

Il Teorema di Lancret sulla sfera \mathbb{S}^3

Il concetto di elica generalizzata fu trasferito, per la prima volta, in ambito riemanniano da Hayden [12]. In tale articolo, un'elica generalizzata viene definita come una curva per la quale un campo vettoriale lungo essa, parallelo secondo Levi-Civita, forma angoli costanti con tutti i vettori del riferimento di Frenet. Tuttavia, questa definizione sembra essere molto restrittiva. Più recentemente Barros [1] propone una definizione di elica generalizzata (o elica di Lancret) su una varietà riemanniana 3-dimensionale semplicemente connessa di curvatura sezionale costante c ($c = 0, +1, -1$) sostituendo la fissata direzione (nella Definizione 2.39) con un campo vettoriale di Killing, inoltre dimostra un Teorema di Lancret per questo tipo di “eliche”. Per $c = 0$ si ritrova il classico Teorema di Lancret per le curve di \mathbb{R}^3 (cf. Teorema 2.42). Per $c \neq 0$, il caso più interessante è quello della sfera unitaria ($c = +1$). In questo capitolo diamo una presentazione autocontenuta e dettagliata, con strumenti “elementari”, del Teorema di Lancret nel caso della sfera unitaria 3-dimensionale.

8.1. Apparato di Frenet per curve di \mathbb{S}^3

Indichiamo con \mathbb{S}^3 la sfera unitaria di \mathbb{R}^4 ,

$$\mathbb{S}^3 = \{p = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}.$$

Molti concetti della teoria delle superfici di \mathbb{R}^3 si possono estendere in modo del tutto analogo al caso di \mathbb{S}^3 che è una ipersuperficie di \mathbb{R}^4 .

Una **curva differenziabile** γ di \mathbb{S}^3 è un'applicazione differenziabile

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4, t \mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)),$$

ossia è una curva differenziabile di \mathbb{R}^4 che assume valori nella sfera \mathbb{S}^3 . Un vettore $V_p \in T_p \mathbb{R}^4$, $p \in \mathbb{S}^3$, si dice **vettore tangente** in p alla sfera \mathbb{S}^3 se esiste $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^3$ curva differenziabile di \mathbb{S}^3 ed esiste $t_0 \in I$ tali che

$$\gamma(t_0) = p \quad \text{e} \quad \dot{\gamma}(t_0) = V_p.$$

Indichiamo con $T_p \mathbb{S}^3$ l'insieme di tutti i vettori tangenti in p alla sfera \mathbb{S}^3 , e con ξ_p il campo vettoriale definito da

$$\xi_p = (x_1(p), x_2(p), x_3(p), x_4(p))_p \equiv p \quad \text{per ogni } p \in \mathbb{S}^3.$$

ξ , che nella teoria delle superfici è stato indicato con N , è un **campo vettoriale unitario normale** alla sfera \mathbb{S}^3 .

Proposizione 8.1. *Risulta*

$$T_p \mathbb{S}^3 = \xi_p^\perp = p^\perp.$$

Quindi, $T_p \mathbb{S}^3$ è un sottospazio vettoriale 3-dimensionale di $T_p \mathbb{R}^4$, che viene detto **spazio tangente** in p alla sfera \mathbb{S}^3 .

DIMOSTRAZIONE. Sia $V_p \in T_p \mathbb{S}^3$, $V_p = (p, v)$, allora esiste una curva differenziabile $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$ di \mathbb{S}^3 tale che $\gamma(t_0) = p$ e $\dot{\gamma}(t_0) = V_p$, quindi $x'_i(t_0) = v^i$ per ogni $i = 1, \dots, 4$. Siccome $\gamma(t) \in \mathbb{S}^3$, abbiamo

$$\sum_{i=1}^4 x_i(t)^2 = 1 \text{ e derivando si ha } \sum_{i=1}^4 x'_i(t)x_i(t) = 0,$$

per cui

$$\sum_{i=1}^4 x'_i(t_0)x_i(t_0) = 0, \quad \text{ossia} \quad \sum_{i=1}^4 v^i x_i(p) = 0.$$

Quindi,

$$V_p \cdot \xi_p = 0 \quad \text{da cui segue che} \quad V_p \in \xi_p^\perp.$$

Viceversa, sia $V_p \in \xi_p^\perp$, $V_p = (p, v)$, $v \neq 0$, e quindi $v \cdot p = 0$. Posto $\lambda = \|v\| > 0$ e $v_1 = v/\lambda$, consideriamo la curva

$$\gamma(t) = (\cos \lambda t)p + (\sin \lambda t)v_1.$$

Si vede facilmente che γ è una curva di \mathbb{S}^3 e soddisfa $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = V_p$. Pertanto, $V_p \in T_p \mathbb{S}^3$. \square

