

## Geometria iperbolica

Per una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$ , molte proprietà geometriche e oggetti geometrici dipendono solo dai coefficienti della prima forma fondamentale  $E, F, G$ , in altre parole sono invarianti che fanno parte della geometria intrinseca della superficie. D'altronde, il fatto cruciale che permette di sviluppare una geometria intrinseca è che i coefficienti  $E, F, G$  sono funzioni differenziabili che definiscono un prodotto scalare su ogni piano tangente, ovvero i coefficienti  $g_{11} = E, g_{12} = g_{21} = F, g_{22} = G$  definiscono una matrice simmetrica definita positiva. Equivalentemente, la matrice  $(g_{ij})$  definisce un tensore (differenziabile) covariante simmetrico di ordine 2 e definito positivo. In questo modo uno può definire una “prima forma fondamentale”, ovvero una metrica riemanniana, su un arbitrario dominio  $D$  di  $\mathbb{R}^2$  e quindi sviluppare su  $D$  una geometria analoga alla geometria intrinseca di una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$ . Come un'applicazione di questo approccio, studieremo modelli di geometria (non euclidea) iperbolica.

### 6.1. Domini riemanniani

Sia  $D$  un aperto connesso di  $\mathbb{R}^2$  e sia  $g = (g_{ij})$  una matrice simmetrica definita positiva di ordine 2 costituita da funzioni differenziabili  $g_{ij}$  definite su  $D$ . In tal caso diciamo che  $g$  è una *metrica riemanniana* e  $(D, g)$  è un dominio riemanniano (2-dimensionale). Naturalmente  $(\delta_{ij})$ , il più semplice esempio di matrice simmetrica definita positiva su  $D$ , definisce la *metrica euclidea*  $g_0$  su  $D$ .

Sia  $(D, g)$  un arbitrario dominio riemanniano. Per ogni  $p \in D$ , il piano tangente è definito, come nel caso di  $\mathbb{R}^2$ , da

$$T_p D = \{V_p = (p, v) : v \in \mathbb{R}^2\} = T_p \mathbb{R}^2.$$

Le coordinate  $(x_1, x_2)$  svolgono il ruolo dei parametri  $(u, v)$ , i campi vettoriali  $\partial_1, \partial_2$  definiti da

$$(\partial_1)_p = (E_1)_p = (1, 0)_p \quad \text{e} \quad (\partial_2)_p = (E_2)_p = (0, 1)_p$$

svolgono il ruolo dei campi vettoriali  $(\varphi_u, \varphi_v)$ . Quindi ogni vettore tangente  $V_p = (v_1, v_2)_p = v_1(\partial_1)_p + v_2(\partial_2)_p$  con  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$  e  $p \in D$ . Naturalmente, un campo vettoriale (differenziabile)  $V$  su  $D$ , ossia un elemento di  $\mathfrak{X}(D)$ , è definito da

$$V = a_1 \partial_1 + a_2 \partial_2,$$

dove  $a_1, a_2$  sono funzioni differenziabili su  $D$ .

La matrice  $g = (g_{ij})$  definisce un prodotto scalare tra campi vettoriali differenziabili e tra vettori tangenti. Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(D)$ ,  $X = (a_1, a_2) = a_1\partial_1 + a_2\partial_2$ ,  $Y = (b_1, b_2) = b_1\partial_1 + b_2\partial_2$ , allora  $g(\partial_i, \partial_j) = g_{ij}$  e

$$g(X, Y) = a_1b_1g_{11} + a_2b_2g_{22} + (a_1b_2 + a_2b_1)g_{12}$$

è una funzione differenziabile su  $D$ , quindi un elemento di  $\mathcal{F}(D)$ . Se  $V_p, W_p \in T_p\mathbb{R}^2$ ,  $p \in D$ ,  $V_p = v_1(\partial_1)_p + v_2(\partial_2)_p$  e  $W_p = w_1(\partial_1)_p + w_2(\partial_2)_p$ , si ha

$$g_p(V_p, W_p) = v_1w_1g_{11}(p) + v_2w_2g_{22}(p) + (v_1w_2 + v_2w_1)g_{12}(p).$$

La metrica euclidea  $g_0$  induce il prodotto scalare euclideo:

$$g_0(X, Y) = a_1b_1 + a_2b_2 = X \cdot Y.$$

Dati due domini riemanniani  $(D, g)$  e  $(\tilde{D}, \tilde{g})$ , un'applicazione differenziabile  $f : D \rightarrow \tilde{D}$  si dice che è una isometria se  $f$  è un diffeomorfismo il cui differenziale soddisfa

$$\tilde{g}_p(f_{*p}V_p, f_{*p}W_p) = g_p(V_p, W_p), \text{ per ogni } p \in D \text{ e } V_p, W_p \in T_p\mathbb{R}^2.$$

La condizione che un diffeomorfismo  $f : D \rightarrow \tilde{D}$  sia una isometria è tradotta in termini matriciali dalla seguente condizione (cf. anche (5.3))

$$(6.1) \quad (g_{ij})_p = (J(f))^t (\tilde{g}_{ij})_{f(p)} J(f)$$

dove  $J(f)$  è la matrice jacobiana di  $f$ .

Alla luce di quanto detto, possiamo introdurre per un dominio riemanniano  $(D, g)$  tutti gli invarianti intrinseci che abbiamo studiato per le superfici, quindi sviluppare per  $(D, g)$  i concetti studiati nelle precedenti sezioni di questo capitolo, ad eccezione della Sezione 5.3. Ad esempio, la *lunghezza di curve* di  $D$  rispetto a  $g$  e la *distanza* su  $D$  indotta da  $g$ , si definiscono in modo del tutto analogo al caso delle superfici di  $\mathbb{R}^3$ . La situazione è un pò più delicata nel definire la curvatura gaussiana, i coefficienti di Christoffel, la derivata covariante e le curve geodetiche di  $(D, g)$ . Per tali invarianti possiamo procedere, ad esempio, nel modo seguente.

La curvatura gaussiana (o meglio la *curvatura di Gauss-Riemann*)  $K$  si definisce mediante la formula (5.5) sostituendo i coefficienti  $E, F, G$  rispettivamente con  $g_{11}, g_{12}$  e  $g_{22}$ . Quindi,

$$(6.2) \quad \begin{aligned} K(\det(g_{ij}))^2 &= \left[ (\partial_2\partial_1g_{12} - (1/2)\partial_1^2g_{22} - (1/2)\partial_2^2g_{11}) \right] \det(g_{ij}) \\ &\quad - (\partial_2g_{12}) \left[ (1/2)g_{22}\partial_1g_{11} - g_{12}(\partial_1g_{12} - (1/2)\partial_2g_{11}) \right] \\ &\quad + (1/2)(\partial_1g_{22}) \left[ (1/2)g_{22}\partial_1g_{11} - g_{12}(\partial_1g_{12} - (1/2)\partial_2g_{11}) \right] \\ &\quad + (1/2)\partial_2g_{22} \left[ (1/2)g_{12}\partial_1g_{11} - g_{11}(\partial_1g_{12} - (1/2)\partial_2g_{11}) \right] \\ &\quad + (1/4)\partial_2g_{11}(g_{22}\partial_2g_{11} - g_{12}\partial_1g_{22}) \\ &\quad - (1/4)\partial_1g_{22}(g_{12}\partial_2g_{11} - g_{11}\partial_1g_{22}). \end{aligned}$$

In particolare, se  $g_{12} = 0$ , la (6.2) diventa

$$(6.3) \quad K(g_{11}g_{22})^2 = -(1/2)g_{11}g_{22}(\partial_2^2 g_{11} + \partial_1^2 g_{22}) \\ + (1/4)g_{22} \left[ (\partial_1 g_{11})(\partial_1 g_{22}) + (\partial_2 g_{11})^2 \right] \\ + (1/4)g_{11} \left[ (\partial_2 g_{11})(\partial_2 g_{22}) + (\partial_1 g_{22})^2 \right].$$

Analogamente i *simboli di Christoffel*  $\Gamma_{ij}^k$  si definiscono mediante le soluzioni dei sistemi (4.2), (4.3) e (4.4). Risolvendo tali sistemi, si trova che i coefficienti  $\Gamma_{ij}^k$  si possono esprimere con la seguente formula

$$(6.4) \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 (\partial_j g_{ir} + \partial_i g_{jr} - \partial_r g_{ij}) g^{rk},$$

dove  $(g^{ij})$  denota la matrice inversa di  $(g_{ij})$ .

