Capitolo 3

Spazio duale. Convergenze (sequenziali) debole e debole*

Prologo

R. Courant, nell'Introduzione al suo libro: *Dirichlet's Principle, Conformal Mapping and Minimal Surfaces, Interscience, New York, 1950.*
scriveva:

A new era in the history of mathematics opened when Gauss proved the fundamental theorem of algebra. Abandoning the futile attempts of his predecessors to solve algebraic equations of higher degree by root extraction, he took a step of general significance by proving merely the existence of the roots in questions. For the first time it was clearly understood that the primary task in a mathematical problem is to prove the existence of a solution. To find procedures by which the solution can be explicity obtained is a further question, distinct from that of existence. Since the beginning of the last century this distinction has played a clarifying role contributing to progress in all fields of mathematics. Among the existence proofs which dominated the mathematical thinking of this period, the most celebrated and consequential were those based on extremum problems of the calculus of variations and suggested by actual or imagined physical experiments.

Per motivare l'introduzione e lo studio della convergenza debole, consideriamo, ad esempio, un problema di minimo del Calcolo delle Variazioni[1] in uno spazio di funzioni X normato e completo .
Se non è possibile trovare una forma esplicita della soluzione, in genere si

[1] Un modello può essere il *Principio di Dirichlet* (cfr., ad esempio in [7] e [6]), studiato nel XX secolo da D. Hilbert (1900), J. Hadamard (1906), H. Lebesgue (1907), e che ha trovato una dimostrazione definitiva dopo gli anni $'40$ col contributo, tra gli altri, di L. Tonelli e C. B. Morrey.

segue un procedimento, consistente in tre passi, che si basa essenzialmente su una generalizzazione del teorema di Weierstrass:

Teorema 3.0.1. ***(di Weierstrass-Fréchet)*** *Siano X uno spazio topologico e $\mathcal{G}$ un funzionale, $\mathcal{G} : X \to \mathbb{R}$.*
Supponiamo che

(1) $\mathcal{G}$ sia limitato inferiormente;

(2) $\mathcal{G}$ sia sequenzialmente semicontinuo inferiormente (s.c.i) (cioè, per ogni successione $(u_n)_n$ in X convergente a $u \in X$, risulta

$$\mathcal{G}(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathcal{G}(u_n);$$

(3) X sia sequenzialmente compatto (cioè, da ogni successione $(u_n)_n$ in X si può estrarre una sottosuccessione $(u_{n_k})_k$ convergente in X).

Allora $\mathcal{G}$ ha minimo in X.[2]

Si tratta, quindi, di trovare delle successioni minimizzanti (più precisamente estremanti) $(u_n)_n$ (cioè, $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{G}(u_n) = \inf_X \mathcal{G}$) dalle quali sia possibile estrarre sottosuccessioni convergenti e sfruttare poi la sequenziale s.c.i. di $\mathcal{G}$, per concludere che i punti limite sono di minimo.
Per il conseguimento del punto (3) si incontra una rilevante differenza tra $\mathbb{K}^N$ e gli spazi di funzioni a dimensione infinita. Infatti, in $\mathbb{K}^N$ tutti gli insiemi chiusi e limitati sono compatti, cioè in $\mathbb{K}^N$ vale il Teorema di Bolzano-Weierstrass.
Abbiamo già provato che questa importante proprietà di compattezza è valida in ogni spazio normato a dimensione finita e non è valida in alcuno spazio a dimensione infinita (Teorema 1.8.5).
Ad esempio, nello spazio $(C^0([0,1];\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, la successione di funzioni continue $f_n(t) := \sin(nt)$ è limitata, ma non ammette alcuna sottosuccessione uniformemente convergente.

[2] *Dimostrazione.* Per (1), sia $(u_n)_n$ una successione minimizzante in X, ossia tale che $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{G}(u_n) = \inf_X \mathcal{G}$. Per (3) esiste una successione estratta $(u_{n_k})_k$ convergente in X ad un elemento u_0. Per (2) risulta

$$\inf_X \mathcal{G} \leq \mathcal{G}(u_0) \leq \liminf_{k\to+\infty} \mathcal{G}(u_{n_k}) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{G}(u_n) = \inf_X \mathcal{G}$$

e quindi

$$-\infty < \mathcal{G}(u_0) = \inf_X \mathcal{G}$$

.

