dire che

$$V(p) = \sum_{j=1}^{\bar{n}} f^j(p) \left(\partial/\partial y_j\right)_p, \quad \text{dove} \quad f^j \in \mathcal{F}(U).$$

Dalla (1) della Proposizione 2.51 segue che esiste $\bar{V} \in \mathfrak{X}(\bar{U})$ estensione di V.

Esercizio 2.53. Sia M una sottovarietà imbedded di $\bar{M}$ con $\bar{M}$ paracompatta. Si verifichi che per ogni $f \in \mathcal{F}(M)$ e per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ esistono $\bar{f} \in \mathcal{F}(\bar{M})$ e $\bar{X} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ tali che $\bar{f}_{|M} = f$ e $\bar{X}_{|M} = X$.

Esempio 2.54. n-superfici regolari.
Consideriamo una funzione differenziabile $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ e sia $M = F^{-1}(c)$. Se per ogni $p \in M$ la matrice jacobiana $J(F)_p$ ha rango m, allora M, detta *n-superficie regolare*, ha una struttura di varietà differenziabile di dimensione n. La costruzione della struttura differenziabile su M (cf. Teorema 1.15 e commento successivo) mostra che M è una sottovarietà regolare di $\mathbb{R}^{n+m}$. Per ogni $p \in M$, un vettore $V_p \in T_pM$ lo possiamo pensare del tipo $V_p = \dot{\gamma}(0)$ dove $\gamma(t)$ è una curva di M con $\gamma(0) = p$ (cf. Proposizione 2.33), quindi $F(\gamma(t)) = c$. Allora

$$F_{*p}(V_p) = F_{*p}(\dot\gamma(0)) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(F(\gamma(t)\big)(0) = 0.$$

D'altronde T_pM e $\ker F_{*p}$ sono entrambi sottospazi di dimensione n dello spazio $T_p\mathbb{R}^{n+m}$, pertanto $T_pM = \ker F_{*p}$.

Il caso delle n-superfici in effetti è solo un caso particolare del seguente teorema, la cui dimostrazione si ottiene esattamente come per il Teorema 1.15 esprimendo la F in coordinate locali.

Teorema 2.55. *Sia $F : \bar M \to M$ un'applicazione differenziabile con $\bar n = \dim \bar M > \dim M = m$. Sia $M_0 = F^{-1}\{q_0\} \subset \bar M$ con $q_0 \in F(\bar M)$. Se per ogni $p \in M_0$, il differenziale F_{*p} è suriettivo, cioè* $\mathrm{rango} F_{*p} = m = \dim M$, *allora M_0 ha una struttura di sottovarietà regolare di $\bar M$ di dimensione $\bar n - m$ e $T_pM_0 = \ker F_{*p}$ per ogni $p \in M_0$. In particolare, se F è una sommersione (cioè F_{*p} è suriettivo per ogni $p \in \bar M$), $M_0 = F^{-1}\{q_0\}$ è una sottovarietà regolare di $\bar M$ di dimensione $\bar n - m$ per ogni $q_0 \in F(\bar M)$*

Esempio 2.56. Sia M un'ipersuperficie regolare di $\mathbb{R}^{n+1}$. Quindi, $M = f^{-1}(c)$ dove $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ e per ogni $p \in M$ il gradiente $(\nabla f)_p \neq 0$. In questo caso:

$$T_pM = (\nabla f)_p^\perp \quad \forall p \in M.$$

Sia $V_p \in T_pM$, $V_p = \dot\gamma(0)$ dove $\gamma(t)$ è una curva di M con $\gamma(0) = p$, quindi $f(\gamma(t)) = c$. Allora, posto $f(t) = f(\gamma(t)) = c$, si ha

$$g_0(V_p, (\nabla f)_p) = g_0(\dot\gamma(0), (\nabla f)_p) = \tfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(0) = 0,$$

dove g_0 denota il prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^{n+1}$. Pertanto $T_pM \subset (\nabla f)_p^\perp$ e quindi $T_pM = (\nabla f)_p^\perp$. In particolare, per la sfera $\mathbb{S}^n$:

$$T_p\mathbb{S}^n \equiv p^\perp.$$

Sia ora M una n-superficie regolare di $\mathbb{R}^{n+m}$: $M = F^{-1}(c)$, dove $c = (c_1, ..., c_m) \in \mathbb{R}^m$ ed $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m, x \mapsto F(x) = (F_1(x), ..., F_m(x))$, è una funzione differenziabile, con matrice jacobiana $J(F)_p$ di rango costante m per ogni $p \in M$. Notiamo che M è l'intersezione delle m ipersuperfici regolari $M_1 = F_1^{-1}(c_1), ..., M_m = F_m^{-1}(c_m)$, le quali sono indipendenti nel senso che i vettori $(\nabla F_1)_p$,...,$(\nabla F_m)_p$ sono linearmente indipendenti (difatti sono le m righe di $J(F)_p$). Inoltre, per ogni $p \in M$, si ha

$$T_pM = \cap_{i=1}^m T_pM_i.$$

Infatti, per ogni $i = 1, ..., m$, abbiamo

$$V_p \in T_pM \Leftrightarrow F_{*p}V_p = 0 \Leftrightarrow J(F)_pV_p = 0 \Leftrightarrow g_0(V_p, (\nabla F_i)_p) = 0.$$

Esercizio 2.57. Si consideri l'applicazione

$$F : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^2,\ (p, v) \mapsto \Big(\frac{\|p\|^2 - 1}{2}, g_0(p, v)\Big),$$

dove g_0 denota il prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^{n+1}$. Si verifichi che:
$F^{-1}\{(0, 0)\} = T\mathbb{S}^n$ è una sottovarietà regolare di $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} = T\mathbb{R}^{n+1}$.