Sia ora  $\gamma(t)$ ,  $t \in I$ , una curva differenziabile di  $D$  e sia

$$V(t) = a_1(t) (\partial_1)_t + a_2(t) (\partial_2)_t$$

un campo vettoriale differenziabile lungo  $\gamma$ . Consideriamo la corrispondenza

$$\frac{D}{dt} : \mathfrak{X}(\gamma) \rightarrow \mathfrak{X}(\gamma), V(t) \mapsto \frac{DV}{dt},$$

dove il campo vettoriale  $\frac{DV}{dt}$  è definito dall'equazione (5.15), ossia

$$(6.5) \quad \frac{DV}{dt} := \sum_{k=1}^2 \left( a'_k(t) + \sum_{i,j=1}^2 a_i(t) x'_j(t) \Gamma_{ij}^k(t) \right) \partial_k(t).$$

Si vede facilmente che con questa definizione,  $\frac{D}{dt}$  è un endomorfismo di  $\mathfrak{X}(\gamma)$  che soddisfa le proprietà (5.13) e (5.14). In particolare, prendendo  $V(t) = \dot{\gamma}(t)$ , la (6.5) diventa

$$(6.6) \quad \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \sum_{k=1}^2 \left( x''_k(t) + \sum_{i,j=1}^2 x'_i(t) x'_j(t) \Gamma_{ij}^k(t) \right) \partial_k(t).$$

Possiamo quindi definire una curva differenziabile  $\gamma(t)$  come *curva geodetica* se il campo tangente  $\dot{\gamma}(t)$  è parallelo lungo  $\gamma$ , ovvero  $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0 \quad \forall t \in I$ . Inoltre, procedendo come per le superfici, si può definire la *curvatura geodetica*  $k_g(s)$  di una curva regolare  $\gamma(s)$ . Esaminando le dimostrazioni del Teorema 5.50 e del Corollario 5.51 vediamo che esse sono di natura intrinseca, quindi valgono anche nel caso di un dominio riemanniano  $(D, g)$ . Pertanto, la derivata covariante definita da (6.5) e la corrispondente nozione di curva geodetica, sono invarianti riemanniani ossia invarianti per isometrie (locali) di  $(D, g)$ . Naturalmente anche il Teorema 5.46 di esistenza e unicità delle curve geodetiche vale per domini riemanniani.

**Esercizio 6.1.** Si consideri il dominio riemanniano  $(D, g)$ , dove  $D = \mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  e  $g = (1/y^2)g_0$ , quindi  $g_{11} = g_{22} = (1/y^2)$  e  $g_{12} = 0$ . Sia

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$  una curva differenziabile di  $\mathbb{R}_+^2$ . Si Verifichi, usando la (6.4) e la (6.6), che

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \left( x''(t) - \frac{2}{y(t)}x'(t)y'(t), y''(t) + \frac{1}{y(t)}(x'(t))^2 - \frac{1}{y(t)}(y'(t))^2 \right).$$

Un altro modo di procedere per introdurre gli invarianti di cui sopra è il seguente. Primo passo definire la connessione di Levi-Civita  $\nabla$  associata al dominio riemanniano  $(D, g)$ . Per fare ciò, basta definire  $\nabla_X Y$  con la formula (5.30) di Koszul:

$$2g(\nabla_Y X, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) - g(Y, [X, Z]) - g(X, [Y, Z]) - g(Z, [X, Y]).$$

e poi verificare che

- $\nabla$  è una connessione lineare, ossia verifica (5.25), (5.26) e (5.27);
  - $\nabla$  è simmetrica:  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ ;
  - $\nabla$  è compatibile con la metrica  $g$ :  $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ .
- Per come definita, la connessione di Levi-Civita è invariante per isometrie. Quindi, se  $F$  è un'isometria tra  $(D, g)$  e  $(\tilde{D}, \tilde{g})$  vale l'analogia della (5.32)

$$F_*(\nabla_Y X) = \tilde{\nabla}_{F_*Y} F_*X.$$

I simboli di Christoffel definiti dalla (6.4), si dicono anche coefficienti della connessione di Levi-Civita  $\nabla$ . Infatti, tali coefficienti sono determinati anche dalla relazione

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Avendo a disposizione la connessione di Levi-Civita  $\nabla$ , si può definire il tensore di curvatura con la formula

$$R(X, Y)Z := -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

e quindi la curvatura di Gauss-Riemann con la formula (5.37). Con un calcolo un pò laborioso, si dimostra che questa definizione di curvatura gaussiana coincide con la (6.2). Infine, si può verificare che, dati una curva differenziabile  $\gamma(t)$  di  $D$  e un campo vettoriale  $X \in \mathfrak{X}(D)$ , il campo vettoriale  $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} X$  coincide con il campo vettoriale  $DX(t)/dt$  definito dalla (6.5).

### Le varietà riemanniane

Vogliamo dare adesso una veloce presentazione di come il concetto di superficie e il concetto di dominio riemanniano, si possono estendere a quello di varietà riemanniana. Per approfondimenti sulle varietà differenziabili e sulle varietà riemanniane (in generale di dimensione  $n$ ) si può consultare, ad esempio, [18] e la bibliografia in esso riportata. Una *superficie astratta* (detta anche *varietà differenziabile di dimensione 2*) è uno spazio topologico connesso e di Hausdorff  $M$ , localmente omeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , munito di un atlante differenziabile, ossia di una famiglia  $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i : U_i \rightarrow D_i)\}_{i \in I}$  che verifica le seguenti proprietà.

1) Se  $(U, \phi : U \rightarrow D)$  è un generico elemento di  $\mathcal{A}$ , allora  $U$  è un aperto di  $M$ ,

$D$  è un aperto di  $\mathbb{R}^2$  e l'applicazione  $\phi : p \mapsto \phi(p) = (x_1, x_2)$  è un omeomorfismo (detto *applicazione coordinata*). La coppia  $(U, \phi)$  si dice carta locale e  $(x_1, x_2)$  si dicono *coordinate locali* del punto  $p$  rispetto alla fissata carta locale.

2) I domini delle carte ricoprono  $M$ , cioè  $M = \cup_i U_i$ .

3) Per ogni  $i, j \in I$ , con  $U_i \cap U_j$  non vuoto, le applicazioni

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j), (x_1, x_2) = \phi_i(p) \mapsto (y_1, y_2) = \phi_j(p),$$

e

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j), (y_1, y_2) = \phi_j(p) \mapsto (x_1, x_2) = \phi_i(p),$$

sono applicazioni differenziabili tra aperti di  $\mathbb{R}^2$ . In altre parole, la proprietà 3) ci dice che il cambiamento di coordinate avviene con applicazioni differenziabili.

L'atlante  $\mathcal{A}$  si dice che definisce una struttura differenziabile su  $M$ , e due atlanti differenziabili  $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  e  $\mathcal{A}' = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$  definiscono la stessa struttura differenziabile su  $M$  se  $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$  è ancora un atlante differenziabile di  $M$ . Sostituendo  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{R}^n$ , con la stessa definizione, si ha il concetto di varietà differenziabile di dimensione  $n$ . Funzioni differenziabili a valori reali su una varietà differenziabile, e funzioni differenziabili tra varietà differenziabili, si definiscono come per le superfici (cf. Sezione 3.3) ossia in termini di coordinate locali. Un vettore tangente in un punto  $p$  di una varietà differenziabile  $M$  è definito come una derivazione dell'algebra  $\mathcal{F}(p)$  delle funzioni differenziabili in un intorno di  $p$ . Quindi, lo spazio tangente  $T_p M$  è lo spazio di tutti i vettori tangenti. In particolare, le derivazioni

$$(\partial_i)_p : \mathcal{F}(p) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto (\partial f / \partial x_i)(p) := (\partial(f \circ \phi^{-1}) / \partial x_i)(\phi(p)),$$

definiscono i vettori tangenti coordinati.

Una metrica riemanniana su una superficie astratta  $M$  viene definita assegnando nel dominio di ogni carta locale di un atlante differenziabile, una matrice simmetrica  $g = (g_{ij})$  di ordine 2 definita positiva, con i coefficienti  $g_{ij}$  differenziabili, che soddisfino, per ogni cambiamento di coordinate, la condizione di compatibilità (3.20). In modo equivalente, una metrica riemanniana su una varietà differenziabile  $M$  (di dimensione 2) si può definire assegnando un tensore covariante  $g$  del secondo ordine, simmetrico e definito positivo, cioè un'applicazione  $\mathcal{F}$ -bilineare

$$g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M) \text{ che soddisfa} \\ g(X, Y) = g(Y, X), \quad g(X, X) \geq 0, \quad g(X, X)(p) = 0 \Rightarrow X_p = 0.$$

Una metrica riemanniana  $g$  induce un prodotto scalare su ogni piano tangente

$$g_p((\partial_i)_p, (\partial_j)_p) := g(\partial_i, \partial_j)(p) = g_{ij}(p),$$

dove  $\partial_i = \partial / \partial x_i$ . La coppia  $(M, g)$  si dice **varietà riemanniana di dimensione 2**. Naturalmente, domini riemanniani e superfici (connesse) regolari di  $\mathbb{R}^3$  (con la prima forma fondamentale) sono esempi di varietà riemanniana di dimensione 2. Per una varietà riemanniana di dimensione 2 si possono considerare il concetto di isometria tra due varietà riemanniane con la formula (6.1), il concetto di derivata covariante con la formula (6.5) e quindi quello di

curva geodetica (che è sempre invariante per isometrie). Naturalmente, si può considerare la connessione di Levi-Civita con la formula (5.30) di Koszul, e il concetto di curvatura di Gauss-Riemann. Inoltre, si possono definire, come nel caso delle superfici (cf. Sezioni 3.8, 3.9 e 3.10) il concetto di orientabilità, le  $r$ -forme differenziali (per  $r = 1, 2$ ), il concetto di area, di 2-forma d'area e di struttura complessa. In particolare, il Teorema 3.84 (orientabilità in termini di una 2-forma non nulla) vale anche per varietà differenziabili.

