CAPITOLO 8

Il Teorema di Lancret sulla sfera $\mathbb{S}^3$

Il concetto di elica generalizzata fu trasferito, per la prima volta, in ambito riemanniano da Hayden [**12**]. In tale articolo, un'elica generalizzata viene definita come una curva per la quale un campo vettoriale lungo essa, parallelo secondo Levi-Civita, forma angoli costanti con tutti i vettori del riferimento di Frenet. Tuttavia, questa definizione sembra essere molto restrittiva. Più recentemente Barros [**1**] propone una definizione di elica generalizzata (o elica di Lancret) su una varietà riemanniana 3-dimensionale semplicemente connessa di curvatura sezionale costante c ($c = 0, +1, -1$) sostituendo la fissata direzione (nella Definizione 2.39) con un campo vettoriale di Killing, inoltre dimostra un Teorema di Lancret per questo tipo di "eliche". Per $c = 0$ si ritrova il classico Teorema di Lancret per le curve di $\mathbb{R}^3$ (cf. Teorema 2.42). Per $c \neq 0$, il caso più interessante è quello della sfera unitaria ($c = +1$). In questo capitolo diamo una presentazione auto contenuta e dettagliata, con strumenti "elementari", del Teorema di Lancret nel caso della sfera unitaria 3-dimensionale.

8.1. Apparato di Frenet per curve di $\mathbb{S}^3$

Indichiamo con $\mathbb{S}^3$ la sfera unitaria di $\mathbb{R}^4$,

$$\mathbb{S}^3 = \{p = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}.$$

Molti concetti della teoria delle superfici di $\mathbb{R}^3$ si possono estendere in modo del tutto analogo al caso di $\mathbb{S}^3$ che è una ipersuperficie di $\mathbb{R}^4$.

Una **curva differenziabile** γ di $\mathbb{S}^3$ è un'applicazione differenziabile

$$\gamma : I \to \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4, t \mapsto \big(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)\big),$$

ossia è una curva differenziabile di $\mathbb{R}^4$ che assume valori nella sfera $\mathbb{S}^3$. Un vettore $V_p \in T_p\,\mathbb{R}^4$, $p \in \mathbb{S}^3$, si dice **vettore tangente** in p alla sfera $\mathbb{S}^3$ se esiste $\gamma : I \to \mathbb{S}^3$ curva differenziabile di $\mathbb{S}^3$ ed esiste $t_0 \in I$ tali che

$$\gamma(t_0) = p \quad \text{e} \quad \dot\gamma(t_0) = V_p.$$

Indichiamo con $T_p\,\mathbb{S}^3$ l'insieme di tutti i vettori tangenti in p alla sfera $\mathbb{S}^3$, e con ξ_p il campo vettoriale definito da

$$\xi_p = \big(x_1(p), x_2(p), x_3(p), x_4(p)\big)_p \equiv p \qquad \text{per ogni } p \in \mathbb{S}^3.$$

ξ, che nella teoria delle superfici è stato indicato con N, è un **campo vettoriale unitario normale** alla sfera $\mathbb{S}^3$.

Proposizione 8.1. *Risulta*

$$T_p\,\mathbb{S}^3 = \xi_p^\perp = p^\perp.$$

*Quindi, $T_p\mathbb{S}^3$ è un sottospazio vettoriale 3-dimensionale di $T_p\mathbb{R}^4$, che viene detto **spazio tangente** in p alla sfera $\mathbb{S}^3$.*

Dimostrazione. Sia $V_p \in T_p\mathbb{S}^3$, $V_p = (p, v)$, allora esiste una curva differenziabile $\gamma(t) = \big(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)\big)$ di $\mathbb{S}^3$ tale che $\gamma(t_0) = p$ e $\dot\gamma(t_0) = V_p$, quindi $x_i'(t_0) = v^i$ per ogni $i = 1, ..., 4$. Siccome $\gamma(t) \in \mathbb{S}^3$, abbiamo

$$\textstyle\sum_{i=1}^4 x_i(t)^2 = 1 \text{ e derivando si ha } \sum_{i=1}^4 x_i'(t)x_i(t) = 0,$$

per cui

$$\textstyle\sum_{i=1}^4 x_i'(t_0)x_i(t_0) = 0, \quad \text{ossia} \quad \sum_{i=1}^4 v^i x_i(p) = 0.$$

Quindi,

$$V_p \cdot \xi_p = 0 \quad \text{da cui segue che} \quad V_p \in \xi_p^\perp.$$

Viceversa, sia $V_p \in \xi_p^\perp$, $V_p = (p, v)$, $v \neq 0$, e quindi $v \cdot p = 0$. Posto $\lambda = \|v\| > 0$ e $v_1 = v/\lambda$, consideriamo la curva

$$\gamma(t) = (\cos\lambda t)p + (\operatorname{sen}\lambda t)v_1.$$

Si vede facilmente che γ è una curva di $\mathbb{S}^3$ e soddisfa $\gamma(0) = p$ e $\dot\gamma(0) = V_p$. Pertanto, $V_p \in T_p\mathbb{S}^3$. $\square$