Esempio 2.58. La bottiglia di Klein e il piano proiettivo.
Dall'Esempio 2.54 segue che le superfici regolari di $\mathbb{R}^3$ sono sottovarietà regolari (quindi imbedded) di $\mathbb{R}^3$. D'altronde le superfici regolari compatte di $\mathbb{R}^3$ sono orientabili, pertanto le 2-varietà connesse compatte non orientabili non possono essere imbedded in $\mathbb{R}^3$. Tuttavia, la bottiglia di Klein $\mathcal{K}$ e il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ (che sono superfici non orientabili) possono essere imbedded in $\mathbb{R}^4$. Per la bottiglia di Klein $\mathcal{K}$, consideriamo l'applicazione

$$G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4,\ (\vartheta, \varphi) \mapsto (\cos\varphi\cos\vartheta, \cos\varphi\sin\vartheta, \sin\varphi\cos\tfrac{\vartheta}{2}, \sin\varphi\sin\tfrac{\vartheta}{2}).$$

Poiché $G(\vartheta, \varphi) = G(\vartheta + 2m\pi, 2n\pi - \varphi)$, G induce l'applicazione

$$\psi : \mathcal{K} = ([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])/\mathcal{R} \to \mathbb{R}^4, p = [x] \mapsto \psi(p) = G(x),$$

dove $\mathcal{R}$ è la relazione di equivalenza che identifica $(0, \varphi)$ con $(2\pi, 2\pi - \varphi)$ e $(\vartheta, 0)$ con $(\vartheta, 2\pi)$. Inoltre, indicata con $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ la proiezione naturale di rivestimento e con

$$\pi_1 : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathcal{K} = (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)/\{\pm I\}$$

la proiezione quoziente (considerando $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ come una superficie simmetrica rispetto all'origine), risulta $G = \psi \circ \pi_1 \circ \pi$. Poiché π e π_1 sono diffeomorfismi locali, ψ è differenziabile e il rango di ψ_* coincide con il rango di G_* che è 2. Pertanto ψ è una immersione, e quindi un imbedding essendo $\mathcal{K}$ un compatto. Per il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$, consideriamo l'applicazione

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4,\ (x, y, z) \mapsto (x^2 - y^2, xy, xz, yz) \text{ e } f = F_{|\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^4.$$

Poiché $f(p) = f(-p)$, f induce un'applicazione $\widehat{f} : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}^4,\ [p] \mapsto f(p)$. In coordinate locali f è data da :

$$f \circ \varphi^{-1} : (x, y) \longmapsto (x, y, D) \mapsto (x^2 - y^2, xy, xD, yD)\,,$$

dove $D = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Pertanto, f ha rango 2 e quindi è un'immersione. D'altronde, $\widehat{f} \circ \pi = f$, dove $\pi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{P}^2$ è l'applicazione di rivestimento, per cui anche $\widehat{f}$ è un'immersione. Inoltre si vede facilmente che $\widehat{f}$ è iniettiva, e quindi, per la compattezza di $\mathbb{P}^2$, si conclude che $\widehat{f}$ è un imbedding.

Infine, ricordiamo che Whitney nel 1936 dimostrò che ogni varietà differenziabile M può essere imbedded in $\mathbb{R}^m$ con $m \leq 2\dim M + 1$ (cfr. [14], p. 195).

2.6 Tensori su una varietà differenziabile

Sia M una varietà differenziabile di dimensione n. Un tensore T su M di tipo (s, r) è una applicazione $\mathcal{F}(M)$-multilineare

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times ...\mathfrak{X}^*(M)}_{s-\text{volte}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times ... \times \mathfrak{X}(M)}_{r-\text{volte}} \longrightarrow \mathcal{F}(M).$$

s è detto indice di controvarianza ed r indice di covarianza. Un tensore covariante di ordine r è un tensore di tipo $(0, r)$, un tensore controvariante di ordine s è un tensore di tipo $(s, 0)$. Denotiamo con $\mathfrak{X}^{s,r}(M)$ l'insieme di tutti i tensori di tipo (s, r) su M e con $\mathfrak{X}^r(M) = \mathfrak{X}^{0,r}(M)$ l'insieme di tutti i tensori covarianti di ordine r su M. $\mathfrak{X}^{s,r}(M)$ e $\mathfrak{X}^r(M)$ hanno una struttura di $\mathcal{F}(M)$-modulo definendo in modo naturale $T_1 + T_2$, λT e fT. Si noti che $\mathfrak{X}^1(M) = \mathfrak{X}^*(M) = \Lambda^1(M)$ $\mathcal{F}(M)$-modulo delle 1-forme differenziali su M. Se h, k sono indici con $h \leq s$, $k \leq r$, si può definire l'*operazione di contrazione* degli indici (h, k), $c_k^h : \mathfrak{X}^{s,r}(M) \to \mathfrak{X}^{s-1,r-1}(M)$, nel modo seguente. Sia $\{E_1, ..., E_n\}$ una base locale di $\mathfrak{X}(M)$ e sia $\{\theta^1, ..., \theta^n\}$ la corrispondente base locale duale. Allora

$$\begin{aligned} & c_k^h(T)(\omega^1, ..., \omega^{s-1}, X_1, ..., X_{r-1}) \\ & \quad = \sum_{j=1}^{n} T(\omega^1, ..., \omega^{h-1}, \theta^j, \omega^h, ..., \omega^{s-1}, X_1, ..., X_{k-1}, E_j, X_k ..., X_{r-1}) \end{aligned}$$

per ogni $\omega^1, ..., \omega^{s-1} \in \mathfrak{X}^*(M)$, $X_1, ..., X_{r-1} \in \mathfrak{X}(M)$. Si verifica che la contrazione è ben definita, cioè non dipende dalla particolare base considerata.

