

CAPITOLO 7

Il Teorema di Gauss-Bonnet

La caratteristica di Eulero-Poincarè (invariante topologico) e la curvatura (invariante metrico) sono due nozioni a priori molto distanti tra loro. Il Teorema di Gauss-Bonnet, il più elegante teorema di geometria differenziale globale, evidenzia un sorprendente legame tra le due nozioni. In questo capitolo diamo una presentazione di tale teorema nel caso delle superfici connesse compatte di \mathbb{R}^3 .

7.1. Il Teorema locale di Gauss-Bonnet

Iniziamo col ricordare il seguente teorema (che otterremo come caso particolare di un teorema più generale).

Teorema 7.1 (elegantissimo di Gauss, 1827). *Sia M una superficie regolare di \mathbb{R}^3 e sia (D, φ) una parametrizzazione locale di M . Se T è un triangolo geodetico (cf. Figura 1), $T \subset \varphi(D)$, di vertici A, B, C , allora*

$$\int_T K(p) d\sigma = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi,$$

dove $K(p)$ è la curvatura gaussiana di M in p , $d\sigma = \sqrt{EG - F^2} du dv$ è l'elemento d'area di M e $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ denotano le misure (in radianti) degli angoli interni al triangolo T .

In particolare, se K è costante su M , $K(p) = K_0$ per ogni $p \in M$, abbiamo

$$K_0 \text{ area}(T) = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi,$$

dove per $K_0 = 1$ otteniamo esattamente la formula trovata da Albert Girard nel 1629 per un triangolo geodetico sulla sfera unitaria.

Se $K_0 = 0$ (M è localmente isometrica a un piano Euclideo), si ha

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi \quad (\text{fatto ben noto della geometria euclidea}).$$

Se $K_0 > 0$ (M è localmente isometrica ad una sfera di raggio $\sqrt{1/K_0}$), si ha

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > \pi.$$

Se $K_0 < 0$ (M è localmente isometrica ad una pseudo-sfera), si ha

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < \pi.$$

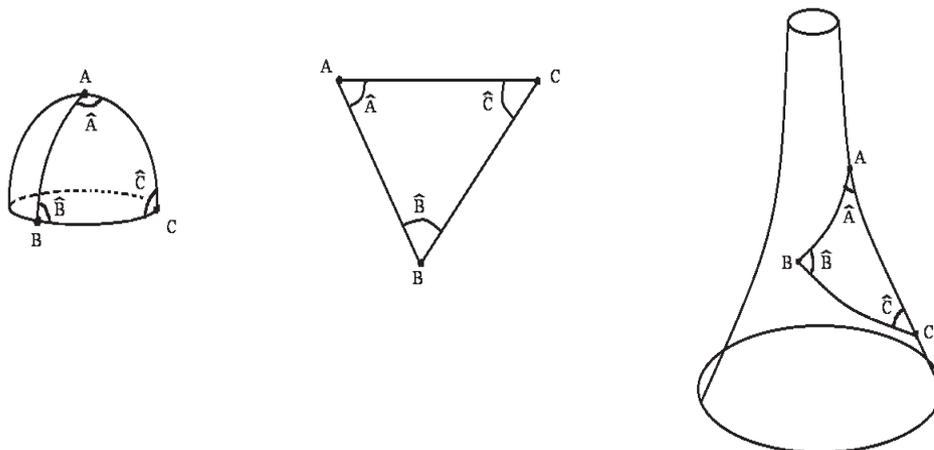


FIGURA 1. Triangoli geodetici

Al tempo di Gauss uno dei problemi fondamentali della geometria era la “questione delle parallele”, iniziata al tempo di Euclide e conclusasi solo con l’avvento delle geometrie non euclidee. Si trattava di decidere se il quinto postulato della geometria euclidea (cf. Osservazione 6.10), fosse indipendente dagli altri postulati della geometria di Euclide. Ben presto si stabilì che il quinto postulato è equivalente al fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a π (radianti). Dunque, la scoperta di Gauss faceva intravedere l’esistenza di geometrie diverse da quella euclidea e quindi di una geometria sulle superfici senza riferimento allo spazio ambiente.

L’estensione del Teorema (elegantissimo) di Gauss, al caso di una regione limitata da una curva chiusa semplice (non geodetica) è dovuta a Bonnet (1848). Prima di enunciare tale estensione diamo due definizioni.

Definizione 7.2. Sia $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ un’applicazione continua dall’intervallo chiuso $[a, b]$ su una superficie regolare M di \mathbb{R}^3 . Diciamo che α è una curva semplice, chiusa e regolare a tratti se:

- (1) per $t_1 \neq t_2, t_1, t_2 \in [a, b]: \alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$.
- (2) $\alpha(a) = \alpha(b)$.
- (3) esiste una suddivisione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = b$ di $[a, b]$ per cui α è differenziabile e regolare in ogni intervallo $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \dots, k$.