Quindi, in uno spazio di funzioni a dimensione infinita X, l'aver dimostrato che una successione è limitata, non garantisce l'esistenza di una sottosuccessione convergente.
Per superare questa difficoltà, si possono adottare due importanti strategie:

(i) **Introdurre una nozione di convergenza più debole della convergenza in norma (*convergenza forte*)** e provare che ogni successione limitata ha una sottosuccessione che converge in questo senso più debole, anche in uno spazio a dimensione infinita.
Risultati in questa direzione sono il Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki (Teorema 3.2.1), il Teorema 3.3.5 di compattezza debole negli spazi di Hilbert, e più in generale il Teorema 4.3.3 di compattezza debole negli spazi riflessivi.

(ii) **Cercare proprietà addizionali delle funzioni che, su uno spazio di dimensione infinita, possano garantire l'esistenza di una sottosuccessione convergente.**
Una risposta in tal senso è data dal Teorema di compattezza di Ascoli-Arzelà nello spazio $(C^0(E;\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, dove E è spazio metrico compatto (Teorema 3.4.3).

Osserviamo esplicitamente che, in generale, nelle applicazioni né lo spazio X né la convergenza sono fissati a priori, ma devono essere scelti in modo da soddisfare due requisiti contrastanti: la compattezza di X (punto (3) precedente), e la s.c.i. di $\mathcal{G}$ (punto (2) precedente).
Si tratta di due richieste in concorrenza tra loro.
Infatti,
per ottenere la compattezza di X, è preferibile che la topologia di X sia "abbastanza debole " (quindi, ci sono più successioni convergenti), per cui maggiore è la probabilità che una sottosuccessione converga.
Invece,
per avere la s.c.i. del funzionale $\mathcal{G}$ è preferibile dotare X di una convergenza "relativamente forte": più la topologia su X è forte (quindi, ci sono meno successioni convergenti), maggiore è la probabilità che il funzionale $\mathcal{G}$ sia s.c.i.
Per questi motivi lo spazio X va dotato di una convergenza per quanto possibile "relativamente debole".
È evidente che, nelle specifiche applicazioni, "l'efficacia della scelta" può essere valutata a posteriori.

Motivati dalle precedenti considerazioni, introduciamo ora convergenze più deboli della convergenza in norma.

3.1 Convergenze (sequenziali) debole, debole* e proprietà

Definizione 3.1.1 (Spazio duale di uno spazio normato). Sia $(X, \|\cdot\|_X)$ uno spazio normato. Consideriamo lo spazio dei funzionali $\varphi : X \to \mathbb{K}$ lineari e limitati, denotato con $B(X;\mathbb{K}) =: X^*$.[3]

X^*, munito della norma

$$\|\varphi\|_{X^*} := \sup_{\|x\|_X \leq 1} |\varphi(x)| \left(= \sup_{\|x\|_X = 1} |\varphi(x)| = \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|_X} \right.$$
$$\left. = \inf\{M > 0 : \forall\, x \in X\ |\varphi(x)| \leq M\|x\|_X\} \right).$$

è uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$ (Teorema 1.6.7) e si chiama *spazio duale (topologico) di* X.

Introduciamo ora la convergenza debole di successioni su X e la convergenza debole* di successioni su X^* (duale di X).

Definizione 3.1.2 (convergenza debole su X). Una successione $(x_n)_n$ in uno spazio di Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ è *convergente debolmente* in X se esiste $x \in X$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x) \quad \text{per ogni } \varphi \in X^*. \tag{3.1}$$

In tal caso, si dice che x è il *limite debole* della successione $(x_n)_n$ e si scrive

$$x_n \rightharpoonup x.$$

Osservazione 3.1.3. D'ora in avanti diremo che la successione $(x_n)_n$ *converge fortemente* o *in norma* $\|\cdot\|_X$ a $x \in X$ se $\|x_n - x\|_X \to 0$ per $n \to +\infty$ e scriveremo $x_n \to x$. Dimostreremo, in seguito, che la convergenza in norma risulta essere più forte della convergenza debole (giustificando anche la terminologia usata!). Ricordiamo che, in caso di convergenza in norma, il limite è unico. Per quanto riguarda la convergenza debole in X, proveremo che vale il medesimo risultato: *il limite debole, se esiste, è unico.*

Definizione 3.1.4 (convergenza debole* su X*). Una successione di funzionali $(\varphi_n)_n \subset X^*$ è *convergente debolmente** in X^* se esiste $\varphi \in X^*$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x) \quad \text{per ogni } x \in X. \tag{3.2}$$

[3] X^* non si riduce allo zero (per il corollario 4.1.6 del Teorema di Hahn-Banach) se X non è banale.