Una *r-forma differenziale* α su M è un tensore covariante di ordine r antisimmetrico, ossia:

$$\alpha(X_1, .., X_i, .., X_j, .., X_r) = -\alpha(X_1, .., X_j, .., X_i, .., X_r) \quad \forall i, j = 1, ...r.$$

Denotiamo con $\Lambda^r(M)$ l'insieme di tutte le r-forme differenziali su M, anche $\Lambda^r(M)$ ha una strutturale naturale di $\mathcal{F}(M)$-modulo. Se $(\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(r))$ è una permutazione degli indici $(1, 2, ..., r)$, allora per ogni $\alpha \in \Lambda^r(M)$:

$$\alpha(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, ..., X_{\sigma(r)}) = \epsilon(\sigma)\alpha(X_1, X_2, ..., X_r),$$

dove $\epsilon(\sigma)$ denota il segno della permutazione considerata. Sia $\alpha \in \Lambda^r(M)$, se $X_1, X_2, ..., X_r$ sono linearmente dipendenti, allora

$$\alpha(X_1, X_2, ..., X_r) = 0.$$

In particolare, $\Lambda^r(M) = \{0\}$ se $r > n$. Inoltre, si pone $\Lambda^0(M) = \mathcal{F}(M)$.
Un tensore T covariante di ordine r si dice simmetrico se:

$$T(X_1, .., X_i, .., X_j, .., X_r) = T(X_1, .., X_j, .., X_i, .., X_r).$$

Un'applicazione $\mathcal{F}(M)$-multilineare

$$\tilde{T} : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times ... \times \mathfrak{X}(M)}_{r-\text{volte}} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

si identifica in modo naturale con un tensore $T \in \mathfrak{X}^{1,r}(M)$:

$$T(\theta, X_1, ..., X_r) = \theta(\tilde{T}(X_1, ..., X_r).$$

Il prodotto tensoriale

$$\otimes : \mathfrak{X}^r(M) \times \mathfrak{X}^p(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^{r+p}(M), \quad (T_1, T_2) \longmapsto T_1 \otimes T_2,$$

è definito da

$$(T_1 \otimes T_2)(X_1, ..., X_r, Y_1, ..., Y_p) = T_1(X_1, ..., X_r) T_2(Y_1, ..., Y_p).$$

Tale prodotto è $\mathcal{F}(M)$-bilineare, inoltre è associativo:

$$(T_1 \otimes T_2) \otimes T_3 = T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3).$$

In particolare, il prodotto tensoriale di r 1-forme definisce un tensore covariante di ordine r. Su $\mathfrak{X}^r(M)$ si possono definire gli operatori $\mathcal{S}$ (di simmetrizzazione) ed $\mathcal{A}$ (di antisimmetrizzazione):

$$\mathcal{S}(T)(X_1, ..., X_r) = \frac{1}{r!} \sum_\sigma T(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(r)}),$$
$$\mathcal{A}(T)(X_1, ..., X_r) = \frac{1}{r!} \sum_\sigma \epsilon(\sigma) T(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(r)}),$$

dove in entrambi i casi la sommatoria è estesa a tutte le $r!$ permutazioni σ degli indici $1, ..., r$. $\mathcal{S}$ e $\mathcal{A}$ sono applicazioni $\mathcal{F}(M)$-lineari. Per $r = 2$:

$$\mathcal{S}(T)(X_1, X_2) = \frac{1}{2} \left(T(X_1, X_2) + T(X_2, X_1) \right),$$
$$\mathcal{A}(T)(X_1, X_2) = \frac{1}{2} \left(T(X_1, X_2) - T(X_2, X_1) \right),$$
$$T = \mathcal{S}(T) + \mathcal{A}(T).$$

Se $\alpha \in \Lambda^r(M)$ e $\beta \in \Lambda^s(M)$, il *prodotto esterno* $\alpha \wedge \beta$ è la $(r+s)$-forma

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(r+s)!}{r!s!} \mathcal{A}(\alpha \otimes \beta).$$

In particolare, per $\alpha, \beta \in \Lambda^1(M)$, $\gamma \in \Lambda^2(M)$ e $\omega \in \Lambda^p(M)$:

$$(\alpha \wedge \beta)(X, Y) = \alpha(X)\beta(Y) - \beta(X)\alpha(Y), \tag{2.3}$$
$$(\alpha \wedge \gamma)(X, Y, Z) = \alpha(X)\gamma(Y, Z) + \alpha(Z)\gamma(X, Y) + \alpha(Y)\gamma(Z, X),$$
$$(\alpha \wedge \omega)(X_1, ..., X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} \alpha(X_i) \omega(X_1, ..\hat{X}_i, .., X_{p+1}),$$

per ogni $X, Y, Z, X_1, ..., X_{p+1} \in \mathfrak{X}(M)$.
Il prodotto esterno $\wedge : \Lambda^r(M) \times \Lambda^s(M) \to \Lambda^{r+s}(M)$ è $\mathcal{F}(M)$-bilineare, associativo e verifica