I punti $\alpha(t_i)$ si dicono *vertici* di α . Dalla regolarità a tratti segue che, per ogni vertice $\alpha(t_i)$ esiste il limite sinistro: $\lim_{t \rightarrow t_i^-} \dot{\alpha}(t) = \dot{\alpha}_-(t_i) \neq 0$ ed il limite destro: $\lim_{t \rightarrow t_i^+} \dot{\alpha}(t) = \dot{\alpha}_+(t_i) \neq 0$. Supponiamo ora che la superficie M sia orientata e sia N un fissato campo unitario normale alla superficie. Indichiamo con $|\theta_i|$, $0 < |\theta_i| \leq \pi$, l’angolo determinato da $\dot{\alpha}_-(t_i)$ e $\dot{\alpha}_+(t_i)$. Se $|\theta_i| \neq \pi$

(ossia, $\alpha(t_i)$ non è una cuspidale), assegniamo a θ_i il segno del determinante di $(\dot{\alpha}_-(t_i), \dot{\alpha}_+(t_i), N)$ e quindi il segno di θ_i è determinato dall'orientazione di M . L'angolo con segno θ_i , $-\pi < \theta_i < \pi$, si dice *angolo esterno* nel vertice $\alpha(t_i)$. L'angolo $\psi_i = \pi - \theta_i$ si dice *angolo interno* nel vertice $\alpha(t_i)$. Nel caso in cui il vertice $\alpha(t_i)$ sia una cuspidale, cioè $|\theta_i| = \pi$, la scelta del segno di θ_i avviene come segue: dalla regolarità a tratti segue che esiste un numero $\delta > 0$ tale che il determinante di $(\dot{\alpha}(t_i - \varepsilon), \dot{\alpha}(t_i + \varepsilon), N)$ non cambi segno per ogni $0 < \varepsilon < \delta$, quindi assegniamo a θ_i il segno di tale determinante.

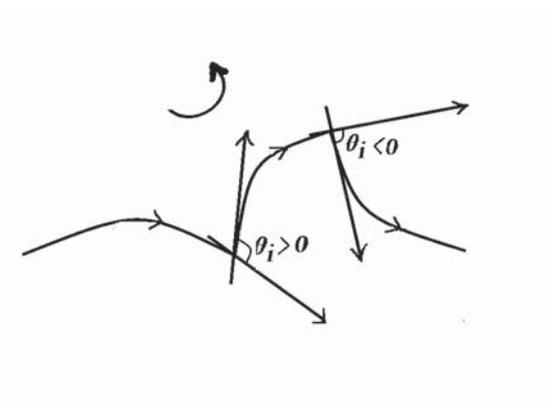


FIGURA 2. Il segno degli angoli esterni.

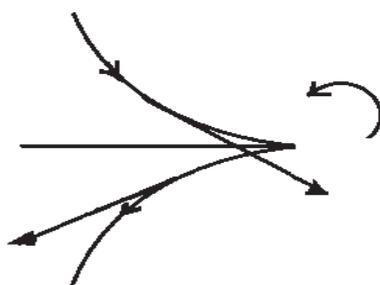


FIGURA 3. Punto cuspidale con $\theta_i = -\pi$.

Sia ora (D, φ) una parametrizzazione di M , compatibile con l'orientazione di M . Possiamo assumere che D sia omeomorfo ad un disco aperto del piano. Sia $\alpha : [a, b] \rightarrow \varphi(D) \subset M$ una curva semplice, chiusa, regolare a tratti, con vertici $\alpha(t_i)$ e angoli esterni θ_i , $i = 0, \dots, k$. Siano $\phi_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni differenziabili che misurino l'angolo positivo formato da φ_u e $\dot{\alpha}(t)$, per ogni $t \in [t_i, t_{i+1}]$ (cf.[9], p. 250). Allora, con una dimostrazione di natura

topologica si ha (cf.[9], p. 267)

$$(7.1) \quad \sum_{i=0}^k (\phi_i(t_{i+1}) - \phi_i(t_i)) + \sum_{i=0}^k \theta_i = \pm 2\pi$$

dove il segno dipende dall'orientazione di α .

Definizione 7.3. *Sia M una superficie orientata. Una regione R di M si dice che è una regione semplice se R è omeomorfa ad un disco e il suo bordo ∂R è il sostegno di una curva parametrizzata $\alpha : I \rightarrow M$ semplice, chiusa e regolare a tratti. Diciamo che α è orientata positivamente se un osservatore, con verso e direzione di N , che percorre tale curva lascia in ogni istante la regione delimitata da essa alla sua sinistra (cf. Figura 4).*

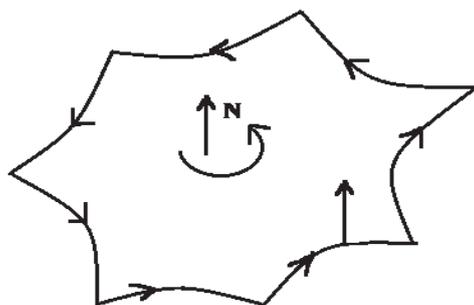


FIGURA 4. Regione semplice con bordo orientato positivamente.

Esempi 7.4. Consideriamo le regioni semplici R_1 (disco di raggio r del piano \mathbb{R}^2) ed R_2 (semisfera di $\mathbb{S}^2(r)$) come in Figura 5.



FIGURA 5. Regioni semplici con bordo regolare.

In entrambi i casi il bordo è una circonferenza $\gamma(s)$ di raggio r , che parametrizziamo con l'ascissa, quindi il bordo è una curva chiusa semplice regolare.