Data una curva differenziabile $\gamma(t)$ di \mathbb{S}^3 , $t \in I$, sia $V(t)$ un campo vettoriale (tangente a \mathbb{S}^3) differenziabile lungo γ , ossia

$$V(t) = (V^1(t), V^2(t), V^3(t), V^4(t))_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)} \mathbb{S}^3$$

con $V^i(t)$ funzioni differenziabili. La **derivata covariante** di $V(t)$ è il campo vettoriale (tangente a \mathbb{S}^3) differenziabile lungo γ definito da

$$\frac{DV}{dt} := (V'(t))^\top = V'(t) - (V'(t) \cdot \xi_{\gamma(t)})\xi_{\gamma(t)} = V'(t) - (V'(t) \cdot \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t),$$

e quindi DV/dt è definito dall'*equazione di Gauss*. Se indichiamo con $\mathfrak{X}(\gamma)$ lo spazio vettoriale di tutti i campi vettoriali (tangenti a \mathbb{S}^3) differenziabili lungo γ , è facile verificare che l'operatore D/dt è un endomorfismo di $\mathfrak{X}(\gamma)$. Inoltre, per ogni $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$ e per ogni $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile, valgono le proprietà

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}(fV) &= f'(t)V + f \frac{DV}{dt}, \\ (V \cdot W)' &= \frac{DV}{dt} \cdot W + V \cdot \frac{DW}{dt}. \end{aligned}$$

Ora, sia $\gamma(s)$ una curva regolare di \mathbb{S}^3 parametrizzata a velocità unitaria. Quindi, il **campo tangente** lungo γ , che indichiamo con $T(s)$, è unitario:

$$T(s) = \dot{\gamma}(s), \quad \|T(s)\| = \|\dot{\gamma}(s)\| = 1.$$

Definizione 8.2. *La funzione*

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad s \mapsto \kappa(s) := \left\| \frac{DT}{ds} \right\| \geq 0,$$

è detta **curvatura** della curva $\gamma(s)$ di \mathbb{S}^3 .

Supponiamo che $\gamma(s)$ sia un arco di curva regolare a velocità unitaria e con curvatura $\kappa(s) > 0$ per ogni $s \in I$. Siccome $T(s) \cdot T(s) = 1$, allora abbiamo $(DT/ds) \cdot T(s) = 0$ e quindi $(DT/ds) \perp T(s)$. Il campo vettoriale

$$N(s) := \frac{1}{\|DT/ds\|} \frac{DT}{ds} \in \mathfrak{X}(\gamma),$$

detto **campo normale principale** lungo γ , è un campo vettoriale unitario ortogonale a $T(s)$. Il **campo binormale** lungo γ è il campo vettoriale unitario $B \in \mathfrak{X}(\gamma)$ ortogonale a $T(s)$ ed $N(s)$ e orientato in modo tale che

$$\det(\xi_{\gamma(s)}, T(s), N(s), B(s)) = +1,$$

ossia orientato in modo tale che $(\xi_{\gamma(s)}, T(s), N(s), B(s))$ sia una base ortonormale positiva di $T_{\gamma(s)}\mathbb{R}^4$. In particolare,

$$(T(s), N(s), B(s))$$

è una base ortonormale lungo γ di $T_{\gamma(s)}\mathbb{S}^3$ che viene detta **riferimento di Frenet** (o *triedro di Frenet*) della curva $\gamma(s)$ di \mathbb{S}^3 . Una curva regolare $\gamma(s)$ di \mathbb{S}^3 parametrizzata a velocità unitaria e con curvatura $\kappa(s) > 0$, la diremo **curva di Frenet** di \mathbb{S}^3 .

Definizione 8.3. *La funzione torsione di una curva di Frenet $\gamma(s)$ di \mathbb{S}^3 , è la funzione*

$$\tau : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad s \mapsto \tau(s) = -\frac{DB}{ds} \cdot N(s) = B(s) \cdot \frac{DN}{ds},$$

L'insieme

$$\{T(s), N(s), B(s), \kappa(s), \tau(s)\}$$

si chiama **apparato di Frenet** della curva $\gamma(s)$ di \mathbb{S}^3 . Le corrispondenti *formule di Frenet* sono date da :

$$\begin{cases} \frac{DT}{ds} = & \kappa(s) N(s), \\ \frac{DN}{ds} = & -\kappa(s) T(s) & +\tau(s) B(s), \\ \frac{DB}{ds} = & -\tau(s) N(s). \end{cases}$$

Queste formule si dimostrano, usando le proprietà della derivata covariante, esattamente come per le curve di Frenet di \mathbb{R}^3 .

Osservazione 8.4. Una curva differenziabile $\gamma(t)$ della sfera \mathbb{S}^3 si dice che è una **curva geodetica** se la sua accelerazione intrinseca $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$. In modo equivalente, $\gamma(t)$ è una curva geodetica se il campo vettoriale $\dot{\gamma}(t)$ è parallelo al campo normale $\xi_{\gamma(t)}$. Quindi, come per la sfera \mathbb{S}^2 , anche per la sfera \mathbb{S}^3 si vede che le sue geodetiche sono tutte e sole le circonferenze di raggio massimo (opportunamente parametrizzate).