Data una curva differenziabile $\gamma(t)$ di $\mathbb{S}^3$, $t \in I$, sia $V(t)$ un campo vettoriale (tangente a $\mathbb{S}^3$) differenziabile lungo γ, ossia

$$V(t) = \big(V^1(t), V^2(t), V^3(t), V^4(t)\big)_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}\mathbb{S}^3$$

con $V^i(t)$ funzioni differenziabili. La **derivata covariante** di $V(t)$ è il campo vettoriale (tangente a $\mathbb{S}^3$) differenziabile lungo γ definito da

$$\frac{DV}{dt} := \big(V'(t)\big)^\top = V'(t) - \big(V'(t) \cdot \xi_{\gamma(t)}\big)\xi_{\gamma(t)} = V'(t) - \big(V'(t) \cdot \gamma(t)\big)\gamma(t),$$

e quindi DV/dt è definito dall'*equazione di Gauss*. Se indichiamo con $\mathfrak{X}(\gamma)$ lo spazio vettoriale di tutti i campi vettoriali (tangenti a $\mathbb{S}^3$) differenziabili lungo γ, è facile verificare che l'operatore D/dt è un endomorfismo di $\mathfrak{X}(\gamma)$. Inoltre, per ogni $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$ e per ogni $f : I \to \mathbb{R}$ differenziabile, valgono le proprietà

$$\frac{D}{dt}(fV) = f'(t)V + f\frac{DV}{dt},$$
$$(V \cdot W)' = \frac{DV}{dt} \cdot W + V \cdot \frac{DW}{dt}.$$

Ora sia $\gamma(s)$ una curva regolare di $\mathbb{S}^3$ parametrizzata a velocità unitaria. Quindi, il **campo tangente** lungo γ, che indichiamo con $T(s)$, è unitario:

$$T(s) = \dot\gamma(s), \quad \|T(s)\| = \|\dot\gamma(s)\| = 1.$$

Definizione 8.2. *La funzione*

$$\kappa : I \to \mathbb{R}, \ s \mapsto \kappa(s) := \left\|\frac{DT}{ds}\right\| \geq 0,$$

*è detta **curvatura** della curva $\gamma(s)$ di $\mathbb{S}^3$.*

Supponiamo che $\gamma(s)$ sia un arco di curva regolare a velocità unitaria e con curvatura $\kappa(s) > 0$ per ogni $s \in I$. Siccome $T(s) \cdot T(s) = 1$, allora abbiamo $(DT/ds) \cdot T(s) = 0$ e quindi $(DT/ds) \perp T(s)$. Il campo vettoriale

$$N(s) := \frac{1}{\|DT/ds\|} \frac{DT}{ds} \in \mathfrak{X}(\gamma),$$

detto **campo normale principale** lungo γ, è un campo vettoriale unitario ortogonale a $T(s)$. Il **campo binormale** lungo γ è il campo vettoriale unitario $B \in \mathfrak{X}(\gamma)$ ortogonale a $T(s)$ ed $N(s)$ e orientato in modo tale che

$$\det\big(\xi_{\gamma(s)}, T(s), N(s), B(s)\big) = +1,$$

ossia orientato in modo tale che $\big(\xi_{\gamma(s)}, T(s), N(s), B(s)\big)$ sia una base ortonormale positiva di $T_{\gamma(s)}\mathbb{R}^4$. In particolare,

$$\big(T(s), N(s), B(s)\big)$$

è una base ortonormale lungo γ di $T_{\gamma(s)}\mathbb{S}^3$ che viene detta **riferimento di Frenet** (o *triedro di Frenet*) della curva $\gamma(s)$ di $\mathbb{S}^3$. Una curva regolare $\gamma(s)$ di $\mathbb{S}^3$ parametrizzata a velocità unitaria e con curvatura $\kappa(s) > 0$, la diremo **curva di Frenet** di $\mathbb{S}^3$.

Definizione 8.3. *La funzione* ***torsione*** *di una curva di Frenet $\gamma(s)$ di $\mathbb{S}^3$, è la funzione*

$$\tau : I \to \mathbb{R},\ \ s \mapsto \tau(s) = -\frac{DB}{ds} \cdot N(s) = B(s) \cdot \frac{DN}{ds},$$

L'insieme

$$\big\{T(s), N(s), B(s), \kappa(s), \tau(s)\big\}$$

si chiama **apparato di Frenet** della curva $\gamma(s)$ di $\mathbb{S}^3$. Le corrispondenti *formule di Frenet* sono date da :

$$\begin{cases} \dfrac{DT}{ds} = & \kappa(s)\, N(s), \\ \dfrac{DN}{ds} = -\kappa(s)\, T(s) & +\tau(s)\, B(s), \\ \dfrac{DB}{ds} = & -\tau(s)\, N(s). \end{cases}$$

Queste formule si dimostrano, usando le proprietà della derivata covariante, esattamente come per le curve di Frenet di $\mathbb{R}^3$.

Osservazione 8.4. Una curva differenziabile $\gamma(t)$ della sfera $\mathbb{S}^3$ si dice che è una **curva geodetica** se la sua accelerazione intrinseca $\dfrac{D\dot\gamma}{\mathrm{d}t} = 0$. In modo equivalente, $\gamma(t)$ è una curva geodetica se il campo vettoriale $\ddot\gamma(t)$ è parallelo al campo normale $\xi_{\gamma(t)}$. Quindi, come per la sfera $\mathbb{S}^2$, anche per la sfera $\mathbb{S}^3$ si vede che le sue geodetiche sono tutte e sole le circonferenze di raggio massimo (opportunamente parametrizzate).

8.2. Eliche generalizzate e Teorema di Lancret sulla sfera $\mathbb{S}^3$

Sia $\gamma(s)$, $s \in I$, una curva di Frenet della sfera $\mathbb{S}^3$, e sia $\{T(s), N(s), B(s), \kappa(s), \tau(s)\}$ il corrispondente apparato di Frenet. Sia

$$H : I \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{S}^3, \ (s, r) \mapsto H(s, r) = \gamma_r(s),$$

una **variazione** della curva $\gamma : I \to M$, cioè un'applicazione differenziabile con $H(s, 0) = \gamma_0(s) = \gamma(s)$. Il campo vettoriale

$$V(s) = \Big(\frac{\partial H(s,r)}{\partial r}\Big)(s, 0) = \Big(\frac{d}{dr}\gamma_s(r)\Big)_{|r=0} = \dot{\gamma}_s(0) \in T_{H(s,0)}\mathbb{S}^3 = T_{\gamma(s)}\mathbb{S}^3$$

è il *campo variazionale* di H. Indichiamo con $v(s, r)$ la velocità scalare, con $\kappa(s, r)$ la curvatura e con $\tau(s, r)$ la torsione della curva $\gamma_r(s)$.