In tal caso, si dice che φ è il *limite debole** della successione $(\varphi_n)_n$ e si scrive

$$\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi.$$

Osservazione 3.1.5. La convergenza in norma $\|\cdot\|_{X^*}$ risulta essere molto più forte della convergenza debole*. Infatti

$$\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to+\infty} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| = 0 \text{ per ogni } x \in X,$$

mentre

$$\varphi_n \to \varphi \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to+\infty} \sup_{\|x\|_X \le 1} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| = 0.$$

In altre parole, la convergenza debole* di funzionali è puntuale, quella in norma $\|\cdot\|_{X^*}$ è uniforme.

Le successive due proposizioni contengono le proprietà principali delle convergenze deboli appena introdotte in X e in X^*; per la dimostrazione, rimandiamo all'Osservazione 4.5.6.

Proposizione 3.1.6 (proprietà della convergenza debole).
Sia $(X, \|\cdot\|_X)$ uno spazio di Banach e sia $(x_n)_n$ una successione in X.

(i) Se $x_n \rightharpoonup x$, allora x è unico.

(ii) Se $x_n \to x$ fortemente in X, allora $x_n \rightharpoonup x$.

*(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$, allora $(\|x_n\|_X)_n$ è limitata (**successioni debolmente convergenti sono limitate**) e*

$$\|x\|_X \le \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|_X \tag{3.3}$$

(debole semicontinuità inferiore della norma $\|\cdot\|_X$).

(iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ e $\varphi_n \to \varphi$ in X^* (cioè $\|\varphi_n - \varphi\|_{X^*} \to 0$), allora

$$\varphi_n(x_n) \to \varphi(x).$$

Osservazione 3.1.7. In riferimento alla (ii) della Proposizione 3.1.6 osserviamo che: *In uno spazio a dimensione infinita, in generale, non è vero che la convergenza debole implica la convergenza forte.*
Diamo un esempio. La successione di l^2

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots),\; e_2 = (0, 1, 0, \dots),\; e_3 = (0, 0, 1, 0, \dots),\; \dots$$

converge debolmente a zero in l^2.
Infatti, per il Teorema di Riesz-Fréchet, preso un arbitrario funzionale lineare e continuo $\varphi \in l^2$, esiste (unico) $u_\varphi = u = (u_1, u_2, \ldots) \in l^2$ tale che

$$\varphi(v) = (u, v) \quad \text{per ogni } v \in l^2.$$

Pertanto, $\varphi(e_n) = (u, e_n) = u_n$ e poiché $u_n \to 0$ per $n \to +\infty$, otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(e_n) = 0.$$

Ma, la precedente successione $(e_n)_n$ non converge fortemente (in norma) a nessun limite.

Vale, più in generale, il seguente risultato (cfr. [5]).
Sia X uno spazio di Banach infinito-dimensionale soddisfacente **una** delle seguenti assunzioni:

(a) X^* è separabile ;

(b) X è riflessivo.

Allora, si può provare che esiste una successione $(x_n)_n \subset X$ tale che x_n converge debolmente in X e $\|x_n\|_X = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Osservazione 3.1.8. Vi sono delle eccezioni. Qui ne segnaliamo una.
Un risultato (dovuto a **Schur**) afferma che nello spazio l^1 risulta:

$$x^{(n)} \rightharpoonup x \text{ debolmente in } l^1 \Leftrightarrow \; x^{(n)} \to x \text{ fortemente in } l^1.$$

Ovviamente è sufficiente dimostrare l'implicazione :

$$x^{(n)} = (x_i^n)_i \rightharpoonup x \text{ debolmente in } l^1 \Rightarrow \; x^{(n)} = (x_i^n)_i \to x \text{ fortemente in } l^1.$$

La dimostrazione di questa implicazione è data alla fine di 5.11.

Proposizione 3.1.9 (proprietà della convergenza debole*).
Sia $(X, \|\cdot\|_X)$ uno spazio di Banach e sia $(\varphi_n)_n$ una successione in X^*.