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha.$$

Quindi, se $\alpha \in \Lambda^{2r+1}(M)$ si ha $\alpha \wedge \alpha = 0$. Se $\beta \in \Lambda^{2r}(M)$, in generale si ha $\beta \wedge \beta \neq 0$. Ad esempio, se $\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4 \in \Lambda^1(M)$ sono quattro 1-forme linearmente indipendenti, $\beta = \theta^1 \wedge \theta^2 + \theta^3 \wedge \theta^4$ è una 2-forma e

$$\beta \wedge \beta = 2\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 \wedge \theta^4 \neq 0.$$

Altra proprietà del prodotto esterno: se $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \Lambda^1(M)$ e $X_1, ..., X_k \in \mathfrak{X}(M)$, allora

$$\big(\alpha_1 \wedge ..... \wedge \alpha_k\big)\big(X_1, ..., X_k\big) = \det\big(\alpha_i(X_j)\big). \tag{2.4}$$

Per provare la (2.4) procediamo per induzione su k. Per $k = 1$, la (2.4) è ovviamente vera. Supponiamo che essa valga per $k-1$. Sviluppando il determinante rispetto alla prima riga, si ottiene

$$\begin{aligned}
&\det \begin{pmatrix} \alpha_1(X_1) & \dots & \alpha_1(X_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_k(X_1) & \dots & \alpha_k(X_k) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \alpha_1(X_j) \det \begin{pmatrix} \alpha_2(X_1) & ... \widehat{\alpha_2(X_j)} ... & \alpha_2(X_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_k(X_1) & ... \widehat{\alpha_k(X_j)} ... & \alpha_k(X_k) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \alpha_1(X_j) \big(\alpha_2 \wedge ..... \wedge \alpha_k\big)\big(X_1, ..., \hat{X}_j, ..., X_k\big) \\
&= \big(\alpha_1 \wedge ..... \wedge \alpha_k\big)\big(X_1, ..., X_k\big).
\end{aligned}$$

Se $(x_1, ..., x_n)$ sono coordinate locali definite in U, $\{\partial/\partial x_i\}$ è base locale per $\mathfrak{X}(M)$ e $\{\mathrm{d}x_i\}$ è base locale per $\Lambda^1(M)$. Gli n^r prodotti tensoriali

$$\{\mathrm{d}x_{i_1} \otimes ... \otimes \mathrm{d}x_{i_r}\}_{1 \leq i_1 ... i_r \leq n}$$

costituiscono una base locale per $\mathfrak{X}^r(M)$. Per ogni $T \in \mathfrak{X}^r(M)$ si ha

$$T = \sum_{1 \leq i_1 ... i_r \leq n} T_{i_1 ... i_r} \mathrm{d}x_{i_1} \otimes ... \otimes \mathrm{d}x_{i_r},$$

dove $T_{i_1 ... i_r} = T(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}) \in \mathcal{F}(U)$. Gli $\binom{n}{r}$ prodotti esterni

$$\{\mathrm{d}x_{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_{i_r}\}_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_r \leq n}$$

costituiscono una base locale per $\Lambda^r(M)$. Per ogni $\alpha \in \Lambda^r(M)$ si ha

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_r \leq n} \alpha_{i_1 ... i_r} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_{i_r},$$

dove $\alpha_{i_1 \ldots i_r} = \alpha(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}) \in \mathcal{F}(U)$. La n-forma

$$\omega_0 = \mathrm{d}x_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_n$$

costituisce una base locale per $\Lambda^n(M)$. Sia $\{e_i\}$ una base per $\mathfrak{X}(U)$, e sia $\{\theta^i\}$ la corrispondente base (duale) di $\Lambda^1(U)$. Allora

$$\theta^{i_1} \wedge ... \wedge \theta^{i_r}(e_{j_1}, ..., e_{j_r}) = \begin{cases} +1 & \text{se } (j_1, ..., j_r) \text{ è una permutazione} \\ & \text{pari di}(i_1, ..., i_r), \\ -1 & \text{se } (j_1, ..., j_r) \text{ è una permutazione} \\ & \text{dispari di } (i_1, ..., i_r), \\ 0 & \text{se } (j_1, ..., j_r) \text{ non è una permutazione} \\ & \text{di } (i_1, ..., i_r). \end{cases}$$

Sia ora $\{v_i\}$ un'altra base per $\mathfrak{X}(U)$ con $v_j = \sum_i a_{ij} e_i$, $a_{ij} \in \mathcal{F}(U)$. Indichiamo con $\{\eta^i\}$ la base di $\Lambda^1(U)$ duale di $\{v_i\}$. Poniamo

$$\omega = \theta^1 \wedge ... \wedge \theta^n \quad \text{e} \quad \omega' = \eta^1 \wedge ... \wedge \eta^n.$$

Dalla (2.4) segue che

$$\omega(v_1, ..., v_n) = \det(\theta^i(v_j)) = \det(a_{ij})$$

e

$$\omega'(e_1, ..., e_n) = \det(\eta^i(e_j)) = \det(a^{'}_{ij}),$$

dove (a'_{ij}) è la matrice inversa di (a_{ij}), e quindi

$$\omega = \det(a_{ij})\omega' \quad \text{e} \quad \omega' = \det(a'_{ij})\omega.$$