Seguendo [**16**] (e anche [**1**]), introduciamo la seguente

Definizione 8.5. *Un **campo vettoriale** $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ si dice **di Killing** se, considerata una V-variazione di γ, ovvero una variazione avente $V(s)$ come campo variazionale, risulta*

$$\Big(\frac{\partial v}{\partial r}\Big)_{|r=0} = \Big(\frac{\partial \kappa^2}{\partial r}\Big)_{|r=0} = \Big(\frac{\partial \tau^2}{\partial r}\Big)_{|r=0} = 0.$$

Tale definizione è ben posta, cioè non dipende dalla particolare variazione considerata. Infatti, come provato in [**16**], cf. anche [**1**], risulta (omettendo il parametro s):

$$\begin{cases} \Big(\dfrac{\partial v}{\partial r}\Big)_{|r=0} &= \Big(\dfrac{DV}{ds} \cdot T\Big)v = 0, \\ \Big(\dfrac{\partial \kappa^2}{\partial r}\Big)_{|r=0} &= 2\kappa\Big(\dfrac{D^2V}{ds^2} \cdot N\Big) - 4\kappa^2\Big(\dfrac{DV}{ds} \cdot T\Big) + 2\kappa(V \cdot N) = 0, \\ \Big(\dfrac{\partial \tau^2}{\partial r}\Big)_{|r=0} &= \dfrac{2\tau}{\kappa}\Big(\dfrac{D^3V}{ds^3} \cdot B\Big) - \dfrac{2\kappa'\tau}{\kappa^2}\Big(\Big(\dfrac{D^2V}{ds^2} + V\Big) \cdot B\Big) \\ & \quad + \dfrac{2\tau(1+\kappa^2)}{\kappa}\Big(\dfrac{DV}{ds} \cdot B\Big) - 2\tau^2\Big(\dfrac{DV}{ds} \cdot T\Big) = 0. \end{cases}$$

dove v, κ, τ sono velocità scalare, curvatura e torsione della curva $\gamma(s)$. Pertanto, tenendo anche conto che $\gamma(s)$ è di Frenet e quindi $\kappa(s) > 0$, un campo vettoriale $V(s)$ è di Killing lungo γ se e solo se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

$$\frac{DV}{ds} \cdot T = 0, \tag{8.1}$$

$$\Big(\frac{D^2V}{ds^2} \cdot N\Big) + (V \cdot N) = 0, \tag{8.2}$$

$$\tau\Big(\frac{D^3V}{ds^3} \cdot B\Big) - \frac{\kappa'\tau}{\kappa}\Big(\frac{D^2V}{ds^2} + V\Big) \cdot B + \tau(1+\kappa^2)\Big(\frac{DV}{ds} \cdot B\Big) = 0. \tag{8.3}$$

Osservazione 8.6. Si noti che $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ è di Killing se, e solo se, V è la restrizione a γ di un campo vettoriale di Killing definito su $\mathbb{S}^3$. Questo risultato è dovuto a J. Langer e D.A. Singer (J. London Math Soc., 30(1984), 512–520), cf. anche [**1**], Lemma 1. In particolare, il campo vettoriale

$$U = (-x_2, x_1, -x_4, x_3) \tag{8.4}$$

si vede facilmente che è tangente a $\mathbb{S}^3$, inoltre è di Killing (cf., ad esempio, [**18**] p.281-282). Quindi, U è di Killing lungo ogni curva γ di $\mathbb{S}^3$.

Quella che segue è la definizione di elica generalizzata proposta in [**1**].

Definizione 8.7. *Una curva di Frenet $\gamma(s)$ della sfera $\mathbb{S}^3$ è detta **elica generalizzata** (o elica di Lancret) di $\mathbb{S}^3$ se esiste un campo vettoriale differenziabile $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ che è di Killing, di lunghezza costante (che assumiamo uguale a 1) e forma un angolo costante ϑ $(\neq 0, \pi)$ con $T(s) = \dot{\gamma}(s)$. Il campo vettoriale $V(s)$ è detto **asse** dell'elica generalizzata γ.*

Prima di enunciare il Teorema di Lancret per le suddette curve, proviamo alcuni risultati preliminari che permettono di semplificare la dimostrazione del Teorema principale.

Proposizione 8.8. *Sia $\gamma(s)$ un'elica generalizzata della sfera $\mathbb{S}^3$ e sia V un asse di γ. Allora*

$$V(s) = \cos\vartheta\, T(s) + \operatorname{sen}\vartheta\, B(s), \tag{8.5}$$

dove ϑ denota l'angolo tra $V(s)$ e $T(s)$. Inoltre, curvatura e torsione sono legate da $\kappa\cos\vartheta - \tau\operatorname{sen}\vartheta = cost.$, equivalentemente

$$\tau(s) = a\kappa(s) + b, \tag{8.6}$$

dove $a = \operatorname{cotg}\vartheta$ e b sono costanti.