(i) Se $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$, allora φ è unico.*

(ii) Se $\varphi_n \to \varphi$ fortemente in X^*, allora $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$.*

(iii) Se $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$, allora $(\|\varphi_n\|_{X^*})_n$ è limitata e*

$$\|\varphi\|_{X^*} \le \liminf_{n\to+\infty} \|\varphi_n\|_{X^*} \tag{3.4}$$

(debole semicontinuità inferiore della norma $\|\cdot\|_{X^*}$).*

(iv) Se* $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ *e* $x_n \to x$ *in* X *(cioè* $\|x_n - x\|_X \to 0$*), allora*

$$\varphi_n(x_n) \to \varphi(x).$$

Il risultato che segue mostra che, in uno spazio a dimensione finita, la convergenza debole e quella forte coincidono.

Proposizione 3.1.10. *In uno spazio* X *a dimensione finita* N *la convergenza debole coincide con quella forte.*

Dimostrazione. Sia $\{u_1, \ldots, u_N\}$ una base ortonormale (ortogonale e normalizzata) in X rispetto al prodotto scalare $(\cdot, \cdot)$ e sia $(x^{(k)})_k$ una successione in X convergente debolmente all'elemento $x \in X$. Siano

$$x^{(k)} = x_1^{(k)} u_1 + \ldots + x_N^{(k)} u_N$$

e

$$x = x_1 u_1 + \ldots + x_N u_N.$$

Allora, poiché ogni applicazione $v \mapsto (v, u_j)$ $(j = 1, \ldots, N)$ appartiene a X^* e $x^{(k)} \rightharpoonup x$, si ha

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= (x^{(k)}, u_1) \to (x, u_1) = x_1, \\ &\vdots \\ x_N^{(k)} &= (x^{(k)}, u_N) \to (x, u_N) = x_N, \end{aligned}$$

cioè

$$(x_1^{(k)}, \ldots, x_N^{(k)}) \to (x_1, \ldots, x_N).$$

Ne segue che

$$\|x^{(k)} - x\|_X = \left(\sum_{j=1}^{N} (x_j^{(k)} - x_j)^2 \right)^{1/2} \to 0,$$

cioè $(x^{(k)})_k$ converge fortemente ad x. Poiché la convergenza forte implica sempre quella debole, l'equivalenza di queste convergenze è dimostrata. □

3.2 Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki

Per il Teorema 1.8.5, se lo spazio X^* ha dimensione infinita, la palla chiusa unitaria in X^*

$$\overline{B_{X^*}} = \{\varphi \in X^* : \|\varphi\|_{X^*} \le 1\}$$

non è compatta rispetto alla convergenza forte in X^*. Tuttavia, se invece della convergenza forte consideriamo la convergenza debole* in X^*, vale il seguente teorema, che esprime un risultato di locale compattezza negli spazi duali.

Teorema 3.2.1 (Banach-Alaoglu-Bourbaki).
Se $(X, \|\cdot\|_X)$ è uno spazio di Banach separabile[4]*, allora la palla chiusa unitaria in X^* è compatta rispetto alla convergenza (sequenziale) debole* (cioè, ogni successione limitata di funzionali lineari e limitati $\varphi_n \in X^*$ ha una sottosuccessione che converge debolmente*).*

Dimostrazione. Sia $(\varphi_n)_n$ una successione limitata di funzionali in X^*, quindi

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\|_{X^*} \leq c.$$

Proviamo che esiste una sua estratta $(\varphi_{n_k})_k$ debolmente* convergente ad una certa $\varphi \in X^*$.

Dividiamo la dimostrazione in vari passi.

1. (Costruzione del funzionale limite φ). Poiché X è separabile, esiste un sottoinsieme numerabile e denso $S = \{x_j : j \in \mathbb{N}\} \subset X$. Mediante un *procedimento di diagonalizzazione*, costruiamo una sottosuccessione $(\varphi_{n_k})_k$ che converge puntualmente in ogni x_j, cioè tale che, per ogni $j \in \mathbb{N}$, esista un valore $\varphi(x_j) \in \mathbb{K}$ per cui valga

