

Operatore forma e curvatures di una superficie

Nello studio di una curva $\gamma(s)$ di \mathbb{R}^3 , si è visto che la lunghezza di $T'(s) = \ddot{\gamma}(s)$, ovvero la misura della variazione del versore tangente, determina la curvatura di γ . Nel caso di una superficie, la situazione è ovviamente più articolata, basti pensare che una superficie può curvarsi lungo più direzioni (quelle che determinano il piano tangente) e in modo diverso. L'operatore forma, che è definito come la variazione del campo normale N lungo le diverse direzioni del piano tangente, e quindi studia la variazione dello stesso piano tangente, è lo strumento tecnico che ci permette di definire le curvatures per una superficie. In effetti, se pensiamo N come una derivata prima (infatti è definito da $\varphi_u \wedge \varphi_v / \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$), l'operatore forma può essere visto come una derivata seconda, e quindi uno si aspetta che in qualche modo possa definire le curvatures per una superficie.

4.1. L'operatore forma e la seconda forma fondamentale

La prima forma fondamentale permette di studiare la geometria intrinseca della superficie, con la seconda forma fondamentale (equivalentemente, con l'operatore forma, detto anche operatore di Weingarten) si studia la geometria estrinseca della superficie. Più precisamente, l'operatore forma svolge un ruolo fondamentale per determinare la "forma" di una superficie M nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 .

Sia M una superficie regolare e sia N un campo unitario differenziabile normale a M . In generale, se M non è orientabile, N è definito solo localmente. Supponiamo $N = (f_1, f_2, f_3)$, $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, dove $U = \varphi(D)$ con (D, φ) carta locale di M . Se $\gamma : I \rightarrow M$, $t \mapsto \gamma(t)$, è una curva differenziabile di M con sostegno in U , si può considerare il campo N lungo $\gamma(t)$, cioè

$$N(t) := N(\gamma(t)) = (f_1(\gamma(t)), f_2(\gamma(t)), f_3(\gamma(t))) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)),$$

e il suo derivato

$$N'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t)).$$

Derivando $N(t) \cdot N(t) = \text{cost} = 1$, si ottiene

$$N'(t) \cdot N(t) = 0 \text{ per ogni } t, \text{ e quindi } N'(t) \in T_{\gamma(t)}M.$$

In particolare, in $p = \gamma(t_0)$ risulta

$$N'(t_0) \cdot N_p = 0, \text{ cioè } N'(t_0) \in T_pM.$$

Possiamo quindi dare la seguente definizione.

Definizione 4.1. *L'operatore forma (detto anche operatore di Weingarten) di M in un fissato punto p è l'applicazione*

$$S_p : T_p M \rightarrow T_p M, \quad v_p \mapsto S_p(v_p) := -N'(\gamma(t_0))$$

dove N è definito in un intorno del punto p e $\gamma(t) : I \rightarrow M$ è una curva differenziabile di M con $\gamma(t_0) = p$ e $\dot{\gamma}(t_0) = v_p$.

Osserviamo che la definizione di S_p dipende dalla scelta di N (che è definito localmente), quindi cambiando N con $-N$ l'operatore S_p cambia di segno.

Teorema 4.2. *L'operatore forma S_p è un endomorfismo simmetrico del piano tangente $T_p M$ che, rispetto a una fissata parametrizzazione locale (D, φ) di M con $p \in \varphi(D)$, soddisfa*

$$S_p(\varphi_u^0) = -N_u^0 \quad e \quad S_p(\varphi_v^0) = -N_v^0.$$

In particolare, $S_p(v_p)$ non dipende dalla scelta della curva γ , ma solo da v_p (e da N).

DIMOSTRAZIONE. Sia (D, φ) una parametrizzazione locale di M con $p \in \varphi(D)$, $p = \varphi(u_0, v_0)$. Per ipotesi N è definito in un intorno di p . Supponiamo $N = (f_1, f_2, f_3)$, dove (f_1, f_2, f_3) sono funzioni differenziabili definite su $\varphi(D)$. Per ogni $q = \varphi(u, v) \in \varphi(D)$, risulta

$$N(q) = N(\varphi(u, v)) = \left(f_1(\varphi(u, v)), f_2(\varphi(u, v)), f_3(\varphi(u, v)) \right).$$

Possiamo quindi scrivere $N(q) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$. Siano N_u, N_v i campi vettoriali derivati di N definiti da

$$N_u = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}, \frac{\partial f_2}{\partial u}, \frac{\partial f_3}{\partial u} \right)_q \quad e \quad N_v = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}, \frac{\partial f_2}{\partial v}, \frac{\partial f_3}{\partial v} \right)_q.$$

Osserviamo che N_u e N_v sono differenziabili in quanto le f_i lo sono. Inoltre N_u e N_v sono tangenti a M in quanto

$$N_u = N'(\gamma_1(t)) \quad e \quad N_v = N'(\gamma_2(t))$$

dove $\gamma_1(t) = \gamma_1(u) = \varphi(u, v)$ è la curva delle u e $\gamma_2(t) = \gamma_2(v) = \varphi(u, v)$ è la curva delle v .

Ora, dato un vettore v_p di $T_p M$, $v_p = a_1 \varphi_u^0 + a_2 \varphi_v^0$, sia $\gamma(t) : I \rightarrow M$ una curva differenziabile di M con $\gamma(t_0) = p$ e $\dot{\gamma}(t_0) = v_p$. Consideriamo la curva $\tilde{\gamma}(t) = \varphi^{-1}(\gamma(t)) = (u(t), v(t))$ (curva di $D \subseteq \mathbb{R}^2$ che corrisponde a γ) e quindi $\gamma(t) = \varphi(\tilde{\gamma}(t)) = \varphi(u(t), v(t))$. Ricordiamo che

$$\dot{\gamma}(t_0) = u'(t_0) \varphi_u^0 + v'(t_0) \varphi_v^0 = a_1 \varphi_u^0 + a_2 \varphi_v^0.$$

Il campo normale N lungo $\gamma(t)$ è dato da $N(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$, ovvero

$$N(t) = N(\gamma(t)) = (f_1(\varphi(u(t), v(t))), f_2(\varphi(u(t), v(t))), f_3(\varphi(u(t), v(t)))).$$

Pertanto,

$$N'(t) = \left(\frac{df_1}{dt}, \frac{df_2}{dt}, \frac{df_3}{dt} \right)_{\gamma(t)} = \sum_{i=1}^3 \frac{df_i}{dt} E_i(t),$$

dove

$$\frac{df_i}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial f_i}{\partial v} \frac{dv}{dt} = u'(t) \frac{\partial f_i}{\partial u} + v'(t) \frac{\partial f_i}{\partial v},$$

da cui segue

$$N'(t) = u'(t) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial u} E_i(t) + v'(t) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial v} E_i(t),$$

e quindi

$$N'(t) = u'(t) N_u(t) + v'(t) N_v(t).$$

Per $t = t_0$ risulta

$$N'(t_0) = N'(\gamma(t_0)) = u'(t_0) N_u^0 + v'(t_0) N_v^0 = a_1 N_u^0 + a_2 N_v^0,$$

ossia

$$(4.1) \quad S_p(v_p) = -N'(t_0) = -a_1 N_u^0 - a_2 N_v^0.$$

Dalla (4.1) segue che $S_p(v_p)$ dipende solo da v_p (e da N) e non dalla curva γ . Inoltre, sempre dalla (4.1), segue che

$$S_p(\lambda v_p + \mu w_p) = \lambda S_p(v_p) + \mu S_p(w_p).$$

In particolare, dalla (4.1), per $a_1 = 1$ e $a_2 = 0$ si ha $S_p(\varphi_u^0) = -N_u^0$, e per $a_1 = 0$ e $a_2 = 1$ si ha $S_p(\varphi_v^0) = -N_v^0$. Infine, proviamo che S_p è simmetrico:

$$S_p(v_p) \cdot w_p = v_p \cdot S(w_p).$$

Poichè S_p è lineare e il prodotto scalare è bilineare, basta verificare la simmetria sui vettori della base coordinata $(\varphi_u^0, \varphi_v^0)$, ovvero:

$$S_p(\varphi_u^0) \cdot \varphi_v^0 = \varphi_u^0 \cdot S_p(\varphi_v^0).$$

Derivando $N \cdot \varphi_u = 0$ rispetto a v , si ottiene

$$N_v \cdot \varphi_u + N \cdot \varphi_{uv} = 0$$

dove $\varphi_{uv} = (x_{uv}, y_{uv}, z_{uv})$ è un vettore che in generale non è tangente a M . Derivando $N \cdot \varphi_v = 0$ rispetto a u , risulta

$$N_u \cdot \varphi_v + N \cdot \varphi_{vu} = 0.$$

Siccome $\varphi_{vu} = (x_{vu}, y_{vu}, z_{vu}) = \varphi_{uv}$, si ha

$$S_p(\varphi_u^0) \cdot \varphi_v^0 = \varphi_u^0 \cdot S_p(\varphi_v^0).$$

□

Osservazione 4.3. Nella Sezione 1.3 abbiamo introdotto la derivata covariante $\bar{\nabla}$ per campi vettoriali definiti su \mathbb{R}^3 (o su aperti di \mathbb{R}^3). Osserviamo che se p è un fissato punto di una superficie M , ogni funzione differenziabile f definita su un aperto A di M , con $p \in A$, si può sempre estendere localmente a un aperto di \mathbb{R}^3 . Ciò vuol dire che esiste U_1 intorno aperto di p in M , $U_1 \subset A$, esiste U_2 intorno aperto di p in \mathbb{R}^3 ed esiste \bar{f} applicazione differenziabile definita su U_2 tali che $\bar{f}|_{U_1} = f|_{U_1}$ (cf., ad esempio, [21] Prop. 2.49). Analogamente per i campi vettoriali definiti su aperti di M . Pertanto, fissato $p \in M$, il campo normale N possiamo sempre pensarlo definito su un intorno di p in \mathbb{R}^3 . Quindi, dalla definizione di operatore forma, tenendo anche presente la (1.9), segue che

$$S_p(v_p) = -\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t_0)}N = -\bar{\nabla}_{v_p}N.$$

Esempio 4.4. Sia $M = \mathbb{R}^2$ (il piano euclideo). In tal caso M è orientabile e il campo normale N è costante, quindi parallelo lungo ogni curva $\gamma(t)$ di \mathbb{R}^2 , ovvero $N'(t) = N'(\gamma(t)) = 0$. Pertanto, l'operatore forma $S_p = 0$ per ogni $p \in \mathbb{R}^2$.

Definizione 4.5. La seconda forma fondamentale di M in p è la forma quadratica \mathcal{II}_p associata all'operatore forma S_p . Quindi,

$$\mathcal{II}_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}, \quad v_p \mapsto \mathcal{II}_p(v_p) := (S_p v_p) \cdot v_p.$$

Sia $p \in \varphi(D)$, $p = \varphi(u_0, v_0)$. Per ogni $v_p \in T_pM$, $v_p = a_1\varphi_u^0 + a_2\varphi_v^0$, risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{II}_p(v_p) &= (S_p v_p) \cdot v_p \\ &= (a_1 S_p \varphi_u^0 + a_2 S_p \varphi_v^0) \cdot (a_1 \varphi_u^0 + a_2 \varphi_v^0) \\ &= a_1^2 (S_p \varphi_u^0) \cdot \varphi_u^0 + 2a_1 a_2 (S_p \varphi_u^0) \cdot \varphi_v^0 + a_2^2 (S_p \varphi_v^0) \cdot \varphi_v^0, \end{aligned}$$

ovvero

$$\mathcal{II}_p(v_p) = a_1^2 \ell^0 + 2a_1 a_2 m^0 + a_2^2 n^0.$$

Pertanto, i coefficienti ℓ, m, n definiti da

$$\ell := S(\varphi_u) \cdot \varphi_u, \quad m := S(\varphi_u) \cdot \varphi_v = \varphi_u \cdot S(\varphi_v) \quad \text{e} \quad n := S(\varphi_v) \cdot \varphi_v,$$

determinano \mathcal{II} su $\varphi(D)$ e sono quindi detti *coefficienti della seconda forma fondamentale*.

Osservazione 4.6. La *terza forma fondamentale* di M in p è la forma quadratica \mathcal{III}_p associata all'operatore forma S_p^2 (cf. [20], p. 208). Quindi,

$$\mathcal{III}_p(v_p) := S_p^2(v_p) \cdot v_p = S_p(v_p) \cdot S_p(v_p).$$

Teorema 4.7. Sia $(D, \varphi, (u, v))$ una parametrizzazione locale di una superficie regolare M . Allora,

(a) La matrice che rappresenta l'operatore forma S rispetto alla base coordinata (φ_u, φ_v) è data da $\mathcal{I}^{-1}\mathcal{II}$, ovvero

$$S = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G\ell - Fm & Gm - Fn \\ -F\ell + Em & -Fm + En \end{pmatrix},$$

dove E, F, G sono i coefficienti della prima forma fondamentale e ℓ, m, n quelli della seconda forma fondamentale rispetto alla fissata parametrizzazione.

(b) I coefficienti ℓ, m, n si possono anche esprimere con

$$\ell = N \cdot \varphi_{uu}, \quad m = N \cdot \varphi_{uv}, \quad n = N \cdot \varphi_{vv},$$

ossia ℓ, m, n sono le componenti normali dei campi vettoriali $\varphi_{uu}, \varphi_{uv}, \varphi_{vv}$.