Si noti che questa situazione è differente di quella considerata nel Teorema 7.1 dove il bordo è regolare a tratti e quindi presenta dei vertici. Nel caso di R_1 la curvatura gaussiana $K = 0$ ($M = \mathbb{R}^2$) e la curvatura geodetica di γ è $k_g = 1/r$. Quindi abbiamo

$$\int_0^{2\pi r} k_g(s) ds + \iint_{R_1} K d\sigma = 2\pi.$$

Nel caso di R_2 , la curvatura gaussiana $K = 1/r^2$ ($M = \mathbb{S}^2(r)$) e la curvatura geodetica di γ è $k_g = 0$ (le circonferenze di raggio massimo sono curve geodetiche). Tuttavia, siccome la semisfera di raggio r ha area $2\pi r^2$, abbiamo sempre lo stesso risultato

$$\int_0^{2\pi r} k_g(s) ds + \iint_{R_2} K d\sigma = 2\pi.$$

Di seguito diamo una prima formulazione (locale) del **Teorema di Gauss-Bonnet per regioni semplici con bordo regolare**, che generalizza la situazione degli esempi precedenti.

Teorema 7.5. *Sia M una superficie regolare orientata di \mathbb{R}^3 e sia (D, φ) una sua parametrizzazione locale, con $D \subset \mathbb{R}^2$ omeomorfo ad un disco aperto e φ compatibile con l'orientazione di M . Sia $R \subset \varphi(D)$ una regione semplice ed $\alpha : I \rightarrow \varphi(D)$ una curva regolare, semplice, chiusa ed orientata positivamente, parametrizzata con l'ascissa curvilinea e con $\partial R = \alpha(I)$. Allora, se $L \in \mathbb{R}^+$ è la lunghezza di α , si ha*

$$\int_0^L k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma = 2\pi,$$

dove $k_g(s)$ è la curvatura geodetica di α e K è la curvatura gaussiana.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{X, Y\}$ la base ortonormale ottenuta ortonormalizzando la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ in modo tale che le terne (X, Y, N) e $(\varphi_u, \varphi_v, N)$ siano concordi. Lungo la curva $\alpha : I \rightarrow \varphi(D)$, definiamo la funzione angolo $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che il versore tangente $\dot{\alpha}$ soddisfi:

$$\dot{\alpha}(s) = \cos \phi(s) X(s) + \sin \phi(s) Y(s),$$

quindi $\phi(s)$ è l'angolo positivo formato da φ_u e $\dot{\alpha}(t)$. Allora:

$$N \wedge \dot{\alpha} = N \wedge ((\cos \phi) X + (\sin \phi) Y) = (-\sin \phi) X + (\cos \phi) Y$$

e

$$\ddot{\alpha} = \phi' ((-\sin \phi) X + (\cos \phi) Y) + (\cos \phi) X' + (\sin \phi) Y'.$$

Quindi, sostituendo nella (5.16), per la curvatura geodetica si ha

$$\begin{aligned} k_g &= (N \wedge \dot{\alpha}) \cdot \ddot{\alpha} = \phi' (-(\sin \phi) X + (\cos \phi) Y) \cdot (-(\sin \phi) X + (\cos \phi) Y) \\ &\quad + (-(\sin \phi) X + (\cos \phi) Y) \cdot ((\cos \phi) X' + (\sin \phi) Y'), \end{aligned}$$

da cui

$$(7.2) \quad k_g = \phi' - (X \cdot Y').$$

Siccome α è una curva chiusa, semplice, regolare e orientata positivamente, dalla (7.1) abbiamo $\phi(L) - \phi(0) = 2\pi$. Quindi, integrando la (7.2), si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^L k_g ds &= \int_0^L \phi'(s) ds - \int_0^L (X \cdot Y')(s) ds \\ &= \phi(L) - \phi(0) - \int_0^L (X \cdot Y')(s) ds \\ &= 2\pi - \int_0^L (X \cdot Y')(s) ds, \end{aligned}$$

dove $Y' = u'Y_u + v'Y_v$ in quanto $Y(s) = Y(u(s), v(s))$. Ora, ricordiamo che se $f(u, v)$ e $g(u, v)$ sono funzioni differenziabili in una regione semplice $D \subset \mathbb{R}^2$, il cui bordo è dato dalla curva $\gamma(s) = (u(s), v(s))$ regolare a tratti, allora per il Teorema di Gauss-Green si ha

$$(7.3) \quad \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(f \frac{du}{ds} + g \frac{dv}{ds} \right) ds = \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right) dudv.$$

Applicando tale Teorema, facendo anche uso della Proposizione 5.26, otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_0^L (X \cdot Y')(s) ds &= \int_0^L (X \cdot (u'Y_u + v'Y_v)) ds \\ &= \int_\alpha \left((X \cdot Y_u) \frac{du}{ds} + (X \cdot Y_v) \frac{dv}{ds} \right) ds \\ &= \iint_{\varphi^{-1}(R)} \left((X \cdot Y_v)_u - (X \cdot Y_u)_v \right) dudv \\ &= \iint_{\varphi^{-1}(R)} \left((X_u \cdot Y_v) + (X \cdot Y_{vu}) - (X_v \cdot Y_u) - (X \cdot Y_{uv}) \right) dudv \\ &= \iint_{\varphi^{-1}(R)} \left((X_u \cdot Y_v) - (X_v \cdot Y_u) \right) dudv \\ &= \iint_{\varphi^{-1}(R)} K \sqrt{EG - F^2} dudv \\ &= \iint_R K d\sigma. \end{aligned}$$

Ciò conclude la dimostrazione. \square

Nel piano ogni curva chiusa, semplice e regolare, delimita una regione omeomorfa a un disco, allora dal Teorema 7.5 segue il seguente

Corollario 7.6. *Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regolare, semplice e chiusa del piano, parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Se $L \in \mathbb{R}^+$ è la lunghezza di α , allora*

$$\int_0^L k_g(s) ds = 2\pi.$$

Si noti che il Corollario 7.6 non si applica al caso del cilindro circolare retto (pur avendo curvatura gaussiana nulla) in quanto per il cilindro esistono curve chiuse semplici regolari che non delimitano una regione omeomorfa a un disco come richiesto nel Teorema 7.5. Lo stesso Teorema 7.5 può essere esteso al caso in cui la curva $\alpha : I \rightarrow M$ sia solo regolare a tratti.