**Osservazione 6.2.** Da notare che, in generale, i concetti di derivata covariante e curva geodetica si possono introdurre indipendentemente dalla presenza di una metrica riemanniana, essi sono concetti di natura affine che si possono introdurre semplicemente assegnando una connessione lineare  $\nabla$ . Un diffeomorfismo  $F$  di una varietà differenziabile  $M$ , che conserva la fissata connessione lineare  $\nabla$ :  $F_*(\nabla_Y X) = \nabla_{F_*Y} F_*X$ , e quindi conserva parallelismo e curve geodetiche, si dice trasformazione affine di  $(M, \nabla)$ . La derivata covariante (e quindi anche la nozione di curva geodetica) introdotta in queste note in effetti è legata a una speciale connessione lineare intimamente legata alla prima forma fondamentale (o alla metrica riemanniana nel caso dei domini riemanniani), ovvero la connessione di Levi-Civita.

## 6.2. Isometrie del semipiano di Poincaré

**6. 2-1. Il semipiano di Poincaré.** Il semipiano di Poincaré, detto anche piano iperbolico, è un dominio riemanniano  $(D, g)$  dove  $D$  è il semipiano superiore

$$\mathbb{R}_+^2 = \{p = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\},$$

e  $g$  è la metrica riemanniana definita per ogni  $p \in \mathbb{R}_+^2$  da

$$g_{11}(p) = g_{22}(p) = \frac{1}{y^2(p)} \quad \text{e} \quad g_{12}(p) = 0, \quad \text{ossia} \quad g_p = (g_{ij})(p) \equiv \frac{1}{y^2(p)} g_0.$$

Il semipiano di Poincaré è un modello di geometria iperbolica, forse il più interessante rispetto agli altri modelli (disco di Beltrami e disco di Poincaré). Una domanda naturale è chiedere se il semipiano di Poincaré si può realizzare come superficie di  $\mathbb{R}^3$ . Questo, come già osservato nella Sezione 4.9, non è possibile in quanto il semipiano di Poincaré è un dominio riemanniano completo (cf. Osservazione (6.8)). Tuttavia, ci sono superfici regolari in  $\mathbb{R}^3$  la cui geometria intrinseca è localmente isometrica a quella del semipiano di Poincaré. Il classico esempio è la superficie data dalla pseudo-sfera di Beltrami, infatti nell'Osservazione 4.58 si è visto che tale superficie si può parametrizzare localmente con coordinate rispetto alle quali la prima forma fondamentale si esprime come la metrica riemanniana  $g$  del modello iperbolico del semipiano di Poincaré.

Determiniamo la curvatura di Gauss-Riemann del semipiano di Poincaré  $(\mathbb{R}_+^2, g)$ . Siccome  $g_{11} = g_{22} = 1/y^2$  e  $g_{12} = 0$ , allora

$$\partial_2 g_{11} = \partial_2 g_{22} = -2/y^3, \quad \partial_1 g_{11} = \partial_1 g_{22} = 0, \quad \partial_2^2 g_{11} = 6/y^4.$$

Quindi, sostituendo nella (6.3)

$$K(g_{11}g_{22})^2 = -(1/2)g_{11}g_{22}(\partial_2^2 g_{11} + \partial_1^2 g_{22}) + (1/4)g_{22} \left[ (\partial_1 g_{11})(\partial_1 g_{22}) + (\partial_2 g_{11})^2 \right] \\ + (1/4)g_{11} \left[ (\partial_2 g_{11})(\partial_2 g_{22}) + (\partial_1 g_{22})^2 \right],$$

la curvatura di Gauss-Riemann è data da

$$(1/y^8)K = -3/y^8 + 1/y^8 + 1/y^8.$$

Pertanto,  $K = \text{cost.} = -1$  in accordo col fatto che la curvatura gaussiana della pseudo-sfera di Beltrami, data dalla (4.21), è  $-1$  (prendendo la costante  $R = 1$ ).

**Esercizio 6.3.** Determinare, usando la formula di Koszul per la connessione di Levi-Civita  $\nabla$  del semipiano di Poincaré, i campi vettoriali  $\nabla_{\partial_i} \partial_j$ , ( $j = 1, 2$ ). Quindi, determinare la curvatura di Gauss-Riemann usando il tensore di curvatura.

**6. 2-2. Isometrie del semipiano di Poincaré.** Iniziamo introducendo l'**inversione rispetto a una circonferenza**. Sia  $\mathbb{S}^1$  la circonferenza del piano euclideo di centro  $p_0$  e raggio  $r$ . L'inversione rispetto a tale circonferenza è l'applicazione

$$\mathcal{I} : \mathbb{R}^2 \setminus \{p_0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{p_0\}, \quad p \mapsto p',$$

dove  $p'$  è il punto della semiretta  $p_0p$  tale che  $\overline{p_0p} \cdot \overline{p_0p'} = r^2$ . Se  $p$  è interno (risp. esterno) a  $\mathbb{S}^1$ , allora  $p'$  è esterno (risp. interno) a  $\mathbb{S}^1$ . Se  $p \in \mathbb{S}^1$ , allora  $p' = p$ . Quindi  $\mathcal{I}$  scambia l'interno con l'esterno e mantiene fissi i punti della circonferenza  $\mathbb{S}^1$ . Graficamente l'inversione si può costruire come segue (cf. Figura 1). Se  $p$  è interno al cerchio, mandiamo da  $p$  la perpendicolare alla retta  $p_0p$  e siano  $H$  e  $K$  le intersezioni di tale perpendicolare con la circonferenza.

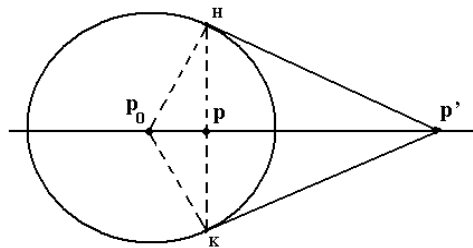


FIGURA 1

Le tangenti alla circonferenza in  $H$  e  $K$  si incontrano nel punto corrispondente  $p'$  (applicando il primo Teorema di Euclide si ha  $\overline{p_0p} \cdot \overline{p_0p'} = \overline{p_0H}^2 = r^2$ ). Se invece il punto  $p$  è esterno, basta condurre da esso le tangenti alla circonferenza e congiungere i loro punti di contatto; tale congiungente incontra  $p_0p$  nel punto

corrispondente  $p'$ . Usando coordinate cartesiane, se  $p_0 = (x_0, y_0)$ ,  $p = (x, y)$  e  $p' = (x', y')$ , si vede facilmente che l'inversione è rappresentata dalle equazioni:

$$(6.7) \quad x' = x_0 + \frac{r^2(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad y' = y_0 + \frac{r^2(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Allora, l'inversione rispetto alla circonferenza di centro l'origine e raggio  $r$  è data da

$$\mathfrak{I} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad p \mapsto (r^2/\|p\|^2)p.$$

Verifichiamo che  $\mathfrak{I}$  è un'applicazione conforme, ossia il suo differenziale soddisfa

$$\|(\mathfrak{I})_{*p}V_p\|^2 = \lambda^2(p)\|V_p\|^2 = \lambda^2(p)\|v\|^2,$$

equivalentemente

$$g_0((\mathfrak{I})_{*p}V_p, (\mathfrak{I})_{*p}W_p) = \lambda^2(p)g_0(V_p, W_p) = \lambda^2(p)g_0(v, w),$$

per ogni  $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  e  $V_p = (p, v)$ ,  $W_p = (p, w) \in T_p\mathbb{R}^2$ , dove il coefficiente  $\lambda(p)$  è una funzione differenziabile positiva. Siccome

$$\mathfrak{I}(p) = \frac{r^2}{\|p\|^2}p = \left( x' = \frac{r^2x}{x^2 + y^2}, y' = \frac{r^2y}{x^2 + y^2} \right),$$

allora

$$(\mathfrak{I})_{*p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{r^2}{\|p\|^4} \begin{pmatrix} y^2 - x^2 & -2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} (\mathfrak{I})_{*p} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \frac{r^2}{\|p\|^4} \begin{pmatrix} (y^2 - x^2)v_1 - 2xyv_2 \\ -2xyv_1 + (x^2 - y^2)v_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{r^2}{\|p\|^4} \left\{ \|p\|^2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x(v_1x + v_2y) \\ 2y(v_2y + v_1x) \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$(\mathfrak{I})_{*p}V_p = \frac{r^2}{\|p\|^4} \{ \|p\|^2v - 2g_0(v, p)p \}$$

e

$$\|(\mathfrak{I})_{*p}V_p\|^2 = \frac{r^4}{\|p\|^4} \|v\|^2.$$

Quindi  $\mathfrak{I}$  è un'applicazione conforme con coefficiente  $\lambda = r^2/\|p\|^2$ .