DIMOSTRAZIONE. (a) Siccome (φ_u, φ_v) è base per $T_p M$, dove $p = \varphi(u, v)$, poniamo

$$(4.1) \quad S(\varphi_u) = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v, \quad S(\varphi_v) = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v.$$

Quindi $S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ è la matrice che rappresenta l'operatore forma S rispetto alla base (φ_u, φ_v) . Osserviamo che tale matrice, in generale, non è detto che sia simmetrica in quanto (φ_u, φ_v) , in generale, non è detto che sia ortonormale. Usando la (4.1) e la definizione di ℓ, m, n , si trova

$$\begin{aligned} \ell &:= S(\varphi_u) \cdot \varphi_u = a_{11}\varphi_u \cdot \varphi_u + a_{21}\varphi_v \cdot \varphi_u = a_{11}E + a_{21}F, \\ m &:= S(\varphi_u) \cdot \varphi_v = a_{11}\varphi_u \cdot \varphi_v + a_{21}\varphi_v \cdot \varphi_v = a_{11}F + a_{21}G, \\ m &:= S(\varphi_v) \cdot \varphi_u = a_{12}\varphi_u \cdot \varphi_u + a_{22}\varphi_v \cdot \varphi_u = a_{12}E + a_{22}F, \\ n &:= S(\varphi_v) \cdot \varphi_v = a_{12}\varphi_u \cdot \varphi_v + a_{22}\varphi_v \cdot \varphi_v = a_{12}F + a_{22}G. \end{aligned}$$

Questo sistema di equazioni scalari è equivalente alla seguente equazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

da cui si ottiene

$$S = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix}.$$

(b) Da $N \cdot \varphi_u = 0$, derivando rispetto a u , si ha $N_u \cdot \varphi_u + N \cdot \varphi_{uu} = 0$, e siccome $N_u = -S(\varphi_u)$, otteniamo

$$\ell := S(\varphi_u) \cdot \varphi_u = N \cdot \varphi_{uu}.$$

Allo stesso modo, derivando $N \cdot \varphi_u = 0$ rispetto a v , si ottiene $N_v \cdot \varphi_u + N \cdot \varphi_{uv} = 0$, dove $N_v = -S(\varphi_v)$, e quindi

$$m := S(\varphi_v) \cdot \varphi_u = -N_v \cdot \varphi_u = N \cdot \varphi_{uv}.$$

Infine, derivando $N \cdot \varphi_v = 0$ rispetto a v , risulta $N_v \cdot \varphi_v + N \cdot \varphi_{vv} = 0$, dove $N_v = -S(\varphi_v)$, e quindi

$$n := S(\varphi_v) \cdot \varphi_v = -N_v \cdot \varphi_v = N \cdot \varphi_{vv}.$$

□

4.2. I simboli di Christoffel

Siano M una superficie regolare e $(D, \varphi, (u, v))$ una parametrizzazione locale di M . I campi vettoriali $\varphi_{uu}, \varphi_{uv}, \varphi_{vv}$, in generale, non sono vettori tangenti alla superficie. Quindi, poniamo

$$\begin{aligned}\varphi_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + b_{11} N, \\ \varphi_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + b_{12} N, \\ \varphi_{vu} &= \Gamma_{21}^1 \varphi_u + \Gamma_{21}^2 \varphi_v + b_{21} N, \\ \varphi_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + b_{22} N,\end{aligned}$$

dove Γ_{ij}^k e b_{ij} sono funzioni differenziabili definite in D , che a volte si identificano con quelle definite in $\varphi(D)$. Da $\varphi_{vu} = \varphi_{uv}$ segue che

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 \quad \text{e} \quad b_{12} = b_{21}.$$

Inoltre, dal Teorema 4.7 segue che

$$\ell = N \cdot \varphi_{uu} = b_{11}, \quad m = N \cdot \varphi_{uv} = b_{12} = b_{21} \quad \text{ed} \quad n = N \cdot \varphi_{vv} = b_{22}.$$

Le funzioni Γ_{ij}^k , che definiscono le componenti tangenti di $\varphi_{uu}, \varphi_{uv}, \varphi_{vv}$, sono dette *simboli di Christoffel* oppure *coefficienti di Christoffel*. Tenendo conto che

$$\begin{aligned}E_u &= \partial_u(\varphi_u \cdot \varphi_u) = 2\varphi_{uu} \cdot \varphi_u, & E_v &= \partial_v(\varphi_u \cdot \varphi_u) = 2\varphi_{uv} \cdot \varphi_u, \\ G_u &= \partial_u(\varphi_v \cdot \varphi_v) = 2\varphi_{uv} \cdot \varphi_v, & G_v &= \partial_v(\varphi_v \cdot \varphi_v) = 2\varphi_{vv} \cdot \varphi_v, \\ F_u &= \partial_u(\varphi_u \cdot \varphi_v) = \varphi_{uu} \cdot \varphi_v + \varphi_u \cdot \varphi_{uv} = \varphi_{uu} \cdot \varphi_v + (1/2)\partial_v(\varphi_u \cdot \varphi_u) \\ &= \varphi_{uu} \cdot \varphi_v + (1/2)E_v, \\ F_v &= \partial_v(\varphi_u \cdot \varphi_v) = \varphi_{uv} \cdot \varphi_v + \varphi_u \cdot \varphi_{vv} = \varphi_{vv} \cdot \varphi_u + (1/2)\partial_u(\varphi_v \cdot \varphi_v) \\ &= \varphi_{vv} \cdot \varphi_u + (1/2)G_u,\end{aligned}$$

moltiplicando scalarmente per φ_u e φ_v le espressioni precedenti di $\varphi_{uu}, \varphi_{uv}$ e φ_{vv} , si ottengono i seguenti sistemi

$$(4.2) \quad \begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \varphi_{uu} \cdot \varphi_u = (1/2)E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \varphi_{uu} \cdot \varphi_v = F_u - (1/2)E_v, \end{cases}$$

$$(4.3) \quad \begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \varphi_{uv} \cdot \varphi_u = (1/2)E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \varphi_{uv} \cdot \varphi_v = (1/2)G_u, \end{cases}$$

$$(4.4) \quad \begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \varphi_{vv} \cdot \varphi_u = F_v - (1/2)G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \varphi_{vv} \cdot \varphi_v = (1/2)G_v. \end{cases}$$

Siccome $EG - F^2 \neq 0$, i precedenti sistemi determinano univocamente i coefficienti di Christoffel in funzione dei coefficienti E, F, G della prima forma fondamentale.

In particolare, per una parametrizzazione (u, v) con $\varphi_u \cdot \varphi_v = 0$, ossia $F = 0$, si ottiene

$$(4.5) \quad \begin{cases} \Gamma_{11}^1 = (1/2)(E_u/E), & \Gamma_{11}^2 = -(1/2)(E_v/G), & \Gamma_{12}^1 = (1/2)(E_v/E), \\ \Gamma_{12}^2 = (1/2)(G_u/G), & \Gamma_{22}^1 = -(1/2)(G_u/E) & \Gamma_{22}^2 = (1/2)(G_v/G). \end{cases}$$

Osservazione 4.8. In generale, posto $\partial_1 = \partial_u, \partial_2 = \partial_v, g_{11} = E, g_{12} = F, g_{22} = G$ e $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, i coefficienti di Christoffel sono dati dalla formula

$$(4.6) \quad \Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k (\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij}) g^{km}.$$

Questa formula si può ottenere anche come conseguenza della formula (5.30) di Koszul.

Esempio 4.9. Se M è un piano euclideo, i coefficienti della prima forma fondamentale sono $E = G = 1$ e $F = 0$, e quindi banalmente segue che i simboli di Christoffel sono tutti nulli.

Esempio 4.10. Sia M la superficie di rotazione ottenuta ruotando (come nell'Esempio 3.15) la curva regolare semplice $\gamma(u) : x = f(u) > 0, y = 0, z = g(u), u \in]a, b[$ intorno all'asse z . Assumiamo come nell'Esempio 3.67 che la curva $\gamma(u) : x = f(u) > 0, y = 0, z = g(u)$, sia parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Una parametrizzazione locale di M è data da

$$\varphi(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)), \quad u \in]a, b[\text{ e } v \in]0, 2\pi[.$$

Allora,

$$\varphi_u = (f'(u)\cos v, f'(u)\sin v, g'(u)) \quad \text{e} \quad \varphi_v = (-f(u)\sin v, f(u)\cos v, 0),$$

e i coefficienti della prima forma fondamentale sono dati da

$$E = \|\varphi_u\|^2 = \|\dot{\gamma}(u)\|^2 = 1, \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v = 0 \quad \text{e} \quad G = \|\varphi_v\|^2 = f^2(u) > 0.$$

Quindi, applicando le formule precedenti si trova che i coefficienti di Christoffel Γ_{ij}^k della superficie di rotazione M sono dati da

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -f(u)f'(u), \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{f'(u)}{f(u)}.$$

Siccome il campo normale

$$\begin{aligned} N &= \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = (-g'(u)\cos v, -g'(u)\sin v, f'(u)), \\ \varphi_{uu} &= (f''(u)\cos v, f''(u)\sin v, g''(u)), \\ \varphi_{uv} &= (-f'(u)\sin v, f'(u)\cos v, 0), \\ \varphi_{vv} &= (-f(u)\cos v, -f(u)\sin v, 0), \end{aligned}$$

applicando il Teorema 4.7, si trova che i coefficienti della seconda forma fondamentale sono

$$\begin{aligned} \ell &= \varphi_{uu} \cdot N = f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u), \\ m &= \varphi_{uv} \cdot N = 0, \quad n = \varphi_{vv} \cdot N = f(u)g'(u). \end{aligned}$$

Se consideriamo, come caso particolare di superficie di rotazione, il cilindro circolare retto $M : y^2 + z^2 = 1$, che si ottiene ruotando intorno all'asse z la retta

$$\gamma(u) : x = f(u) = 1, \quad y = 0, \quad z = g(u) = u, \quad u \in \mathbb{R},$$

allora in tal caso

$$E = \|\varphi_u\|^2 = 1, \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v = 0 \quad \text{e} \quad G = \|\varphi_v\|^2 = 1,$$

e quindi i coefficienti di Christoffel Γ_{ij}^k sono tutti nulli. Dunque piano e cilindro hanno stessa prima forma fondamentale e stessi coefficienti di Christoffel. In effetti, come vedremo, le due superfici sono localmente isometriche. Tuttavia, come superfici immerse in \mathbb{R}^3 sono superfici distinte. Si può osservare che la seconda forma fondamentale del cilindro non è nulla. Infatti, con questa parametrizzazione, i coefficienti della seconda forma fondamentale del cilindro sono $\ell = m = 0$ e $n = 1$.

4.3. Curvature principali, curvatura di Gauss e curvatura media

Abbiamo già osservato che una superficie può curvarsi lungo più direzioni. Ad esempio, nel caso di un cilindro circolare retto, se ci muoviamo lungo una retta generatrice il cilindro non si curva, mentre se ci muoviamo lungo una circonferenza (parallelo del cilindro) la superficie si curva come per una sfera avente tale circonferenza come circonferenza di raggio massimo. In effetti, come vedremo in termini più precisi, in questo modo si ottengono le due curvature principali del cilindro.

Siano M una superficie regolare, $p \in M$ e S_p l'operatore forma di M in p definito da un fissato campo normale (locale) N . Poichè S_p è un endomorfismo simmetrico di $T_p M$, esiste una base ortonormale $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ di $T_p M$ di autovettori per S_p , cioè

$$S_p(\underline{e}_1) = k_1(p) \underline{e}_1, \quad S_p(\underline{e}_2) = k_2(p) \underline{e}_2, \quad \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_1 = \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_2 = 1, \quad \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 = 0.$$

Gli autovettori $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ si dicono *vettori principali* in p (e le loro direzioni sono dette *direzioni principali*). Gli autovalori $k_1(p), k_2(p)$ si dicono *curvature principali* di M in p . In particolare, la seconda forma fondamentale \mathcal{II}_p soddisfa

$$\mathcal{II}_p(\underline{e}_1) = S_p(\underline{e}_1) \cdot \underline{e}_1 = k_1(p) \quad \text{e} \quad \mathcal{II}_p(\underline{e}_2) = S_p(\underline{e}_2) \cdot \underline{e}_2 = k_2(p).$$

Quindi per ogni $v_p \in T_p M$, $v_p = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2$, risulta

$$\mathcal{II}_p(v_p) = k_1(p) a_1^2 + k_2(p) a_2^2.$$

Definizione 4.11. *Un punto p di una superficie M si dice ombelicale se*

$$k_1(p) = k_2(p).$$

Si noti che se p non è ombelicale, allora autovettori v_1, v_2 relativi a $k_1(p)$ e $k_2(p)$ rispettivamente, sono necessariamente ortogonali. Infatti,

$$S_p(v_1) \cdot v_2 = v_1 \cdot S_p(v_2) \text{ implica } (k_1(p) - k_2(p)) v_1 \cdot v_2 = 0.$$

Linee di curvatura

Sia $\gamma(t)$, $t \in I$, una curva regolare contenuta in M . $\gamma(t)$ è detta *linea di curvatura* (o *linea principale*, o *curva principale*) se, per ogni $t \in I$, il vettore tangente $\dot{\gamma}(t)$ è un vettore principale in $p = \gamma(t)$. Quindi,

$$\gamma(t) \text{ è linea di curvatura } \iff S_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) = \lambda(t)\dot{\gamma}(t) \quad \forall t \in I.$$

Si noti che i concetti di direzione principale e linea di curvatura non dipendono dalla scelta locale di N .

Proposizione 4.12. *Sia M una superficie regolare e sia (D, φ) una carta locale di M . Allora, la condizione $F = m = 0$ è sufficiente affinché le curve coordinate siano linee di curvatura. Se M è priva di punti ombelicali, la condizione $F = m = 0$ è anche necessaria.*

DIMOSTRAZIONE. Assumiamo $F = m = 0$. La condizione $F = 0$ implica che φ_u e φ_v sono ortogonali. Poi, $m = 0$, ovvero $S(\varphi_u) \cdot \varphi_v = 0$, implica che $S(\varphi_u)$ è parallelo a φ_u , ossia φ_u definisce una direzione principale e quindi la curva delle u ($v = \text{cost.}$) è una linea di curvatura. Analogamente si vede che la curva delle v ($u = \text{cost.}$) è una linea di curvatura.

Viceversa, supponiamo che M sia priva di punti ombelicali, e che le curve coordinate siano linee di curvatura. Allora, i vettori tangenti coordinati φ_u e φ_v definiscono le direzioni principali. D'altronde, per ipotesi sappiamo che $k_1(p) \neq k_2(p)$ per ogni $p \in \varphi(D)$, per cui φ_u e φ_v devono essere necessariamente ortogonali, e quindi $F = 0$. Inoltre, $S(\varphi_u)$ è parallelo a φ_u , e quindi $m = S(\varphi_u) \cdot \varphi_v = 0$. \square

Proposizione 4.13. *Sia (D, φ) una parametrizzazione locale di una superficie regolare M . Sia $\gamma(t)$ una curva differenziabile di M con sostegno in $\varphi(D)$, quindi $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$. Allora, $\gamma(t)$ è una linea di curvatura se e solo se $u(t)$ e $v(t)$ soddisfano la seguente equazione differenziale*

$$(Em - F\ell)(t) (u'(t))^2 + (En - G\ell)(t) u'(t)v'(t) + (Fn - Gm)(t) (v'(t))^2 = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia (a_{ij}) la matrice che rappresenta l'operatore forma S rispetto alla parametrizzazione (D, φ) . Di conseguenza, $S(\dot{\gamma}(t))$ è il vettore di componenti $(a_{11}u'(t) + a_{12}v'(t), a_{21}u'(t) + a_{22}v'(t))$. Allora, $\gamma(t)$ è una linea di curvatura se e solo se i vettori $(a_{11}u'(t) + a_{12}v'(t), a_{21}u'(t) + a_{22}v'(t))$ e $\dot{\gamma}(t) = (u'(t), v'(t))$ sono paralleli, ossia la matrice delle loro componenti ha determinante nullo, ovvero

$$a_{21} (u')^2 + (a_{22} - a_{11}) u'v' - a_{12} (v')^2 = 0.$$

Pertanto, applicando il Teorema 4.7, si ottiene il risultato enunciato. \square

Esempio 4.14. Per una superficie di rotazione M i meridiani e i paralleli sono le linee di curvatura. Infatti, come visto nell'Esempio 4.10, con M parametrizzata localmente da

$$\varphi(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)), \quad \text{con } u \in]a, b[\text{ e } v \in]0, 2\pi[,$$

i coefficienti F ed m sono nulli. D'altronde, le curve coordinate di M sono i paralleli e i meridiani, per cui dalla Proposizione 4.12 segue che i meridiani e i paralleli sono le linee di curvatura della superficie di rotazione M .

Definizione 4.15. *La funzione*

$$K : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto K(p) := \det S_p,$$

si chiama curvatura gaussiana di M .

Abbiamo già osservato che, se si cambia il campo locale N con $-N$, l'operatore S_p cambia di segno, tuttavia il suo determinante non cambia di segno. Pertanto, anche se la superficie non è orientabile, la definizione di curvatura gaussiana è indipendente dalla scelta locale di N .

Definizione 4.16. *Un punto p di una superficie regolare M si dice:*

- ellittico se la curvatura gaussiana $K(p) > 0$;
- iperbolico se la curvatura gaussiana $K(p) < 0$;
- parabolico se $K(p) = 0$ e l'operatore forma $S_p \neq 0$;
- planare se l'operatore forma $S_p = 0$.