Teorema 7.7. (Teorema locale di Gauss-Bonnet)

Sia (D, φ) una parametrizzazione locale di una superficie orientata M , dove $D \subset \mathbb{R}^2$ è omeomorfo ad un disco aperto e φ è compatibile con l'orientazione di M . Siano $R \subset \varphi(D)$ una regione semplice di M ed $\alpha : I \rightarrow M$ una curva regolare a tratti tale che $\partial R = \alpha(I)$. Supponiamo che α sia orientata positivamente e parametrizzata mediante l'ascissa curvilinea, inoltre siano $\alpha(s_1), \dots, \alpha(s_k), \theta_1, \dots, \theta_k$ rispettivamente i vertici e gli angoli esterni nei vertici di α . Allora:

$$\sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=1}^k \theta_i = 2\pi,$$

equivalentemente

$$(7.4) \quad \sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma - \sum_{i=1}^k \psi_i = -(k-2)\pi,$$

dove $k_g(s)$ è la curvatura geodetica degli archi regolari di α , e $\psi_i = \pi - \theta_i$ ($i = 1, \dots, k$) sono gli angoli interni.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione si ottiene ripercorrendo quella del Teorema 7.5. Sia $\{X, Y\}$ la solita base ortonormale ottenuta applicando il metodo di Gram-Schmidt alla base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$. Sia \mathcal{J} il sottoinsieme finito di I i cui elementi corrispondono ai vertici di $\alpha(I)$. Lungo ogni arco regolare di α consideriamo la funzione angolo, quindi abbiamo la funzione $\phi : I \setminus \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che il versore tangente $\dot{\alpha}$ soddisfi:

$$\dot{\alpha}(s) = \cos \phi(s) X(s) + \sin \phi(s) Y(s).$$

In questo caso la (7.2) vale per ogni arco regolare di α . Integrando lungo tutti gli archi e sommando, si ottiene

$$\sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} k_g(s) ds = \sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} \phi' ds - \sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} (X \cdot Y') ds.$$

Allora, applicando la (7.3) e la Proposizione 5.26, si ha

$$\sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} (X \cdot Y') ds = \iint_R K d\sigma.$$

Infine, siccome α è orientata positivamente, applicando la (7.1) si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} \phi' ds &= \sum_{i=1}^k (\phi_i(b_i) - \phi_i(a_i)) \\ &= 2\pi - \sum_{i=0}^k \theta_i \\ &= 2\pi - \sum_{i=1}^k (\pi - \psi_i) \\ &= \sum_{i=1}^k \psi_i - (k-2)\pi, \end{aligned}$$

dove $\psi_i = \pi - \theta_i$ ($i = 1, \dots, k$) sono gli angoli *interni* nei vertici di α . Ciò conclude la dimostrazione. \square

Osservazione 7.8. Una immediata conseguenza della formula (7.4) è il Teorema (elegantissimo) di Gauss. Infatti, considerando un triangolo geodetico, $k = 3$ e il termine con la curvatura geodetica è nullo.

7.2. Il Teorema globale di Gauss-Bonnet

Definizione 7.9. Sia M una superficie regolare. Una regione $R \subset M$ si dice regione regolare se R è un compatto e la sua frontiera ∂R è unione finita di curve chiuse e regolari a tratti che non si intersecano fra loro.

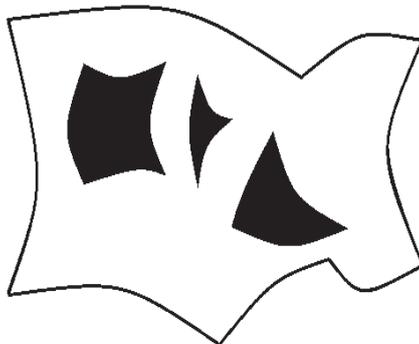


FIGURA 6. Regione regolare.

Una regione semplice che ha tre soli vertici con angoli esterni $\theta_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, si dice *triangolo*.

Definizione 7.10. Una triangolazione di una regione regolare $R \subset M$ è una famiglia finita \mathfrak{T} di triangoli T_i , $i = 1, \dots, n$, tali che:

- (1) $\bigcup_{i=1}^n T_i = R$.
- (2) se $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, allora $T_i \cap T_j$ o è uno spigolo comune a T_i e T_j oppure è un vertice comune a T_i e T_j .

Ricordiamo ora dei risultati di natura topologica, necessari per lo studio del Teorema di Gauss-Bonnet.

Proprietà 1:

Ogni regione regolare R di una superficie regolare ammette una triangolazione.

Definizione 7.11. Assegnata una triangolazione \mathfrak{T} di una regione regolare R di una superficie regolare M , indichiamo con F il numero di triangoli, con S il numero degli spigoli e con V il numero dei vertici di tale triangolazione. Il numero:

$$\chi(R) = F - S + V,$$

che non dipende dalla particolare triangolazione considerata, si dice *caratteristica di Eulero-Poincarè di R* . La stessa definizione di caratteristica di Eulero-Poincarè vale anche, più in generale, per ogni superficie triangolabile di \mathbb{R}^3 .