**Proposizione 6.4.** *L'inversione  $\mathfrak{I}(p) = (r^2/\|p\|^2)p$  definisce un'isometria del piano iperbolico  $(\mathbb{R}_+^2, g)$ .*



DIMOSTRAZIONE. Intanto  $\mathfrak{J}$  applica  $\mathbb{R}_+^2$  in  $\mathbb{R}_+^2$ . Inoltre, poiché  $\mathfrak{J}$  è conforme con coefficiente  $\lambda(p) = r^2/\|p\|^2$ , risulta:

$$\begin{aligned} g_{\mathfrak{J}(p)}((\mathfrak{J})_{*p}V_p, (\mathfrak{J})_{*p}W_p) &= \frac{1}{y^2(\mathfrak{J}(p))}g_0((\mathfrak{J})_{*p}V_p, (\mathfrak{J})_{*p}W_p) \\ &= \frac{\|p\|^4}{r^4y^2(p)}g_0((\mathfrak{J})_{*p}V_p, (\mathfrak{J})_{*p}W_p) \\ &= \frac{1}{y^2(p)}g_0(v, w) = g_p(V_p, W_p) \end{aligned}$$

per ogni  $p \in \mathbb{R}_+^n$  e per ogni  $V_p = (p, v), W_p = (p, w) \in T_p\mathbb{R}_+^n$ .  $\square$

**Proposizione 6.5.** *Le seguenti applicazioni sono isometrie del piano iperbolico  $(\mathbb{R}_+^2, g)$ .*

- 1)  $f_1 = \mathfrak{J} : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2, p = (x, y) \mapsto (r^2/\|p\|^2)p = (r^2/\|p\|^2)(x, y)$ ;
- 2)  $f_2 : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2, p = (x, y) \mapsto (-x, y)$ ;
- 3)  $f_3 : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2, p = (x, y) \mapsto (x + a, y)$ ;
- 4)  $f_4 : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2, p = (x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y), \lambda = \text{cost} > 0$ .

Con notazione complessa ( $z = x + iy$ ), abbiamo

$$f_1(z) = \mathfrak{J}(z) = r^2 \frac{z}{z\bar{z}} = r^2 \frac{1}{\bar{z}}; \quad f_2(z) = -\bar{z}; \quad f_3(z) = z + a; \quad f_4(z) = \lambda z.$$

DIMOSTRAZIONE. La  $f_1$  è un'inversione, quindi un'isometria (applicando la Proposizione 6.4). Le applicazioni  $f_2, f_3, f_4$ , che sono rispettivamente una simmetria (rispetto all'asse  $y$ ), una traslazione (parallela all'asse  $x$ ) e una dilatazione, si vede facilmente che sono isometrie del piano iperbolico.  $\square$

*Le isometrie del semipiano di Poincaré sono applicazioni conformi.* Infatti, se  $f : (\mathbb{R}_+^2, g) \rightarrow (\mathbb{R}_+^2, g)$  è un'isometria per la metrica iperbolica, allora

$$g(V_p, W_p) = g(f_{*p}V_p, f_{*p}W_p) \Rightarrow g_0(f_{*p}V_p, f_{*p}W_p) = \frac{y^2(f(p))}{y^2(p)}g_0(V_p, W_p)$$

per ogni  $p \in \mathbb{R}_+^2$  e per ogni  $V_p, W_p \in T_p\mathbb{R}_+^2$ . Quindi  $f$  è un'applicazione conforme.

Facciamo vedere ora che le **trasformazioni di Möbius** sono relative alle isometrie del piano iperbolico. Trasformazioni del tipo

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0,$$

sono dette *trasformazioni di Möbius*. Esse sono invertibili con  $f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{a - cz}$ .

Se  $c \neq 0$ ,

$$f(z) = \alpha + \frac{\beta}{(cz + d)}, \quad \text{dove } \alpha = \frac{a}{c} \text{ e } \beta = \frac{bc - ad}{c}.$$

Se  $c = 0$ ,

$$f(z) = \alpha z + \beta, \text{ dove } \alpha = \frac{a}{d} \text{ e } \beta = \frac{b}{d}.$$

Quindi ogni trasformazione di Möbius  $f(z)$  si può esprimere come composizione di trasformazioni di Möbius semplici del tipo:

$$\begin{aligned} \psi_1(z) &= z + b, \quad b \in \mathbb{C} \quad (\text{traslazione}); & \psi_2(z) &= e^{i\theta} z \quad (\text{rotazione}); \\ \psi_3(z) &= \rho z, \quad \rho > 0 \quad (\text{dilatazione}); & \psi_4(z) &= 1/z. \end{aligned}$$

Si noti che la trasformazione  $f(z) = az$ ,  $a \in \mathbb{C}$ , è composizione di trasformazioni del tipo  $\psi_2$  e  $\psi_3$ . In particolare, le **trasformazioni di Möbius reali**

$$f: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2, \quad z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc > 0,$$

in coordinate reali

$$z = (x, y) \longrightarrow \left( \frac{ac(x^2 + y^2) + (ad + bc)x + db}{(cx + d)^2 + (cy)^2}, \frac{(ad - bc)y}{(cx + d)^2 + (cy)^2} \right),$$

sono isometrie per  $(\mathbb{R}_+^2, g)$ . Infatti, ogni trasformazione di Möbius reale si può esprimere come composizione di isometrie considerate nella Proposizione 6.5:

$$f_1 \text{ (inversione)}, \quad f_2 \text{ (simmetria)}, \quad f_3 \text{ (traslazione)}, \quad f_4 \text{ (dilatazione)}.$$

Per provare ciò procediamo nel seguente modo.

Se  $c = 0$ , la trasformazione diventa

$$f(z) = \alpha z + \beta, \text{ dove } \alpha = a/d > 0 \text{ e } \beta = b/d,$$

la quale si può esprimere come composizione di una dilatazione e di una traslazione.

Per  $c \neq 0$ , quindi

$$f(z) = \alpha + \beta/(cz + d), \text{ dove } \alpha = a/c \text{ e } \beta = (bc - ad)/c,$$

applichiamo nell'ordine le seguenti isometrie: dilatazione, traslazione, simmetria, inversione, dilatazione, traslazione.

Se  $c > 0$ , e quindi  $\beta < 0$ , si considera la composizione

$$z \xrightarrow{f_4} cz \xrightarrow{f_3} cz + d \xrightarrow{f_2} -c\bar{z} - d \xrightarrow{f_1} \frac{1}{-cz - d} \xrightarrow{f_4} \frac{-\beta}{-cz - d} = \frac{\beta}{cz + d} \xrightarrow{f_3} \alpha + \frac{\beta}{cz + d}.$$

Se  $c < 0$ , e quindi  $\beta > 0$ , si considera la composizione

$$z \xrightarrow{f_4} -cz \xrightarrow{f_3} -cz - d \xrightarrow{f_2} c\bar{z} + d \xrightarrow{f_1} \frac{1}{cz + d} \xrightarrow{f_4} \frac{\beta}{cz + d} \xrightarrow{f_3} \alpha + \frac{\beta}{cz + d}.$$

Poiché la simmetria  $f_2: z \rightarrow -\bar{z}$  è un'isometria del piano iperbolico, allora anche le trasformazioni di Möbius reali del tipo:

$$z \mapsto -\bar{z} \mapsto f(-\bar{z}) = \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d} = \frac{a_1\bar{z} + b}{c_1\bar{z} + d}, \quad a_1d - c_1b = bc - ad < 0,$$

sono isometrie per  $(\mathbb{R}_+^2, g)$ .

Più precisamente, si dimostra il seguente teorema (cf. [21], p.141).