Esempio 4.17. Sia $M = \mathbb{R}^2$ (il piano euclideo). In tal caso, come osservato nell'Esempio 4.4, l'operatore forma $S_p = 0$ per ogni $p \in \mathbb{R}^2$, e quindi tutti i punti sono planari.

Definizione 4.18. *Sia M una superficie regolare orientabile, e sia N un campo normale che orienta M . La funzione $H : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto H(p) := (\text{tr } S_p)/2$, si chiama curvatura media di M .*

Se M non è orientabile, la curvatura media è definita solo localmente rispetto a un fissato campo locale normale N (che viene definito rispetto a una fissata parametrizzazione locale). Tuttavia, il valore assoluto della curvatura media è definito anche per superfici non orientabili.

Dalle Definizioni 4.15 e 4.18 segue che la curvatura gaussiana e la curvatura media, in termini di curvatures principali, sono date

$$K(p) = k_1(p) \cdot k_2(p) \quad \text{e} \quad H(p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}.$$

Inoltre, tali formule implicano che $k_1(p)$ e $k_2(p)$ sono le soluzioni dell'equazione di secondo grado (in k): $k^2 - 2Hk + K = 0$, da cui

$$k_{1/2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

Rispetto a una fissata parametrizzazione locale (D, φ) , dal Teorema 4.7 segue la seguente

Proposizione 4.19. Per ogni $p \in \varphi(D)$, le curvatura gaussiana e la curvatura media sono date da:

$$(4.7) \quad K(p) = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2}(p)$$

e

$$(4.8) \quad H(p) = \frac{G\ell - 2Fm + En}{2(EG - F^2)}(p).$$

Inoltre, se $F = m = 0$, sempre dal Teorema 4.7 segue che

$$S(\varphi_u) = (\ell/E)\varphi_u \quad \text{e} \quad S(\varphi_v) = (n/G)\varphi_v.$$

Pertanto, abbiamo

Proposizione 4.20. Se i coefficienti F ed m sono nulli, allora le curvature principali sono date da

$$k_1 = \ell/E, \quad k_2 = n/G.$$

Osservazione 4.21. Rispetto a una fissata parametrizzazione locale di coordinate isoterme (u, v) , ovvero $E = G = f(u, v)$, $F = 0$, la curvatura gaussiana è data dalla seguente formula (cf. Osservazione 5.23)

$$(4.9) \quad K = -\frac{1}{2f} \left(\frac{1}{f}(f_{uu} + f_{vv}) - \frac{1}{f^2}(f_u^2 + f_v^2) \right) = -\frac{1}{2f} \Delta(\ln f),$$

dove $\Delta\Phi = \partial^2\Phi/\partial u^2 + \partial^2\Phi/\partial v^2$ con $\Phi(u, v)$ funzione differenziabile.

Esempio 4.22. Consideriamo la sfera $\mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Abbiamo visto che \mathbb{S}^2 è orientabile e $N_p = (1/r)p$ è un campo unitario normale alla sfera. Determiniamo l'operatore forma $S_p : T_p\mathbb{S}^2 \rightarrow T_p\mathbb{S}^2$. Dato $v_p \in T_p\mathbb{S}^2$, sia $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva differenziabile di \mathbb{S}^2 con $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = v_p$. Allora,

$$N(t) = N(\gamma(t)) = (1/r)\gamma(t), \quad \text{e quindi} \quad N'(t) = (1/r)\dot{\gamma}(t).$$

Di conseguenza,

$$S_p(v_p) = -N'(0) = -(1/r)\dot{\gamma}(0) = -(1/r)v_p.$$

Pertanto

$$S_p = -(1/r)I,$$

e quindi le curvature principali $k_1(p) = k_2(p) = \text{cost.} = -1/r$, la curvatura di Gauss $K(p) = \text{cost.} = 1/r^2 > 0$ e la curvatura media $H(p) = \text{cost.} = -1/r < 0$. In particolare, la sfera è una superficie a punti ellittici.

Esempio 4.23. Consideriamo il cilindro circolare retto $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = r^2$. Sappiamo che il cilindro M è orientabile e $N_p = (1/r)(x, y, 0)$ è un campo unitario normale a M . Determiniamo l'operatore forma di M . Una parametrizzazione locale di M è data da $\varphi(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$. Di conseguenza,

$$\varphi_u = (-r \operatorname{sen} u, r \operatorname{cos} u, 0), \quad \varphi_v = (0, 0, 1),$$

$$N(u, v) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = (\operatorname{cos} u, \operatorname{sen} u, 0) = (1/r)(x, y, 0).$$

Quindi l'operatore forma è dato da:

$$S(\varphi_u) = -N_u = (\operatorname{sen} u, -\operatorname{cos} u, 0) = -(1/r)\varphi_u, \quad S(\varphi_v) = -N_v = (0, 0, 0).$$

Pertanto, (φ_u, φ_v) è una base di autovettori. Le curvatures principali sono

$$k_1(p) = -(1/r) = \operatorname{cost} \neq 0 \quad \text{e} \quad k_2(p) = 0,$$

per cui $K(p) = 0$ e $S_p \neq 0$. Dunque, M è una superficie a punti parabolici. Si noti che rispetto alla parametrizzazione considerata nell'Esempio 4.10, i ruoli dei parametri u e v sono scambiati e quindi i versori normali sono opposti.

Esercizio 4.24. Si verifichi che la superficie regolare $M : z = \operatorname{sen} y$ è un esempio di superficie che contiene punti planari e punti parabolici.

Esempio 4.25. Vogliamo trovare la **curvatura gaussiana della superficie di rotazione** M ottenuta (come nell'Esempio 3.15) ruotando la curva regolare $\gamma(u) : x = f(u) > 0, y = 0, z = g(u), u \in]a, b[$ intorno all'asse z . Assumiamo come nell'Esempio 3.67 che la curva regolare $\gamma(u)$, sia parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Allora, i coefficienti della prima forma fondamentale sono $E = 1, F = 0$ e $G = f^2(u)$. Inoltre, come visto nell'Esempio 4.10, i coefficienti della seconda forma fondamentale sono

$$\ell = f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u), \quad m = 0, \quad n = f(u)g'(u).$$

Allora, usando per la curvatura gaussiana K la formula (4.7), troviamo

$$K(u, v) = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2} = \frac{(f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u))f(u)g'(u)}{f^2(u)}$$

$$= \frac{(f'(u)g'(u)g''(u) - f''(u)(g'(u))^2)}{f(u)}.$$

D'altronde, derivando $(f'(u))^2 + (g'(u))^2 = 1$ otteniamo

$$g'(u)g''(u) = -f'(u)f''(u)$$

e quindi la precedente formula della curvatura diventa

$$K(u, v) = \frac{-f''(u)((f'(u))^2 + (g'(u))^2)}{f(u)}.$$

Pertanto,

$$(4.10) \quad K(u, v) = -\frac{f''(u)}{f(u)}.$$

Esercizio 4.26. Determinare, usando la (4.10), la curvatura gaussiana del cilindro circolare retto, della sfera e della superficie torica.

Esercizio 4.27. Sia M la superficie di rotazione dell'Esempio 4.25, dove la curva $\gamma(u) : x = f(u) > 0, y = 0, z = g(u)$, non è parametrizzata con l'ascissa

curvilinea, quindi con velocità scalare $\|\dot{\gamma}(u)\|$, che indichiamo con $\alpha(u)$, non costante.

Determinare curvature principali e curvatura gaussiana di tale superficie.

Suggerimento: In questo caso si trova che

- i coefficienti della prima forma fondamentale sono

$$E = \alpha^2(u), \quad F = 0 \quad \text{e} \quad G = f^2(u);$$

- il campo normale

$$N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = \frac{1}{\alpha(u)}(-g'(u)\cos v, -g'(u)\sin v, f'(u));$$

- i coefficienti della seconda forma fondamentale sono

$$\ell = (f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u))/\alpha(u), \quad m = 0, \quad n = f(u)g'(u)/\alpha(u).$$

Quindi, la matrice dell'operatore forma è data da

$$(4.11) \quad S = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f'g'' - f''g'}{\alpha^3} & 0 \\ 0 & \frac{g'}{f\alpha} \end{pmatrix}.$$

Esempio 4.28. Sia M una **superficie rigata** regolare parametrizzata, come nell'Esempio 3.17, da

$$\varphi(u, v) = \gamma(u) + vV(u), \quad \text{con } (u, v) \in]a, b[\times \mathbb{R}.$$

Allora, M ha curvatura gaussiana non positiva. Infatti,

$$\varphi_u = \dot{\gamma}(u) + vV'(u), \quad \varphi_v = V(u), \quad \varphi_{uv} = V'(u), \quad \varphi_{vv} = 0,$$

e quindi

$$K(u, v) = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2} = -\frac{m^2}{EG - F^2} \leq 0,$$

dove

$$m = \varphi_{uv} \cdot N = 0 \quad \text{se e solo se} \quad V(u) \cdot V'(u) \wedge \dot{\gamma}(u) = 0.$$

Una superficie rigata (regolare) si dice **svilupabile** se la sua curvatura gaussiana è identicamente nulla.

Se la superficie rigata (regolare) M è un cilindro generalizzato (cf. Esempio 3.18) si ha $V(u) = V_0$ (costante) e quindi $V'(u) = 0$, se M è un cono generalizzato di vertice p_0 (cf. Esempio 3.19) si ha $V(u) = \gamma(u) - p_0$ e quindi $V'(u) = \dot{\gamma}(u)$. In entrambi i casi, è soddisfatta la condizione $V(u) \cdot V'(u) \wedge \dot{\gamma}(u) = 0$, pertanto entrambe le superfici sono svilupabili.

Esempio 4.29. Superficie tubolare

Il più semplice esempio di superficie tubolare è dato dal cilindro rotondo. Consideriamo, per semplicità, il cilindro rotondo di equazione cartesiana $x^2 + y^2 = r^2$. Tale cilindro si può parametrizzare con $\varphi(u, v) = (r\cos v, r\sin v, u)$ che si può anche esprimere come intorno tubolare di raggio r dell'asse z (asse del cilindro). Infatti,

$$\varphi(u, v) = \gamma(u) + r(\cos v)E_{1\gamma(u)} + r(\sin v)E_{2\gamma(u)},$$

dove $\gamma(u) = (0, 0, u)$ è l'asse del cilindro ed $E_{1\gamma(u)}, E_{2\gamma(u)}$ sono i primi due campi di vettori della base canonica definiti lungo $\gamma(u)$. Quindi, $(\vec{t}(u) = \dot{\gamma}(u), E_{1\gamma(u)}, E_{2\gamma(u)})$ è base ortonormale lungo γ . Inoltre, le curve delle v del dato cilindro sono circonferenze di centro $(0, 0, u)$, raggio r e contenute nei piani $z = u$. Questo discorso si può generalizzare nel modo seguente. Sia $\gamma(u)$, $u \in I$, una curva di Frenet parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Denotiamo con $(\vec{t}(u), \vec{n}(u), \vec{b}(u), \kappa, \tau)$ l'apparato di Frenet della curva $\gamma(u)$. La superficie M , intorno tubolare di raggio $r > 0$ della curva γ (cf. Figura 1), è la superficie parametrizzata da

$$\varphi(u, v) = \gamma(u) + r(\cos v)\vec{n}(u) + r(\sin v)\vec{b}(u), \quad u \in I, v \in]-\pi, \pi[,$$

(oppure $v \in]0, 2\pi[$). Le curve delle v sono circonferenze di raggio r contenute nei piani normali a γ . Assumiamo che il tubo M sia una superficie immersa (basta assumere che la curvatura $\kappa(u)$ di γ soddisfi la condizione $\kappa(u)r < 1$).

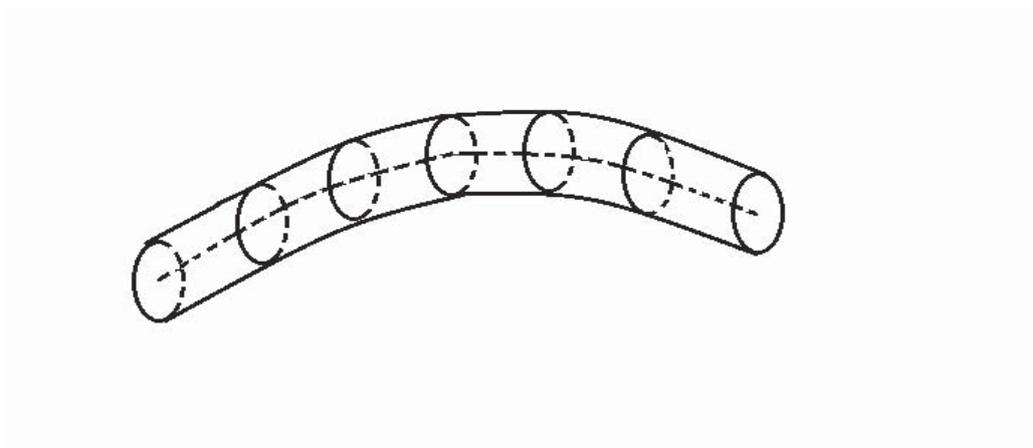


FIGURA 1. Superficie tubolare.

Determiniamo la curvatura gaussiana della superficie tubolare M . Applicando le formule di Frenet relative alla curva γ , si ha

$$\begin{aligned} \varphi_u &= \dot{\gamma}(u) + r(\cos v)\vec{n}'(u) + r(\sin v)\vec{b}'(u) \\ &= (1 - r\kappa(u)(\cos v))\vec{t}(u) - r\tau(u)(\sin v)\vec{n}(u) + r\tau(u)(\cos v)\vec{b}(u); \\ \varphi_v &= -r(\sin v)\vec{n}(u) + r(\cos v)\vec{b}(u), \\ E &= \varphi_u \cdot \varphi_u = (1 - r\kappa(u)\cos v)^2 + r^2\tau^2(u), \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v = r^2\tau(u), \\ G &= \varphi_v \cdot \varphi_v = r^2. \end{aligned}$$

Siccome

$$\varphi_u = (1 - r\kappa(u)\cos v)\vec{t}(u) + \tau(u)\varphi_v,$$

la condizione $r\kappa < 1$ implica $(1 - r\kappa(u)\cos v) > 0$ e di conseguenza i vettori coordinati φ_u, φ_v sono linearmente indipendenti. Inoltre,

$$\begin{aligned}\varphi_u \wedge \varphi_v &= (1 - r\kappa(u)\cos v)\vec{t}(u) \wedge \varphi_v \\ &= (1 - r\kappa(u)\cos v)\vec{t}(u) \wedge \left(-r\operatorname{sen} v \vec{n}(u) + r\cos v \vec{b}(u)\right) \\ &= -r(1 - r\kappa(u)\cos v) \left(\cos v \vec{n}(u) + \operatorname{sen} v \vec{b}(u)\right), \\ \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 &= r^2(1 - r\kappa(u)\cos v)^2 = EG - F^2\end{aligned}$$

e

$$N = -\cos v \vec{n}(u) - \operatorname{sen} v \vec{b}(u).$$

Infine, determiniamo i coefficienti della seconda forma fondamentale. Sempre applicando le formule di Frenet, otteniamo

$$\begin{aligned}\varphi_{uu} &= -r(\kappa'(u)\cos v - \tau(u)\kappa(u)\operatorname{sen} v)\vec{t}(u) \\ &\quad + \left((1 - r\kappa(u)\cos v)\kappa(u) - r\tau'(u)\operatorname{sen} v - r\tau^2(u)\cos v\right)\vec{n}(u) \\ &\quad + r(\tau'(u)\cos v - \tau^2(u)\operatorname{sen} v)\vec{b}(u), \\ \varphi_{vv} &= -r\cos v \vec{n}(u) - r\operatorname{sen} v \vec{b}(u) = rN, \\ \varphi_{uv} &= r\kappa(u)\operatorname{sen} v \vec{t}(u) - r\tau(u)\cos v \vec{n}(u) - r\tau(u)\operatorname{sen} v \vec{b}(u), \\ \ell &= \varphi_{uu} \cdot N = r\tau^2(u) - (1 - r\kappa(u)\cos v)\kappa(u)\cos v, \\ m &= \varphi_{uv} \cdot N = r\tau(u), \\ n &= \varphi_{vv} \cdot N = r.\end{aligned}$$

Allora, non esistono punti planari e la curvatura gaussiana è data da

$$K(u, v) = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2} = -\frac{\kappa(u)\cos v}{r(1 - r\kappa(u)\cos v)}.$$

In particolare, il segno di $K(u, v)$ dipende solo dal segno di $\cos v$, e quindi esistono punti parabolici, ellittici e iperbolici.