Se Ω è una arbitraria n-forma, da

$$\Omega(v_1, ..., v_n)\omega' = \Omega = \Omega(e_1, ..., e_n)\omega = \Omega(e_1, ..., e_n)\det(a_{ij})\omega'$$

segue che

$$\Omega(v_1, ..., v_n) = \det(a_{ij})\Omega(e_1, ..., e_n).$$

Facciamo ora alcune considerazioni sui tensori di tipo (s, r), che per semplicità di notazione riferiremo a uno spazio vettoriale reale E di dimensione n. Denotiamo con E^* lo spazio duale e con E^{**} lo spazio biduale. Consideriamo una base $\{e_i\}$ di E, $\{\theta^i\}$ la base di E^* duale di $\{e_i\}$ e $\{\phi_i\}$ la base di E^{**} duale di $\{\theta^i\}$. Sia X la matrice colonna delle componenti di un vettore v di E rispetto alla base $\{e_i\}$. Indichiamo con θ l'elemento di E^* avente come componenti X rispetto alla base $\{\theta^i\}$ e con ϕ l'elemento del biduale E^{**} avente come componenti X rispetto alla base $\{\phi_i\}$. Adesso consideriamo una nuova base $\{e'_i\}$, $e'_j = \sum_i a_{ij} e_i$, e siano $\{\theta'^i\}$ e $\{\phi'_i\}$ le corrispondenti basi di E^* e E^{**}. Indichiamo con X', X'', X''' le componenti di v, θ, ϕ rispetto alle rispettive nuove basi. Allora, posto $A = (a_{ij})$, si ha:

$$X' = A^{-1}X, \quad X'' = A^T X, \quad X''' = A^{-1}X.$$

Quindi E e E^*, pur essendo isomorfi, non sono identificabili nel senso che l'isomorfismo non è canonico ossia dipende dalla base fissata. Invece, E e E^{**} si possono identificare in quanto tra loro sussiste un isomorfismo naturale, e ogni vettore v di E si può pensare come una applicazione lineare $v : E^* \to \mathbb{R}, \vartheta \mapsto \vartheta(v)$. Se $v, w \in E$, si può quindi definire il prodotto tensoriale $v \otimes w$ e il prodotto esterno $v \wedge w$. Inoltre, $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_s}$ rappresenta un tensore di tipo $(s, 0)$ su E. Naturalmente, E e E^* si possono identificare in modo naturale quando E è munito di un prodotto scalare. Si può dimostrare che gli n^{s+r} prodotti tensoriali

$$\left\{e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_s} \otimes \theta^{j_1} \otimes ... \otimes \theta^{j_r}\right\}_{1 \leq i_1 ... i_s \leq n; 1 \leq j_1 ... j_r \leq n;}$$

costituiscono una base per lo spazio $\mathcal{T}^{s,r}(E)$, e per ogni $T \in \mathcal{T}^{s,r}(E)$:

$$T = \sum T^{i_1 ... i_s}_{j_1 ... j_r} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_s} \otimes \theta^{j_1} \otimes ... \otimes \theta^{j_r},$$

dove $T^{i_1 ... i_s}_{j_1 ... j_r} = T(\theta^{i_1}, ..., \theta^{i_s}, e_{j_1}, ..., e_{j_r})$. Analogamente, se M è una varietà differenziabile e $(x_1, ..., x_n)$ un sistema di coordinate locali, gli n^{s+r} prodotti tensoriali

$$\{(\partial/x_{i_1}) \otimes ... \otimes (\partial/x_{i_s}) \otimes \mathrm{d}x_{j_1} \otimes ... \otimes \mathrm{d}x_{j_r}\}_{1 \leq i_1 ... i_s \leq n; 1 \leq j_1 ... j_r \leq n;}$$

costituiscono una base locale per $\mathfrak{X}^{s,r}(M)$. In termini di componenti locali, la contrazione c^k_h si esprime con

$$c^h_k(T)^{i_1 ... i_{s-1}}_{j_1 ... j_{r-1}} = \sum_{j=1}^n T^{i_1 ... i_{h-1}\, j\, i_h ... i_{s-1}}_{j_1 ... i_{k-1}\, j\, i_k ... j_{r-1}}.$$

Esercizio 2.59. Si verifichi che un tensore T di tipo $(1, r)$ su M si può identificare in modo naturale con una applicazione $\mathcal{F}(M)$-multilineare

$$\widetilde{T} : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times ... \times \mathfrak{X}(M)}_{r-\text{volte}} \longrightarrow \mathfrak{X}(M).$$

Osservazione 2.60. Se $S \in \mathfrak{X}^r(M)$, per ogni $p \in M$ si può considerare il tensore S_p covariante di ordine r su T_pM :

$$S_p\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\Big)_p, ..., \Big(\frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\Big)_p\Big) := S\Big(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\Big)(p).$$

Viceversa, se S è un campo di tensori covarianti di ordine r su M, cioè per ogni $p \in M$ è definito un tensore S_p covariante di ordine r su T_pM, e inoltre per ogni $X_1, ..., X_r \in \mathfrak{X}(M)$

$$S(X_1, ..., X_r) : M \to \mathbb{R},\ p \mapsto S(X_1, ..., X_r)(p) := S_p(X_{1p}, ..., X_{rp}),$$

è un'applicazione differenziabile, allora $S \in \mathfrak{X}^r(M)$. Analogo discorso vale per le r-forme e più in generale per i tensori di tipo (s, r).