8.2. Eliche generalizzate e Teorema di Lancret sulla sfera \mathbb{S}^3

Sia $\gamma(s)$, $s \in I$, una curva di Frenet della sfera \mathbb{S}^3 , e sia $\{T(s), N(s), B(s), \kappa(s), \tau(s)\}$ il corrispondente apparato di Frenet. Consideriamo una **variazione** della curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^3$, cioè un'applicazione differenziabile

$$H : I \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{S}^3, \quad (s, r) \mapsto H(s, r) = \gamma_r(s),$$

con $H(s, 0) = \gamma_0(s) = \gamma(s)$. Il campo vettoriale

$$V(s) = \left(\frac{\partial H(s, r)}{\partial r} \right) (s, 0) = \left(\frac{d}{dr} \gamma_r(s) \right) \Big|_{r=0} = \dot{\gamma}_s(0) \in T_{H(s,0)}\mathbb{S}^3 = T_{\gamma(s)}\mathbb{S}^3$$

è il *campo variazionale* di H . Indichiamo con $v(s, r)$ la velocità scalare, con $\kappa(s, r)$ la curvatura e con $\tau(s, r)$ la torsione della curva $\gamma_r(s)$.

Seguendo [18] (e anche [1]), introduciamo la seguente

Definizione 8.5. Un **campo vettoriale** $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ si dice **di Killing** se, considerata una V -variazione di γ , ovvero una variazione avente $V(s)$ come campo variazionale, risulta

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = \left(\frac{\partial \kappa^2}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = \left(\frac{\partial \tau^2}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = 0.$$

Tale definizione è ben posta, cioè non dipende dalla particolare variazione considerata. Infatti, come provato in [18], cf. anche [1], risulta (omettendo il parametro s):

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = \left(\frac{DV}{ds} \cdot T \right) v = 0, \\ \left(\frac{\partial \kappa^2}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = 2\kappa \left(\frac{D^2V}{ds^2} \cdot N \right) - 4\kappa^2 \left(\frac{DV}{ds} \cdot T \right) + 2\kappa(V \cdot N) = 0, \\ \left(\frac{\partial \tau^2}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = \frac{2\tau}{\kappa} \left(\frac{D^3V}{ds^3} \cdot B \right) - \frac{2\kappa'\tau}{\kappa^2} \left(\left(\frac{D^2V}{ds^2} + V \right) \cdot B \right) \\ \quad + \frac{2\tau(1 + \kappa^2)}{\kappa} \left(\frac{DV}{ds} \cdot B \right) - 2\tau^2 \left(\frac{DV}{ds} \cdot T \right) = 0. \end{array} \right.$$

dove v, κ, τ sono velocità scalare, curvatura e torsione della curva $\gamma(s)$. Pertanto, tenendo anche conto che $\gamma(s)$ è di Frenet e quindi $\kappa(s) > 0$, un campo vettoriale $V(s)$ è di Killing lungo γ se e solo se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

$$(8.1) \quad \frac{DV}{ds} \cdot T = 0,$$

$$(8.2) \quad \left(\frac{D^2V}{ds^2} \cdot N \right) + (V \cdot N) = 0,$$

$$(8.3) \quad \tau \left(\frac{D^3V}{ds^3} \cdot B \right) - \frac{\kappa' \tau}{\kappa} \left(\frac{D^2V}{ds^2} + V \right) \cdot B + \tau(1 + \kappa^2) \left(\frac{DV}{ds} \cdot B \right) = 0.$$

Osservazione 8.6. Si noti che $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ è di Killing se, e solo se, V è la restrizione a γ di un campo vettoriale di Killing definito su \mathbb{S}^3 . Questo risultato è dovuto a J. Langer e D.A. Singer [17] (cf. anche [1], Lemma 1). In particolare, il campo vettoriale

$$(8.4) \quad U = (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$$

si vede facilmente che è tangente a \mathbb{S}^3 , inoltre è di Killing (cf., ad esempio, [21] p.281-282). Quindi, U è di Killing lungo ogni curva γ di \mathbb{S}^3 .

Quella che segue è la definizione di elica generalizzata proposta in [1].

Definizione 8.7. Una curva di Frenet $\gamma(s)$ della sfera \mathbb{S}^3 è detta **elica generalizzata** (o elica di Lancret) di \mathbb{S}^3 se esiste un campo vettoriale differenziabile $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ che è di Killing, di lunghezza costante (che assumiamo uguale a 1) e forma un angolo costante ϑ ($\neq 0, \pi$) con $T(s) = \dot{\gamma}(s)$. Il campo vettoriale $V(s)$ è detto **asse dell'elica generalizzata** γ .

Prima di enunciare il Teorema di Lancret per le suddette curve, proviamo alcuni risultati preliminari che permettono di semplificare la dimostrazione del Teorema principale.

Proposizione 8.8. Sia $\gamma(s)$ un'elica generalizzata della sfera \mathbb{S}^3 e sia V un asse di γ . Allora

$$(8.5) \quad V(s) = \cos \vartheta T(s) + \sin \vartheta B(s),$$

dove ϑ denota l'angolo tra $V(s)$ e $T(s)$. Inoltre, curvatura e torsione sono legate da $\kappa(s) \cos \vartheta - \tau(s) \sin \vartheta = \text{cost.}$, equivalentemente

$$(8.6) \quad \tau(s) = a\kappa(s) + b,$$

dove $a = \cotg \vartheta$ e b sono costanti.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{T(s), N(s), B(s)\}$ il riferimento di Frenet lungo γ . Allora, omettendo di scrivere il parametro s , abbiamo

$$V = (V \cdot T)T + (V \cdot N)N + (V \cdot B)B.$$

Siccome $V \cdot T = \text{cost.} = \cos \vartheta$, derivando e usando la prima formula di Frenet, abbiamo

$$0 = (V \cdot T)' = \frac{DV}{ds} \cdot T + V \cdot \frac{DT}{ds} = \frac{DV}{ds} \cdot T + \kappa(V \cdot N).$$