**Teorema 6.6.** (di Poincaré) *Le isometrie del piano iperbolico  $(\mathbb{R}_+^2, g)$  sono tutte e sole le trasformazioni di Möbius reali del tipo:*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc > 0, \quad \text{oppure} \quad f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad ad - bc < 0.$$

Siccome

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} \quad \text{e} \quad \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} = \frac{\lambda a\bar{z} + \lambda b}{\lambda c\bar{z} + \lambda d} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0,$$

il gruppo delle isometrie del piano iperbolico  $\text{Iso}(\mathbb{R}_+^2, g)$  è dato da

$$\left\{ f : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1 \right\} \cup \left\{ f : z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad ad - bc = -1 \right\}.$$

Consideriamo il seguente sottogruppo di  $GL(2, \mathbb{R})$ :

$$L(2, \mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} : \det A = \pm 1 \right\}.$$

L'applicazione  $\Phi : L(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Iso}(\mathbb{R}_+^2, g)$  tale che:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left( f : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right) \quad \text{se} \quad \det A = 1,$$

e

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left( f : z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \right) \quad \text{se} \quad \det A = -1,$$

è un omomorfismo suriettivo con

$$\ker \Phi = \{ A : \Phi(A) = I \} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Di conseguenza, l'epimorfismo  $\Phi$  induce l'isomorfismo

$$\tilde{\Phi} : L(2, \mathbb{R}) / \{ \pm Id \} \rightarrow \text{Iso}(\mathbb{R}_+^2, g), \quad [A] \rightarrow \Phi(A).$$

### Omogeneità del piano iperbolico.

Vogliamo vedere che, così come per il piano euclideo e la sfera canonica, anche il piano iperbolico  $(\mathbb{R}_+^2, g)$  è omogeneo, ovvero per ogni  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_+^2$  esiste una  $f \in \text{Iso}(\mathbb{R}_+^2, g)$  tale che  $f(p_1) = p_2$ . Poniamo  $p_1 = (x_1, y_1)$  e  $p_2 = (x_2, y_2)$  e consideriamo la dilatazione  $f_4(p) = \lambda p$  con  $\lambda = (y_2/y_1) > 0$  e la traslazione  $f_3(p) = p + a = (x + a, y)$  con  $a = x_2 - (y_2/y_1)x_1$ . Allora  $f = f_3 \circ f_4$  è una isometria e

$$f(p_1) = f_3(f_4(p_1)) = f_3((y_2/y_1)x_1, y_2) = (x_2, y_2) = p_2.$$

### 6.3. Le geodetiche del semipiano di Poincaré

Il seguente teorema classifica tutte le geodetiche del piano iperbolico.

**Teorema 6.7.** *Le geodetiche massimali del piano iperbolico  $\mathbb{R}_+^2$  sono tutte e sole le semirette parallele all'asse  $y$  e le semicirconferenze con centro sull'asse  $x$  (cf. Figura 2).*

**DIMOSTRAZIONE.** Per determinare le geodetiche del piano iperbolico consideriamo le isometrie  $f_1, f_2$  e  $f_3$  di  $\mathbb{R}_+^2$  esaminate nella Proposizione 6.5. Applicando la Proposizione 5.59 (che naturalmente vale anche per domini riemanniani) all'isometria  $f_1$  (inversione), si ha che la semicirconferenza  $\gamma_1 : x^2 + y^2 = r^2, y > 0$  (di centro l'origine e raggio  $r$ ) è una geodetica di  $\mathbb{R}_+^2$ . Applicando la stessa Proposizione all'isometria  $f_2$  (simmetria), si ha che la semiretta  $\gamma_2 : y > 0, x = 0$  è una geodetica di  $\mathbb{R}_+^2$ . Ogni semiretta parallela all'asse  $y$ , cioè del tipo  $y > 0, x = a$ , è una geodetica di  $\mathbb{R}_+^2$  in quanto immagine di  $\gamma_2$  mediante un'isometria del tipo  $f_3$  (traslazione). Infine, ogni semicirconferenza di  $\mathbb{R}_+^2$  con centro  $(a, 0)$  e raggio  $r$  è una geodetica in quanto immagine di  $\gamma_1$  mediante un'isometria del tipo  $f_3$ . Le curve esaminate sono tutte e sole le geodetiche di  $\mathbb{R}_+^2$  in quanto, per ogni  $p \in \mathbb{R}_+^2$  e per ogni  $V_p \in T_p \mathbb{R}_+^2$ , esiste una geodetica del tipo di prima passante per  $p$  e avente  $V_p$  come vettore tangente in  $p$  (cf. Figura 3).  $\square$

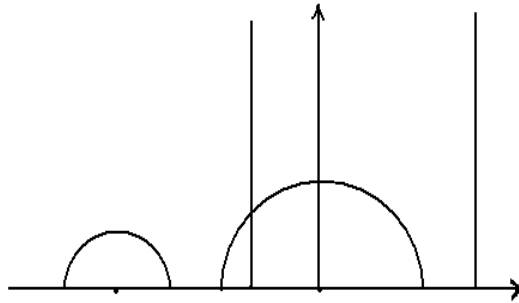


FIGURA 2

**Osservazione 6.8.** Il Teorema 6.7 determina le geodetiche del piano iperbolico come insiemi di punti. Osserviamo che il semiasse positivo delle  $y$  parametrizzato da  $\gamma_1(t) = (0, e^t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , è una curva geodetica inclusa la parametrizzazione, in quanto il suo vettore velocità  $\dot{\gamma}_1(t) = (0, e^t)$  ha lunghezza costante unitaria. Abbiamo osservato che le trasformazioni di Möbius (reali), espresse in coordinate reali da

$$z = (x, y) \longrightarrow \left( \frac{ac(x^2 + y^2) + (ad + bc)x + db}{(cx + d)^2 + (cy)^2}, \frac{(ad - bc)y}{(cx + d)^2 + (cy)^2} \right),$$

sono isometrie per il piano iperbolico. In particolare, la trasformazione di Möbius  $\psi$  definita dai coefficienti  $a = c = d = -b = \frac{1}{\sqrt{2}}$  trasforma la geodetica  $\gamma_1(t) = (0, e^t)$  nella geodetica

$$\gamma_2(t) = \psi(\gamma_1(t)) = \left( \frac{(e^{2t} - 1)}{(e^{2t} + 1)}, \frac{2e^t}{(e^{2t} + 1)} \right), t \in \mathbb{R},$$

che è la semicirconfenza di centro l'origine e raggio unitario. Procedendo in questo modo, tutte le geodetiche del Teorema 6.7 si possono ottenere come curve geodetiche parametrizzate con il parametro  $t \in \mathbb{R}$ .

La Definizione 5.85 introdotta per le superfici si può considerare anche per i domini riemanniani. Quindi, un dominio riemanniano  $(D, g)$  si dice *geodeticamente completo*, se ogni sua geodetica  $\gamma : I \rightarrow D$  può essere estesa a una geodetica  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow D$ . In particolare, per quanto osservato, il piano iperbolico  $\mathbb{R}_+^2$  è un dominio riemanniano geodeticamente completo.

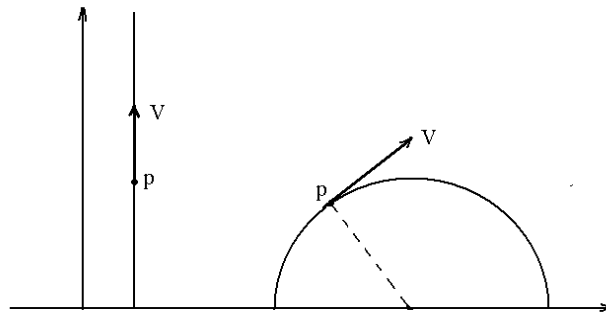


FIGURA 3

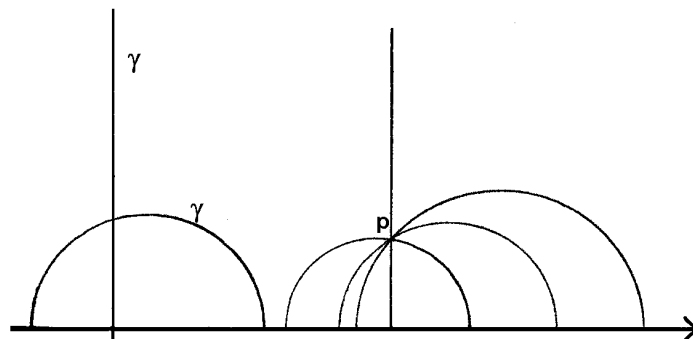


FIGURA 4

**Osservazione 6.9.** Assumendo come “rette” del piano iperbolico  $\mathbb{R}_+^2$  le sue geodetiche massimali, si ottiene un *modello di geometria non euclidea iperbolica*. In questo caso, rispetto al caso euclideo, il postulato delle parallele perde l’unicità: dati  $p \in \mathbb{R}_+^2$  e  $\gamma$  “retta” con  $p \notin \gamma$ , esistono infinite geodetiche per  $p$  che non incontrano  $\gamma$  (cf. Figura 4). Inoltre, per ogni  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_+^2$ ,  $p_1 \neq p_2$ , esiste una sola “retta” che li congiunge. Se il segmento che congiunge  $p_1, p_2$  è parallelo all’asse delle  $y$ , allora lo stesso segmento è l’arco geodetico che congiunge i due punti. Se il segmento che congiunge  $p_1, p_2$  non è parallelo all’asse delle  $y$ , allora l’arco geodetico che congiunge i due punti è dato dall’arco di semicirconferenza con centro sull’asse delle  $x$  e che passa per i due punti.