L'applicazione duale

Sia $F : M \to N$ un'applicazione differenziabile tra le varietà M ed N. Per ogni $p \in M$, l'applicazione duale (del differenziale F_{*p}) è l'applicazione lineare

$$F_p^* : T^*_{F(p)}N \longrightarrow T^*_p M, \quad w \longmapsto F_p^* w,$$

dove $(F_p^* w)(V_p) = w(F_{*p}V_p)$ per ogni $V_p \in T_pM$. Consideriamo (x_i) coordinate locali definite in un intorno di p e (y_j) coordinate locali definite in un intorno di $F(p)$. Se $w = \sum w_j (\mathrm{d}y_j)_{F(p)}$, allora

$$\begin{aligned} F_p^* w &= \sum_j w_j F_p^*(\mathrm{d}y_j)_{F(p)} = \sum_j w_j \sum_i \big(F_p^*(\mathrm{d}y_j)_{F(p)}\big)\big(\frac{\partial}{\partial x_i}\big)_p (\mathrm{d}x_i)_p \\ &= \sum_{i,j} w_j\, (\mathrm{d}y_j)_{F(p)} \big(F_{*p}\big(\frac{\partial}{\partial x_i}\big)_p\big)(\mathrm{d}x_i)_p, \end{aligned}$$

dove

$$F_{*p}\big(\frac{\partial}{\partial x_i}\big)_p = \sum_k \frac{\partial y_k \circ F}{\partial x_i}(p)\big(\frac{\partial}{\partial y_k}\big)_{F(p)}.$$

Quindi,

$$F_p^*(\mathrm{d}y_j)_{F(p)} = \sum_i \frac{\partial y_j \circ F}{\partial x_i}(p)(\mathrm{d}x_i)_p,$$

e

$$F_p^* w = \sum_i \left(\sum_j w_j \frac{\partial y_j \circ F}{\partial x_i}(p) \right) (\mathrm{d}x_i)_p. \tag{2.5}$$

L'applicazione duale

$$F^* : \mathfrak{X}^*(N) \longrightarrow \mathfrak{X}^*(M), \ \omega \longmapsto F^*\omega,$$

è definita da

$$(F^*\omega)_p = F_p^* \omega_{F(p)}, \tag{2.6}$$

e quindi

$$(F^*\omega)(X)(p) = (F^*\omega)_p(X_p) = (F_p^*\omega_{F(p)})(X_p) = \omega_{F(p)}(F_{*p}X_p) \tag{2.7}$$

per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ e per ogni $p \in M$.

In termini di coordinate locali, se $\omega = \sum \omega_j\ dy_j$, da (2.5) e (2.6) segue

$$F^*\omega = \sum_i \left(\sum_j \omega_j \circ F \frac{\partial y_j \circ F}{\partial x_i} \right) \mathrm{d}x_i\ . \tag{2.8}$$

Tale formula implica

$$F^*(f\omega) = (F^*f)F^*\omega, \quad \text{dove} \quad F^*f = f \circ F.$$

Inoltre, dalla (2.8) segue che

$$F^*\mathrm{d}y_j = \sum_i \frac{\partial y_j \circ F}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i = \mathrm{d}(y_j \circ F) \quad \text{e quindi} \quad F^*\mathrm{d}y_j = \mathrm{d}(F^*y_j).$$

Di conseguenza, F^* commuta con il differenziale:

$$F^*\mathrm{d}f = \mathrm{d}(F^*f) \qquad \forall f \in \mathcal{F}(N).$$

Se F è un diffeomorfismo, $F_{*p}X_p = (F_*X)_{F(p)}$ e quindi dalla (2.7), si ottiene

$$(F^*\omega)(X) = \omega(F_*X) \circ F.$$

Se $F : M \to N$ e $G : N \to P$ sono applicazioni differenziabili, si ha

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*, \quad \text{cioè} \quad (G \circ F)^*_p = F^*_p \circ G^*_{F(p)}.$$

In particolare, se $F : M \to N$ è un diffeomorfismo, F^*_p è un isomorfismo e

$$(F^*_p)^{-1} = (F^{-1})^*_{F(p)}.$$

L'applicazione duale si estende ai tensori covarianti:

$$F^* : \mathfrak{X}^r(N) \to \mathfrak{X}^r(M),\, T \mapsto F^*T,$$

dove

$$(F^*T)(X_1, ..., X_r)(p) = T_{F(p)}(F_{*p}X_{1p}, ..., F_{*p}X_{rp})$$

per ogni $X_1, ..., X_r \in \mathfrak{X}(M)$ e per ogni $p \in M$. F^* soddisfa le seguenti proprietà:

$$F^*(T_1 + T_2) = F^*(T_1) + F^*(T_2), \qquad F^*(fT) = F^*(f)F^*(T),$$
$$F^*(T_1 \otimes T_2) = F^*(T_1) \otimes F^*(T_2), \qquad F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*(\alpha) \wedge F^*(\beta).$$

Localmente, se

$$T = \textstyle\sum_{1 \le i_1 \ldots i_r \le m} T_{i_1 \ldots i_r}\, \mathrm{d}y_{i_1} \otimes ... \otimes \mathrm{d}y_{i_r}, \quad \dim N = m,$$

allora

$$F^*T = \sum_{1 \le i_1 \ldots i_r \le n} (T_{i_1 \ldots i_r} \circ F)\, \mathrm{d}(y_{i_1} \circ F) \otimes ... \otimes \mathrm{d}(y_{i_r} \circ F).$$