D'altrone per la (8.1) si ha $\frac{DV}{ds} \cdot T = 0$, per cui $V \cdot N = 0$ e quindi

$$V = \cos \vartheta T + (V \cdot B)B \text{ dove } V \cdot B = \sin \vartheta \text{ in quanto } \|V\| = 1.$$

Ora derivando la (8.5) e usando le formule di Frenet, otteniamo

$$(8.7) \quad \frac{DV}{ds} = (\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta)N.$$

Derivando la (8.7), si ha

$$\frac{D^2V}{ds^2} = (\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta) \frac{DN}{ds} + (\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta)'N$$

e quindi, usando la seconda formula di Frenet, otteniamo

$$(8.8) \quad \frac{D^2V}{ds^2} = -\kappa(\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta)T + \tau(\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta)B \\ + (\kappa' \cos \vartheta - \tau' \sin \vartheta)N.$$

Sostituendo la (8.8) nella (8.2), otteniamo

$$(\kappa' \cos \vartheta - \tau' \sin \vartheta) = 0.$$

Pertanto,

$$\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta = \text{cost.} = a_0,$$

e quindi $\tau = a\kappa + b$ con $a = \cotg \vartheta$ e $b = -a_0/\sin \vartheta$. \square

Proposizione 8.9. *Se $\gamma(s)$ è un'elica generalizzata della sfera \mathbb{S}^3 con torsione $\tau = 0$, allora $\kappa(s)$ è costante e γ è una curva di qualche sfera unitaria \mathbb{S}^2 di \mathbb{S}^3 e in questo caso $V(s) = B(s)$ è asse per γ .*

Viceversa, se $\gamma(s)$ è una curva di Frenet di \mathbb{S}^3 contenuta in qualche sfera unitaria \mathbb{S}^2 di \mathbb{S}^3 , allora $\gamma(s)$ è un'elica generalizzata di \mathbb{S}^3 con torsione $\tau = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Dalla (8.6), se $\tau = 0$ si ottiene subito che la curvatura κ è costante. Siccome $\tau = 0$, dalla terza formula di Frenet si ottiene $DB/ds = 0$, ovvero $B(s)$ è parallelo lungo γ . Quindi, dalla definizione di DB/ds si ha

$$B'(s) = (B'(s) \cdot \xi_{\gamma(s)})\xi_{\gamma(s)}.$$

D'altronde, $B(s) \cdot \xi_{\gamma(s)} = 0$ implica

$$B'(s) \cdot \xi_{\gamma(s)} = -B(s) \cdot \xi'_{\gamma(s)} = -B(s) \cdot \dot{\gamma}(s) = -B(s) \cdot T(s) = 0.$$

Quindi, $B'(s) = 0$ ossia $B(s)$ è parallelo lungo γ in \mathbb{R}^4 per cui $B(s) = (b)_{\gamma(s)}$, $b \in \mathbb{R}^4$. Inoltre, siccome $B(s)$ è tangente a \mathbb{S}^3 , si ha

$$(8.9) \quad b \cdot \gamma(s) = B(s) \cdot \gamma(s) = B(s) \cdot \xi_{\gamma(s)} = 0.$$

Se indichiamo con E^3 lo spazio euclideo 3-dimensionale per l'origine e ortogonale al vettore $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$, ovvero $E^3 : \sum_{i=1}^4 b_i x_i = 0$, allora la (8.9)

ci dice che la curva $\gamma(s)$ è contenuta nella sfera 2-dimensionale $\mathbb{S}^2 = E^3 \cap \mathbb{S}^3$. Inoltre, il campo vettoriale lungo γ definito da $V(s) = B(s) = b_{\gamma(s)}$ soddisfa $\|V\| = 1$ e $\vartheta(V, T) = \pi/2$. Infine, le derivate covariante di V nulle e la torsione $\tau = 0$ implicano che (8.1), (8.2) e (8.3) sono soddisfatte. Quindi, $V(s) = B(s)$ è asse per $\gamma(s)$.

Proviamo ora il viceversa. Sia $\gamma(s)$ una curva di Frenet di \mathbb{S}^3 contenuta in qualche sfera unitaria \mathbb{S}^2 di \mathbb{S}^3 . Allora, $\mathbb{S}^2 = E^3 \cap \mathbb{S}^3$ dove E^3 è un iperpiano di \mathbb{R}^4 per l'origine. Sia b un vettore unitario di \mathbb{R}^4 ortogonale a E^3 . Siccome $\gamma(s) \in E^3$, abbiamo $\gamma(s) \cdot b = 0$ e quindi $T(s) \cdot b = \dot{\gamma}(s) \cdot b = 0$ e $(DT/ds) \cdot b = 0$. Di conseguenza i campi vettoriali $T(s)$ e $N(s)$ sono entrambi ortogonali a b . D'altronde, da $\gamma(s) \cdot b = 0$ segue che $b_{\gamma(s)} \in T_{\gamma(s)}\mathbb{S}^3$, per cui il campo binormale $B(s)$ sarà parallelo a $b_{\gamma(s)}$. Pertanto possiamo assumere, cambiando verso a b se necessario, che $B(s) = b_{\gamma(s)}$. Allora, $B'(s) = 0$ e quindi $(DB/ds) = 0$ da cui segue che la torsione $\tau(s) = 0$. Pertanto, la curva $\gamma(s)$ è un'elica generalizzata di \mathbb{S}^3 con torsione $\tau = 0$. Inoltre, come prima si vede che $V(s) = B(s)$ è asse per $\gamma(s)$. \square