Se come curva di Frenet prendiamo una circonferenza di raggio 1, ad esempio $\gamma(u) = (\cos u, \operatorname{sen} u, 0)$, il corrispondente riferimento di Frenet è

$$\vec{t}(u) = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0), \quad \vec{n}(u) = (-\cos u, -\operatorname{sen} u, 0), \quad \vec{b}(u) = (0, 0, 1).$$

La superficie intorno tubolare di raggio $r < 1$ della circonferenza γ , ha rappresentazione parametrica

$$\begin{aligned}\varphi(u, v) &= \gamma(u) + r(\cos v)\vec{n}(u) + r(\operatorname{sen} v)\vec{b}(u), \\ &= (\cos u(1 - r\cos v), \operatorname{sen} u(1 - r\cos v), r\operatorname{sen} v)\end{aligned}$$

Cambiando il parametro $v \in]-\pi, \pi[$ con $\bar{v} \in]0, 2\pi[$ definito da $v = \pi - \bar{v}$, si ottiene

$$\bar{\varphi}(u, \bar{v}) = \varphi(u, \pi - \bar{v}) = (\cos u(1 + r\cos \bar{v}), \operatorname{sen} u(1 + r\cos \bar{v}), r\operatorname{sen} \bar{v})$$

che rappresenta la **superficie torica** ottenuta ruotando la circonferenza $x = (1 + r \cos \bar{v}), y = 0, z = r \sin \bar{v}$ intorno all'asse z (confrontare con la (3.1)). Quindi, la superficie torica è un esempio di superficie tubolare. In tal caso, la curvatura di $\gamma(u)$ è $\kappa(u) = \text{cost.} = +1$ e la curvatura di Gauss

$$K(u, \bar{v}) = -\frac{\cos v}{r(1 - r \cos v)} = \frac{\cos \bar{v}}{r(1 + r \cos \bar{v})}.$$

In particolare, la curvatura $K(u, \bar{v})$ è costante lungo i paralleli $\bar{v} = \text{cost.}$ (curve delle u). Lungo i paralleli $\bar{v} = \pi/2$ e $\bar{v} = 3\pi/2$, la curvatura di Gauss è nulla. Lungo il parallelo $\bar{v} = \pi$ la curvatura di Gauss è negativa. Lungo il parallelo $\bar{v} = 0$ (considerando una parametrizzazione definita per tale \bar{v}) la curvatura di Gauss è positiva.

4.4. Superfici minimali

Lo studio delle superfici minimali si può dire che ha avuto inizio con Lagrange(1760) il quale determinò l'equazione differenziale che deve soddisfare una superficie minimale del tipo $z = f(x, y)$, e con Meusnier(1776) che diede una interpretazione geometrica dell'equazione differenziale ottenuta da Lagrange.

Definizione 4.30. *Una superficie regolare parametrizzata (D, φ) è detta minimale se la sua curvatura media $H(p)$ è identicamente nulla. Una superficie regolare M è detta superficie minimale se ogni sua parametrizzazione è minimale.*

Si noti che: *i punti non planari di una superficie minimale sono iperbolici.* Infatti, da $k_1(p) + k_2(p) = 0$ segue $K(p) = -k_1^2(p) < 0$.

Un'interpretazione geometrica che giustifica il nome di superficie minimale si ottiene nel modo seguente. Sia $\varphi : D \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare parametrizzata e sia B un dominio (aperto connesso) limitato di D . Se $h : B = B \cup \partial B \rightarrow \mathbb{R}$ è un'applicazione differenziabile, l'applicazione

$$F : \bar{B} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v, t) \mapsto F(u, v, t) = \varphi(u, v) + t h(u, v) N(u, v),$$

è detta *variazione normale* di $\varphi(\bar{B})$ determinata da h . Per ogni $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, l'applicazione

$$\varphi_t : B \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \varphi_t(u, v) = F(u, v, t),$$

definisce una superficie parametrizzata, con

$$\varphi_{tu} = \varphi_u + t h_u N + t h N_u \quad \text{e} \quad \varphi_{tv} = \varphi_v + t h_v N + t h N_v.$$

Quindi, i corrispondenti coefficienti della prima forma fondamentale sono

$$E_t = E + 2t h(\varphi_u \cdot N_u) + t^2 f_1, \quad G_t = G + 2t h(\varphi_v \cdot N_v) + t^2 f_3,$$

$$F_t = F + t h(\varphi_u \cdot N_v + \varphi_v \cdot N_u) + t^2 f_2,$$

dove le funzioni f_1, f_2, f_3 sono polinomiali rispetto a t . Siccome

$$\varphi_u \cdot N_u = -\varphi_{uu} \cdot N = -\ell, \quad \varphi_v \cdot N_v = -\varphi_{vv} \cdot N = -n,$$

e

$$\varphi_u \cdot N_v + \varphi_v \cdot N_u = -2\varphi_{uv} \cdot N = -2m,$$

si ha

$$E_t = E - 2th\ell + t^2 f_1, \quad F_t = F - 2thm + t^2 f_2, \quad G_t = G - 2thn + t^2 f_3.$$

Di conseguenza, siccome $2H(EG - F^2) = (En - 2Fm + Gl)$, otteniamo

$$\begin{aligned} E_t G_t - F_t^2 &= (EG - F^2) - 2th(En - 2Fm + Gl) + t^2 f_4 \\ &= (EG - F^2)(1 - 4thH) + t^2 f_4, \end{aligned}$$

dove la funzione f_4 è polinomiale rispetto a t . Inoltre, posto $f_5 = f_4/\sqrt{EG - F^2}$, per la funzione area $A(t)$ della variazione $\varphi_t(\bar{B})$ si ha (cf. Section 3.8)

$$A(t) = \iint_{\bar{B}} \sqrt{E_t G_t - F_t^2} \, dudv = \iint_{\bar{B}} \sqrt{EG - F^2} \sqrt{1 - 4thH + t^2 f_5} \, dudv.$$

La funzione $A(t)$, per ε abbastanza piccolo, è differenziabile, e la sua derivata per $t = 0$ è

$$(4.12) \quad A'(0) = -2 \iint_{\bar{B}} hH \sqrt{EG - F^2} \, dudv.$$

Se (D, φ) è minimale, ossia $H = 0$, dalla (4.12) segue che $A'(0) = 0$ per ogni B e per ogni variazione normale di $\varphi(\bar{B})$. Viceversa, se $A'(0) = 0$ per ogni B e per ogni variazione normale di $\varphi(\bar{B})$, allora (D, φ) è minimale. Infatti, assumiamo per assurdo $H(p_0) \neq 0$ per qualche $p_0 \in D$, e quindi $H(p) \neq 0$ in un intorno di p_0 . In tal caso, si potrebbe costruire una funzione differenziabile $h : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}$ con $h(p) = H(p)$ in qualche intorno di p_0 e $h(p) = 0$ all'esterno di un intorno di p_0 . Allora, dalla (4.12) si avrebbe che $A'(0) < 0$ per la variazione determinata da questa h , e quindi una contraddizione. Dunque, vale il seguente

Teorema 4.31. *Sia $\varphi : D \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare parametrizzata e sia B un dominio limitato di D . Allora, la superficie parametrizzata è minimale se e solo se $A'(0) = 0$ per ogni dominio limitato B di D e per ogni variazione normale di $\varphi(\bar{B})$.*

Dunque, ogni dominio limitato $\varphi(\bar{B})$ di una superficie minimale (D, φ) è un punto critico del funzionale area. In generale i punti critici non è detto che siano di minimo, quindi il termine minimale potrebbe non essere appropriato. Tuttavia, questo termine fu introdotto da Lagrange nel 1760.

Osservazione 4.32. Lo studio delle superfici minimali è anche legato al problema di Plateau (problema di calcolo delle variazioni), detto anche problema delle bolle (o pellicole) di sapone. Tale problema, in una forma un pò semplificata, si può esprimere nel seguente modo: “provare che per ogni curva chiusa semplice di \mathbb{R}^3 esiste una superficie di area minima che ha γ come bordo”

Un'altra caratterizzazione delle superfici minimali è data dalla seguente

Proposizione 4.33. *Sia $\varphi(u, v)$, $(u, v) \in D$, una superficie regolare parametrizzata, e orientata da N . Se le coordinate (u, v) sono isoterme, ossia $E(u, v) = G(u, v) = f(u, v) > 0$ ed $F = 0$, allora la curvatura media e il vettore $\varphi_{uu} + \varphi_{vv}$ sono dati da*

$$H = (\ell + n)/2f \quad e \quad \varphi_{uu} + \varphi_{vv} = (2fH)N.$$

In particolare, la superficie è minimale se e solo se il vettore $\varphi_{uu} + \varphi_{vv} = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Siccome $E = G = f$ e $F = 0$, dalla (4.8) si ha

$$H = (\ell + n)/2E = ((\varphi_{uu} + \varphi_{vv}) \cdot N)/2f.$$

D'altronde, $\varphi_u \cdot \varphi_u = \varphi_v \cdot \varphi_v$ implica $\varphi_{uu} \cdot \varphi_u = \varphi_{vv} \cdot \varphi_v$. Inoltre, $\varphi_u \cdot \varphi_v = 0$ implica $\varphi_{uv} \cdot \varphi_v = -\varphi_u \cdot \varphi_{vv}$. Pertanto, otteniamo

$$(\varphi_{uu} + \varphi_{vv}) \cdot \varphi_u = 0.$$

Analogamente si trova

$$(\varphi_{uu} + \varphi_{vv}) \cdot \varphi_v = 0.$$

Dunque, $\varphi_{uu} + \varphi_{vv}$ ha solo componente normale, e quindi

$$\varphi_{uu} + \varphi_{vv} = ((\varphi_{uu} + \varphi_{vv}) \cdot N)N = (2fH)N.$$

□

Esempio 4.34. Sia M l'elicoide definito nell'Esempio 3.68. Determiniamo curvatura gaussiana e curvatura media di M . L'applicazione

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv), \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times]0, 2\pi[, \quad b \neq 0,$$

definisce una parametrizzazione locale di M . Inoltre,

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (\cos v, \sin v, 0), & \varphi_v &= (-u \sin v, u \cos v, b), \\ E &= 1, & F &= 0, & G &= u^2 + b^2. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + b^2}}(b \sin v, -b \cos v, u),$$

$$\varphi_{uu} = (0, 0, 0), \quad \varphi_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0), \quad \varphi_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0).$$

Usando le formule del Teorema 4.7, si trova che i coefficienti l, m, n sono dati da

$$l = \varphi_{uu} \cdot N = 0, \quad m = \varphi_{uv} \cdot N = b/\sqrt{u^2 + b^2} \neq 0, \quad n = \varphi_{vv} \cdot N = 0.$$

Infine, applicando la (4.7) e la (4.8), si ottiene

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{ln - m^2}{EG - F^2} = -b^2/(u^2 + b^2)^2 < 0 \quad e \\ H(p) &= \frac{Gl - 2Fm + En}{2(EG - F^2)} = 0. \end{aligned}$$

Dunque, l'elicoide M è un esempio (non banale) di superficie minimale (e quindi a punti iperbolici).

Esercizio 4.35. Ruotando la *catenaria*

$$\gamma(u) : x = \cosh u, y = 0, z = u, \quad u \in \mathbb{R},$$

intorno all'asse z , la corrispondente superficie di rotazione, detta *catenoide*, ha la seguente parametrizzazione regolare

$$\varphi(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u), \quad \text{con } v \in]0, 2\pi[\text{ e } u \in \mathbb{R}.$$

Verificare, applicando la Proposizione 4.33, che anche la catenoide è una superficie minimale. Inoltre, usando la (4.11), verificare che le curvatures principali sono date da

$$k_1(u) = -\frac{1}{\cosh^2 u} \quad \text{e} \quad k_2(u) = \frac{1}{\cosh^2 u}.$$

Per altre proprietà, ed esempi, di superfici minimali si può consultare [9] Sez. 3-5 e [23] Cap.9.

4.5. Curvatura normale

Siano M una superficie regolare, p un punto di M e $v_p \in T_p M$, $\|v_p\| = 1$.

Definizione 4.36. *La quantità*

$$k_n(v_p) := \mathcal{I}\mathcal{I}_p(v_p) = S_p(v_p) \cdot v_p$$

si dice *curvatura normale di M in p nella direzione di v_p* .

Naturalmente, se $v_p \in T_p M$, $v_p \neq 0$, la curvatura normale in p nella direzione di v_p è definita da

$$k_n(v_p) := \mathcal{I}\mathcal{I}_p(v_p) / \mathcal{I}_p(v_p) = S_p(v_p) \cdot v_p / \|v_p\|^2.$$

Si noti che il segno di $k_n(v_p)$ dipende da S_p , quindi cambiando N con $-N$ la curvatura normale cambia di segno. In ogni caso

$$k_n(v_p) = k_n(-v_p).$$

Se $\gamma(s)$ è una curva regolare di M parametrizzata con l'ascissa curvilinea, allora $k_n(\dot{\gamma}(s_0))$ si dice *curvatura normale di γ in $\gamma(s_0)$* .