$$\lim_{k\to+\infty} \varphi_{n_k}(x_j) = \varphi(x_j). \tag{3.5}$$

Poiché la successione numerica $(\varphi_n(x_1))_n \subset \mathbb{K}$ è limitata, per il teorema di Bolzano-Weierstrass esiste un insieme infinito di indici $I_1 \subset \mathbb{N}$ tale che la sottosuccessione $(\varphi_n(x_1))_{n\in I_1}$ converge ad un certo valore limite $\varphi(x_1) \in \mathbb{K}$. Analogamente, nel punto x_2, la precedente (sotto)successione $(\varphi_n(x_2))_{n\in I_1}$ è limitata e quindi esiste un insieme infinito di indici $I_2 \subset I_1$ tale che la sottosuccessione $(\varphi_n(x_2))_{n\in I_2}$ converge ad un valore limite $\varphi(x_2) \in \mathbb{K}$. Induttivamente, per ogni $j \in \mathbb{N}$, possiamo trovare un insieme infinito di indici $I_j \subset I_{j-1}$ tale che la sottosuccessione $(\varphi_n(x_j))_{n\in I_j}$ converge ad un valore limite $\varphi(x_j) \in \mathbb{K}$. Otteniamo, così, una sequenza di sottosuccessioni di $(\varphi_n)_n$, individuate dagli insiemi di indici I_j, in cui ciascuna sottosuccessione è a sua volta estratta da tutte le precedenti e tale che per ogni $j \in \mathbb{N}$ $(\varphi_n)_{n\in I_j}$ è convergente nei punti $x_1, \ldots, x_j$. Per costruire la sottosuccessione diagonale cercata, scegliamo nel seguente modo una sottosuccessione di indici

[4] Questo Teorema rimane valido anche se lo spazio X non è separabile.

$n_1 < n_2 < \ldots$, con $n_k \in I_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Denotiamo con $\varphi_{n_1}(x_1)$ il primo elemento della prima successione $(\varphi_n(x_1))_{n \in I_1}$, con $\varphi_{n_2}(x_2)$ il secondo elemento della seconda successione $(\varphi_n(x_2))_{n \in I_2}$ e, così via, con $\varphi_{n_k}(x_k)$ il k-esimo elemento della k-esima successione $(\varphi_n(x_k))_{n \in I_k}$. Otteniamo così una sottosuccessione (estratta dalla successione di partenza $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$) di funzionali $(\varphi_{n_k})_k \subset X^*$ tale che, per ogni $j \in \mathbb{N}$, la corrispondente successione numerica $(\varphi_{n_k}(x_j))_k$ converge al valore numerico $\varphi(x_j)$, soddisfacendo (3.5). Possiamo, allora, definire su S la funzione $\varphi : S \to \mathbb{K}$, $x_j \mapsto \varphi(x_j)$.

2. (Linearità e limitatezza del funzionale limite φ). La funzione limite φ trovata al punto precedente è uniformemente Lipschitziana, con costante di Lipschitz $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi_n\|_{X^*}$. Infatti, per ogni coppia di punti $x_j, x_l \in S$, si ha

$$\begin{aligned} |\varphi(x_j) - \varphi(x_l)| &= \lim_{k \to +\infty} |\varphi_{n_k}(x_j) - \varphi_{n_k}(x_l)| \\ &\leq \limsup_{k \to +\infty} \|\varphi_{n_k}\|_{X^*} \|x_j - x_l\|_X \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi_n\|_{X^*} \|x_j - x_l\|_X . \end{aligned}$$

Allora, $\varphi : S \to \mathbb{K}$ può essere estesa per continuità a $\overline{S}$, cioè all'intero spazio X (essendo $\overline{S} = X$ per ipotesi). Continuando ad indicare ancora con $\varphi : X \to \mathbb{K}$ tale estensione, osserviamo che φ è limite puntuale di una successione uniformemente limitata di funzionali lineari; pertanto essa è anche lineare e limitata, quindi $\varphi \in X^*$.[5]

3. (Convergenza debole* al funzionale limite φ). Resta da provare che la sottosuccessione $(\varphi_{n_k})_k$ converge debolmente* al funzionale limite φ, cioè che

$$\lim_{k \to +\infty} |\varphi_{n_k}(x) - \varphi(x)| = 0 \quad \forall\, x \in X. \tag{3.6}$$

Sia $x \in X$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Poiché S è denso in X, esiste $x_j \in S$ tale che $\|x - x_j\|_X < \varepsilon$. Poiché φ e tutte le funzioni φ_n sono Lipschitziane,

[5] *Principio di estensione.* Un funzionale lineare limitato φ con dominio S può essere esteso a un funzionale lineare limitato con dominio $\overline{S}$. Questa estensione è unica e la limitazione è preservata nella estensione.

si ha

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to+\infty}|\varphi_{n_k}(x)-\varphi(x)| &\le \limsup_{k\to+\infty}|\varphi_{n_k}(x)-\varphi_{n_k}(x_j)|\\ &+\limsup_{k\to+\infty}|\varphi_{n_k}(x_j)-\varphi(x_j)|+|\varphi(x_j)-\varphi(x)|\\ &\le \sup_{n\in\mathbb{N}}\|\varphi_n\|_{X^*}\|x-x_j\|_X+0\\ &+\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\varphi_n\|_{X^*}\|x-x_j\|_X\\ &\le 2\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\varphi_n\|_{X^*}\varepsilon.\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue la tesi.