Proposizione 8.10. *Sia $\gamma(s)$ un'elica generalizzata della sfera \mathbb{S}^3 con torsione $\tau \neq 0$. Allora, le seguenti proprietà sono equivalenti.*

- 1) *La torsione $\tau(s)$ è costante.*
- 2) *La curvatura $\kappa(s)$ è costante.*
- 3) *Il rapporto $\tau(s)/\kappa(s)$ è costante*
- 4) *Esiste $V(s)$ asse per γ che è parallelo lungo γ , ovvero*

$$\frac{DV}{ds} = 0.$$

*Inoltre, se $\gamma(s)$ è una curva di Frenet della sfera \mathbb{S}^3 con torsione e curvatura costanti non nulle, allora $\gamma(s)$ è un'elica generalizzata (che viene detta semplicemente **elica** di \mathbb{S}^3).*

DIMOSTRAZIONE. Dalla (8.6) sappiamo che $\tau = a\kappa + b$ con a, b costanti. Di conseguenza, si ottiene che le condizioni 1), 2) e 3) sono equivalenti.

3) \implies 4). Assumiamo τ/κ costante, equivalentemente τ e κ costanti, e consideriamo lungo l'elica γ il campo vettoriale

$$(8.10) \quad V(s) = \cos \vartheta T(s) + \sin \vartheta B(s), \text{ dove } \vartheta \text{ è definito da } \cotg \vartheta = \tau/\kappa.$$

Per come definito V soddisfa le seguenti proprietà: $\|V\| = 1$ e $V \cdot T = \cos \vartheta$. Inoltre, V è parallelo, infatti derivando e usando le formule di Frenet abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{DV}{ds} &= \cos \vartheta (\kappa N) + \sin \vartheta (-\tau N) = (\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta) N \\ &= \sin \vartheta (\kappa \cotg \vartheta - \tau) N = 0. \end{aligned}$$

Pertanto, siccome $DV/ds = 0$, V è di Killing lungo γ , cioè soddisfa (8.1), (8.2) e (8.3) tenendo anche conto che κ è costante e quindi $\kappa' = 0$. Pertanto $V(s)$ è asse per l'elica γ .

4) \implies 3). Sia $V(s)$, con $DV/ds = 0$, asse per γ . Allora dalla (8.3) (una delle condizioni che definisce V di Killing) si ottiene che $\tau \kappa' = 0$. Siccome $\tau \neq 0$, otteniamo κ costante che è equivalente alla condizione τ/κ costante. Infine, per provare l'ultima parte, basta osservare che se una curva di Frenet ha curvatura e torsione costanti non nulle, il campo vettoriale V definito dalla (8.10) è di Killing, e quindi la curva è un'elica generalizzata. \square

Il seguente teorema, che è il Teorema di Lancret sulla sfera \mathbb{S}^3 , classifica le eliche generalizzate di \mathbb{S}^3 . La presente formulazione è un pò più dettagliata rispetto alla formulazione data in [1] (cf. Teorema 3).

Teorema 8.11. *Sia $\gamma(s)$ una curva di Frenet di \mathbb{S}^3 . Allora, $\gamma(s)$ è un'elica generalizzata se e solo se vale una delle seguenti proprietà.*

1) *La torsione $\tau = 0$ e γ è una curva di qualche sfera unitaria \mathbb{S}^2 di \mathbb{S}^3 .*

2) *La torsione τ e la curvatura κ sono costanti non nulle, in tal caso*

$$\tau = a\kappa + b \quad \text{con } a, b \text{ costanti.}$$

3) *La torsione τ e la curvatura κ non sono costanti, in tal caso*

$$\tau(s) = a\kappa(s) \pm 1, \quad \text{dove } a = \cotg \vartheta \text{ è costante.}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\gamma(s)$ un'elica generalizzata di \mathbb{S}^3 e sia $V(s)$ un asse di γ . Dalla Proposizione 8.8 e sua dimostrazione, sappiamo che vale la (8.8) e $(\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta) = a_0 = -b \sin \vartheta$ è costante. Allora, la stessa (8.8) diventa

$$\begin{aligned} \frac{D^2V}{ds^2} &= -\kappa(\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta)T + \tau(\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta)B \\ &= b\kappa \sin \vartheta T - b\tau \sin \vartheta B, \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{D^2V}{ds^2} + V = (b\kappa \sin \vartheta + \cos \vartheta)T + (-b\tau \sin \vartheta + \sin \vartheta)B.$$