Dimostrazione. Sia $\{T(s), N(s), B(s)\}$ il riferimento di Frenet lungo γ. Allora, omettendo di scrivere il parametro s, abbiamo

$$V = (V \cdot T)T + (V \cdot N)N + (V \cdot B)B.$$

Siccome $V \cdot T = cost. = \cos\vartheta$, derivando e usando la prima formula di Frenet, abbiamo

$$0 = (V \cdot T)' = \frac{DV}{ds} \cdot T + V \cdot \frac{DT}{ds} = \frac{DV}{ds} \cdot T + \kappa(V \cdot N).$$

D'altrone per la (8.1) si ha $\dfrac{DV}{ds} \cdot T = 0$, per cui $V \cdot N = 0$ e quindi

$$V = \cos\vartheta\, T + (V \cdot B)B \text{ dove } V \cdot B = \operatorname{sen}\vartheta \text{ in quanto } \|V\| = 1.$$

Ora derivando la (8.5) e usando le formule di Frenet, otteniamo

$$\frac{DV}{ds} = (\kappa\cos\vartheta - \tau\operatorname{sen}\vartheta)N. \tag{8.7}$$

Derivando la (8.7), si ha

$$\frac{D^2V}{ds^2} = (\kappa\cos\vartheta - \tau\operatorname{sen}\vartheta)\frac{DN}{ds} + (\kappa\cos\vartheta - \tau\operatorname{sen}\vartheta)'N$$

e quindi, usando la seconda formula di Frenet, otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{D^2V}{ds^2} &= -\kappa(\kappa\cos\vartheta - \tau\operatorname{sen}\vartheta)T + \tau(\kappa\cos\vartheta - \tau\operatorname{sen}\vartheta)B \\ &\quad + (\kappa'\cos\vartheta - \tau'\operatorname{sen}\vartheta)N.\end{aligned} \tag{8.8}$$

Sostituendo la (8.8) nella (8.2), otteniamo

$$(\kappa'\cos\vartheta - \tau'\operatorname{sen}\vartheta) = 0.$$

Pertanto,

$$\kappa\cos\vartheta - \tau\operatorname{sen}\vartheta = cost. = a_0,$$

e quindi $\tau = a\kappa + b$ con $a = \operatorname{cotg}\vartheta$ e $b = -a_0/\operatorname{sen}\vartheta$. □

Proposizione 8.9. *Se $\gamma(s)$ è un'elica generalizzata della sfera $\mathbb{S}^3$ con torsione $\tau = 0$, allora $\kappa(s)$ è costante e γ è una curva di qualche sfera unitaria $\mathbb{S}^2$ di $\mathbb{S}^3$ e in questo caso $V(s) = B(s)$ è asse per γ.*

Viceversa, se $\gamma(s)$ è una curva di Frenet di $\mathbb{S}^3$ contenuta in qualche sfera unitaria $\mathbb{S}^2$ di $\mathbb{S}^3$, allora $\gamma(s)$ è un'elica generalizzata di $\mathbb{S}^3$ con torsione $\tau = 0$.

Dimostrazione. Dalla (8.6), se $\tau = 0$ si ottiene subito che la curvatura κ è costante. Siccome $\tau = 0$, dalla terza formula di Frenet si ottiene $DB/ds = 0$, ovvero $B(s)$ è parallelo lungo γ. Quindi, dalla definizione di DB/ds si ha

$$B'(s) = \big(B'(s)\cdot\xi_{\gamma(s)}\big)\xi_{\gamma(s)}.$$

D'altronde, $B(s)\cdot\xi_{\gamma(s)} = 0$ implica

$$B'(s)\cdot\xi_{\gamma(s)} = -B(s)\cdot\xi'_{\gamma(s)} = -B(s)\cdot\dot\gamma(s) = -B(s)\cdot T(s) = 0.$$

Quindi, $B'(s) = 0$ ossia $B(s)$ è parallelo lungo γ in $\mathbb{R}^4$ per cui $B(s) = (b)_{\gamma(s)}$, $b \in \mathbb{R}^4$. Inoltre, siccome $B(s)$ è tangente a $\mathbb{S}^3$, si ha

$$b\cdot\gamma(s) = B(s)\cdot\gamma(s) = B(s)\cdot\xi_{\gamma(s)} = 0. \tag{8.9}$$

Se indichiamo con E^3 lo spazio euclideo 3-dimensionale per l'origine e ortogonale al vettore $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$, ovvero $E^3 : \sum_{i=1}^4 b_i x_i = 0$, allora la (8.9) ci dice che la curva $\gamma(s)$ è contenuta nella sfera 2-dimensionale $\mathbb{S}^2 = E^3 \cap \mathbb{S}^3$. Inoltre, il campo vettoriale lungo γ definito da $V(s) = B(s) = b_{\gamma(s)}$ soddisfa $\|V\| = 1$ e $\vartheta(V,T) = \pi/2$. Infine, le derivate covariante di V nulle e la torsione $\tau = 0$ implicano che (8.1), (8.2) e (8.3) sono soddisfatte. Quindi, $V(s) = B(s)$ è asse per $\gamma(s)$.

Proviamo ora il viceversa. Sia $\gamma(s)$ una curva di Frenet di $\mathbb{S}^3$ contenuta in qualche sfera unitaria $\mathbb{S}^2$ di $\mathbb{S}^3$. Allora, $\mathbb{S}^2 = E^3 \cap \mathbb{S}^3$ dove E^3 è un iperpiano di $\mathbb{R}^4$ per l'origine. Sia b un vettore unitario di $\mathbb{R}^4$ ortogonale a E^3. Siccome $\gamma(s) \in E^3$, abbiamo $\gamma(s)\cdot b = 0$ e quindi $T(s)\cdot b = \dot\gamma(s)\cdot b = 0$ e $(DT/ds)\cdot b = 0$. Di conseguenza i campi vettoriali $T(s)$ e $N(s)$ sono entrambi ortogonali a b.