**Osservazione 6.10. Le curve magnetiche del piano iperbolico**

Il concetto di curva magnetica introdotto nella Sezione 5.10, si può introdurre facilmente anche per un dominio riemanniano. Anche in questo caso, le curve magnetiche relative a un campo magnetico uniforme sono tutte e sole le curve  $\gamma(s)$  di curvatura geodetica  $k_g(s) = \mu$  (costante non nulla). In particolare, nel caso del semipiano di Poincaré  $(\mathbb{R}_+^2, g = (1/y^2)g_0)$ , le curve magnetiche relative al campo magnetico uniforme  $F = \mu\Omega$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \neq 0$ , dove  $\Omega = (1/y^2)dx \wedge dy$  è una 2-forma d’area per  $(\mathbb{R}_+^2, g)$ , non sono sempre curve chiuse, quindi si ha una situazione diversa dai casi del piano euclideo e della sfera canonica. Tali curve sono archi, in generale non chiusi, di circonferenze euclidee (cf. A. Comtet, *On the Landau levels on the hyperbolic plane*, Ann. Phys., 173 (1987) 185–209). Più precisamente,

- Se  $|\mu| < 1$ , le curve magnetiche sono archi di circonferenza che intersecano l’asse  $x$  con un angolo  $\vartheta = \vartheta(\mu) \neq (\pi/2)$ ,  $\vartheta(0) = (\pi/2)$  (caso curve geodetiche). Quindi, ogni tale arco interseca l’asse  $x$  in due punti. L’angolo di intersezione diminuisce con l’aumentare di  $|\mu|$ , diventando sempre più piccolo.

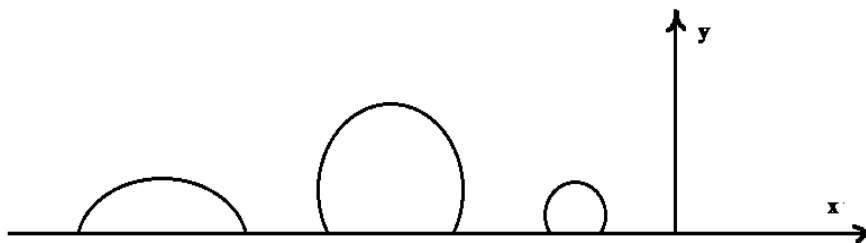
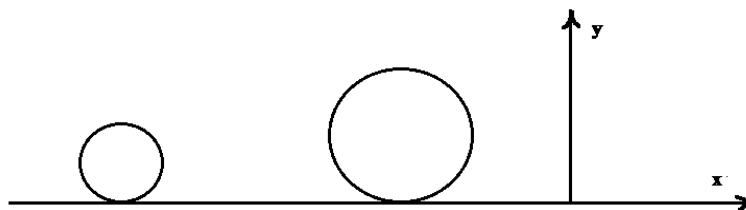
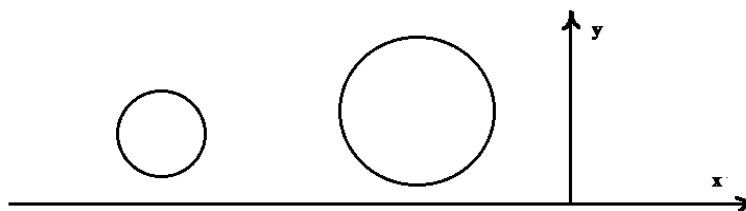


FIGURA 5. Caso  $0 < |\mu| < 1$ .

- Se  $|\mu| = 1$ , le curve magnetiche sono circonferenze tangenti all'asse  $x$  (in tal caso, le curve magnetiche sono dette *horocycles*).

FIGURA 6. Caso  $|\mu| = 1$ .

- Se  $|\mu| > 1$ , le curve magnetiche non toccano l'asse  $x$ , in queste caso sono circonferenze chiuse di raggio finito contenute in  $\mathbb{R}_+^2$ .

FIGURA 7. Caso  $|\mu| > 1$ .

#### 6.4. La distanza nel semipiano di Poincaré

Siano  $g$  la metrica iperbolica di Poincaré nel semipiano  $\mathbb{R}_+^2$  e  $d$  la corrispondente distanza iperbolica, ovvero la distanza riemanniana indotta da  $g$ . Vogliamo determinare in forma esplicita la distanza tra due arbitrari punti di  $\mathbb{R}_+^2$ . Distinguiamo due casi.

• **caso 1<sup>0</sup>**) Siano  $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2)$  due punti di  $\mathbb{R}_+^2$  che appartengono a una semiretta parallela all'asse  $y$ , quindi  $x_1 = x_2 = a$ . In questo caso la geodetica che li congiunge è il segmento

$$\gamma_0(t) = t(p_2 - p_1) + p_1 = (a, y_1 + t(y_2 - y_1)), \quad t \in [0, 1], \quad \text{e} \quad L(\gamma_0) = \left| \ln \frac{y_2}{y_1} \right|.$$

Infatti,  $\dot{\gamma}_0(t) = (0, y_2 - y_1)$ , per cui

$$\|\dot{\gamma}_0(t)\|_g = \frac{1}{y_1 + t(y_2 - y_1)}(y_2 - y_1), \quad (\text{assumendo } y_2 \geq y_1),$$

e quindi

$$L(\gamma_0) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}_0(t)\|_g dt = [\ln(y_1 + t(y_2 - y_1))]_0^1 = \ln \frac{y_2}{y_1}.$$

Sia ora  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [0, 1]$ , una generica curva differenziabile che congiunge  $p_1, p_2$  (si potrebbe considerare anche differenziabile a tratti). Allora,

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_g dt = \int_0^1 \frac{1}{y(t)} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{y} dy = \ln \frac{y_2}{y_1} = L(\gamma_0). \end{aligned}$$

Ciò implica che la curva  $\gamma_0$  realizza la distanza tra  $p_1$  e  $p_2$ . Dunque, se  $p_1, p_2$  individuano una semiretta parallela all'asse  $y$ , con  $y_2, y_1 > 0$  arbitrari, abbiamo

$$d(p_1, p_2) = \left| \ln \frac{y_2}{y_1} \right|.$$

• **caso 2<sup>0</sup>**) Siano  $q_1, q_2$  due punti di  $\mathbb{R}_+^2$  che non appartengono a una semiretta parallela all'asse  $y$ . In questo caso, la geodetica passante per  $q_1, q_2$  è la semicirconferenza  $\gamma$  per  $q_1$  e  $q_2$ , con centro  $C_0(c, 0)$  sull'asse  $x$  e di raggio  $r$ . Quindi:

$$\gamma(t) = (c + r \cos t, r \sin t), \quad t \in ]0, \pi[,$$

$$\dot{\gamma}(t) = (-r \sin t, r \cos t) \quad \text{e} \quad \|\dot{\gamma}(t)\|_g = \frac{1}{\sin t}.$$

Posto  $q_1 = (c + r \cos \alpha, r \sin \alpha)$  e  $q_2 = (c + r \cos \beta, r \sin \beta)$ , con  $\beta \geq \alpha$ , si ha:

$$L(\gamma(q_1, q_2)) = L(\gamma|_{[\alpha, \beta]}) = \int_\alpha^\beta \|\dot{\gamma}(t)\|_g dt = \left[ \ln \tan \frac{t}{2} \right]_\alpha^\beta = \ln \frac{\tan \beta/2}{\tan \alpha/2}.$$



Per  $\alpha, \beta \in ]0, \pi[$  arbitrari, si ha:

$$L(\gamma(q_1, q_2)) = \left| \ln \frac{\tan \beta/2}{\tan \alpha/2} \right|.$$

La trasformazione di Möbius (reale)

$$\begin{aligned} f_1 : z = x + iy \mapsto f(z) &= \frac{az - b}{az + b} \\ &= \left( \frac{a^2(x^2 + y^2) - b^2}{(ax + b)^2 + (ay)^2}, \frac{2aby}{(ax + b)^2 + (ay)^2} \right), \end{aligned}$$

con  $ab > 0$ , è una isometria del piano iperbolico che trasforma la semiretta  $\gamma_0(t) = (0, t)$ ,  $t > 0$ , nella semicirconferenza  $\gamma_1 : x^2 + y^2 = 1, y > 0$ . L'omotetia

$$f_2 : z \mapsto f_2(z) = rz, \quad r > 0,$$

è una isometria che trasforma la semicirconferenza  $\gamma_1$  nella semicirconferenza  $\gamma_2 : x^2 + y^2 = r^2, y > 0$ . Infine, la traslazione

$$f_3 : z \mapsto f_3(z) = z + c$$

trasforma la semicirconferenza  $\gamma_2$  nella semicirconferenza  $\gamma : (x - c)^2 + y^2 = r^2, y > 0$ . Pertanto, l'isometria

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

trasforma la semiretta  $\gamma_0$  nella semicirconferenza  $\gamma$ , e quindi i punti  $p_1 = f^{-1}(q_1)$  e  $p_2 = f^{-1}(q_2)$  appartengono alla semiretta  $\gamma_0$  che è il semiasse delle  $y$ . Poichè le isometrie conservano lunghezze e distanze, e tenendo anche presente il caso 1<sup>o</sup>), si ha

$$L(\gamma(q_1, q_2)) = L(\gamma_0(p_1, p_2)) = d(p_1, p_2) = d(f^{-1}(q_1), f^{-1}(q_2)) = d(q_1, q_2).$$

Di conseguenza, nel caso 2<sup>o</sup>), si ottiene:

$$d(q_1, q_2) = \left| \ln \frac{\tan \beta/2}{\tan \alpha/2} \right|.$$

Usando le formule di bisezione:

$$\frac{\tan \beta/2}{\tan \alpha/2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \cos \beta} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha},$$

e tenendo presente che

$$x_1 - c = r \cos \alpha, \quad x_2 - c = r \cos \beta, \quad y_1 = r \sin \alpha, \quad y_2 = r \sin \beta,$$

si ha

$$d(q_1, q_2) = \left| \ln \left( \frac{x_1 - c + r}{x_2 - c + r} \cdot \frac{y_2}{y_1} \right) \right|.$$

Infine, osserviamo che se  $p_1, p_2$  sono punti di una semicirconferenza concentrica con  $\gamma$ , con  $q_1, p_1, C_0$  allineati e  $q_2, p_2, C_0$  allineati, allora  $d(q_1, q_2) = d(p_1, p_2)$  (cf. Figura 8).