Se $F : M \to N$ è un diffeomorfismo,

$$(F^*T)\,(X_1, ..., X_r) = T(F_*X_1, ..., F_*X_r) \circ F.$$

Inoltre, quando F è un diffeomorfismo, possiamo definire F^* su $\mathfrak{X}^{s,r}(N)$. In tal caso, se $Y \in \mathfrak{X}(N) \equiv \mathfrak{X}^{**}(N) = X^{1,0}(N)$, poniamo $F^*Y = F_*^{-1}Y$ e quindi F^* si può estendere a $\mathfrak{X}^{s,r}(N)$ ponendo

$$F^*(Y_1 \otimes ... \otimes Y_s \otimes \theta^1 \otimes ... \otimes \theta^r) = F^*(Y_1) \otimes ... \otimes F^*(Y_s) \otimes F^*(\theta^1) \otimes ... \otimes F^*(\theta^r),$$

dove $Y_1, ..., Y_s \in \mathfrak{X}(N)$ e $\theta^1, ..., \theta^r \in \mathfrak{X}^*(N)$.

2.7 Differenziale esterno e derivata di Lie

Il differenziale sulle funzioni $\mathrm{d} : \mathcal{F}(M) = \Lambda^0(M) \longrightarrow \Lambda^1(M)$ si estende a un operatore sulle r-forme $\mathrm{d} : \Lambda^r(M) \longrightarrow \Lambda^{r+1}(M)$, detto *differenziale esterno*, e definito per ogni $\alpha \in \Lambda^r(M)$ dalla formula

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\alpha)(X_1, ..., X_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1} X_i \alpha(X_1, ..., \hat{X}_i, ..., X_{r+1}) \\ &+ \sum_{1\leq i<j\leq r+1}^{r+1} (-1)^{i+j}\alpha([X_i, X_j], X_1, ..., \hat{X}_i, ..., \hat{X}_j, ..., X_{r+1}).\end{aligned}$$

Il differenziale esterno verifica le seguenti proprietà:

$$\mathrm{d}(\alpha + \alpha') = \mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\alpha', \qquad \mathrm{d}(f\alpha) = \mathrm{d}f \wedge \alpha + f\mathrm{d}\alpha,$$

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = (\mathrm{d}\alpha) \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge \mathrm{d}\beta,$$

$$\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0,$$

per ogni $\alpha, \alpha' \in \Lambda^r(M)$ e per ogni $\beta \in \Lambda^s(M)$. Di conseguenza, se $\alpha \in \Lambda^r(M)$ è data localmente da $\alpha = \sum_{1\leq i_1<...<i_r\leq n} \alpha_{i_1...i_r} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_r}$, allora

$$\mathrm{d}\alpha = \sum_{1\leq i_1<...<i_r\leq n} \mathrm{d}\alpha_{i_1...i_r} \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_{i_r}.$$

Inoltre, se $F : M \to N$ è un'applicazione differenziabile tra le varietà M ed N, vale

$$\mathrm{d} \circ F^* = F^* \circ \mathrm{d}',$$

dove d è il differenziale di M e d' è il differenziale di N. Formule esplicite, abbastanza semplici, si hanno per il differenziale di forme di grado basso. Per forme di grado zero si ha $(\mathrm{d}f)(X) = X(f)$. Se $\alpha \in \Lambda^1(M)$ e $\beta \in \Lambda^2(M)$, abbiamo

$$(\mathrm{d}\alpha)(X, Y) = X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X, Y]) \tag{2.9}$$

e

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\beta)(X, Y, Z) = X\beta(Y, Z) - \beta([X, Y], Z) + Y\beta(Z, X) - \beta([Y, Z], X) \\ + Z\beta(X, Y) - \beta([Z, X], Y).\end{aligned}$$

Infine, si noti che il differenziale esterno permette di definire i gruppi di coomologia di de Rham $H^k(M) = \ker \mathrm{d}_k / \mathrm{Im}\, \mathrm{d}_{k-1}$, dove $\mathrm{d}_k : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$ e $\mathrm{Im}\, \mathrm{d}_{k-1} \subset \ker \mathrm{d}_k$. Tali gruppi sono in effetti spazi vettoriali reali che, se M è compatta e orientata, risultano anche di dimensione finita (cfr. [52], p. 69).

Osservazione 2.61. Alcuni autori definiscono il differenziale esterno con il coefficiente $\frac{1}{r+1}$ che moltiplica tutto il secondo membro della definizione del differenziale $\mathrm{d}\alpha$, $\alpha \in \Lambda^r(M)$, data all'inizio di questa sezione. In tal caso, se $\alpha \in \Lambda^1(M)$, la (2.9) diventa

$$(\mathrm{d}\alpha)(X, Y) = \frac{1}{2}\big(X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X, Y])\big). \tag{2.10}$$

Questa formula è usata ad esempio in [11]. Quando si usa il coefficiente $\frac{1}{r+1}$ nella definizione del differenziale esterno di r-forme, per il prodotto esterno di solito si usa la seguente definizione. Se $\alpha \in \Lambda^r(M)$ e $\beta \in \Lambda^s(M)$,

$$\alpha \wedge \beta = \mathcal{A}(\alpha \otimes \beta)$$

dove $\mathcal{A}$ è l'operatore di antisimmetrizzazione. Quindi,

$$\alpha \wedge \beta(X_1, ..., X_{r+s}) = \frac{1}{(r+s)!}\sum\nolimits_\sigma \epsilon(\sigma)\alpha(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(r)})\beta(X_{\sigma(r+1)}, ..., X_{\sigma(r+s)})$$