Si noti che la caratteristica di Eulero-Poincarè di uno spazio topologico triangolabile è un invariante topologico. In particolare, una regione semplice R è omeomorfa a un disco e quindi a un triangolo, pertanto la sua caratteristica di Eulero-Poincarè è $\chi(R) = 1 - 3 + 3 = 1$.

Proprietà 2:

Siano M una superficie regolare orientata e $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ una famiglia di parametrizzazioni compatibili con l'orientazione della stessa superficie. Sia R una regione regolare di M . Allora, esiste una triangolazione \mathfrak{T} di R tale che ogni triangolo $T \in \mathfrak{T}$ è contenuto in un intorno coordinato della famiglia di parametrizzazioni assegnata. Inoltre, se il bordo di un triangolo $T \in \mathfrak{T}$ è orientato positivamente, i triangoli adiacenti ad esso determinano un'orientazione opposta sugli spigoli in comune.

Una prima formulazione del Teorema globale di Gauss-Bonnet è la seguente.

Teorema 7.12. (Teorema di Gauss-Bonnet per regioni regolari)
Sia R una regione regolare di una superficie regolare orientata M con bordo ∂R orientato positivamente. Siano $\{\alpha_i(s)\}_{i=1, \dots, n}$ le curve, parametrizzate con

l'ascissa curvilinea, che costituiscono il bordo ∂R , e siano $\{\theta_j\}_{j=1,\dots,p}$ tutti gli angoli esterni delle curve $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Allora,

$$(7.5) \quad \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{j=1}^p \theta_j = 2\pi \chi(R).$$

DIMOSTRAZIONE. Per la Proprietà 2 possiamo considerare una triangolazione \mathfrak{T} della regione R tale che ogni triangolo T_j sia contenuto in un intorno coordinato di una famiglia di parametrizzazioni, compatibile con l'orientazione di M . Orientiamo positivamente il bordo di ogni triangolo di \mathfrak{T} , questa orientazione è compatibile con quella del bordo, inoltre induce orientazioni opposte sui lati che sono in comune fra triangoli adiacenti (cf. Figura 7).

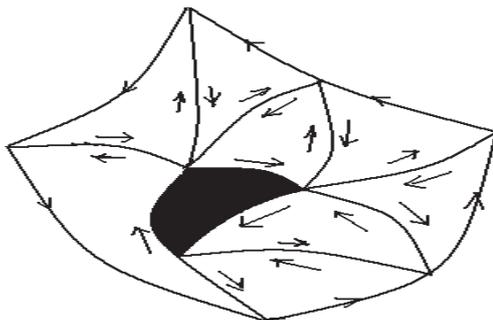


FIGURA 7. Una triangolazione.

Applicando il Teorema 7.7 (Teorema locale di Gauss-Bonnet) al generico triangolo T_j della triangolazione \mathfrak{T} , si ha

$$(7.6) \quad \int_{\partial T_j} k_g(s) ds + \iint_{T_j} K d\sigma + \sum_{k=1}^3 \theta_{j_k} = 2\pi,$$

dove $\theta_{j_1}, \theta_{j_2}, \theta_{j_3}$ sono gli angoli esterni del triangolo T_j . Indichiamo con F il numero di triangoli T_j della triangolazione \mathfrak{T} . Se (u_j, v_j) sono i parametri della parametrizzazione che contiene T_j , dalla definizione di integrale (cf.(3.22)) si ha

$$\iint_R K d\sigma = \sum_{j=1}^F \iint_{T_j} K(u_j, v_j) \sqrt{E_j G_j - F_j^2} du_j dv_j.$$

Quindi, il secondo membro non dipende dalla triangolazione \mathfrak{T} di R o dalla famiglia di parametrizzazioni scelta. D'altronde, sommando le F formule (7.6), tenendo anche conto del fatto che sui lati interni le somme degli integrali

della curvatura geodetica sono nulle (triangoli adiacenti inducono orientazioni opposte sul lato in comune), si ottiene

$$(7.7) \quad \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} = 2\pi F.$$

Se indichiamo gli angoli interni del triangolo T_j con

$$\psi_{jk} = \pi - \theta_{jk},$$

si ottiene

$$(7.8) \quad \sum_{j,k} \theta_{jk} = 3\pi F - \sum_{j,k} \psi_{jk}.$$

Detti E e V rispettivamente il numero complessivo dei lati e dei vertici della triangolazione \mathfrak{T} , introduciamo la seguente notazione:

E_e = numero dei lati della triangolazione che si trovano sul bordo ∂R ,

E_i = numero dei lati interni della triangolazione,

V_e = numero dei vertici della triangolazione che si trovano sul bordo ∂R ,

V_i = numero dei vertici interni della triangolazione.