□

Osservazione 3.2.2. Fin qui ci siamo limitati a considerare convergenze deboli di successioni; un discorso più generale richiede l'introduzione delle *topologie deboli* $\sigma(X, X^*)$ e $\sigma(X^*, X)$.
Abbiamo definito lo spazio duale di X, X^*, come lo spazio di tutti i funzionali lineari che sono continui (limitati), quando su X si considera la topologia della norma.

Su uno spazio di Banach X e sul suo duale X^* introduciamo (rispettivamente) due topologie speciali.

Definizione 3.2.3 (topologia debole su X).
La topologia debole su uno spazio di Banach X, $\sigma(X, X^*)$, è la topologia la cui base è formata da tutti gli insiemi

$$V(x_0; Y^*; \epsilon) = \{x \in X; |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \epsilon, \quad per \quad ogni \quad \varphi \in Y^*\},$$

dove $x_0 \in X$, Y^* è un sottoinsieme finito di X^* e $\epsilon > 0$.

Definizione 3.2.4 (topologia debole * su X^*).
La topologia debole * sullo spazio duale X^*, $\sigma(X^*, X)$, è la topologia la cui base è formata da tutti gli insiemi

$$V^*(\varphi_0; Y; \epsilon) = \{\varphi \in X^*; |\varphi(x) - \varphi_0(x)| < \epsilon, \quad per \quad ogni \quad x \in Y\},$$

dove $\varphi_0 \in X^*$, Y è un sottoinsieme finito di X e $\epsilon > 0$.

Sussiste il seguente risultato (che, per brevità, non dimostriamo), più generale del precedente 3.2.1 (cfr., ad esempio,[5]).

Teorema 3.2.5 (Banach-Alaoglu-Bourbaki).
Sia X uno spazio di Banach. La palla chiusa unitaria in X^*,

$$\overline{B}_{X^*} = \{\varphi \in X^*; \|\varphi\|_{X^*} \le 1\}$$

è compatta nella topologia debole $\sigma(X^*, X)$.*

3.3 Convergenza debole e compattezza debole in uno spazio di Hilbert: estensione del Teorema di Bolzano-Weierstrass.

Per il Teorema di rappresentazione dei funzionali lineari e continui (cfr. Teorema di Riesz-Fréchet), uno spazio di Hilbert H può essere identificato con il suo duale H^*. Pertanto, **le nozioni di convergenza debole e convergenza debole* in uno spazio di Hilbert coincidono.**

Definizione 3.3.1 (convergenza debole su uno spazio di Hilbert). Una successione $(x_n)_n$ in uno spazio di Hilbert $(H, (\cdot, \cdot))$ è *convergente debolmente* in H se esiste $x \in H$ tale che

$$\lim_{n \to +\infty} (y, x_n) = (y, x) \quad \text{per ogni } y \in H. \tag{3.7}$$

In tal caso, si dice che x è il *limite debole* della successione $(x_n)_n$ e si scrive

$$x_n \rightharpoonup x.$$

Osservazione 3.3.2. Il limite debole in uno spazio di Hilbert H, se esiste, è unico. Infatti, se $x_n \rightharpoonup x$ e $x_n \rightharpoonup \overline{x}$, preso $y := x - \overline{x}$ in (3.7), si ha

$$0 = \lim_{n \to +\infty} (x - \overline{x}, x_n) - \lim_{n \to +\infty} (x - \overline{x}, x_n) = (x - \overline{x}, x) - (x - \overline{x}, \overline{x}) = \|x - \overline{x}\|^2,$$

da cui $x = \overline{x}$.