Derivando D^2V/ds^2 e usando le formule di Frenet, abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{D^3V}{ds^3} &= b\kappa' \sin \vartheta T + b\kappa^2 \sin \vartheta N - b\tau' \sin \vartheta B + b\tau^2 \sin \vartheta N \\ &= b\kappa' \sin \vartheta T + b \sin \vartheta (\kappa^2 + \tau^2)N - b\tau' \sin \vartheta B. \end{aligned}$$

Sostituendo tutte le informazioni trovate in (8.3), si ottiene

$$-b\tau\tau' \sin \vartheta + \frac{\kappa'}{\kappa} \tau^2 b \sin \vartheta - \frac{\kappa'}{\kappa} \tau \sin \vartheta = 0$$

e quindi

$$(8.11) \quad \tau \sin \vartheta \left(b(\kappa' \tau - \kappa \tau') - \kappa' \right) = 0.$$

Se $\tau = 0$, allora γ è un'elica del tipo di quella considerata nella Proposizione 8.9 e quindi otteniamo la 1). Se $\tau \neq 0$, la (8.11) diventa

$$(8.12) \quad b(\kappa' \tau - \kappa \tau') - \kappa' = 0.$$

Dalla (8.6) abbiamo $\tau = a\kappa + b$ e quindi $\tau' = a\kappa'$ dove $a = \cotg\vartheta$ è costante. Sostituendo quest'ultima nella (8.12), si ottiene

$$\kappa'(b^2 - 1) = 0.$$

Se $\kappa' = 0$, allora κ e $\tau = a\kappa + b$ sono costanti. In tal caso abbiamo la 2).

Se $\kappa' \neq 0$, allora $b = \pm 1$ e quindi $\tau = a\kappa \pm 1$. In tal caso abbiamo la 3).

Viceversa, ogni curva di Frenet γ che soddisfi una delle proprietà elencate in 1), 2), 3) è un'elica generalizzata. Se γ soddisfa la proprietà 1), allora il risultato segue dalla Proposizione 8.9. Se γ soddisfa la proprietà 2), allora il risultato segue dall'ultima parte della Proposizione 8.10. Infine, se γ soddisfa la 3), quindi $\tau = a\kappa \pm 1$, basta considerare $V(s) = \cos\vartheta T(s) + \sin\vartheta B(s)$, dove ϑ è definito da $\cotg\vartheta = a$ e verificare che tale V è asse per la curva. Infatti, $\|V\| = 1$ e $V \cdot T = \cos\vartheta$ (costante). Inoltre, siccome $\kappa \cos\vartheta - \tau \sin\vartheta = -b \sin\vartheta$ è costante, dove $b = \pm 1$, derivando V si ottiene

$$\frac{DV}{ds} = -b \sin\vartheta N, \quad \frac{D^2V}{ds^2} = b\kappa \sin\vartheta T - b\tau \sin\vartheta B$$

e

$$\frac{D^3V}{ds^3} = b\kappa' \sin\vartheta T + b \sin\vartheta (\kappa^2 + \tau^2) N - b\tau' \sin\vartheta B.$$

Quindi, si vede che (8.1), (8.2), (8.3) sono soddisfatte. In particolare, per la (8.3) si ottiene $-\tau \sin\vartheta (\tau' \kappa b - \tau b \kappa' + \kappa') = 0$ in quanto $\tau = a\kappa + b$, $\tau' = a\kappa'$ e $b^2 = 1$. \square

8.3. Modelli di eliche sulla sfera \mathbb{S}^3

Consideriamo la seguente curva di \mathbb{S}^3 :

$$(8.13) \quad \gamma(t) = (\cos\alpha \cos at, \cos\alpha \sin at, \sin\alpha \cos bt, \sin\alpha \sin bt), \quad t \in \mathbb{R},$$

dove $\alpha \in]0, \pi/2[$, $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b \geq 0$ che soddisfano le condizioni

$$(8.14) \quad (a, b) \neq (0, 0) \quad \text{e} \quad a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha = 1.$$

Determiniamo la curvatura di γ come curva di \mathbb{S}^3 . Siccome

$$\dot{\gamma}(t) = (-a \cos\alpha \sin at, a \cos\alpha \cos at, -b \sin\alpha \sin bt, b \sin\alpha \cos bt),$$

abbiamo $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha = 1$ e quindi il versore tangente

$$T(t) = \dot{\gamma}(t).$$

Inoltre,

$$\ddot{\gamma}(t) = (-a^2 \cos\alpha \cos at, -a^2 \cos\alpha \sin at, -b^2 \sin\alpha \cos bt, -b^2 \sin\alpha \sin bt),$$

e

$$\ddot{\gamma}(t) \cdot N_{\gamma(t)} = \ddot{\gamma}(t) \cdot \gamma(t) = \dots = -a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha = -1.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned}\frac{DT}{dt} &= \ddot{\gamma}(t) - (\dot{\gamma}(t) \cdot N_{\gamma(t)})N_{\gamma(t)} \\ &= \ddot{\gamma}(t) - (\dot{\gamma}(t) \cdot \gamma(t))\gamma(t) = \ddot{\gamma}(t) + \gamma(t) \\ &= \left((1-a^2)\cos\alpha \cos at, (1-a^2)\cos\alpha \sin at, (1-b^2)\sin\alpha \cos bt, \right. \\ &\quad \left. (1-b^2)\sin\alpha \sin bt \right)\end{aligned}$$

e quindi la curvatura

$$\kappa^2(t) = \|DT/dt\|^2 = (1-a^2)^2\cos^2\alpha + (1-b^2)^2\sin^2\alpha.$$

Siccome la condizione $a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha = 1$ è equivalente a

$$(a^2-1)\cos^2\alpha = (1-b^2)\sin^2\alpha,$$

otteniamo $\kappa^2 = (a^2-1)(1-b^2)$ e quindi

$$\kappa = \sqrt{(a^2-1)(1-b^2)} \text{ (costante).}$$

Adesso distinguiamo le differenti situazioni che si possono avere in corrispondenza dei valori che possono assumere i parametri a, b .