Teorema 4.37. (di Meusnier) *Per ogni curva regolare $\gamma(s)$ di M parametrizzata con l'ascissa curvilinea, $\gamma(s_0) = p$, si ha*

$$k_n(\dot{\gamma}(s_0)) = \ddot{\gamma}(s_0) \cdot N_p.$$

In particolare, se $\gamma(s)$ è di Frenet,

$$k_n(\dot{\gamma}(s_0)) = \kappa_\gamma(s_0) \cos \vartheta$$

dove $\kappa_\gamma(s_0)$ è l'usuale curvatura di γ nel punto $p = \gamma(s_0)$ e ϑ è l'angolo convesso determinato da N_p e da n_p versore normale principale alla curva in p . Inoltre,

$$k_n(\dot{\gamma}(s_0)) = \pm \kappa_\gamma(s_0) \iff N_p = \pm n_p.$$

DIMOSTRAZIONE. Poichè $\gamma(s)$ è una curva di M , si ha $\dot{\gamma}(s) \in T_{\gamma(s)} M$ per ogni s . Pertanto $\dot{\gamma}(s) \cdot N_{\gamma(s)} = 0$, e derivando tale equazione si ottiene

$$\ddot{\gamma}(s) \cdot N(s) + \dot{\gamma}(s) \cdot N'(s) = 0,$$

ovvero $\ddot{\gamma}(s) \cdot N(s) - \dot{\gamma}(s) \cdot S_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s)) = 0$ per ogni s . Per $s = s_0$ si ha

$$k_n(\dot{\gamma}(s_0)) = S(\dot{\gamma}(s_0)) \cdot \dot{\gamma}(s_0) = \ddot{\gamma}(s_0) \cdot N(s_0) = \ddot{\gamma}(s_0) \cdot N_p.$$

Se $\gamma(s)$ è di Frenet, possiamo considerare il versore normale principale $n_p = \ddot{\gamma}(s_0)/\|\ddot{\gamma}(s_0)\|$, e quindi la prima formula di Frenet $\ddot{\gamma}(s_0) = \kappa_\gamma(s_0) n_p$. Da questa si ottiene

$$k_n(\dot{\gamma}(s_0)) = \ddot{\gamma}(s_0) \cdot N_p = \kappa_\gamma(s_0) n_p \cdot N_p = \kappa_\gamma(s_0) \cos \vartheta.$$

□

Osservazione 4.38. Se $\gamma(t)$ è curva regolare di M con t parametro arbitrario, allora per la curvatura normale di $\gamma(t)$ abbiamo

$$k_n(\dot{\gamma}(t)) = \frac{S_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|^2} = \frac{\ddot{\gamma}(t) \cdot N(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|^2}.$$

Ora, ci chiediamo se esistono curve regolari $\gamma(s)$ sulla superficie regolare M per cui la curvatura normale $k_n(\dot{\gamma}(s_0))$ coincida, a meno del segno, con l'usuale curvatura κ_γ di γ in $p = \gamma(s_0)$, ovvero $\cos \vartheta = \pm 1$ nel Teorema di Meusnier.

Definizione 4.39. Diciamo **curva sezione normale** di M in p una curva che si ottiene intersecando la superficie M con un piano passante per N_p .

Dato $v_p \in T_p M$, $\|v_p\| = 1$, sia π_{v_p} il piano determinato da N_p e v_p . La curva $\gamma = \pi_{v_p} \cap M$ è una sezione normale di M in p , e viene detta **curva sezione normale (di M in p) determinata da v_p** . Tale curva è regolare in quanto π_{v_p} e M sono superfici regolari. Parametizziamo γ con l'ascissa curvilinea e supponiamo $\gamma(s_0) = p$. Risulta $\dot{\gamma}(s_0) \in \pi_{v_p} = \text{span}(v_p, N_p)$ (in quanto γ è una curva di π_{v_p}). Inoltre,

$\dot{\gamma}(s_0) \in T_p M$ (in quanto γ è anche una curva di M) e quindi $\dot{\gamma}(s_0) \perp N_p$, per cui necessariamente $\dot{\gamma}(s_0) = \lambda v_p$. Siccome $\|v_p\| = \|\dot{\gamma}(s_0)\| = 1$, si ha $\dot{\gamma}(s_0) = \pm v_p$. Scambiando, s con $-s$, se necessario, possiamo assumere $v_p = \dot{\gamma}(s_0) \perp N_p$. Se $\ddot{\gamma}(s_0) = 0$, abbiamo $\kappa_\gamma(s_0) = 0$ e quindi applicando il Teorema di Meusnier otteniamo

$$k_n(v_p) = k_n(\dot{\gamma}(s_0)) = \ddot{\gamma}(s_0) \cdot N_p = 0 = \kappa_\gamma(s_0).$$

Se $\ddot{\gamma}(s_0) \neq 0$, indicato con n_p il versore normale principale alla curva $\gamma(s)$ nel punto p , versore che si trova nel piano π_{v_p} (in quanto γ è una curva di π_{v_p}), abbiamo

$v_p = \dot{\gamma}(s_0) \perp N_p$ e $v_p = \dot{\gamma}(s_0) \perp n_p$, per cui deve essere $N_p = \pm n_p$. Pertanto, dal Teorema di Meusnier segue che

$$k_n(v_p) = k_n(\dot{\gamma}(s_0)) = \pm \kappa_\gamma(s_0).$$

Possiamo quindi enunciare la seguente proposizione (che giustifica il nome di curvatura normale).

Proposizione 4.40. *La curvatura normale $k_n(v_p)$ coincide, a meno del segno, con l'usuale curvatura in p della curva sezione normale di M in p determinata dal vettore v_p .*

Osservazione 4.41. Si noti che se $\gamma(s)$ è una curva sezione normale di M in un punto $p = \gamma(s_0)$, non è detto (in generale) che lo sia in ogni suo punto. Nel caso in cui ciò si verifichi, la curva è speciale (cf. Proposizione 5.42).

Osservazione 4.42. Sia π_{N_p} un fissato piano per N_p e sia $\gamma = \pi_{N_p} \cap M$ la corrispondente curva sezione normale. Allora, dalla Proposizione 4.40 segue che la curvatura di γ nel punto p è data da

$$\kappa_\gamma(p) = |k_n(v_p)|,$$

dove v_p è un vettore di T_pM che ha la direzione della retta $r = \pi_{N_p} \cap T_pM$ (che è la retta tangente a γ nel punto p).

Esempio 4.43. Se M è una sfera di raggio R , allora una curva sezione normale di M in un fissato punto p è una circonferenza di raggio massimo. Sia ora M il cilindro circolare retto $x^2 + y^2 = R^2$. Se $v_p \in T_pM$ è un vettore ortogonale all'asse del cilindro, allora la corrispondente curva sezione normale in p è una circonferenza di raggio R . Se $v_p \in T_pM$ è un vettore parallelo all'asse del cilindro, allora la corrispondente curva sezione normale in p è una retta parallela all'asse.

Osservazione 4.44. Sia (D, φ) una carta locale di una superficie regolare di M e sia N un fissato campo unitario normale definito su $\varphi(D)$. Sia $\gamma(s)$ una curva differenziabile regolare di M con sostegno in $\varphi(D)$ e parametrizzata a velocità unitaria. Osserviamo che il versore $(N \wedge \dot{\gamma})(s)$ è ortogonale a $N(s)$, quindi $(N \wedge \dot{\gamma}) \in T_{\gamma(s)}M$ e $(\dot{\gamma}, N, N \wedge \dot{\gamma})$ è una base ortonormale di $T_{\gamma(s)}\mathbb{R}^3$ per ogni s . Tale base ortonormale è detta *triedro di Darboux* lungo la curva $\gamma(s)$ di $\varphi(D)$ (cf anche Esercizio 5.44). Il campo vettoriale accelerazione $\ddot{\gamma}(s)$ è ortogonale a $\dot{\gamma}(s)$, per cui $\ddot{\gamma}(s) \in \text{span}(N, N \wedge \dot{\gamma})$ e quindi nel generico punto $\gamma(s)$ abbiamo

$$(4.13) \quad \ddot{\gamma} = (\ddot{\gamma} \cdot N)N + (\ddot{\gamma} \cdot N \wedge \dot{\gamma})N \wedge \dot{\gamma}.$$

Dal Teorema di Meusnier, la componente normale di $\ddot{\gamma}(s)$ definisce la curvatura normale. La componente tangente di $\ddot{\gamma}(s)$, ossia la funzione

$$k_g(s) = \ddot{\gamma}(s) \cdot N(s) \wedge \dot{\gamma}(s) = \dot{\gamma}(s) \wedge \ddot{\gamma}(s) \cdot N(s),$$

si dice **curvatura geodetica** della curva $\gamma(s)$. Cambiando N con $-N$, la curvatura geodetica cambia di segno. Se M è orientabile, fissato un campo vettoriale unitario normale N , la curvatura geodetica è ben definita su tutta la superficie. Per superfici non orientabili il valore assoluto della curvatura geodetica è ben definito. In ogni caso, dalla decomposizione (4.13), si ottiene la seguente relazione fra le tre curvature (cf. anche (5.19)):

$$\kappa_\gamma^2(s) = k_g^2(s) + k_n^2(\dot{\gamma}(s)).$$

Il nome di curvatura geodetica per k_g è giustificato dal suo legame con il concetto di curva geodetica (cf. Sezione 5.4).

Ora esaminiamo le direzioni, se esistono, che annullano la curvatura normale di una superficie regolare M in un punto p .

Definizione 4.45. Dato $v_p \in T_p M$, $\|v_p\| = 1$, se la curvatura normale

$$k_n(v_p) = S_p(v_p) \cdot v_p = 0,$$

allora la direzione definita da v_p si dice che è una **direzione asintotica nel punto p** . Una curva regolare $\gamma(s) = \varphi(u(s), v(s))$ di M tale che $\dot{\gamma}(s)$ sia sempre una direzione asintotica è detta **curva asintotica della superficie M** . In particolare, la curva delle u (risp. delle v) è una curva asintotica se e solo se $\ell = 0$ (risp. $n = 0$).

In generale, per una curva regolare $\gamma(s) = \varphi(u(s), v(s))$ di M , il vettore tangente $\dot{\gamma}(s) = u'(s)\varphi_u + v'(s)\varphi_v$, e quindi $\gamma(s)$ è asintotica se e solo se le sue componenti soddisfano l'equazione differenziale

$$(u')^2\ell + 2u'v'm + (v')^2n = 0.$$

Sia $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ una base ortonormale di vettori principali in p . Allora, un vettore $v_p = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2$ definisce una direzione asintotica se e solo se le sue componenti x_1, x_2 soddisfano la seguente equazione

$$x_1^2 k_1 + x_2^2 k_2 = 0,$$

dove k_1, k_2 sono le curvatures principali in p . Si hanno quindi le seguenti possibilità:

- Se p è ellittico ($K(p) = k_1(p)k_2(p) > 0$), non esistono direzioni asintotiche.

- Se p è iperbolico ($K(p) = k_1(p)k_2(p) < 0$), esistono due direzioni asintotiche le quali sono definite dai vettori

$$(*) \quad v_1 = \underline{e}_1 + \mu\underline{e}_2, \quad v_2 = \underline{e}_1 - \mu\underline{e}_2, \quad \text{dove } \mu = \sqrt{-(k_1/k_2)}(p).$$

In questo caso, le direzioni principali, ovvero quelle definite dai vettori principali $\underline{e}_1, \underline{e}_2$, sono le bisettrici degli angoli convessi determinati dalle direzioni asintotiche v_1, v_2 (cf. Figura 2). In particolare, le direzioni asintotiche in p sono ortogonali se e solo se la curvatura media H si annulla in p . Infatti, dalla (*) segue

$$v_1 \cdot v_2 = 0 \text{ se e solo se } (k_1 + k_2)(p) = 0.$$

- Se p è parabolico ($k_1(p)k_2(p) = 0, k_2(p) \neq 0$), l'unica direzione asintotica è la direzione principale definita da \underline{e}_1 .

- Se p è planare ($k_1(p) = k_2(p) = 0$), tutte le direzioni in p sono asintotiche.

- Se in un punto p esiste una direzione asintotica, allora necessariamente la curvatura gaussiana $K(p) \leq 0$.

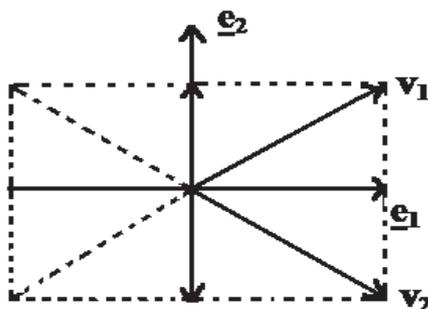


FIGURA 2. Direzioni principali e direzioni asintotiche.

Esempio 4.46. Sia M l'elicoide definito nell'Esempio 3.68. L'applicazione

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv), \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times]0, 2\pi[, \quad b \neq 0,$$

definisce una parametrizzazione locale di M . Nell'Esempio 4.34 sono stati determinati i coefficienti della seconda forma fondamentale. Siccome $\ell = n = 0$, la curva delle u e quella delle v sono curve asintotiche. In particolare, per ogni fissato $u_0 \neq 0$, l'elica circolare $\gamma(v) = \varphi(u_0, v) = (u_0 \cos v, u_0 \sin v, bv)$ è una curva asintotica di M .

Esercizio 4.47. Si consideri la superficie regolare (cf. Esempio 4.56)

$$M : \varphi(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv^2), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Si verifichi che:

a) l'equazione differenziale delle curve asintotiche di M è

$$u(u')^2 - 2vu'v' - u(v')^2 = 0;$$

b) le rette $\gamma_1(t) = (0, t, 0)$, $\gamma_2(t) = (\sqrt{3}t, t, 0)$ e $\gamma_3(t) = (-\sqrt{3}t, t, 0)$ sono curve asintotiche di M .

Esercizio 4.48. Sia $\gamma(s)$ una curva regolare, con s ascissa curvilinea, di una superficie regolare M . Si verifichi che $\gamma(s)$ è una curva asintotica di M se, e solo se, il vettore $\ddot{\gamma}(s)$ è tangente alla superficie M . In particolare:

(a) se $\gamma(s)$ ha curvatura $\kappa_\gamma(s) > 0$, allora $\gamma(s)$ è una curva asintotica se, e solo se, $n(s)$ (versore normale del riferimento di Frenet lungo γ) è ortogonale a $N(s) = N(\gamma(s))$ campo unitario normale alla superficie;

(b) se $\gamma(s)$ è un segmento di retta, allora $\gamma(s)$ è una curva asintotica.

Suggerimento: osservare che $\dot{\gamma}(s) \cdot N(s) = 0$, quindi derivare tale relazione e procedere. Per la proprietà (a) applicare la prima formula di Frenet: $\ddot{\gamma}(s) = \kappa_\gamma(s)n(s)$.

Teorema 4.49. (di Beltrami-Enneper) Sia $\gamma(s)$ una curva asintotica di M , s ascissa curvilinea, con curvatura $\kappa_\gamma(s) > 0$. Allora la curvatura gaussiana $K(\gamma(s))$ e la torsione $\tau_\gamma(s)$ soddisfano:

$$K(\gamma(s)) = -\tau_\gamma^2(s).$$

Di conseguenza, su una superficie a curvatura gaussiana costante < 0 , le curve asintotiche hanno torsione costante.