Con questa definizione, per $\alpha, \beta \in \Lambda^1(M)$ e $\gamma \in \Lambda^2(M)$, si ha

$$(\alpha \wedge \beta)(X, Y) = \frac{1}{2}\big(\alpha(X)\beta(Y) - \beta(X)\alpha(Y)\big), \tag{2.11}$$

e

$$(\alpha \wedge \gamma)(X, Y, Z) = \frac{1}{3}\big(\alpha(X)\gamma(Y, Z) + \alpha(Y)\gamma(Z, X) + \alpha(Z)\gamma(X, Y)\big)$$

Derivata di Lie

Sia M una varietà differenziabile e sia $X \in \mathfrak{X}(M)$. Vogliamo definire la *derivata di Lie*, rispetto a X, di un tensore. Consideriamo $(\phi_t)_{\in I}$ gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali generato da X. ϕ_{t*} definisce un isomorfismo tra gli spazi vettoriali $T_p(M)$ e $T_{\phi_t(p)}(M)$, e quindi un isomorfismo ϕ_t^* tra gli spazi di tensori $\mathcal{T}^{s,r}(T_{\phi_t(p)}(M))$ e $\mathcal{T}^{s,r}(T_p(M))$. Se S è un tensore su M di tipo (s, r), la derivata di Lie di S nella direzione di X è il tensore dello stesso tipo di S definito da

$$(\mathcal{L}_X S)_p := \lim\nolimits_{t\to 0} \tfrac{1}{t}\left(\phi_t^* S_{\phi_t(p)} - S_p\right).$$

L'operatore $\mathcal{L}_X$ verifica le seguenti proprietà. Se f è una funzione differenziabile:

$$\mathcal{L}_X f = (\mathrm{d}f)(X) = X(f).$$

Infatti: considerata la curva $\gamma(t) = \phi(t, p)$, abbiamo $\gamma(0) = p$ e $\dot\gamma(0) = X_p$, quindi

$$\begin{aligned} X_p(f) &= \dot\gamma(0)(f) = \left(\frac{\mathrm{d}}{dt}f(\gamma(t))\right)(0) = \left(\frac{\mathrm{d}}{dt}f(\phi_p(t))\right)(0) \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f(\phi(t,p)) - f(p)\right) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\phi_t^* f - f(p)\right) = (\mathcal{L}_X f)(p). \end{aligned}$$

Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y],$$

e l'identità di Jacobi diventa

$$\mathcal{L}_X[Y, Z] = [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z].$$

La derivata di Lie commuta con le contrazioni. Se S è un tensore di tipo $(0, p)$, oppure di tipo $(1, p)$, si ha

$$(\mathcal{L}_\xi S)(Y_1, .., Y_p) = \mathcal{L}_\xi S(Y_1, .., Y_p) - \textstyle\sum_{i=1}^{p} S(Y_1, .., Y_{i-1}, [\xi, Y_i], Y_{i+1}, .., Y_p),$$

dove $\xi, Y_1, .., Y_p \in \mathfrak{X}(M)$. In particolare, se $g \in \mathfrak{X}^{0,2}(M)$,

$$(\mathcal{L}_\xi g)(X, Y) = \xi g(X, Y) - g([\xi, X], Y) - g(X, [\xi, Y]).$$

Se $\phi \in \mathfrak{X}^{1,1}(M)$ e $\eta \in \Lambda^1(M)$, risulta

$$(\mathcal{L}_\xi \phi)Y = [\xi, \phi(Y)] - \phi([\xi, Y]),$$

$$(\mathcal{L}_\xi \eta)Y = \xi\eta(Y) - \eta([\xi, Y]).$$

Per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, si ha:

$$\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_{[X,Y]}.$$

Se d è il differenziale esterno sulle p-forme differenziali:

$$\mathcal{L}_\xi \circ \mathrm{d} = \mathrm{d} \circ \mathcal{L}_\xi$$

e

$$\mathcal{L}_\xi = i_\xi \circ \mathrm{d} + \mathrm{d} \circ i_\xi \qquad \text{(nota anche come \textit{formula di Cartan})},$$

dove

$$(i_\xi \alpha)(X_1, ..., X_{p-1}) = \alpha(\xi, X_1, ..., X_{p-1}).$$

Inoltre:

$$\mathcal{L}_\xi(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_\xi \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_\xi \beta),$$

$$\mathcal{L}_\xi(T_1 \otimes T_2) = (\mathcal{L}_\xi T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\mathcal{L}_\xi T_2),$$

dove α, β sono forme differenziali e T_1, T_2 tensori.

Osservazione 2.62. La formula di Cartan, nel caso delle 1-forme, si ottiene facilmente come conseguenza della (2.9). Infatti, se $\alpha \in \Lambda^1(M)$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, si ha:

$$\Big(i_X \mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}i_X \alpha\Big)(Y) = (\mathrm{d}\alpha)(X, Y) + \mathrm{d}\big(\alpha(X)\big)(Y)$$

e

$$(\mathrm{d}\alpha)(X, Y) + Y\alpha(X) = X\alpha(Y) - \alpha([X, Y]) = \big(\mathcal{L}_X \alpha\big)(Y).$$

Per maggiori dettagli e altre proprietà sulla derivata di Lie, si può consultare ad esempio [56] vol.I e [14].