- Se $\mathbf{a}=\mathbf{1}$, la condizione (8.14) diventa $\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha = 1$ che implica $b = 1$. In tal caso la curvatura è nulla e la curva γ è definita da

$$\gamma(t) = (\cos\alpha \cos t, \cos\alpha \sin t, \sin\alpha \cos t, \sin\alpha \sin t)$$

la quale è contenuta nel piano E^2 (passante per origine) di \mathbb{R}^4 , piano che ha equazioni: $x_1 = (\operatorname{tg}\alpha)x_3$, $x_2 = (\operatorname{tg}\alpha)x_4$. Allora $\gamma = E^2 \cap \mathbb{S}^3$ è una circonferenza di raggio massimo di \mathbb{S}^3 , dunque una **curva geodetica** di \mathbb{S}^3 (cf. Osservazione (8.4)). Stessa conclusione per $a = b$, infatti dalla (8.14) segue $a = b = 1$.

- Nel seguito assumiamo $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, e quindi $\mathbf{a} \neq \mathbf{1}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{1}$, e determiniamo la torsione di γ . Il campo normale è definito da $N = (1/\kappa)(DT/dt)$, e quindi derivando DT/dt abbiamo

$$\begin{aligned}\kappa N'(t) &= (DT/dt)' \\ &= \left(-a(1-a^2)\cos\alpha \sin at, a(1-a^2)\cos\alpha \cos at, \right. \\ &\quad \left. -b(1-b^2)\sin\alpha \sin bt, b(1-b^2)\sin\alpha \cos bt \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa N'(t) \cdot \gamma(t) &= -a(1-a^2)\cos^2\alpha \sin at \cos at + a(1-a^2)\cos^2\alpha \cos at \sin at \\ &\quad - b(1-b^2)\sin^2\alpha \sin bt \cos bt + b(1-b^2)\sin^2\alpha \cos bt \sin bt \\ &= 0.\end{aligned}$$

Dunque,

$$\frac{DN}{dt} = N'(t) - (N'(t) \cdot \gamma(t))\gamma(t) = N'(t).$$

Dalla seconda formula di Frenet $\frac{DN}{dt} = -\kappa T(t) + \tau(t)B(t)$, abbiamo

$$\tau^2 = \left\| \frac{DN}{dt} + \kappa T(t) \right\|^2 = \|N'(t) + \kappa T(t)\|^2$$

e quindi

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \|N'(t)\|^2 + 2\kappa(N'(t) \cdot T(t)) + \kappa^2 \\ &= \|N'(t)\|^2 + 2\kappa\left(\frac{DN}{dt} \cdot T(t)\right) + \kappa^2 \\ &= \|N'(t)\|^2 - 2\kappa\left(N(t) \cdot \frac{DT}{dt}\right) + \kappa^2 \\ &= \|N'(t)\|^2 - 2\kappa^2 + \kappa^2 \\ &= \|N'(t)\|^2 - \kappa^2. \end{aligned}$$

D'altronde, dall'espressione di $\kappa N'(t)$ si ottiene

$$\begin{aligned} \kappa^2 \|N'(t)\|^2 &= a^2(1-a^2)^2 \cos^2 \alpha + b^2(1-b^2)^2 \sin^2 \alpha \\ &= \dots = (a^2 + b^2 - 1)\kappa^2. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$\tau^2 = \|N'(t)\|^2 - \kappa^2 = (a^2 + b^2 - 1) - (a^2 - 1)(1 - b^2)$$

e quindi,

$$\tau^2 = a^2 b^2 \text{ (costante).}$$

Dunque, abbiamo quanto segue.

- (i) Per $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ e $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, (più precisamente $b^2 = 1/\sin^2 \alpha = 1 + \cotg^2 \alpha > 1$),
la torsione $\tau = 0$ e la curvatura $\kappa = \sqrt{b^2 - 1} > 0$.

In tal caso la curva γ definita dalla (8.13) diventa

$$\gamma(t) = (\cos \alpha, 0, \sin \alpha \cos bt, \sin \alpha \sin bt)$$

la quale è una curva piana, e il piano E^2 che la contiene ha equazioni $x_1 = \cos \alpha$, $x_2 = 0$. Quindi, γ è contenuta nella sfera $\mathbb{S}^2 = E^3 \cap \mathbb{S}^3$, dove E^3 è l'iperpiano di equazione $x_2 = 0$. Tale curva è un esempio di elica generalizzata di \mathbb{S}^3 del tipo 1) nel Teorema 8.11. Analogamente per $a \neq 0$ e $b = 0$.