Siccome il bordo ∂R è costituito da poligoni (curvilinei), si ha $E_e = V_e$. Inoltre, ogni triangolo ha tre lati, ogni lato interno è comune a due triangoli, e ogni lato sul bordo è lato di un solo triangolo, per cui vale la seguente formula:

$$3F = 2E_i + E_e.$$

Quindi, da (7.8), si ha:

$$(7.9) \quad \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} = 2\pi E_i + \pi E_e - \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \psi_{jk}.$$

Notiamo che i vertici che si trovano sul bordo possono anche essere vertici dei poligoni curvilinei che costituiscono ∂R , allora poniamo

$$V_e = V_{ec} + V_{et},$$

dove V_{ec} è il numero di vertici dei poligoni curvilinei che costituiscono il bordo e V_{et} è il numero dei rimanenti vertici della triangolazione \mathfrak{T} . Siccome la somma degli angoli interni attorno ad ogni vertice interno è 2π , e la somma degli angoli interni nei vertici che si trovano su ∂R è π diminuito del corrispondente angolo esterno, dalla (7.9) otteniamo

$$\sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} = 2\pi E_i + \pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \sum_{j=1}^p (\pi - \theta_j).$$

Addizionando e sottraendo all'espressione precedente πE_e , e tenendo presente che $E_e = V_e$, $E = E_i + E_e$, $V = V_i + V_e$ e $V_e = V_{ec} + V_{et}$, si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} &= 2\pi E_i + 2\pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_e - \pi V_{et} - \sum_{j=1}^p (\pi - \theta_j) \\ &= 2\pi E - 2\pi V_i - \pi V_e - \pi V_{et} - \pi V_{ec} + \sum_{j=1}^p \theta_j \\ &= 2\pi E - 2\pi V_i - \pi V_e - \pi V_e + \sum_{j=1}^p \theta_j \\ &= 2\pi E - 2\pi V + \sum_{j=1}^p \theta_j. \end{aligned}$$

Mettendo assieme i risultati ottenuti nella (7.7), abbiamo

$$\sum_i \int_{\alpha_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{j=1}^p \theta_j = 2\pi(F - E + V) = 2\pi\chi(R).$$

□

Osservazione 7.13. Il termine a sinistra della formula (7.5) non dipende dalla triangolazione considerata, di conseguenza la caratteristica di Eulero-Poincarè $\chi(R)$ non dipende dalla triangolazione considerata come d'altronde era stato già osservato.

Sia \mathcal{P} un n -poligono geodetico di una superficie regolare orientata M , ossia \mathcal{P} è omeomorfo a un disco il cui bordo $\partial\mathcal{P}$ è costituito da n -archi geodetici. In particolare \mathcal{P} è omeomorfo a poligono triangolare (quindi, $F = 1, S = 3, V = 3$), per cui $\chi(\mathcal{P}) = 1$. Inoltre, gli angoli interni nei vertici di \mathcal{P} sono dati da $\psi_i = \pi - \theta_i$, per cui $\sum_{i=1}^n \theta_i = n\pi - \sum_{i=1}^n \psi_i$. Pertanto, dal Teorema 7.12, si ha

Corollario 7.14. *Sia \mathcal{P} un n -poligono geodetico di una superficie regolare orientata M e siano ψ_i gli angoli interni nei vertici di \mathcal{P} . Allora,*

$$\iint_R K d\sigma + (n - 2)\pi = \sum_{i=1}^n \psi_i.$$

In particolare, come conseguenza del Corollario 7.14, per $n = 3$, si ottiene il Teorema 7.1 (elegantissimo di Gauss).

Una superficie regolare connessa compatta M di \mathbb{R}^3 è orientabile (cf., ad esempio, Samelson [24]). Inoltre, tale superficie si può considerare come una regione regolare priva di bordo. Allora, dal Teorema 7.12 segue il Teorema di Gauss-Bonnet per superfici connesse compatte di \mathbb{R}^3 .

Teorema 7.15 (di Gauss-Bonnet). *Sia M una superficie regolare connessa compatta di \mathbb{R}^3 . Allora,*

$$\iint_M K d\sigma = 2\pi\chi(M),$$

dove $\chi(M)$ denota la caratteristica di Eulero-Poincaré di M . In particolare, la curvatura totale $\int_M K d\sigma$ è un invariante topologico.

Osservazione 7.16. Il Teorema 7.15 (di Gauss-Bonnet) vale nella stessa formulazione anche per varietà riemanniane compatte orientabili di dimensione 2. Tale teorema è stato poi generalizzato da S.S. Chern (Ann. of Math. 45 (2) (1944), 747-752) per varietà riemanniane compatte orientabili di dimensione pari $n \geq 2$. Si noti che per $n > 2$ la formula che si ottiene dipende sempre dalla curvatura ma in una forma notevolmente più complicata (in [21] p. 302-309, si possono trovare le formule per $n = 4$ e $n = 6$).

7.3. Applicazioni del Teorema di Gauss-Bonnet

La sfera \mathbb{S}^2 è una superficie connessa compatta di \mathbb{R}^3 . Una triangolazione (geodetica) di \mathbb{S}^2 è data dalla seguente Figura 8.

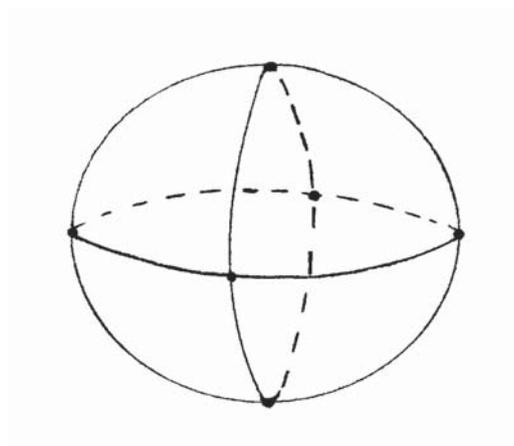


FIGURA 8. Una triangolazione geodetica di \mathbb{S}^2

Tale triangolazione ha $F = 8, S = 12, V = 6$. Quindi, la caratteristica di Eulero-Poincaré della sfera $\chi(\mathbb{S}^2) = F - S + V = 2$.

