Capitolo 8

Integrali Euleriani di I e II specie. Trasformata di Laplace

8.1 Integrali Euleriani di I e II specie (funzioni Beta e Gamma): definizione e proprietà

Definizione 8.1.1 (funzione Gamma)**.** Definiamo *funzione Gamma* (*integrale di Eulero di II specie*):

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt, \tag{8.1}$$

dove z è variabile complessa.

Osserviamo che:

$$|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} t^{Re(z)-1} = \frac{e^{-t}}{t^{1-Re(z)}}, \quad t > 0. \tag{8.2}$$

La funzione reale e non negativa a secondo membro di (8.2) è integrabile in $[0, +\infty[$ per $Re(z) > 0$, perciò $\Gamma(z)$ è definita per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $Re(z) > 0$.

Proposizione 8.1.2 (proprietà della funzione Gamma)**.** *Sia* Γ *definita da* (8.1).

(i) $\Gamma(z) \in H(\{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\})$;
inoltre, per ogni z *tale che* $Re(z) > 0$ *e per ogni* $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} (\log t)^k \, dt.$$

In particolare, se $k = 1$:

$$\Gamma'(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \log t \, dt.$$

(ii) *Vale la seguente* equazione funzionale della funzione Gamma *(per $Re(z) > 0$):*

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z). \tag{8.3}$$

Dimostrazione.

(i) (cenno) Tenuto presente il Teorema di convergenza di Weierstrass 3.3.4, l'olomorfia di $\Gamma(z)$ nel semipiano aperto $Re(z) > 0$ è conseguenza del fatto che l'integrale

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \, dt,$$

converge uniformemente rispetto a z in ogni striscia

$$S_{a,b} := \{a \leq Re(z) \leq b\},$$

con $a > 0$, risultando, per $z \in S_{a,b}$ ($a > 0$):

$$0 \leq |e^{-t} t^{z-1}| \leq \begin{cases} e^{-t} t^{b-1}, & t \geq 1 \\ e^{-t} t^{a-1}, & 0 < t \leq 1 \end{cases}.$$

Vale:

$$\begin{aligned} \Gamma'(z) &= \frac{d}{dz} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \, dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\partial}{\partial z} \left(t^{z-1} \right) \, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \log t \, dt \end{aligned}$$

Operando sulle derivate successive si ottiene la tesi per ogni $k \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Integrando per parti risulta:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^z\,dt = \left[-e^{-t}t^z\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} ze^{-t}t^{z-1}\,dt = \\ = z\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\,dt = z\cdot\Gamma(z).$$

$\square$

Osservazione 8.1.3. Applicando iterativamente il punto (ii) di 8.1.2 si ottiene:

$$\begin{aligned}\Gamma(z+n) &= (z+n-1)\cdot\Gamma(z+n-1) = \ldots = \\ &= (z+n-1)(z+n-2)\cdots(z+1)\cdot z\cdot\Gamma(z) \quad \forall\, n\in\mathbb{N}.\end{aligned} \tag{8.4}$$

Se $z=1$:

$$\Gamma(n+1) = n!\,\Gamma(1) \quad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Ma:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

Perciò:

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \forall\, n\in\mathbb{N}. \tag{8.5}$$

Anche per questo motivo la funzione Gamma di Eulero è detta *fattoriale generalizzato*.

Osservazione 8.1.4 (prolungamento meromorfo della funzione Gamma)**.** Da (8.4) segue:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)(z+n)} \quad \forall\, n\in\mathbb{N}. \tag{8.6}$$

Questa identità permette un'estensione meromorfa di Γ in $\mathbb{C}$; precisamente $\Gamma\in H(\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_-)$, tutti i punti di singolarità $z=-n$ $(n=0,1,2,\ldots)$ sono poli semplici di $\Gamma(z)$ e risulta:

$$\operatorname{Res}(\Gamma(z),-n) = \lim_{z\to-n}(z+n)\cdot\Gamma(z) = \lim_{z\to-n}(z+n)\cdot\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \\ = \lim_{z\to-n}\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

In definitiva, vale il seguente risultato.

Teorema 8.1.5. *$\Gamma(z)$ è meromorfa in $\mathbb{C}$, ha singolarità polari del primo ordine nei punti $z = -n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$, con rispettivo residuo* $\dfrac{(-1)^n}{n!}$.