(j) Per $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \mathbf{1}$ e $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}, \mathbf{1}$ la curva $\gamma(t)$ definita dalla (8.13) è un esempio di elica generalizzata con **curvatura e torsione costanti non nulle** date da

$$\kappa = \sqrt{(a^2 - 1)(1 - b^2)} \quad \text{e} \quad \tau^2 = a^2 b^2.$$

Quindi, in questo caso otteniamo modelli di eliche sulla sfera \mathbb{S}^3 , ossia esempi di eliche di \mathbb{S}^3 del tipo 2) nel Teorema 8.11. Inoltre, in questo caso ritroviamo l'esempio enunciato in [11] p.240.

Infine, osserviamo che il campo vettoriale U definito dalla (8.4) è un campo vettoriale di Killing su \mathbb{S}^3 (cf. Osservazione 8.6), per cui

$$U(t) = U_{\gamma(t)} = (-\cos \alpha \operatorname{sen} at, \cos \alpha \cos at, -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} bt, \operatorname{sen} \alpha \cos bt)$$

è di Killing lungo la nostra curva γ . Inoltre, $\|U(t)\|^2 = 1$ e $U(t)$ forma un angolo costante con $\gamma(t)$, più precisamente

$$\cos \vartheta = U(t) \cdot T(t) = a \cos^2 \alpha + b \operatorname{sen}^2 \alpha = \operatorname{cost}.$$

Pertanto, $U(t)$ è un asse per l'elica $\gamma(t)$.

Osservazione 8.12. La costruzione di eliche generalizzate del tipo 3) nel Teorema 8.11 è meno elementare, essa richiede nozioni più delicate. Tuttavia, diamo un'idea di massima del procedimento che si può seguire. Intanto, introduciamo brevemente quelli che vengono detti cilindri e tori di Hopf (cf. l'articolo di U. Pinkall [22] per dettagli). Consideriamo la sfera unitaria \mathbb{S}^3 e la sfera $\mathbb{S}^2(1/2)$ di raggio $1/2$. Sia $\pi : \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2(1/2) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ l'applicazione definita da

$$\pi : (z_1, z_2) \mapsto \left(\frac{1}{2}(|z_1|^2 - |z_2|^2), z_1 \bar{z}_2 \right)$$

nota col nome di **fibrato di Hopf**. Se p_0 è un fissato punto di $\mathbb{S}^2(1/2)$, la fibra $\pi^{-1}(p_0)$ è una circonferenza di \mathbb{S}^3 . Se consideriamo una curva $\beta(t)$ della sfera $\mathbb{S}^2(1/2)$, l'immagine inversa $M_\beta = \pi^{-1}(\beta)$ è una superficie piatta di \mathbb{S}^3 che viene detta *cilindro di Hopf* su β . In particolare, se $\beta(t)$ è una curva chiusa, allora la superficie M_β è isometrica a un toro piatto ed è detta *toro di Hopf*. Quando $\beta(t)$ è una circonferenza con curvatura geodetica κ_g , il toro di Hopf M_β ha curvatura media costante $H = \kappa_g/2$. In particolare, se $\beta(t)$ è una geodetica di $\mathbb{S}^2(1/2)$, il toro di Hopf M_β è un *toro minimale di Clifford*.

Seguendo [1] (cf. Teoremi 4,5, p.1508) e [3], ogni elica generalizzata di \mathbb{S}^3 , e quindi anche quelle del tipo 3) nel Teorema 8.11, si può ottenere come geodetica di un cilindro di Hopf M_β su una opportuna curva β di $\mathbb{S}^2(1/2)$. E' interessante notare l'analogia di questo risultato col fatto che le curve di Lancret di \mathbb{R}^3 si possono caratterizzare come le geodetiche di un cilindro retto su una curva piana (cf. Esempio 5.74).

Esercizio 8.13. Si consideri il modello di elica su \mathbb{S}^3 dato dalla curva $\gamma(t)$ definita dalla (8.13), con $a \neq b, a > 0, b > 0$. Posto $z_1(t) = (\cos \alpha)e^{iat}$ e $z_2(t) = (\operatorname{sen} \alpha)e^{ibt}$, si può scrivere $\gamma(t) = (z_1(t), z_2(t))$, dove $\alpha \in]0, \pi/2[$.

Determinare una curva β_0 della sfera $\mathbb{S}^2(1/2)$ tale che il cilindro di Hopf M_{β_0} contenga l'elica γ . Dire se esiste un valore di α per cui M_{β_0} è un toro di Clifford.

Esercizio 8.14. Per $a \in]0, 1[$, si consideri la curva

$$\begin{aligned}\gamma_a(t) &= \frac{a}{a^2 + 1} \left((1/a) e^{iat}, e^{i(t/a)} \right) \\ &= \frac{a}{a^2 + 1} \left((1/a) \cos at, (1/a) \sin at, \cos(t/a), \sin(t/a) \right), t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Osservato che γ_a è una curva di \mathbb{S}^3 , si determini curvatura e torsione. Inoltre, se γ_a è un'elica di \mathbb{S}^3 , rispondere alle stesse domande dell'esercizio precedente dove il ruolo di α è svolto dal parametro a .