Osservazione 3.3.3. Poiché ogni spazio normato X a dimensione finita, con norma $\|.\|_2$, è anche di Hilbert, la Proposizione 3.1.10 afferma che **in uno spazio a dimensione finita X la convergenza forte (i.e. in norma $\|.\|_2$), la convergenza debole e la convergenza debole* coincidono.**

Osservazione 3.3.4. La locale compattezza debole* di X^*, ovvero la compattezza di $\overline{B_{X^*}}$ rispetto alla convergenza debole*, è la proprietà più notevole della convergenza debole*. Visto il ruolo fondamentale svolto dagli insiemi compatti, ad esempio per ottenere risultati di esistenza anche in problemi applicativi, è evidente l'importanza della convergenza debole*.

In virtù dell'identificazione tra uno spazio di Hilbert e il suo duale, sussiste il seguente teorema.

Teorema 3.3.5 (compattezza debole in uno spazio di Hilbert). *Ogni successione limitata in uno spazio di Hilbert ammette una sottosuccessione debolmente convergente.*

3.4 Compattezza in spazi di funzioni continue: il Teorema di Ascoli-Arzelà

Per gli insiemi appartenenti a spazi funzionali concreti, è importante dare criteri di precompattezza (per la convergenza forte) utili nelle applicazioni. In questa sezione ci soffermeremo su sottoinsiemi dello spazio $C^0(E;\mathbb{R})$ delle funzioni continue in uno **spazio metrico compatto (E, d)** a valori in $\mathbb{R}$. In tale contesto, un criterio di precompattezza per i sottoinsiemi di $C^0(E;\mathbb{R})$ è fornito dal Teorema di Ascoli-Arzelà 3.4.3, capostipite dei teoremi di compattezza in Analisi Funzionale. Diamo prima due definizioni.

Definizione 3.4.1 (equilimitatezza). Una famiglia $\mathcal{F}$ di funzioni in $C^0(E;\mathbb{R})$ si dice *equilimitata* se

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} |f(x)| < +\infty \quad \forall\, x \in E. \tag{3.8}$$

Definizione 3.4.2 (uniforme equicontinuità). Una famiglia $\mathcal{F}$ di funzioni in $C^0(E;\mathbb{R})$ si dice *uniformemente equicontinua* se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : d(x, y) < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon,\ \forall f \in \mathcal{F}, \forall x, y \in E. \tag{3.9}$$

È opportuno richiamare il fatto che, *se (E, d) è uno spazio metrico compatto, allora $(C^0(E;\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$* è uno spazio di Banach. In virtù della completezza, dal Teorema 1.8.4 segue che, *per un sottoinsieme $\mathcal{F} \subset C^0(E;\mathbb{R})$, le proprietà che seguono sono equivalenti*:

(i) $\mathcal{F}$ è relativamente compatto, cioè la sua chiusura $\overline{\mathcal{F}}$ è compatta;

(ii) $\mathcal{F}$ è precompatto, cioè, per ogni $\varepsilon > 0$, $\mathcal{F}$ ammette un ricoprimento finito con palle di raggio ε;

(iii) Da ogni successione $(f_k)_k$ di funzioni continue con $f_k \in \mathcal{F}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente uniformemente in E ad una funzione $f \in \overline{\mathcal{F}}$.

Teorema 3.4.3 (di compattezza, Ascoli-Arzelà). *Sia (E, d) uno spazio metrico compatto e sia $\mathcal{F} \subset C^0(E;\mathbb{R})$ una famiglia uniformemente equicontinua ed equilimitata. Allora $\mathcal{F}$ è un sottoinsieme relativamente compatto di $C^0(E;\mathbb{R})$ (equivalentemente, da ogni successione $(f_k)_k$ di funzioni continue con $f_k \in \mathcal{F}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente uniformemente in E ad una funzione $f \in \overline{\mathcal{F}}$).*

Dimostrazione. È sufficiente provare che la famiglia $\mathcal{F}$ è precompatta. Dividiamo la dimostrazione in più passi.