DIMOSTRAZIONE. Sia N un fissato campo unitario normale alla superficie M (in generale N è definito localmente). Sia $(t(s) = \dot{\gamma}(s), n(s), b(s))$ il riferimento di Frenet lungo $\gamma(s)$. Dall'Esercizio 4.48 segue che $n(s) \perp N(s)$. D'altronde $t(s) \perp N(s)$, per cui $N(s) = \pm b(s)$. Da ciò segue, applicando la definizione di operatore forma $S_\gamma(\dot{\gamma}(s)) = -N'(s)$ e la terza formula di Frenet $b'(s) = -\tau_\gamma(s)n(s)$, che

$$(4.14) \quad S_\gamma(\dot{\gamma}(s)) = \pm \tau_\gamma(s) n(s).$$

Siano e_1, e_2 vettori principali in un fissato, ma arbitrario, punto $\gamma(s)$ della curva, e siano κ_1, κ_2 le corrispondenti curvatures principali. Poniamo

$$\dot{\gamma}(s) = x_1 e_1 + x_2 e_2, \quad \text{quindi} \quad x_1^2 + x_2^2 = \|\dot{\gamma}(s)\|^2 = 1.$$

Allora, dalla (4.14) si ottiene

$$S_\gamma(\dot{\gamma}(s)) \cdot S_\gamma(\dot{\gamma}(s)) = \tau_\gamma^2(s),$$

ossia

$$(4.15) \quad x_1^2 \kappa_1^2 + x_2^2 \kappa_2^2 = \tau_\gamma^2(s).$$

Inoltre, γ è una curva asintotica per cui

$$S_\gamma(\dot{\gamma}(s)) \cdot \dot{\gamma}(s) = 0,$$

ossia

$$(4.16) \quad x_1^2 \kappa_1 + x_2^2 \kappa_2 = 0.$$

Se, nel fissato punto, $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ oppure $\kappa_1 = 0$ e $\kappa_2 \neq 0$, (4.15) and (4.16) implicano facilmente $K = 0 = \tau_\gamma$. Se $\kappa_1 \neq 0$ e $\kappa_2 \neq 0$, dalla (4.16) si ottiene

$$x_1^2 \kappa_1^2 + x_2^2 \kappa_2 \kappa_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_1^2 \kappa_1 \kappa_2 + x_2^2 \kappa_2^2 = 0$$

che sostituite nella (4.15) danno

$$-(x_1^2 + x_2^2)(\kappa_1 \kappa_2) = \tau_\gamma^2(s),$$

e quindi la curvatura gaussiana nel fissato punto $\gamma(s)$ è data da

$$K(\gamma(s)) = \kappa_1 \kappa_2 = -\tau_\gamma^2(s).$$

□

Osservazione 4.50. La pseudo-sfera di Beltrami (cf. Sezione 4.9) è un esempio di superficie regolare a curvatura gaussiana costante negativa.

Una motivazione per giustificare la terminologia usata per definire la natura dei punti di una superficie si ha considerando il seguente insieme di vettori tangenti in p :

$$\mathcal{D}_p = \{v_p \in T_p M : S_p(v_p) \cdot v_p = \pm 1\}, \quad \text{ovvero} \quad \mathcal{D}_p : II_p(v_p) = \pm 1.$$

Posto $v_p = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2$, \mathcal{D}_p ha equazioni

$$x_1^2 k_1 + x_2^2 k_2 = \pm 1.$$

Tali equazioni rappresentano una coppia di coniche (eventualmente a punti immaginari) che viene detta **indicatrice di Dupin**. Si hanno le seguenti possibilità:

- p ellittico ($k_1(p)k_2(p) > 0$). In tal caso l'indicatrice di Dupin è una coppia di ellissi (una a punti reali e una a punti immaginari).
- p iperbolico ($k_1(p)k_2(p) < 0$). In tal caso l'indicatrice di Dupin è una coppia di iperboli che hanno stessi asintoti i quali definiscono le direzioni asintotiche in p .
- p parabolico ($k_1(p) = 0, k_2(p) \neq 0$). In tal caso l'indicatrice di Dupin è una coppia di rette parallele.
- p planare ($k_1(p) = k_2(p) = 0$). In tal caso l'indicatrice di Dupin non ha significato.

Teorema 4.51. (*significato geometrico delle curvatures principali*) Sia M una superficie regolare e sia $p \in M$. Le curvatures principali $k_1(p)$ e $k_2(p)$ sono i valori di massimo e di minimo della curvatura normale k_n in p . In particolare, se $k_1(p) = k_2(p) = k_0$, allora $S_p = k_0 I_d$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $v_p \in T_p M$, $\|v_p\| = 1$. Sia $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ una base di vettori principali in p e siano $k_1(p), k_2(p)$ le corrispondenti curvatures principali, cioè $S_p \underline{e}_1 = k_1(p) \underline{e}_1$ e $S_p \underline{e}_2 = k_2(p) \underline{e}_2$. Allora per ogni $v_p \in T_p M$, $\|v_p\| = 1$, abbiamo

$$v_p = \cos t \underline{e}_1 + \sin t \underline{e}_2, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Pertanto

$$k_n(v_p) = S_p(v_p) \cdot v_p = (\cos t S_p \underline{e}_1 + \sin t S_p \underline{e}_2) \cdot (\cos t \underline{e}_1 + \sin t \underline{e}_2),$$

e quindi

$$(4.17) \quad k_n(v_p) = k_1(p) \cos^2 t + k_2(p) \sin^2 t.$$

La (4.17) è detta **formula di Eulero**. Da tale formula segue che tutte le curvatures normali in p si ottengono con la funzione

$$k_n(t) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto k_n(t) = k_1(p) \cos^2 t + k_2(p) \sin^2 t.$$

La funzione $k_n(t)$, in quanto continua su $[0, 2\pi]$ chiuso e limitato, ammette massimo e minimo. Derivando tale funzione, si ha

$$k'_n(t) = 2(k_2 - k_1) \cos t \sin t = (k_2 - k_1) \sin 2t.$$

Si possono quindi avere due casi:

- $k_1(p) = k_2(p)$ (ovvero p è ombelicale). Allora $k_n(t) = \cos t = k_0$. Ciò vuol dire che $k_n(v_p) = \cos t$ per ogni $v_p \in T_p M$ (con $\|v_p\| = 1$), cioè tutte le direzioni in p sono principali e quindi $S_p = k_0 I_d$.

• $k_2(p) \neq k_1(p)$. In questo caso $k'_n(t)$ si annulla per $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$. Supponiamo $k_2(p) > k_1(p)$, allora: per $t = 0, \pi, 2\pi$ si ottiene k_1 (minimo), e per $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ si ottiene k_2 (massimo). \square

Osservazione 4.52. Dal Teorema 4.51 segue che le curve principali sono curve di M la cui curvatura normale è sempre minima o massima.

4.6. L'applicazione di Gauss

C. F. Gauss nel suo articolo “*Disquisitiones generales circa superficies curvas*” del 1827, definì la curvatura di una superficie M in un punto $p \in M$ come la misura di quanto la stessa superficie si allontana dal piano tangente in quel punto. Più precisamente, fissato un punto $p \in M$, si considera la normale in quel punto alla superficie, poi si considera una sfera unitaria e si sceglie un raggio avente la direzione della normale fissata; la scelta del raggio individua un punto, che chiamiamo $G(p)$, sulla sfera. Quando p descrive una piccola regione σ su M , $G(p)$ descrive una corrispondente regione σ' sulla sfera unitaria. Gauss definì la curvatura $K(p)$ della superficie M in p , considerata a meno del segno, come il limite del rapporto tra l'area della regione σ' sulla sfera e l'area della regione σ sulla superficie M , dove il limite è fatto restringendo le regioni considerate fino a farle coincidere con i rispettivi punti di partenza:

$$(4.18) \quad K(p) = \lim_{\sigma \rightarrow p} \frac{\text{area}(\sigma')}{\text{area}(\sigma)}.$$

Verifichiamo che la definizione di curvatura data da Gauss con la formula (4.18), la quale fornisce una *interpretazione geometria della curvatura gaussiana*, coincide con la Definizione 4.15. Sia M una superficie regolare orientabile di \mathbb{R}^3 . Sia $N = (f_1, f_2, f_3)$ un campo unitario (differenziabile) normale alla superficie M . Per ogni $p \in M$ abbiamo $\|N(p)\| = 1$, ovvero N assume i suoi valori nella sfera unitaria \mathbb{S}^2 , quindi N può essere visto come un'applicazione che viene detta **applicazione di Gauss**.

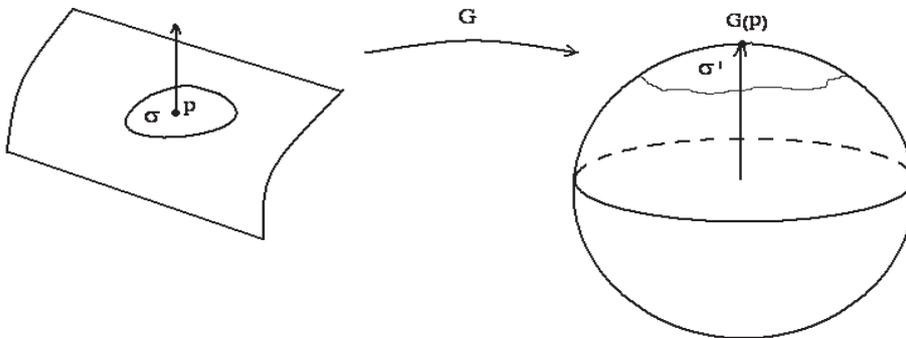


FIGURA 3. L'applicazione di Gauss.

$$G : M \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, p \mapsto (f_1(p), f_2(p), f_3(p)),$$

Per ogni $p \in M$, il piano tangente $T_{G(p)}\mathbb{S}^2$ è l'ortogonale in \mathbb{R}^3 del vettore $G(p)$, quindi $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$ si può identificare con T_pM (essendo entrambi ortogonali alla stessa direzione si possono identificare con una traslazione). Di conseguenza, il differenziale dell'applicazione di Gauss $G_{*p} : T_pM \rightarrow T_{G(p)}\mathbb{S}^2$ si può pensare come un endomorfismo of T_pM . Tale endomorfismo

$$G_{*p} : T_pM \rightarrow T_pM$$

è, a meno del segno, l'operatore forma di M in p . Infatti, fissato $p \in M$, se $v_p \in T_pM$ e $\gamma(t)$ è una curva differenziabile di M con $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = v_p$, posto $G(t) = G(\gamma(t)) = N(\gamma(t)) = N(t)$, dalla definizione di differenziale, segue che

$$G_{*p}(v_p) = N'(0) = -S_p(v_p).$$

In particolare, la curvatura gaussiana in p

$$K(p) = \det G_{*p}.$$

Inoltre, fissata una parametrizzazione regolare locale (D, φ) di M , si ha

$$G_*(\varphi_u) = -S(\varphi_u) \quad \text{e} \quad G_*(\varphi_v) = -S(\varphi_v).$$

Ora, fissato $p \in \varphi(D)$, senza perdere in generalità possiamo assumere che D sia una palla aperta di raggio r con $p = \varphi(0, 0)$. Assumiamo $K(p) \neq 0$. Allora, prendendo r sufficientemente "piccolo", possiamo assumere che $(D, \psi = G \circ \varphi)$ sia una parametrizzazione regolare locale della sfera \mathbb{S}^2 . Quindi,

$$\psi_u = (G \circ \varphi)_u = G_*(\varphi_u) = -S(\varphi_u), \quad \psi_v = (G \circ \varphi)_v = G_*(\varphi_v) = -S(\varphi_v)$$

e

$$\psi_u \wedge \psi_v = S(\varphi_u) \wedge S(\varphi_v).$$

Pertanto, dalla Definizione 3.73, abbiamo

$$\text{area}(\psi(D)) = \iint_D \|\psi_u \wedge \psi_v\| dudv = \iint_D \|S(\varphi_u) \wedge S(\varphi_v)\| dudv.$$

D'altronde, posto $S(\varphi_u) = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v$ e $S(\varphi_v) = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v$, usando le proprietà del prodotto vettoriale, si ha

$$\begin{aligned} S(\varphi_u) \wedge S(\varphi_v) &= (a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v) \wedge (a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v) \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(\varphi_u \wedge \varphi_v) \\ &= \det(S)(\varphi_u \wedge \varphi_v), \end{aligned}$$

e quindi

$$(4.19) \quad S(\varphi_u) \wedge S(\varphi_v) = K(u, v)(\varphi_u \wedge \varphi_v).$$

Pertanto, abbiamo

$$\text{area}(\psi(D)) = \iint_D |K(u, v)| \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| dudv.$$

Applicando le formule precedenti, si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{area}(\psi(D))}{\text{area}(\varphi(D))} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\iint_D |K(u, v)| \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| dudv}{\iint_D \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| dudv} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(1/\text{area}(D)) \iint_D |K(u, v)| \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| dudv}{(1/\text{area}(D)) \iint_D \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| dudv}. \end{aligned}$$

Ora, applicando il teorema del valor medio per gli integrali doppi, per qualche $(u, v) \in D$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{area}(\psi(D))}{\text{area}(\varphi(D))} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|K| \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(u, v) \\ &= \frac{|K| \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(0, 0) = |K(p)|. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi la formula

$$|K(p)| = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{area}(\psi(D))}{\text{area}(\varphi(D))},$$

ovvero la formula (4.18).

Esercizio 4.53. Determinare, usando la formula (4.18), la curvatura gaussiana di una sfera di raggio R e di un piano.

4.7. Approssimazione quadratica di una superficie

In questa sezione vediamo come la curvatura gaussiana, in particolare quando non nulla, “controlla” la forma della superficie in un intorno di un fissato punto. Inoltre, lo stesso studio darà un’altra motivazione per giustificare la terminologia usata per definire la natura dei punti di una superficie.

Sia M una superficie regolare e sia $p_0 \in M$. In un intorno di p_0 , la superficie M si può rappresentare con una delle seguenti forme:

$$z = f(x, y), \quad y = g(x, z), \quad x = h(y, z).$$

Consideriamo, ad esempio, $M : z = f(x, y)$ in un intorno di p_0 . Questo tipo di superficie si può parametrizzare con

$$\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad (u, v) \in D \text{ (aperto di } \mathbb{R}^2 \text{)}.$$

Pertanto,

$$\varphi_u = (1, 0, f_u) = (1, 0, f_x), \quad \varphi_v = (0, 1, f_v) = (0, 1, f_y),$$

e quindi

$$N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Inoltre,

$$\varphi_{uv} = (0, 0, f_{xy}), \quad \varphi_{uu} = (0, 0, f_{xx}), \quad \varphi_{vv} = (0, 0, f_{yy}).$$

I coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale sono quindi

$$E = \varphi_u \cdot \varphi_u = 1 + f_x^2, \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v = f_x f_y, \quad G = \varphi_v \cdot \varphi_v = 1 + f_y^2,$$

$$\ell = N \cdot \varphi_{uu} = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad m = N \cdot \varphi_{uv} = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

$$n = N \cdot \varphi_{vv} = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Pertanto, per ogni $p \in U = \varphi(D)$, la curvatura gaussiana e la curvatura media sono date da

$$(4.20) \quad K(p) = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2} = \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2},$$

$$(4.21) \quad H(p) = \frac{Gl - 2Fm + En}{2(EG - F^2)} = \frac{(1 + f_x^2) f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_y^2) f_{xx}}{2(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}.$$

Osservazione 4.54. Le formule (4.20) e (4.21) valgono per ogni superficie regolare di equazione cartesiana $z = f(x, y)$.