Osservazione 8.1.6 (rappresentazione integrale di Gauss della funzione Gamma)**.** Nella (8.1) poniamo $t = \xi^2$ (perciò $dt = 2\xi \, d\xi$). Allora:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-\xi^2} (\xi^2)^{z-1} 2\xi \, d\xi = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\xi^2} \xi^{2z-1} \, d\xi. \tag{8.7}$$

Quest'ultimo integrale è noto in letteratura come *rappresentazione integrale di Gauss della funzione Gamma.* E' immediato calcolare:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\xi^2} \, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} \, d\xi = \sqrt{\pi}.$$

Da ciò risulta possibile valutare Γ sui semi-interi. Se n è pari $(n = 2k)$:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \Gamma(k) = (k-1)! = \left(\frac{n-2}{2}\right)! \quad .$$

Se, invece, $n \geq 3$ è dispari $(n = 2k + 1, \ k \geq 1)$:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \left(k - 1 + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(k - 1 + \frac{1}{2}\right) = \\ &= \left(k - 1 + \frac{1}{2}\right)\left(k - 2 + \frac{1}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{(2k-1)(2k-3) \cdots 5 \cdot 3 \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^k} = \\ &= \frac{(2k-1)!!}{2^k}\sqrt{\pi} = \frac{(n-2)!!}{2^{\frac{n-1}{2}}}\sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Definizione 8.1.7 (funzione Beta)**.** Siano $p, q \in \mathbb{C}$. Definiamo *funzione Beta (integrale di Eulero di I specie)*:

$$B(p,q) := \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} \, dt. \tag{8.8}$$

Osservato che $|t^{p-1}(1-t)^{q-1}| = t^{Re(p)-1}(1-t)^{Re(q)-1}$, $0 < t < 1$, l'integrale è convergente per $Re(p) > 0$ e $Re(q) > 0$.

Osservazione 8.1.8 (rappresentazione integrale di Gauss della funzione Beta)**.** Nella (8.8) poniamo $t = \sin^2 \vartheta$ (perciò $dt = 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta$). Allora:

$$\begin{aligned} B(p,q) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \vartheta)^{p-1} (\cos^2 \vartheta)^{q-1} 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta = \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \vartheta)^{2p-1} (\cos \vartheta)^{2q-1} \, d\vartheta \end{aligned} \tag{8.9}$$

Quest'ultimo integrale è noto in letteratura come *rappresentazione integrale di Gauss della funzione Beta.*

Proposizione 8.1.9 (proprietà della funzione Beta)**.** *Sia* B *definita da* (8.8)*. Allora, per ogni* p, q *tali che* $Re(p) > 0$, $Re(q) > 0$*:*

(i) *Proprietà di simmetria:*

$$B(p,q) = B(q,p)$$

(ii) *Per la funzione Beta sussiste la seguente relazione fondamentale con la funzione Gamma:*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{8.10}$$

Dimostrazione.

(i) Vale

$$\begin{aligned} B(p,q) &= \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} \, dt \overset{\overset{t=1-s}{\downarrow}}{=} \int_1^0 (1-s)^{p-1} s^{q-1} (-ds) = \\ &= \int_0^1 s^{q-1} (1-s)^{p-1} \, ds = B(q,p). \end{aligned}$$

(ii) Risulta, da (8.7) e (8.9):

$$\begin{aligned} \Gamma(p) \cdot \Gamma(q) &= \left(2 \int_0^{+\infty} e^{-\xi^2} \xi^{2p-1} \, d\xi \right) \left(2 \int_0^{+\infty} e^{-\eta^2} \eta^{2q-1} \, d\eta \right) = \\ &= 4 \int_{[0,+\infty[^2} e^{-(\xi^2+\eta^2)} \xi^{2p-1} \eta^{2q-1} \, d\xi \, d\eta = \end{aligned}$$

$$\left(\text{passando alle coordinate polari:} \quad \begin{cases} \xi &= \rho \cos \vartheta \\ \eta &= \rho \sin \vartheta \end{cases} \right)$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2}(\rho\cos\vartheta)^{2p-1}(\rho\sin\vartheta)^{2q-1}\rho\,d\rho\,d\vartheta =$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\vartheta)^{2p-1}(\sin\vartheta)^{2q-1}\,d\vartheta\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2}\rho^{2(p+q)-1}\,d\rho =$$
$$= 4\cdot\frac{B(p,q)}{2}\cdot\frac{\Gamma(p+q)}{2} = B(p,q)\cdot\Gamma(p+q).$$