FIGURA 8.  $d(p_1, p_2) = d(q_1, q_2)$ .

### 6.5. L'iperboloide e il modello di Poincaré nel disco

**6. 5-1. L'iperboloide  $H^2$ .** Consideriamo su  $\mathbb{R}^3$  il prodotto scalare di Minkowski, ossia la forma bilineare simmetrica  $q_0 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$q_0(p, p') = xx' + yy' - zz'.$$

$q_0$  è un prodotto scalare che non è definito positivo, la sua segnatura è  $(2, 1)$  quindi è un prodotto scalare di tipo lorentziano. Poniamo

$$H^2 = \{p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : q_0(p, p) = -1, \quad z > 0\}.$$

$H^2$  è una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$ , precisamente è la falda superiore dell'iperboloide di equazione:

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1.$$

**Proposizione 6.11.** *La prima forma fondamentale su  $H^2$ , indotta dal prodotto scalare di Minkowski  $q_0$ , ha segnatura  $(2, 0)$ , equivalentemente il prodotto scalare indotto sulla stessa superficie è definito positivo.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $V_p = (p, v) \in T_p H^2$  e sia  $\gamma(t)$  una curva differenziabile di  $H^2$  con  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = V_p$ . Poiché  $\gamma(t) \in H^2$  per ogni  $t$ , ossia  $q_0(\gamma(t), \gamma(t)) = -1$ , derivando si ha  $q_0(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$ , e quindi per  $t = 0$  abbiamo  $q_0(p, v) = 0$ , ossia  $T_p H^2 \subset p^\perp$  (rispetto al prodotto scalare di Minkowski). D'altronde  $\dim T_p H^2 = 2 = \dim p^\perp$ , pertanto

$$T_p H^2 = p^\perp = \{V_p = (p, v) : v \in \mathbb{R}^3, q_0(v, p) = 0\}.$$

Poiché  $q_0(p, p) = -1$ , esiste una base  $v_0, v_1, v_2$  di  $\mathbb{R}^3$  con  $v_0 = p, q_0(v_1, v_1) = q_0(v_2, v_2) = 1$  e  $q_0(v_i, v_j) = 0$  per  $i \neq j$ . Ciò segue dal fatto che l'indice di una forma quadratica non dipende dalla base scelta (Teorema di Sylvester). Quindi,  $\{V_1 = (p, v_1), V_2 = (p, v_2)\}$  è una base  $q_0$ -ortonormale di  $T_p H^2$ . Di conseguenza, il prodotto scalare su  $T_p H^2$ , indotto dal prodotto scalare di Minkowski, è definito positivo.  $\square$

Indichiamo con  $g_H$  la prima forma fondamentale, equivalentemente la metrica riemanniana, sull'iperboloide  $H^2$  indotta dal prodotto scalare di Minkowski. In tal caso, chiameremo  $(H^2, g_H)$  l'**iperboloide di Minkowski**. Per

$(H^2, g_H)$ , ovvero per l'iperboloide  $H^2$  come superficie regolare di  $(\mathbb{R}^3, q_0)$ , la derivata covariante di campi vettoriali  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ , con  $\gamma$  curva differenziabile di  $H^2$ , è definita come nella Definizione 5.35

$$\frac{DV}{dt} = \left(\frac{dV}{dt}\right)^\top,$$

dove ora  $\left(\frac{dV}{dt}\right)^\top$  denota la proiezione ortogonale di  $dV/dt$ , ossia di  $V'(t)$ , su  $T_{\gamma(t)}H^2$ , rispetto al prodotto scalare di Minkowski  $q_0$ . In particolare, valgono le equazioni (5.12), (5.13) (5.14), dove nell'equazione di Gauss (5.12) e nella (5.14) il prodotto scalare euclideo è sostituito da quello di Minkowski. Possiamo quindi definire anche per l'iperboloide  $(H^2, g_H)$  di Minkowski il parallelismo e le curve geodetiche. Quindi, una curva differenziabile  $\gamma(t)$  di  $(H^2, g_H)$  è detta curva geodetica se il campo tangente  $V(t) = \dot{\gamma}(t)$  è parallelo lungo  $\gamma$ , ovvero

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0.$$

**Proposizione 6.12.** *Le curve geodetiche dell'iperboloide di Minkowski  $(H^2, g_H)$  sono tutte e sole le curve (rami di iperboli) di  $H^2$  intersezioni con i piani di  $\mathbb{R}^3$  passanti per l'origine.*

**DIMOSTRAZIONE.** Per determinare le geodetiche di  $(H^2, g_H)$  procediamo come per le geodetiche della sfera canonica  $\mathbb{S}^2$ . Sia  $\mathcal{C}$  la curva di  $H^2$  intersezione con un piano  $E^2$  passante per l'origine. Siano  $p$  un punto di  $\mathcal{C}$  e  $v$  un vettore tangente in  $p$  a  $\mathcal{C}$ . Allora  $V_p = (p, v) \in T_p H^2 = p^\perp$ , dove  $\perp$  è considerata rispetto a  $q_0$ . In particolare possiamo prendere  $v$  unitario, quindi  $q_0(p, v) = 0$  e  $q_0(v, v) = 1$ . Consideriamo la curva parametrizzata

$$\gamma(t) = (\cosh t)p + (\sinh t)v, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Da  $\gamma(0) = p \in H^2$  e

$$\begin{aligned} q_0(\gamma(t), \gamma(t)) &= (\cosh^2 t)q_0(p, p) + (\sinh^2 t)q_0(v, v) + 2(\sinh t \cosh t)q_0(p, v) \\ &= -\cosh^2 t + \sinh^2 t = -1, \end{aligned}$$

segue che  $\gamma$  è una curva di  $H^2$ . Dunque,  $\gamma(t)$  è una curva di  $H^2 \cap E^2$  e quindi è una parametrizzazione del ramo di iperbole  $\mathcal{C}$ . Il campo tangente  $\dot{\gamma}(t)$  e l'accelerazione estrinseca  $\ddot{\gamma}(t)$  sono dati da

$$\dot{\gamma}(t) = (\sinh t)p + (\cosh t)v, \quad \ddot{\gamma}(t) = (\cosh t)p + (\sinh t)v = \gamma(t).$$

Quindi  $\frac{D\dot{\gamma}}{dt}$ , proiezione  $q_0$ -ortogonale di  $\ddot{\gamma}(t)$  su  $T_{\gamma(t)}H^2 = \gamma(t)^\perp$ , è data da  $(\ddot{\gamma}(t))^\top = 0$ . Pertanto,  $\gamma(t)$  è una geodetica di  $H^2$ .