Siccome stiamo facendo uno studio qualitativo, senza perdere in generalità, possiamo supporre $p_0 = (0, 0, 0) \in M$, $T_{p_0}M = \pi_{xy} : z = 0$ e che l'asse x e l'asse y siano le direzioni principali in p_0 (basta applicare l'isometria F di \mathbb{R}^3 definita da $F(p_0) = O(0, 0, 0)$, $F_{*p_0}(\underline{e}_{1p_0}) = (1, 0, 0)_{p_0}$, $F_{*p_0}(\underline{e}_{2p_0}) = (0, 1, 0)_{p_0}$ e $F_{*p_0}N_{p_0} = (0, 0, 1)_{p_0}$). Poichè assumiamo $T_{p_0}M = \pi_{xy} : z = 0$, si ha $N_{p_0} = (0, 0, 1)_{p_0}$. D'altronde, come si è visto prima, il campo normale N è parallelo al campo vettoriale $(-f_x, -f_y, 1)$ per cui necessariamente deve essere $f_x^0 = f_y^0 = 0$. Inoltre, un facile calcolo mostra che

$$S(\varphi_u^0) = -N_u^0 = (f_{xx}^0, f_{xy}^0, 0) = f_{xx}^0 \varphi_u^0 + f_{xy}^0 \varphi_v^0,$$

$$S(\varphi_v^0) = -N_v^0 = (f_{xy}^0, f_{yy}^0, 0) = f_{xy}^0 \varphi_u^0 + f_{yy}^0 \varphi_v^0,$$

ovvero

$$S_p = \begin{pmatrix} f_{xx}^0 & f_{xy}^0 \\ f_{xy}^0 & f_{yy}^0 \end{pmatrix} \text{ (matrice hessiana della funzione } f \text{ in } p_0 = (0, 0, 0)),$$

e quindi

$$K(p_0) = f_{xx}^0 f_{yy}^0 - (f_{xy}^0)^2 \quad \text{e} \quad H(p_0) = (f_{xx}^0 + f_{yy}^0)/2.$$

Inoltre, l'asse x e l'asse y definiscono le direzioni principali in p_0 , $(1, 0, 0)_{p_0} = \varphi_u^0$ e $(0, 1, 0)_{p_0} = \varphi_v^0$, allora $(\varphi_u^0, \varphi_v^0)$ deve essere una base di vettori principali in p_0 , ovvero

$$S(\varphi_u^0) = f_{xx}^0 \varphi_u^0 \quad \text{e} \quad S(\varphi_v^0) = f_{yy}^0 \varphi_v^0,$$

e ciò implica

$$k_1(p_0) = f_{xx}^0, \quad k_2(p_0) = f_{yy}^0 \quad \text{e} \quad f_{xy}^0 = 0.$$

Ora, sviluppiamo con la formula di Taylor la funzione $f(x, y)$, con punto iniziale $(0, 0)$. Approssimando fino all'ordine 2, si ha

$$f(x, y) \approx f(0, 0) + (f_x^0 x + f_y^0 y) + \frac{1}{2}(f_{xx}^0 x^2 + 2f_{xy}^0 xy + f_{yy}^0 y^2).$$

Siccome $f(0, 0) = f_x^0 = f_y^0 = f_{xy}^0 = 0$, si ha la seguente approssimazione quadratica:

$$M : z = f(x, y) \approx \frac{1}{2}(f_{xx}^0 x^2 + f_{yy}^0 y^2),$$

dove $f_{xx}^0 = k_1(p_0)$ e $f_{yy}^0 = k_2(p_0)$. Pertanto, in un intorno di p_0 la superficie M è approssimata dalla quadrica

$$M_0 : z = \frac{1}{2}(k_1(p_0)x^2 + k_2(p_0)y^2).$$

M_0 è detta *approssimazione quadratica* di M in un intorno di $p_0 = (0, 0, 0)$. Denotiamo con \mathcal{C}_0 la conica intersezione di M_0 con lo spazio tangente $T_{p_0}M_0$, quindi

$$\mathcal{C}_0 : z = 0, k_1(p_0)x^2 + k_2(p_0)y^2 = 0.$$

Ne segue che:

- Se p_0 è un punto ellittico, cioè $K(p_0) > 0$, allora $k_1(p_0), k_2(p_0)$ sono concordi ed M_0 è un *paraboloide ellittico*. In tal caso, \mathcal{C}_0 è unione di due rette complesse coniugate.
- Se p_0 è un punto iperbolico, cioè $K(p_0) < 0$, allora $k_1(p_0), k_2(p_0)$ sono discordi ed M_0 è un *paraboloide iperbolico* (presenta una *sella*). In tal caso, \mathcal{C}_0 è unione di due rette reali distinte.
- Se p_0 è un punto parabolico, cioè $K(p_0) = 0, k_1(p_0) \neq 0, k_2(p_0) = 0$, allora M_0 ha equazione $z = (k_1(p_0)/2)x^2$ e quindi è un *cilindro parabolico*. In tal caso, \mathcal{C}_0 è unione di due rette reali coincidenti.
- Se p_0 è planare, cioè $K(p) = k_1(p_0) = k_2(p_0) = 0$, allora $M_0 : z = 0$ è un *piano*.

Nel caso di un punto ellittico o iperbolico, i risultati precedenti sono in accordo con la seguente proposizione.

Proposizione 4.55. *Sia M una superficie regolare, e sia p un punto di M .*

- *Se p è ellittico, allora esiste un intorno U di p in M tutto contenuto in uno dei due semispazi determinati da T_pM .*
- *Se p è iperbolico, allora in entrambi i semispazi determinati da T_pM cadono punti di ogni intorno U di p in M .*

DIMOSTRAZIONE. Sia (D, φ) una parametrizzazione di M con $\varphi(0, 0) = p$ e sia N un fissato versore normale a M definito in $U = \varphi(D)$. La distanza con segno, che indichiamo con d , del generico punto $q = \varphi(u, v) \in U$ dal piano tangente T_pM è data da

$$d = p\vec{q} \cdot N_p = (q - p) \cdot N_p = (\varphi(u, v) - \varphi(0, 0)) \cdot N_p.$$

Sviluppriamo con la formula di Taylor la funzione $\varphi(u, v)$:

$$\varphi(u, v) = \varphi(0, 0) + \varphi_u^0 u + \varphi_v^0 v + \frac{1}{2}(\varphi_{uu}^0 u^2 + 2\varphi_{uv}^0 uv + \varphi_{vv}^0 v^2) + A_1(u, v),$$

dove la funzione $A_1(u, v)$ soddisfa

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{A_1(u, v)}{u^2 + v^2} = 0.$$

Di conseguenza, ricordando la definizione dei coefficienti ℓ, m, n della seconda forma fondamentale, si ha

$$d = (\varphi(u, v) - \varphi(0, 0)) \cdot N_p = \frac{1}{2}(\ell_0 u^2 + 2m_0 uv + n_0 v^2) + A_2 = \frac{1}{2} \mathcal{II}_p(w_p) + A_2,$$

dove $w_p = u\varphi_u^0 + v\varphi_v^0 \in T_p M$ e $A_2 = A_1 \cdot N_p$. Ora, esprimendo w_p in una base ortonormale di vettori principali in p , $w_p = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2$, si ha

$$\mathcal{II}_p(w_p) = k_1(p)a_1^2 + k_2(p)a_2^2.$$

Pertanto,

- Se p è ellittico (ossia, $k_1(p), k_2(p)$ concordi), la seconda forma fondamentale $\mathcal{II}_p(w_p)$ ha segno fissato (sempre positivo o sempre negativo) per ogni w_p e quindi per ogni $q = \varphi(u, v)$ sufficientemente vicino a p . D'altronde, d ha lo stesso segno di $\mathcal{II}_p(w_p)$, per cui ogni punto sufficientemente vicino a p si trova in uno dei due semispazi determinati da $T_p M$.

- Se p è iperbolico (ossia, $k_1(p), k_2(p)$ discordi), la seconda forma fondamentale $\mathcal{II}_p(w_p)$ assume valori positivi e negativi, in corrispondenza si trovano punti $q = \varphi(u, v)$, sufficientemente vicini a p , in cui d ha valori positivi e altri in cui d ha valori negativi, per cui tali punti si trovano in semispazi distinti. \square

La Proposizione precedente non fornisce informazioni nel caso di punti parabolici o planari. In tal caso si può vedere con degli esempi le differenti situazioni che si possono avere.

Esempio 4.56. Consideriamo la superficie (*sella di scimmia*) $M : z = x^3 - 3xy^2$ (cf. Figura 4). Un semplice calcolo mostra che nell'origine $(0, 0, 0)$

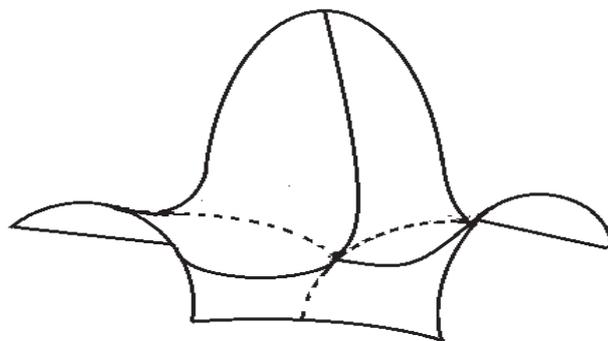


FIGURA 4. Sella di scimmia.

i coefficienti l, m, n sono nulli, pertanto $(0, 0, 0)$ è un punto planare. Tuttavia,

in ogni intorno di questo punto ci sono punti di M in entrambi i semispazi determinati dal piano tangente in $(0, 0, 0)$.

Esempio 4.57. Consideriamo il cilindro circolare retto $x^2 + y^2 = 1$ che è una superficie a punti parabolici. In tal caso, in ogni punto p del cilindro, il piano tangente $T_p M$ è tangente al cilindro lungo la retta generatrice per p .

Osservazione 4.58. Sia \mathcal{Q} una **quadrica** generale o speciale (quindi, di rango 4 o 3). Siano p_0 un punto semplice di \mathcal{Q} , π_0 il piano tangente alla quadrica in p_0 e \mathcal{C}_0 la conica sezione di \mathcal{Q} con π_0 . Ricordiamo che nella teoria delle quadriche (cf. Sezione 3.2) il punto p_0 è detto:

- *ellittico* se \mathcal{C}_0 è unione di due rette complesse e coniugate;
- *iperbolico* se \mathcal{C}_0 è unione di due rette reali e distinte;
- *parabolico* se \mathcal{C}_0 è unione di due rette coincidenti.

Inoltre, da tale teoria, è noto che tutti i punti di \mathcal{Q} sono dello stesso tipo. Le quadriche di rango 3 (coni e cilindri) sono a punti parabolici, mentre una quadrica di rango 4 può essere a punti tutti iperbolici oppure a punti tutti ellittici. Più precisamente, per le quadriche di rango 4 (a punti reali) indicate nel Corollario 3.30, abbiamo che

- l'ellisse: $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ è a punti ellittici;
- l'iperboloide (a una falda): $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ è a punti iperbolici;
- l'iperboloide (a due falde): $x^2/a^2 - (y^2/b^2 + z^2/c^2) = 1$ è a punti ellittici;
- il paraboloido "a sella": $x^2/a^2 - y^2/b^2 = z$ è a punti iperbolici;
- il paraboloido: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = z$ è a punti ellittici.

Per le quadriche di rango 3 (a punti reali), le quali sono tutte a punti parabolici, abbiamo

- il cono: $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$, $a, b > 0, c < 0$;
- il cilindro ellittico: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$;
- il cilindro iperbolico $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$;
- il cilindro parabolico: $y^2 = az$, $a \neq 0$.

Considerate tali quadriche dal punto di vista delle superfici regolari (per il cono quadrico si esclude il vertice), si verifichi per esercizio che la natura dei punti per tali superfici è la stessa di quella ricordata nell'ambito della teoria delle quadriche.

4.8. Qualche teorema globale sulle superfici

Si è visto che sfere e piani sono esempi di superfici i cui punti sono tutti ombelicali. Viceversa, vale la seguente caratterizzazione delle superfici aventi solo punti ombelicali.

Teorema 4.59. *Una superficie regolare (connessa) M i cui punti siano tutti ombelicali è contenuta in un piano oppure in una sfera.*

DIMOSTRAZIONE. Sia (D, φ) una parametrizzazione locale di M con D disco di \mathbb{R}^2 e quindi $\varphi(D)$ è un connesso di M . Per ipotesi tutti i punti di M sono ombelicali, allora per ogni $p \in \varphi(D)$, $p = \varphi(u, v)$, si ha che l'operatore forma $S_p = f(u, v)I_d$. Proviamo che la funzione $f(u, v)$ che rappresenta le curvatures principali, ovvero $k_1(u, v) = k_2(u, v) = f(u, v)$, è una costante. Da $S_p(\varphi_u) = f(u, v)\varphi_u$ e $S_p(\varphi_v) = f(u, v)\varphi_v$ segue che $f(u, v)\varphi_u = -N_u$ e $f(u, v)\varphi_v = -N_v$. Derivando la prima equazione rispetto a v e la seconda rispetto a u si ha

$$f_v\varphi_u + f\varphi_{uv} = -N_{uv} \quad \text{e} \quad f_u\varphi_v + f\varphi_{vu} = -N_{vu},$$

da cui segue

$$f_v\varphi_u - f_u\varphi_v = 0$$

e quindi $f_u = f_v = 0$. Siccome D è connesso si ottiene che $f(u, v)$ è costante su D e quindi $f(p) = \text{cost} = k_0$ per ogni $p \in \varphi(D)$. Distinguiamo due casi.

• $k_0 = 0$. In questo caso $N_u = -S_p(\varphi_u) = 0$ e $N_v = -S_p(\varphi_v) = 0$ implicano che $N = \text{cost} = N_0$ su $\varphi(D)$. Allora, fissato $p_0 \in \varphi(D)$, $\varphi(D)$ è contenuto nel piano π_0 per p_0 e ortogonale a N_0 , ovvero $(p - p_0) \cdot N_0 = 0$ per ogni $p \in \varphi(D)$. Infatti, dato $p \in \varphi(D)$ e considerata una curva differenziabile $\gamma(t)$ di $\varphi(D)$ con $\gamma(0) = p_0$ e $\gamma(1) = p$, si ha che la funzione

$$f(t) = (\gamma(t) - p_0) \cdot N_0 \quad \text{ha derivata} \quad f'(t) = \dot{\gamma}(t) \cdot N_0 = 0.$$

Pertanto, $f(t) = \text{cost} = f(0) = 0$ e in particolare $(p - p_0) \cdot N_0 = f(1) = 0$ ci dice che $p \in \pi_0$.

• $k_0 \neq 0$. Scambiando N con $-N$, se necessario, possiamo assumere $k_0 < 0$. In questo caso, su $\varphi(D)$ la curvatura gaussiana $K = \text{cost} = k_0^2$. Proviamo che $\varphi(D)$ è contenuto nella sfera di raggio $R = -1/k_0$ e centro

$$C_0 = p_0 + \frac{1}{k_0}N_{p_0},$$

dove p_0 è un fissato punto di $\varphi(D)$, ovvero proviamo che $\|C_0 - p\|^2 = R^2$ per ogni $p \in \varphi(D)$. Infatti, dato $p \in \varphi(D)$, e considerata una curva differenziabile $\gamma(t)$ di $\varphi(D)$ con $\gamma(0) = p_0$ e $\gamma(1) = p$, si ha che la curva

$$\alpha(t) = \gamma(t) + \frac{1}{k_0}N_{\gamma(t)}$$

ha vettore velocità

$$\dot{\alpha}(t) = \dot{\gamma}(t) + \frac{1}{k_0}N'(t) = \dot{\gamma}(t) - \frac{1}{k_0}S(\dot{\gamma}(t)) = 0.$$

Allora, $\alpha(t) = \text{cost}$ e quindi

$$C_0 = \alpha(0) = \alpha(1) = p + \frac{1}{k_0}N_p,$$

da cui si ha $\|C_0 - p\|^2 = (1/k_0^2)\|N_p\|^2 = R^2$.