1. (Ricoprimento del compatto E). Sia $\varepsilon > 0$; per l'ipotesi di uniforme equicontinuità di $\mathcal{F}$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$d(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{per ogni } f \in \mathcal{F} \text{ ed ogni } x, y \in E.$$

Poiché E è compatto, esso può essere ricoperto con un numero finito di palle di raggio δ, cioè esistono $x_1, \ldots, x_n \in E$ tali che

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \delta).$$

Per la equilimitatezza di $\mathcal{F}$, si ha che

$$M := \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x_i)| < +\infty.$$

2. (Ricoprimento di $\mathcal{F}$). Consideriamo l'intervallo compatto $[-M, M]$ e un suo ricoprimento finito con m palle di raggio ε centrate in $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, cioè

$$[-M, M] \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(\alpha_j, \varepsilon). \tag{3.10}$$

Sia, ora, Θ l'insieme finito costituito dalle m^n applicazioni

$$\vartheta : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}.$$

Per ogni $\vartheta \in \Theta$, definiamo la famiglia di funzioni continue

$$\mathcal{F}_\vartheta := \{f \in \mathcal{F} : f(x_i) \in B(\vartheta(x_i), \varepsilon)\ \forall\, i = 1, \ldots, n\}.$$

Poiché per ogni $i = 1, \ldots, n$ esiste $j \in \{1, \ldots, m\}$ tale che $\vartheta(x_i) = \alpha_j$ e poiché l'intervallo $[-M, M]$ è ricoperto dalle palle $B(\alpha_j, \varepsilon)$ (per (3.10)), ogni funzione $f \in \mathcal{F}$ appartiene a qualche $\mathcal{F}_\vartheta$; in altre parole, risulta

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\vartheta \in \Theta} \mathcal{F}_\vartheta.$$

3. (Precompattezza di $\mathcal{F}$). Per concludere la dimostrazione, proviamo che ogni insieme $\mathcal{F}_\vartheta$ ha diametro minore o uguale a 4ε. Infatti, siano $f, g \in \mathcal{F}_\vartheta$ e sia $x \in E$ tale che $x \in B(x_i, \delta)$ per qualche indice $i \in \{1, \ldots, n\}$. Allora, si ha

$$\begin{aligned}
|f(x) - g(x)| &\le |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - \vartheta(x_i)| \\
&\quad + |\vartheta(x_i) - g(x_i)| + |g(x_i) - g(x)| \\
&\le \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

Pertanto, per l'arbitrarietà di x in E,

$$\|f - g\|_\infty = \max_{x \in E} |f(x) - g(x)| \leq 4\varepsilon.$$

Passando all'estremo superiore su $f, g \in \mathcal{F}_\vartheta$, si ha che $\operatorname{diam}(\mathcal{F}_\vartheta) \leq 4\varepsilon$. Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$, $\mathcal{F}$ può essere ricoperta con un numero finito di insiemi aventi diametro minore o uguale a 4ε, e pertanto può essere ricoperta da un numero finito di palle chiuse di raggio 4ε.
Dall'arbitrarietà di ε segue la precompattezza di $\mathcal{F}$.

□

Il precedente Teorema 3.4.3 si può estendere a funzioni a valori in $\mathbb{C}$ o in uno spazio $\mathbb{R}^N$.

Corollario 3.4.4. *Sia (E, d) uno spazio metrico compatto e sia $(f_k)_k$ una successione di funzioni continue da E in $\mathbb{R}^N$ tale che*

(i) la famiglia $\{f_k\}_k$ è uniformemente equicontinua;

(ii) la famiglia $\{f_k\}_k$ è equilimitata, cioè

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|f_k(x)\| < +\infty \quad \forall\, x \in E.$$

Allora la successione $(f_k)_k$ ha una sottosuccessione uniformemente convergente in E.

Dimostrazione. Per ogni $j = 1, \ldots, N$ denotiamo con f_k^j la j-esima componente della funzione vettoriale f_k, cioè, per ogni $x \in E$, poniamo

$$f_k(x) =: (f_k^1(x), \ldots, f_k^N(x)) \in \mathbb{R}^N.$$

Per il Teorema 3.4.3 applicato alla prima successione di funzioni reali $(f_k^1)_k \subset C^0(E; \mathbb{R})$, possiamo estrarre un insieme infinito di indici $I_1 \subseteq \mathbb{N}$ tale che la sottosuccessione $(f_k^1)_{k \in I_1}$ converge uniformemente in E. Passando alla seconda componente, consideriamo la sottosuccessione $(f_k^2)_{k \in I_1}$; da questa sottosuccessione possiamo estrarre una ulteriore sottosuccessione $(f_k^2)_{k \in I_2}$ (con I_2 insieme infinito di indici, $I_2 \subseteq I_1$) che converge uniformemente in E, e così via. Dopo N passi avremo ottenuto una sottosuccessione $(f_k)_{k \in I_N}$ di funzioni vettoriali a valori in $\mathbb{R}^N$ dove tutte le N componenti convergono, uniformemente in E. □