Viceversa, se  $\sigma(t)$  è una geodetica di  $H^2$  parametrizzata a velocità unitaria, con  $\sigma(0) = p$  e  $\dot{\sigma}(0) = V_p = (p, v)$ , allora  $p$  e  $v$ , pensati entrambi come vettori, sono  $q_0$ -ortogonali (in quanto  $V_p \in T_p H^2 = p^\perp$ ) con  $q_0(v, v) = 1$  e  $q_0(p, p) = -1$ . Il ramo di iperbole  $\gamma(t) = (\cosh t)p + (\sinh t)v$  (che è contenuta in  $H^2$ ) soddisfa le stesse condizioni iniziali  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = V_p$  della geodetica  $\sigma(t)$ . Pertanto, applicando il teorema di esistenza e unicità per le curve geodetiche, abbiamo che  $\sigma$  ha sostegno contenuto nel sostegno di  $\gamma$ .  $\square$

**6. 5-2. Il modello di Poincaré nel disco unitario.** Consideriamo il disco unitario

$$\Delta^2 = \{p = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|p\|^2 = x^2 + y^2 < 1\}.$$

Sia  $p_0 = (0, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$ . L'applicazione

$$f : H^2 \rightarrow \Delta^2, p \mapsto f(p) = \text{retta}(pp_0) \cap \mathbb{R}^2,$$

dove  $\mathbb{R}^2$  è il piano  $z = 0$  di  $\mathbb{R}^3$ , è detta *proiezione stereografica iperbolica* (cf. Figura 9). Con facili calcoli si trova:

$$f(x, y, z) = \left( \frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right).$$

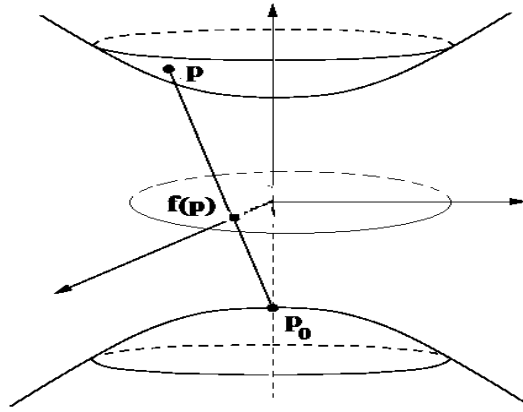


FIGURA 9. La proiezione stereografica iperbolica.

Chiaramente  $f(p) \in \Delta^2$  in quanto:  $\|f(p)\|^2 = \frac{z-1}{z+1} < 1$  per ogni  $p \in H^2$ . Inoltre, usando il prodotto scalare di Minkowski  $q_0$ , si ha

$$q_0(p - p_0, p - p_0) = x^2 + y^2 - (z + 1)^2 = -2(1 + z) \quad \forall p = (x, y, z) \in H^2,$$

e quindi l'applicazione  $f$  si può esprimere anche con

$$f(p) = p_0 - \frac{2(p - p_0)}{q_0(p - p_0, p - p_0)} \quad \forall p \in H^2.$$

L'applicazione  $f$  è invertibile e la sua inversa è l'applicazione

$$\bar{f} = f^{-1} : \Delta^2 \rightarrow H^2, \quad p \mapsto f^{-1}(p) = \text{retta}(pp_0) \cap H^2,$$

quindi

$$p \mapsto \bar{f}(p) = f^{-1}(p) = \left( \frac{2x}{1 - \|p\|^2}, \frac{2y}{1 - \|p\|^2}, \frac{1 + \|p\|^2}{1 - \|p\|^2} \right).$$

Mediante la proiezione stereografica iperbolica  $\bar{f}$  possiamo definire nel dominio  $\Delta^2$  una metrica riemanniana iperbolica  $h$  ponendo

$$h(V_p, W_p) := g_H(\bar{f}_{*p}V_p, \bar{f}_{*p}W_p) = q_0(\bar{f}_{*p}V_p, \bar{f}_{*p}W_p)$$

per ogni  $p \in \Delta^2$  e  $V_p, W_p \in T_p \Delta^2 = T_p \mathbb{R}^2$ . Si può provare che i coefficienti della metrica  $h$  sono dati da:

$$(6.8) \quad h_{11} = h_{22} = \frac{4}{(1 - (x^2 + y^2))^2}, \quad h_{12} = h_{21} = 0.$$

Di conseguenza, a posteriori, possiamo dire che la *proiezione stereografica iperbolica*  $f$  è una isometria tra  $(H^2, g_H)$  e  $(\Delta^2, h)$ .

Ora consideriamo l'inversione rispetto alla circonferenza di centro  $p_0 = (0, -1)$  e  $r = \sqrt{2}$ , che indichiamo con  $\tilde{f}$ . Allora, dalla (6.7), si ha

$$\tilde{f} : p = (x, y) \mapsto \tilde{f}(p) = (0, -1) + \frac{2}{\|p - p_0\|^2}(x, y + 1)$$

e poiché  $\|p - p_0\|^2 = \|p\|^2 + 2y + 1 = x^2 + (y + 1)^2$ , si ha

$$\tilde{f} : p = (x, y) \mapsto \left( \frac{2x}{\|p - p_0\|^2}, \frac{1 - \|p\|^2}{\|p - p_0\|^2} \right).$$

Osserviamo che il disco  $\Delta^2$  e il semipiano  $\mathbb{R}_+^2$  sono entrambi contenuti in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_0\}$ . Dall'espressione di  $\tilde{f}$  segue che

$$\forall p \in \Delta^2 : \tilde{f}(p) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(p)\|^2 &= \frac{4x^2 + 1 + \|p\|^4 - 2\|p\|^2}{\|p - p_0\|^4} = \frac{(1 + \|p\|^2)^2 - 4y^2}{(1 + \|p\|^2 + 2y)^2} \\ &= \frac{1 + \|p\|^2 - 2y}{1 + \|p\|^2 + 2y} < 1 \quad \text{per } y > 0. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\forall p \in \mathbb{R}_+^2 : \tilde{f}(p) \in \Delta^2.$$

Di conseguenza,  $\tilde{f} = \tilde{f}|_{\Delta^2} : \Delta^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ ,

$$(6.9) \quad \tilde{f} : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)) = \left( \frac{2x}{x^2 + (y + 1)^2}, \frac{1 - (x^2 + y^2)}{x^2 + (y + 1)^2} \right),$$

è un diffeomorfismo con inverso  $\tilde{f}^{-1} : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \Delta^2$  che ha la stessa espressione analitica di  $\tilde{f}$ .

**Proposizione 6.13.** *Il diffeomorfismo  $\tilde{f} : \Delta^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$  definito dalla (6.9) è una isometria tra il modello iperbolico di Poincaré nel disco  $\Delta^2$  e il modello iperbolico di Poincaré nel semipiano  $\mathbb{R}_+^2$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Per provare che  $\tilde{f} : \Delta^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$  è una isometria tra i due modelli di Poincaré, basta verificare, applicando la (6.1), che

$$(g_{ij})_p = (J(\tilde{f}))^t (\bar{g}_{ij})_{\tilde{f}(p)} J(\tilde{f}),$$

dove  $J(\tilde{f})$  è la matrice jacobiana di  $\tilde{f}$ ,  $(g_{ij})_p$  la matrice dei coefficienti della metrica iperbolica del disco nel punto  $p$ , e  $(\bar{g}_{ij})_{\tilde{f}(p)}$  la matrice dei coefficienti della metrica iperbolica del semipiano  $\mathbb{R}_+^2$  nel corrispondente punto  $\tilde{f}(p)$ . Siccome  $\tilde{f}(x, y)$  è data dalla (6.9), allora

$$J(\tilde{f}) = \begin{pmatrix} \partial u / \partial x & \partial u / \partial y \\ \partial v / \partial x & \partial v / \partial y \end{pmatrix} = J(\tilde{f})^t.$$

dove

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2(y+1)^2 - 2x^2}{[x^2 + (y+1)^2]^2} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-4x(y+1)}{[x^2 + (y+1)^2]^2} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Inoltre,

$$(\bar{g}_{ij})_{\tilde{f}(p)} = \begin{pmatrix} 1/v^2 & 0 \\ 0 & 1/v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{[x^2 + (y+1)^2]^2}{[1 - (x^2 + y^2)]^2} & 0 \\ 0 & \frac{[x^2 + (y+1)^2]^2}{[1 - (x^2 + y^2)]^2} \end{pmatrix},$$

e

$$(g_{ij})_p = \begin{pmatrix} \frac{4}{[1 - (x^2 + y^2)]^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{[1 - (x^2 + y^2)]^2} \end{pmatrix}.$$

Pertanto, un semplice calcolo mostra che  $(g_{ij})_p = (J(\tilde{f}))^t (\bar{g}_{ij})_{\tilde{f}(p)} J(\tilde{f})$ . □

**Esempio 6.14.** Le geodetiche del disco iperbolico  $\Delta^2$  sono tutti e soli i diametri e gli archi di circonferenza che incontrano ortogonalmente il bordo  $\partial\Delta^2$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $H^2$  la falda superiore dell'iperboloide  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ . Consideriamo la proiezione stereografica iperbolica

$$f : H^2 \rightarrow \Delta^2, p \mapsto f(p) = \text{retta}(pp_0) \cap (\text{piano } z = 0) = \text{retta}(pp_0) \cap \Delta^2,$$

dove  $p_0 = (0, 0, -1)$ . Abbiamo osservato che  $f$  è un'isometria tra i due modelli iperbolici, quindi le geodetiche di  $\Delta^2$  sono tutte e sole le immagini tramite  $f$  delle geodetiche di  $H^2$ . Se  $\gamma$  è una geodetica di  $H^2$  data da  $H^2 \cap E^2$ , dove  $E^2$  è un piano contenente l'asse  $z$ , allora la sua proiezione  $f(\gamma)$  su  $\Delta^2$  è chiaramente un diametro. Negli altri casi si ottengono invece archi di circonferenza che incontrano ortogonalmente  $\partial\Delta^2$ . □