Il Teorema di Gauss-Bonnet è veramente sorprendente, esso mette in stretta relazione due invarianti a priori molto distanti tra loro: “la caratteristica di Eulero-Poincaré” (invariante topologico) e “la curvatura di Gauss” (invariante metrico). Come conseguenza, la curvatura totale $\iint_M K d\sigma$ non cambia se “deformiamo” la superficie. Ad esempio, per entrambe le superfici in Figura 9 si ha

$$\iint_M K d\sigma = 4\pi.$$

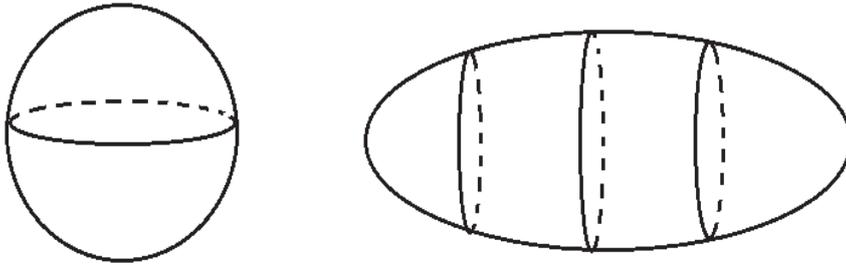


FIGURA 9

Ora ricordiamo il seguente teorema di classificazione.

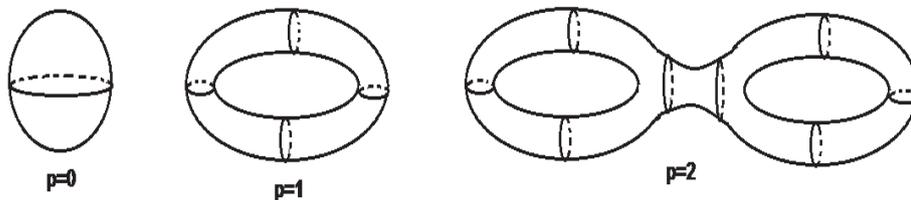
Teorema 7.17. (cf., ad esempio, [15], [19]) *Una superficie astratta connessa compatta (quindi non necessariamente superficie regolare di \mathbb{R}^3), ossia una varietà differenziabile connessa compatta di dimensione 2, è omeomorfa (equivalentemente, diffeomorfa) a una delle seguenti superfici connesse compatte*

$$A) M = \mathbb{S}^2 \# p\mathbb{T}^2, p \in \mathbb{N}, p \geq 0,$$

$$B) M = \mathbb{S}^2 \# q\mathbb{P}^2, q \in \mathbb{N}, q \geq 1,$$

dove \mathbb{T}^2 è la superficie torica, \mathbb{P}^2 è il piano proiettivo e $\#$ denota la somma connessa tra superfici. Gli interi p e q rappresentano il genere della superficie.

Per $p = 0$: $M = \mathbb{S}^2$, per $p = 1$: $M = \mathbb{S}^2 \# \mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, e per $p = 2$: $M = \mathbb{S}^2 \# 2\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ (bi-toro). In generale, una superficie connessa compatta del tipo A) e di genere p è omeomorfa a una sfera con p -manici (detta anche ciambella con p -buchi o p -toro).

FIGURA 10. p -toro, $p = 0, 1, 2$.

Nel caso delle superfici del tipo B), per $q = 1$, $M = \mathbb{S}^2 \# \mathbb{P}^2$ è omeomorfa al piano proiettivo, e per $q = 2$ la superficie $M = \mathbb{S}^2 \# 2\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ è un modello topologico della bottiglia di Klein. Se consideriamo una superficie torica \mathbb{T}^2

simmetrica rispetto all'origine, allora il quoziente $\mathbb{T}^2/\{\pm I\}$ è un altro modello topologico della bottiglia di Klein.

Si noti che il concetto di orientabilità vale anche per le superfici astratte (cf. Osservazione 6.2). Si può provare che le superfici del tipo A) sono **superfici connesse compatte orientabili** di genere $p \geq 0$, e le superfici del tipo B) sono **superfici connesse compatte non orientabili** di genere $q \geq 1$. In particolare, due superfici connesse compatte entrambe orientabili, o entrambe non orientabili, sono omeomorfe se, e solo se, hanno lo stesso genere. Inoltre, per M superficie connessa compatta orientabile di genere p si ha

$$\chi(M) = 2 - 2p \leq 2;$$

per M superficie connessa compatta non orientabile di genere q si ha

$$\chi(M) = 2 - q \leq 1.$$

Quindi, la caratteristica di Eulero-Poincarè $\chi(M)$ determina la configurazione topologica di M : due superfici connesse, compatte M, M' entrambe orientabili, o entrambe non orientabili, sono omeomorfe se, e solo se, $\chi(M) = \chi(M')$.

Siccome come osservato in precedenza una superficie regolare connessa compatta di \mathbb{R}^3 è orientabile [24], dal Teorema 7.17 (di classificazione delle superfici connesse compatte astratte) si ottiene il seguente risultato di natura topologica, che fornisce una classificazione delle superfici connesse compatte di \mathbb{R}^3

Teorema 7.18. *Una superficie regolare connessa compatta di \mathbb{R}^3 è orientabile, quindi omeomorfa a una sfera con p -manici (ossia a un p -toro). e la sua caratteristica di Eulero-Poincarè è data da*

$$\chi(M) = 2 - 2p \leq 2.$$

In particolare la caratteristica di Eulero-Poincarè $\chi(M)$ di una superficie regolare connessa compatta M di \mathbb{R}^3 determina la configurazione topologica di M . Di conseguenza, dal Teorema 7.15 di Gauss-Bonnet la curvatura totale $\iint_M K d\sigma = 2\pi\chi(M)$ determina la configurazione topologica di M .