D'altronde, da $\gamma(s) \cdot b = 0$ segue che $b_{\gamma(s)} \in T_{\gamma(s)}\mathbb{S}^3$, per cui il campo binormale $B(s)$ sarà parallelo a $b_{\gamma(s)}$. Pertanto possiamo assumere, cambiando verso a b se necessario, che $B(s) = b_{\gamma(s)}$. Allora, $B'(s) = 0$ e quindi $(DB/ds) = 0$ da cui segue che la torsione $\tau(s) = 0$. Pertanto, la curva $\gamma(s)$ è un'elica generalizzata di $\mathbb{S}^3$ con torsione $\tau = 0$. Inoltre, come prima si vede $V(s) = B(s)$ è asse per $\gamma(s)$. □

Proposizione 8.10. *Sia $\gamma(s)$ un'elica generalizzata della sfera $\mathbb{S}^3$ con torsione $\tau \neq 0$. Allora, le seguenti proprietà sono equivalenti.*
1) *La torsione $\tau(s)$ è costante.*
2) *La curvatura $\kappa(s)$ è costante.*
3) *Il rapporto $\tau(s)/\kappa(s)$ è costante*
4) *Esiste $V(s)$ asse per γ che è parallelo lungo γ, ovvero*

$$\frac{DV}{ds} = 0.$$

*Inoltre, se $\gamma(s)$ è una curva di Frenet della sfera $\mathbb{S}^3$ con torsione e curvatura costanti non nulle, allora $\gamma(s)$ è un'elica generalizzata (che viene detta semplicemente **elica** di $\mathbb{S}^3$).*

Dimostrazione. Dalla (8.6) sappiamo che $\tau = a\kappa + b$ con a, b costanti. Di conseguenza, si ottiene che le condizioni $1), 2)$ e 3) sono equivalenti.
3) $\Longrightarrow$ 4). Assumiamo τ/κ costante, equivalentemente τ e κ costanti, e consideriamo lungo l'elica γ il campo vettoriale

$$V(s) = \cos\vartheta\, T(s) + \operatorname{sen}\vartheta\, B(s), \text{ dove } \vartheta \text{ è definito da } \operatorname{cotg}\vartheta = \tau/\kappa. \tag{8.10}$$

Per come definito V soddisfa le seguenti proprietà: $\|V\| = 1$ e $V \cdot T =$cost.$=$ $\cos\vartheta$. Inoltre, V è parallelo, infatti derivando e usando le formule di Frenet abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{DV}{ds} &= \cos\vartheta\,(\kappa N) + \operatorname{sen}\vartheta\,(-\tau N) = (\kappa\cos\vartheta - \tau\operatorname{sen}\vartheta)N \\ &= \operatorname{sen}\vartheta(\kappa\operatorname{cotg}\vartheta - \tau)N = 0.\end{aligned}$$

Pertanto, siccome $DV/ds = 0$, V è di Killing lungo γ, cioè soddisfa (8.1),(8.2) e (8.3) tenendo anche conto che κ è costante e quindi $\kappa' = 0$. Pertanto $V(s)$ è asse per l'elica γ.
4) $\Longrightarrow$ 3). Sia $V(s)$, con $DV/ds = 0$, asse per γ. Allora dalla (8.3) (una delle condizioni che definisce V di Killing) si ottiene che $\tau\,\kappa' = 0$. Siccome $\tau \neq 0$, otteniamo κ costante che è equivalente alla condizione τ/κ costante. Infine, per provare l'ultima parte, basta osservare che se una curva di Frenet ha curvatura e torsione costanti non nulle, il campo vettoriale V definito dalla (8.10) è di Killing, e quindi la curva è un'elica generalizzata. □

Il seguente teorema, che è il Teorema di Lancret sulla sfera $\mathbb{S}^3$, classifica le eliche generalizzate di $\mathbb{S}^3$. La presente formulazione è un pò più dettagliata rispetto alla formulazione data in [**1**] (cf. Teorema 3).

Teorema 8.11. *Sia $\gamma(s)$ una curva di Frenet di $\mathbb{S}^3$. Allora, $\gamma(s)$ è un'elica generalizzata se e solo se vale una delle seguenti proprietà.*

1) La torsione $\tau = 0$ e γ è una curva di qualche sfera unitaria $\mathbb{S}^2$ di $\mathbb{S}^3$.

2) La torsione τ e la curvatura κ sono costanti non nulle, in tal caso

$$\tau = a\kappa + b \quad \textit{con} \quad a, b \textit{ costanti.}$$

3) La torsione τ e la curvatura κ non sono costanti, in tal caso

$$\tau(s) = a\kappa(s) \pm 1, \quad \textit{dove} \quad a = \operatorname{cotg}\vartheta \textit{ è costante.}$$

Dimostrazione. Sia $\gamma(s)$ un'elica generalizzata di $\mathbb{S}^3$ e sia $V(s)$ un asse di γ. Dalla Proposizione 8.8 e sua dimostrazione, sappiamo che vale la (8.8) e $(\kappa\cos\vartheta - \tau\operatorname{sen}\vartheta) = a_0 = -b\operatorname{sen}\vartheta$ è costante. Allora, la stessa (8.8) diventa

$$\begin{aligned}\frac{D^2V}{ds^2} &= -\kappa(\kappa\cos\vartheta - \tau\operatorname{sen}\vartheta)T + \tau(\kappa\cos\vartheta - \tau\operatorname{sen}\vartheta)B \\ &= b\kappa\operatorname{sen}\vartheta\, T - b\tau\operatorname{sen}\vartheta\, B,\end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{D^2V}{ds^2} + V = (b\,\kappa\operatorname{sen}\vartheta + \cos\vartheta)T + (-b\,\tau\operatorname{sen}\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta)B.$$