Adesso proviamo che l'intera superficie M è contenuta in un piano oppure in una sfera. Fissato un punto p_0 di M , sia p un arbitrario punto di M . Siccome M è connessa, esiste una curva continua $\gamma(t)$ di M con $\gamma(0) = p_0$ e $\gamma(1) = p$. Suddividiamo l'arco $\gamma([0, 1])$ in un numero finito di archi $\gamma_1 = \gamma(p_0, p_1)$, $\gamma_2 = \gamma(p_1, p_2)$, ..., $\gamma_n = \gamma(p_{n-1}, p)$ abbastanza "piccoli" per cui ognuno sia contenuto nel codominio di una parametrizzazione locale (D_i, φ_i) , $i = 1, \dots, n$, del tipo considerato prima. Allora p_0 , e quindi $\varphi_1(D_1)$, è contenuto in un piano π oppure in una sfera \mathbb{S}^2 . Se $\varphi_1(D_1)$ è contenuto in un piano π (risp. in una sfera \mathbb{S}^2), allora anche $\varphi_2(D_2), \dots, \varphi_n(D_n)$ sono contenuti nello stesso piano π (risp. nella stessa sfera \mathbb{S}^2). In particolare, risulta che p è contenuto nel piano π (risp. nella sfera \mathbb{S}^2). Per l'arbitrarietà di p , possiamo concludere che tutta la superficie M è contenuta in un piano oppure in una sfera. \square

Corollario 4.60. *Una superficie regolare (connessa) M a curvatura gaussiana positiva e i cui punti siano tutti ombelicali è contenuta in una sfera.*

Teorema 4.61. *Sia M una superficie regolare (connessa) compatta. Allora, esiste almeno un punto in cui la curvatura gaussiana è positiva.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la funzione

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto f(p) = \|p\|^2 = p \cdot p.$$

Poichè f è continua ed M è compatta, allora esiste un punto p_0 in cui f assume il massimo:

$$\|p\|^2 \leq \|p_0\|^2 \quad \forall p \in M.$$

In particolare, la superficie M è contenuta nella palla di centro l'origine e raggio $r = \|p_0\|$. Proviamo che la curvatura gaussiana di M è positiva nel punto p_0 . Sia $V_0 \in T_{p_0}M$ un vettore tangente con $\|V_0\| = 1$, e sia $\gamma(t)$, $|t| < \varepsilon$, una curva differenziabile con $\gamma(0) = p_0$ e $\dot{\gamma}(0) = V_0$. La funzione reale $\phi(t) = f(\gamma(t)) = \gamma(t) \cdot \gamma(t)$, $|t| < \varepsilon$, ha un massimo per $t = 0$, dunque $\phi'(0) = 0$. D'altronde,

$$\phi'(t) = 2\dot{\gamma}(t) \cdot \gamma(t) \quad \implies \quad 2\dot{\gamma}(0) \cdot \gamma(0) = \phi'(0) = 0,$$

per cui $V_0 \cdot p_0 = 0$. Per l'arbitrarietà di V_0 possiamo affermare che

$$\vec{p}_0 \perp T_{p_0}M,$$

ossia il vettore definito da p_0 è ortogonale al piano tangente $T_{p_0}M$. Sia ora N un campo vettoriale unitario definito in un intorno di p_0 . Il risultato precedente ci dice che $N(p_0) = \pm(1/r)p_0$, e quindi scegliamo N tale che

$$N(p_0) = +(1/r)p_0.$$

Applicando l'operatore forma a V_0 si ha

$$S_{p_0}V_0 = -N'(0), \quad \text{dove} \quad N(t) = N(\gamma(t)).$$

Da $\dot{\gamma}(t) \cdot N(t) = 0$ segue che $\ddot{\gamma}(t) \cdot N(t) + \dot{\gamma}(t) \cdot N'(t) = 0$, e quindi per $t = 0$ abbiamo

$$(4.22) \quad (S_{p_0} V_0) \cdot V_0 = -N'(0) \cdot \dot{\gamma}(0) = \ddot{\gamma}(0) \cdot N(0) = (1/r)(\ddot{\gamma}(0) \cdot p_0).$$

D'altronde, $t = 0$ è di massimo per la funzione $\phi(t)$, per cui $\phi''(0) \leq 0$. Siccome,

$$\phi''(t) = (\phi'(t))' = 2(\dot{\gamma}(t) \cdot \gamma(t))' = 2(\ddot{\gamma}(t) \cdot \gamma(t) + \dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t)),$$

allora

$$0 \geq \phi''(0) = 2(\ddot{\gamma}(0) \cdot \gamma(0) + \dot{\gamma}(0) \cdot \dot{\gamma}(0)) = 2(\ddot{\gamma}(0) \cdot p_0 + V_0 \cdot V_0),$$

e quindi

$$(4.23) \quad \ddot{\gamma}(0) \cdot p_0 + 1 \leq 0.$$

Usando la (4.22) e la (4.23), la curvatura normale di M in p_0 e nella direzione di V_0 è data da

$$k_n(V_0) = (S_{p_0} V_0) \cdot V_0 = \frac{1}{r}(\ddot{\gamma}(0) \cdot p_0) \leq -\frac{1}{r} < 0.$$

In particolare, le curvature principali in p_0 soddisfano $-k_1(p_0) \geq (1/r) > 0$ e $-k_2(p_0) \geq (1/r) > 0$, pertanto la curvatura gaussiana

$$K(p_0) = k_1(p_0)k_2(p_0) \geq (1/r^2) > 0.$$

□

Come conseguenza, otteniamo

Corollario 4.62. *In \mathbb{R}^3 non esistono superfici regolari compatte con curvatura gaussiana $K \leq 0$. In particolare, in \mathbb{R}^3 non esistono superfici regolari compatte minimali.*

4.9. La pseudo-sfera di Beltrami

Il piano euclideo ($K=0$) e la sfera canonica $\mathbb{S}^2(R)$ ($K = \frac{1}{R^2}$) sono modelli di superfici regolari di \mathbb{R}^3 a curvatura gaussiana costante non negativa.

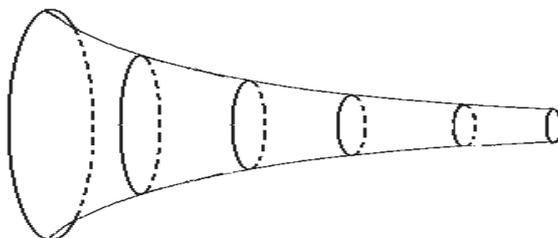


FIGURA 5. La pseudo-sfera di Beltrami.

La *pseudo-sfera di Beltrami* è un modello di superficie regolare a curvatura gaussiana costante negativa (che non è possibile visualizzare in modo completo

in \mathbb{R}^3). Nel seguito diamo una descrizione di tale superficie (cf. M. Villa [27]). La pseudo-sfera di Beltrami è la superficie generata dalla rotazione di una trattrice intorno al proprio asintoto. La trattrice dal punto di vista meccanico è la curva descritta in un piano orizzontale da un punto pesante attaccato all'estremo di un filo teso, di cui l'altro estremo percorre una retta appartenente a quel piano (ciò giustifica il nome della curva). La curva è anche detta *curva del cane* pensando ad una persona che, percorrendo una retta, tira per il guinzaglio un cane restio a seguirlo.

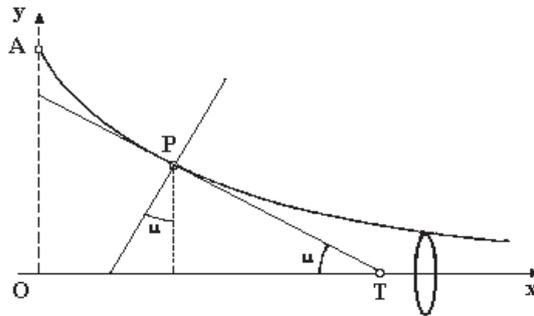


FIGURA 6. La trattrice.

Nel piano euclideo la *trattrice* è una curva per cui, se P è un punto di essa e T è il punto in cui la tangente in P interseca una retta fissa a , il segmento PT ha lunghezza costante ($= R$) al variare di P sulla curva. La retta a è l'asintoto della trattrice. Supponendo che la retta a sia l'asse x , allora la trattrice γ ha equazione del tipo $y = y(x)$. Fissato $P_0(x_0, y_0) \in \gamma$ e detto T il punto in cui la tangente in P_0 incontra l'asse x , la retta $[P_0, T]$ è la tangente in P_0 a γ , quindi ha equazione

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \quad \text{con} \quad y'(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0).$$

Siccome T ha coordinate $x_1 = x_0 - \frac{1}{y'(x_0)}y_0 = x_0 - \frac{dx}{dy}(y_0)y_0$ e $y_1 = 0$, si ha

$$\overline{P_0T} = \text{cost} = R \Leftrightarrow R^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = \left(\frac{dx}{dy}(y_0)\right)^2 y_0^2 + y_0^2.$$

Considerato $P(x, y)$ generico punto di γ , si ha :

$$R^2 = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 y^2 + y^2, \quad \text{cioè} \quad \frac{R^2 - y^2}{y^2} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2, \quad y > 0.$$

Pertanto,

$$x' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \sqrt{R^2 - y^2} \quad (\text{eq. differenziale della curva}),$$

e quindi

$$x = \int \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y} dy.$$

Indicato con u l'angolo formato dalla tangente PT con l'asse x , si ha

$$y = R \operatorname{sen} u, \quad x = R \int \frac{\cos^2 u}{\operatorname{sen} u} du = R \left(\int \frac{du}{\operatorname{sen} u} - \int \operatorname{sen} u du \right).$$

Il punto A inizio della curva (pensando alla generazione meccanica) ha coordinate $(0, R)$, pertanto dovrà aversi $x = 0$ per $u = \pi/2$. Dunque, le equazioni parametriche di γ sono :

$$(4.24) \quad \gamma : \begin{cases} x = R \ln \tan u/2 + R \cos u, \\ y = R \operatorname{sen} u, \quad u \in]0, \pi[. \end{cases}$$

$\gamma(u)$ è una curva regolare tranne che per $u = \pi/2$. Eliminando u si ottiene l'equazione cartesiana:

$$x = -\sqrt{R^2 - y^2} + R \ln \frac{R + \sqrt{R^2 - y^2}}{y}.$$

Per $u \in]0, \pi/2[$ si ottiene la curva in Figura 6, per $u \in]\pi/2, \pi[$ si ottiene una curva simmetrica rispetto all'asse y . Infatti, cambiando nella (4.24) u con $\pi - u$, la x cambia di segno mentre la y resta inalterata. Quindi, γ è simmetrica rispetto all'asse y . Il punto A è una cuspidale per la curva e l'asse y è la relativa tangente cuspidale. La pseudo-sfera si ottiene ruotando γ intorno all'asse x , pertanto è parametrizzata da

$$\varphi(u, v) = (R(\ln \tan u/2 + \cos u), R \operatorname{sen} u \cos v, R \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v),$$

dove $u \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $v \in]0, 2\pi[$. I vettori tangenti coordinati sono

$$\varphi_u = R \cos u \left(\frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}, \cos v, \operatorname{sen} v \right), \quad \varphi_v = R (0, -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \cos v),$$

e quindi la prima forma fondamentale è definita dai coefficienti

$$E = \varphi_u \cdot \varphi_u = R^2 \frac{\cos^2 u}{\operatorname{sen}^2 u}, \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v = 0, \quad G = \varphi_v \cdot \varphi_v = R^2 \operatorname{sen}^2 u.$$

Inoltre,

$$N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = (\operatorname{sen} u, -\cos u \cos v, -\cos u \operatorname{sen} v)$$

e quindi i coefficienti della seconda forma fondamentale sono dati da

$$l = \varphi_{uu} \cdot N = -R \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}, \quad m = \varphi_{uv} \cdot N = 0, \quad n = \varphi_{vv} \cdot N = R \operatorname{sen} u \cos u.$$

Pertanto, la curvatura gaussiana della pseudo-sfera è una costante negativa:

$$(4.25) \quad K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} = \frac{ln}{EG} = -\frac{1}{R^2}.$$

Si può verificare che la geometria sulla pseudo-sfera di Beltrami, assumendo come rette le geodetiche di tale superficie, coincide (limitatamente a regioni opportune) con la geometria piana iperbolica. Hilbert dimostrò che non esiste una superficie dello spazio euclideo a curvatura costante negativa in cui valga in tutta la sua estensione la geometria iperbolica. Più precisamente, nello

spazio euclideo \mathbb{R}^3 non esiste una superficie regolare completa (nel senso della Definizione 5.92) di curvatura gaussiana costante negativa.

Osservazione 4.63. La pseudo-sfera di Beltrami è una superficie di rotazione ottenuta ruotando la trattrice $\gamma(u)$, definita dall'equazione (4.24), intorno all'asse x . Tale curva $\gamma(u)$ non è parametrizzata a velocità unitaria. Ora, consideriamo una curva semplice regolare $\gamma(u) : x = f(u) > 0, y = 0, z = g(u), u \in]a, b[$, parametrizzata con l'ascissa curvilinea, quindi con $(f')^2 + (g')^2 = 1$. La superficie di rotazione ottenuta ruotando $\gamma(u)$ intorno all'asse z è parametrizzata da (cf. Esempio 3.67)

$$\varphi(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)).$$

Inoltre, la curvatura gaussiana di M è data dall'equazione (cf. Esempio 4.25)

$$(4.26) \quad K(u, v) = -\frac{f''(u)}{f(u)}.$$

Assumendo che la curvatura gaussiana $K = \text{cost.} = -1$, la soluzione generale dell'equazione (4.26) è

$$f(u) = ce^u + de^{-u}, \quad \text{con } c, d \text{ costanti.}$$

Al fine di esprimere $g(u)$ con funzioni elementari, assumiamo $c = 1$ e $d = 0$. Allora

$$f(u) = e^u \quad \text{e} \quad g(u) = \int \sqrt{1 - e^{2u}} du \quad \text{con } u \leq 0.$$

Risolvendo l'integrale (tralasciando la costante arbitraria) si trova che la curva γ parametrizzata a velocità unitaria è la trattrice con equazioni parametriche

$$\gamma(u) = (e^u, 0, \sqrt{1 - e^{2u}} - \cosh^{-1}(e^{-u})),$$

e con equazioni cartesiane

$$y = 0, \quad z = \sqrt{1 - x^2} - \cosh^{-1}(1/x), \quad 0 < x \leq 1.$$

Quindi, la pseudo-sfera di Beltrami è parametrizzata con

$$\varphi(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v, \sqrt{1 - e^{2u}} - \cosh^{-1}(e^{-u})), \quad u < 0 \text{ e } v \in]0, 2\pi[.$$

Con questa parametrizzazione i coefficienti della prima forma fondamentale sono (cf. Esempio 3.67) $E = 1, F = 0$ e $G = f^2(u) = e^{2u}$. Adesso consideriamo il cambiamento di parametri

$$\bar{u} = v, \quad \bar{v} = e^{-u}, \quad \text{e quindi} \quad u = -\ln \bar{v}, \quad v = \bar{u}.$$

Rispetto alla parametrizzazione definita dai nuovi parametri (\bar{u}, \bar{v}) , i coefficienti della prima forma fondamentale sono dati dalla (3.20), ovvero

$$\begin{pmatrix} \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{pmatrix} = J_c^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2(u) \end{pmatrix} J_c,$$

dove $J_c = \begin{pmatrix} 0 & -1/\bar{v} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pertanto si ottiene $\bar{E} = \bar{F} = 1/\bar{v}^2$ e $\bar{G} = 0$. Questa presentazione locale della prima forma fondamentale della pseudo-sfera di Beltrami si presta ad essere estesa al caso del modello (iperbolico) del semipiano di Poincaré $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ (cf. Sezione 6.2).

Esercizio 4.64. Risolvere l'equazione (4.26) nel caso $K = \text{cost} = 0$ e nel caso $K = \text{cost} > 0$, esplicitando i tipi di superfici che si ottengono.