Più precisamente, dal Teorema 7.15 di Gauss-Bonnet, segue il seguente

Corollario 7.19. *Sia M una superficie regolare connessa compatta di \mathbb{R}^3 . Allora,*

$$\int_M K d\sigma > 0 \iff M \text{ è omeomorfa alla sfera } \mathbb{S}^2;$$

$$\int_M K d\sigma = 0 \iff M \text{ è omeomorfa alla superficie torica } \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1;$$

$$\int_M K d\sigma < 0 \iff M \text{ è omeomorfa a un } p\text{-toro, con } p > 1.$$

In particolare, se una superficie regolare connessa compatta ha curvatura gaussiana $K \geq 0$ e positiva in almeno un punto, allora essa è omeomorfa a una sfera;

Inoltre, se M ha curvatura gaussiana costante K_0 , il genere p della superficie è dato da :

$$p = 1 - \frac{K_0 \text{vol}(M)}{4\pi}.$$

Dal Teorema 4.61 e dal Teorema di Gauss-Bonnet si ottiene il seguente risultato

Corollario 7.20. (Teorema di Liebmann) *La sfera è la sola superficie regolare connessa compatta di \mathbb{R}^3 con curvatura gaussiana costante.*

DIMOSTRAZIONE. Sia M una superficie connessa compatta regolare di \mathbb{R}^3 con curvatura gaussiana costante K_0 . Il Teorema 4.61 implica che la costante $K_0 > 0$. Allora, dal Teorema di Gauss-Bonnet segue che $2\pi\chi(M) > 0$, ossia $4\pi(1-p) > 0$ e quindi $p = 0$. Pertanto, M è una sfera. \square

I risultati successivi mostrano come il Teorema (locale) di Gauss-Bonnet possa essere applicato al fine di trarre delle conclusioni sulle geodetiche di una superficie.

Corollario 7.21. *Sia M una superficie (connessa) regolare orientabile di \mathbb{R}^3 con curvatura gaussiana $K \leq 0$. Allora, due geodetiche γ_1 e γ_2 uscenti da uno stesso punto $p \in M$ non possono incontrarsi in un altro punto $q \in M$, diverso da p , in modo da costituire il bordo di una regione semplice R di M .*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che esistano due geodetiche γ_1 e γ_2 che si incontrino in due punti distinti in modo da formare una regione semplice R (cf. Figura 11).

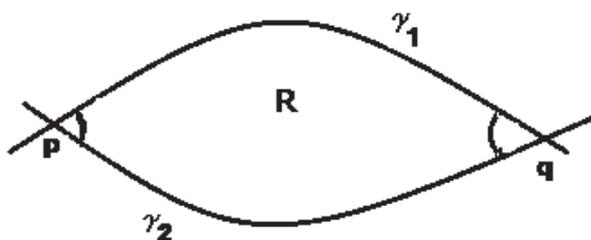


FIGURA 11

Applicando la (7.4) del Teorema 7.7, e tenendo conto che R è una regione poligonale di due lati con $\sum_{i=1}^2 \int_{a_i}^{b_i} k_g ds = 0$ (in quanto γ_1, γ_2 sono geodetiche)

si avrebbe:

$$\iint_R K d\sigma = \psi_1 + \psi_2,$$

dove ψ_1, ψ_2 sono gli angoli interni di R . Siccome γ_1 e γ_2 non possono essere tangenti fra loro (per l'unicità della geodetica uscente da un punto con un fissato vettore tangente), si ha $\psi_i > 0, i = 1, 2$. D'altronde $K \leq 0$, pertanto si avrebbe una contraddizione. \square

Con riferimento alla dimostrazione del Corollario 7.21, quando $\psi_1 = \psi_2 = \pi$ (ossia $\theta_1 = \theta_2 = 0$), l'unione di γ_1 e γ_2 è una geodetica chiusa e semplice. Quindi: *su una superficie regolare orientabile la cui curvatura gaussiana è negativa o nulla non esiste alcuna geodetica chiusa e semplice che sia bordo di una regione semplice.*

Infine, ricordiamo che una superficie si dice semplicemente connessa se è connessa per archi e ogni curva chiusa semplice continua racchiude una regione omeomorfa a un disco. Combinando il Teorema 5.93 (di Hopf-Rinow) e il Corollario 7.21, si ottiene il seguente risultato.

Teorema 7.22. *Su una superficie regolare M geodeticamente completa, orientabile, semplicemente connessa e con curvatura gaussiana non positiva, comunque si considerano due punti distinti esiste un'unica geodetica che li congiunge.*

DIMOSTRAZIONE. Siccome M è geodeticamente completa, dal Teorema 5.93 (di Hopf-Rinow) segue che comunque prendiamo due punti $p, q \in M$ esiste una geodetica $\gamma(p, q)$ che li congiunge. D'altronde, la curvatura gaussiana $K \leq 0$ ed M è semplicemente connessa, per cui dal Corollario 7.21 segue che la geodetica $\gamma(p, q)$ è unica. \square