Derivando D^2V/ds^2 e usando le formule di Frenet, abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{D^3V}{ds^3} &= b\,\kappa'\operatorname{sen}\vartheta\, T + b\,\kappa^2\operatorname{sen}\vartheta\, N - b\,\tau'\operatorname{sen}\vartheta\, B + b\,\tau^2\operatorname{sen}\vartheta\, N \\ &= b\,\kappa'\operatorname{sen}\vartheta\, T + b\operatorname{sen}\vartheta(\kappa^2 + \tau^2)N - b\,\tau'\operatorname{sen}\vartheta\, B.\end{aligned}$$

Sostituendo tutte le informazioni trovate in (8.3), si ottiene

$$-b\,\tau\,\tau'\operatorname{sen}\vartheta + \frac{\kappa'}{\kappa}\tau^2\, b\operatorname{sen}\vartheta - \frac{\kappa'}{\kappa}\tau\operatorname{sen}\vartheta = 0$$

e quindi

$$\tau\operatorname{sen}\vartheta\Big(b(\kappa'\,\tau - \kappa\,\tau') - \kappa'\Big) = 0. \tag{8.11}$$

Se $\tau = 0$, allora γ è un'elica del tipo di quella considerata nella Proposizione 8.9 e quindi otteniamo la 1). Se $\tau \neq 0$, la (8.11) diventa

$$b(\kappa'\,\tau - \kappa\,\tau') - \kappa' = 0. \tag{8.12}$$

Dalla (8.6) abbiamo $\tau = a\kappa + b$ e quindi $\tau' = a\kappa'$ dove $a = \operatorname{cotg}\vartheta$ è costante. Sostituendo quest'ultima nella (8.12), si ottiene

$$\kappa'(b^2 - 1) = 0.$$

Se $\kappa' = 0$, allora κ e $\tau = a\kappa + b$ sono costanti. In tal caso abbiamo la 2).
Se $\kappa' \neq 0$, allora $b = \pm 1$ e quindi $\tau = a\kappa \pm 1$. In tal caso abbiamo la 3).

Viceversa, ogni curva di Frenet γ che soddisfi una delle proprietà elencate in $1), 2), 3)$ è un'elica generalizzata. Se γ soddisfa la proprietà 1), allora il risultato segue dalla Proposizione 8.9. Se γ soddisfa la proprietà 2), allora il risultato segue dall'ultima parte della Proposizione 8.10. Infine, se γ soddisfa la 3), quindi $\tau = a\kappa \pm 1$, basta considerare $V(s) = \cos\vartheta\, T(s) + \operatorname{sen}\vartheta\, B(s)$, dove

ϑ è definito da $\text{cotg}\vartheta = a$ e verificare che tale V è asse per la curva. Infatti, $\|V\| = 1$ e $V \cdot T = \cos\vartheta$ (costante). Inoltre, siccome $\kappa\cos\vartheta - \tau\,\text{sen}\,\vartheta = -b\,\text{sen}\,\vartheta$ è costante, dove $b = \pm 1$, derivando V si ottiene

$$\frac{DV}{ds} = -b\,\text{sen}\,\vartheta\, N, \quad \frac{D^2V}{ds^2} = b\,\kappa\,\text{sen}\,\vartheta\, T - b\,\tau\,\text{sen}\,\vartheta\, B$$

e

$$\frac{D^3V}{ds^3} = b\,\kappa'\,\text{sen}\,\vartheta\, T + b\,\text{sen}\,\vartheta(\kappa^2 + \tau^2)N - b\,\tau'\,\text{sen}\,\vartheta\, B.$$

Quindi, si vede che (8.1),(8.2),(8.3) sono soddisfatte. In particolare, per la (8.3) si ottiene $-\tau\text{sen}\,\vartheta(\tau'\kappa b - \tau b\kappa' + \kappa') = 0$ in quanto $\tau = a\kappa + b$, $\tau' = a\kappa'$ e $b^2 = 1$. □

8.3. Modelli di eliche sulla sfera $\mathbb{S}^3$

Consideriamo la seguente curva di $\mathbb{S}^3$:

$$\gamma(t) = \big(\cos\alpha\cos at, \cos\alpha\,\text{sen}\,at, \text{sen}\,\alpha\cos bt, \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,bt\big),\ t \in \mathbb{R}, \tag{8.13}$$

dove $\alpha \in]0, \pi/2[$, $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b \geq 0$ che soddisfano le condizioni

$$(a, b) \neq (0, 0) \quad \text{e} \quad a^2\cos^2\alpha + b^2\text{sen}^2\alpha = 1. \tag{8.14}$$

Determiniamo la curvatura di γ come curva di $\mathbb{S}^3$. Siccome

$$\dot\gamma(t) = \big(-a\cos\alpha\,\text{sen}\,at, a\cos\alpha\cos at, -b\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,bt, b\,\text{sen}\,\alpha\cos bt\big),$$

abbiamo $\|\dot\gamma(t)\|^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\text{sen}^2\alpha = 1$ e quindi il versore tangente

$$T(t) = \dot\gamma(t).$$

Inoltre,

$$\ddot\gamma(t) = \big(-a^2\cos\alpha\cos at, -a^2\cos\alpha\,\text{sen}\,at, -b^2\text{sen}\,\alpha\cos bt, -b^2\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,bt\big),$$

e

$$\ddot\gamma(t) \cdot N_{\gamma(t)} = \ddot\gamma(t) \cdot \gamma(t) = ... = -a^2\cos^2\alpha - b^2\text{sen}^2\alpha = -1.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned}\frac{DT}{dt} &= \ddot\gamma(t) - \big(\ddot\gamma(t)\cdot N_{\gamma(t)}\big)N_{\gamma(t)} \\ &= \ddot\gamma(t) - \big(\ddot\gamma(t)\cdot\gamma(t)\big)\gamma(t) = \ddot\gamma(t) + \gamma(t) \\ &= \Big((1-a^2)\cos\alpha\cos at, (1-a^2)\cos\alpha\,\text{sen}\,at, (1-b^2)\text{sen}\,\alpha\cos bt, \\ &\qquad (1-b^2)\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,bt\Big)\end{aligned}$$

e quindi la curvatura

$$\kappa^2(t) = \|DT/dt\|^2 = (1-a^2)^2\cos^2\alpha + (1-b^2)^2\text{sen}^2\alpha.$$

Siccome la condizione $a^2\cos^2\alpha + b^2\text{sen}^2\alpha = 1$ è equivalente a

$$(a^2-1)\cos^2\alpha = (1-b^2)\text{sen}^2\alpha,$$

otteniamo $\kappa^2 = (a^2-1)(1-b^2)$ e quindi

$$\kappa = \sqrt{(a^2-1)(1-b^2)} \text{ (costante).}$$

Adesso distinguiamo le differenti situazioni che si possono avere in corrispondenza dei valori che possono assumere i parametri a, b.

- Se ***a=1***, la condizione (8.14) diventa $\cos^2\alpha + b^2 \operatorname{sen}^2\alpha = 1$ che implica $b = 1$. In tal caso la curvatura è nulla e la curva γ è definita da

$$\gamma(t) = \big(\cos\alpha\cos t, \cos\alpha \operatorname{sen} t, \operatorname{sen}\alpha\cos t, \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} t\big)$$

la quale è contenuta nel piano E^2 (passante per origine) di $\mathbb{R}^4$, piano che ha equazioni: $x_1 = (\mathrm{tg}\alpha)x_3, \quad x_2 = (\mathrm{tg}\alpha)x_4$. Allora $\gamma = E^2 \cap \mathbb{S}^3$ è una circonferenza di raggio massimo di $\mathbb{S}^3$, dunque una **curva geodetica** di $\mathbb{S}^3$ (cf. Osservazione (8.4)). Stessa conclusione per $a = b$, infatti dalla (8.14) segue $a = b = 1$.

- Nel seguito assumiamo $\boldsymbol{a \neq b}$, e quindi $\boldsymbol{a \neq 1}$, $\boldsymbol{b \neq 1}$, e determiniamo la torsione di γ. Il campo normale è definito da $N = (1/\kappa)\big(DT/dt\big)$, e quindi derivando DT/dt abbiamo

$$\begin{aligned}\kappa\, N'(t) &= \big(DT/dt\big)' \\ &= \Big(-a(1-a^2)\cos\alpha \operatorname{sen} at, a(1-a^2)\cos\alpha\cos at, \\ &\qquad -b(1-b^2)\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} bt, b(1-b^2)\operatorname{sen}\alpha\cos bt\Big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa\, N'(t)\cdot\gamma(t) &= -a(1-a^2)\cos^2\alpha \operatorname{sen} at\cos at + a(1-a^2)\cos^2\alpha\cos at \operatorname{sen} at \\ &\quad - b(1-b^2)\operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen} bt\cos bt + b(1-b^2)\operatorname{sen}^2\alpha\cos bt \operatorname{sen} bt \\ &= 0.\end{aligned}$$

Dunque,

$$\frac{DN}{dt} = N'(t) - \Big(N'(t)\cdot\gamma(t)\Big)\gamma(t) = N'(t).$$

Dalla seconda formula di Frenet $\dfrac{DN}{dt} = -\kappa T(t) + \tau(t)B(t)$, abbiamo

$$\tau^2 = \left\| \frac{DN}{dt} + \kappa T(t) \right\|^2 = \|N'(t) + \kappa T(t)\|^2$$

e quindi

$$\begin{aligned}\tau^2 &= \|N'(t)\|^2 + 2\kappa\Big(N'(t)\cdot T(t)\Big) + \kappa^2 \\ &= \|N'(t)\|^2 + 2\kappa\Big(\frac{DN}{dt}\cdot T(t)\Big) + \kappa^2 \\ &= \|N'(t)\|^2 - 2\kappa\Big(N(t)\cdot\frac{DT}{dt}\Big) + \kappa^2 \\ &= \|N'(t)\|^2 - 2\kappa^2 + \kappa^2 \\ &= \|N'(t)\|^2 - \kappa^2.\end{aligned}$$

D'altronde, dall'espressione di $\kappa N'(t)$ si ottiene

$$\begin{aligned}\kappa^2\|N'(t)\|^2 &= a^2(1-a^2)^2\cos^2\alpha + b^2(1-b^2)^2\mathrm{sen}^2\alpha\\ &= ... = (a^2+b^2-1)\kappa^2.\end{aligned}$$

Pertanto,

$$\tau^2 = \|N'(t)\|^2 - \kappa^2 = (a^2+b^2-1) - (a^2-1)(1-b^2)$$

e quindi,

$$\tau^2 = a^2b^2 \text{ (costante)}.$$

Dunque, abbiamo quanto segue.

- Per ***a=0 e b≠ 0*** (più precisamente $b^2 = 1/\mathrm{sen}^2\alpha = 1 + \mathrm{cotg}^2\alpha > 1$),

$$\text{la torsione } \tau = 0 \text{ e la curvatura } \kappa = \sqrt{b^2-1} > 0.$$

In tal caso la curva γ definita dalla (8.13) diventa

$$\gamma(t) = \big(\cos\alpha, 0, \mathrm{sen}\,\alpha\cos bt, \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,bt\big)$$

la quale è una curva piana, e il piano E^2 che la contiene ha equazioni $x_1 = \cos\alpha$, $x_2 = 0$. Quindi, γ è contenuta nella sfera $\mathbb{S}^2 = E^3 \cap \mathbb{S}^3$, dove E^3 è l'iperpiano di equazione $x_2 = 0$. Tale curva è un esempio di elica generalizzata di $\mathbb{S}^3$ del tipo 1) nel Teorema 8.11. Analogamente per $a \neq 0$ e $b = 0$.

- Per **a≠ 0,1 e b≠ 0,1** la curva $\gamma(t)$ definita dalla (8.13) è un esempio di elica generalizzata con **curvatura e torsione costanti non nulle** date da

$$\kappa = \sqrt{(a^2-1)(1-b^2)} \quad \text{e} \quad \tau^2 = a^2b^2.$$

Quindi, in questo caso otteniamo modelli di eliche sulla sfera $\mathbb{S}^3$, ossia esempi di eliche di $\mathbb{S}^3$ del tipo 2) nel Teorema 8.11. Inoltre, in questo caso ritroviamo l'esempio enunciato in [**11**] p.240.

Infine, osserviamo che il campo vettoriale U definito dalla (8.4) è un campo vettoriale di Killing su $\mathbb{S}^3$ (cf. Osservazione 8.6), per cui

$$U(t) = U_{\gamma(t)} = \big(-\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,at, \cos\alpha\cos at, -\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,bt, \mathrm{sen}\,\alpha\cos bt\big)$$

è di Killing lungo la nostra curva γ. Inoltre, $\|U(t)\|^2 = 1$ e $U(t)$ forma un angolo costante con $\gamma(t)$, più precisamente

$$\cos\vartheta = U(t)\cdot T(t) = a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha = \text{cost}.$$

Pertanto, $U(t)$ è un asse per l'elica $\gamma(t)$.

Osservazione 8.12. La costruzione di eliche generalizzate del tipo 3) nel Teorema 8.11 è meno elementare, essa richiede nozioni più delicate. Tuttavia, diamo un'idea di massima del procedimento che si può seguire. Intanto, introduciamo brevemente quelli che vengono detti cilindri e tori di Hopf (cf. l'articolo di U. Pinkall [**19**] per dettagli). Consideriamo la sfera unitaria $\mathbb{S}^3$ e la sfera $\mathbb{S}^2(1/2)$ di raggio 1/2. Sia $\pi : \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2 \to \mathbb{S}^2(1/2) \subset \mathbb{R}\times\mathbb{C}$ l'applicazione definita da

$$\pi : (z_1, z_2) \mapsto \big(\tfrac{1}{2}(|z_1|^2 - |z_2|^2), z_1\,\bar{z}_2\big)$$

nota col nome di **applicazione di Hopf**. Se $\beta(t)$ è una curva della sfera $\mathbb{S}^2(1/2)$, l'immagine inversa $M_\beta = \pi^{-1}(\beta)$ è una superficie piatta di $\mathbb{S}^3$ che viene detta **cilindro di Hopf** su β. Se $\beta(t)$ è una curva chiusa, allora la superficie M_β è isometrica a un toro piatto ed è detta *toro di Hopf*. Quando $\beta(t)$ è una circonferenza con curvatura geodetica κ_g, il toro di Hopf M_β ha curvatura media costante $H = \kappa_g/2$. In particolare, se $\beta(t)$ è una geodetica di $\mathbb{S}^2(1/2)$, il toro di Hopf M_β è un *toro minimale di Clifford*.

Seguendo [**1**] (cf. Teoremi 4,5, p.1508) e [**3**] (cf. Teoremi 1, p.12), ogni elica generalizzata di $\mathbb{S}^3$, e quindi anche quelle del tipo 3) nel Teorema 8.11, si può ottenere come geodetica di un cilindro di Hopf M_β su una opportuna curva β di $\mathbb{S}^2(1/2)$. E' interessante notare l'analogia di questo risultato col fatto che le curve di Lancret di $\mathbb{R}^3$ si possono caratterizzare come le geodetiche di un cilindro retto su una curva piana (cf. Esempio 5.67).

Esercizio 8.13. Si consideri il modello di elica su $\mathbb{S}^3$ dato dalla curva $\gamma(t)$ definita dalla (8.13), con $a \neq b, a > 0, b > 0$. Posto $z_1(t) = (\cos\alpha)e^{iat}$ e $z_2(t) = (\operatorname{sen}\alpha)e^{ibt}$, si può scrivere $\gamma(t) = \big(z_1(t), z_2(t)\big)$, dove $\alpha \in]0, \pi/2[$.

Determinare una curva β_0 della sfera $\mathbb{S}^2(1/2)$ tale che il cilindro di Hopf M_{β_0} contenga l'elica γ. Dire se esiste un valore di α per cui M_{β_0} è un toro di Clifford.

Esercizio 8.14. Per $a \in]0, 1[$, si consideri la curva

$$\begin{aligned}\gamma_a(t) &= \frac{a}{a^2+1}\Big((1/a)\, e^{iat}, e^{i(t/a)}\Big)\\ &= \frac{a}{a^2+1}\Big((1/a)\cos at, (1/a)\operatorname{sen} at, \cos(t/a), \operatorname{sen}(t/a)\Big), t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Osservato che γ_a è una curva di $\mathbb{S}^3$, si determini curvatura e torsione. Inoltre, se γ_a è un'elica di $\mathbb{S}^3$, rispondere alle stesse domande dell'esercizio precedente dove il ruolo di α è svolto dal parametro a.