□

Proposizione 8.1.10 (relazione dei complementi per la funzione Gamma)**.**

$$\forall\, z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}: \quad \Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \tag{8.11}$$

Dimostrazione. Osservato che da $Re(z) > 0$ e $Re(1-z) > 0$ segue $0 < Re(z) < 1$, possiamo provare la (8.11) solo per i numeri reali in $]0,1[$: la tesi seguirà dal teorema di estensione delle uguaglianze 4.4.4.

Sia $\lambda\in\,]0,1[$. Allora:

$$\Gamma(\lambda)\cdot\Gamma(1-\lambda) = B(\lambda,1-\lambda)\cdot\Gamma(1) = B(\lambda,1-\lambda) =$$
$$= \int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{-\lambda}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{t}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\lambda}\,dt$$

Poniamo:

$$t := \frac{x}{1+x} \quad \left(dt = \frac{1}{(1+x)^2}\,dx\right),$$

quindi

$$x = \frac{t}{1-t}.$$

Ne segue:

$$\Gamma(\lambda)\cdot\Gamma(1-\lambda) = \int_0^{+\infty}\frac{x+1}{x}\cdot x^{\lambda}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}\,dx =$$
$$= \int_0^{+\infty}\frac{x^{\lambda-1}}{x+1}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)},$$

per (7.26). □

Vediamo ora alcune applicazioni delle funzioni Gamma e Beta di Eulero.

1. Calcoliamo gli integrali di Wallis.

Consideriamo la funzione Beta nella forma (8.9); ponendo

$$p := \frac{n+1}{2}, \quad q := \frac{1}{2},$$

e applicando la (8.10):

$$\begin{aligned} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\vartheta)^{2\cdot\frac{n+1}{2}-1}(\cos\vartheta)^{2\cdot\frac{1}{2}-1} d\vartheta = \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\vartheta)^n d\vartheta = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\cdot\sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Ne segue che:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\vartheta)^n \, d\vartheta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}. \tag{8.12}$$

Allo stesso modo, ponendo:

$$p := \frac{1}{2}, \quad q := \frac{n+1}{2},$$

si ha:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\vartheta)^n \, d\vartheta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}; \tag{8.13}$$

(8.12) e (8.13) sono noti in letteratura col nome di *integrali di Wallis*.

2. Calcoliamo:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\, dx \quad (\alpha > -1, \beta > \alpha + 1).$$

Posto

$$t := \frac{x^\beta}{1+x^\beta},$$

si ha:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\,dx = \frac{1}{\beta}\int_0^1 t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}(1-t)^{\frac{\beta-\alpha-1}{\beta}-1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\beta}\cdot B\left(\frac{\alpha+1}{\beta}, \frac{\beta-\alpha-1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\beta-\alpha-1}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}+\frac{\beta-\alpha-1}{\beta}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\beta}\cdot\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{\alpha+1}{\beta}\right) = \frac{\pi}{\beta\cdot\sin\left(\pi\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)\right)},$$

per (8.10) e (8.11).

3. Provare che

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \qquad (\alpha > 0).$$

8.2 Trasformata di Laplace: definizione e proprietà

Definizione 8.2.1 (funzione $\mathcal{L}$-trasformabile)**.** Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, con $\mathrm{supp} f \subseteq [0,+\infty[$. Diremo che f è *$\mathcal{L}$-trasformabile* se:

$$\exists\,\lambda\in\mathbb{R} \text{ t.c. } e^{-\lambda t}f(t)\in L^1([0,+\infty[)$$

Definizione 8.2.2 (insieme di convergenza assoluta per una funzione $\mathcal{L}$ - trasformabile)**.** Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ $\mathcal{L}$-trasformabile. L'insieme:

$$\Omega_f := \left\{p\in\mathbb{C} : e^{-pt}f(t)\in L^1([0,+\infty[)\right\}$$

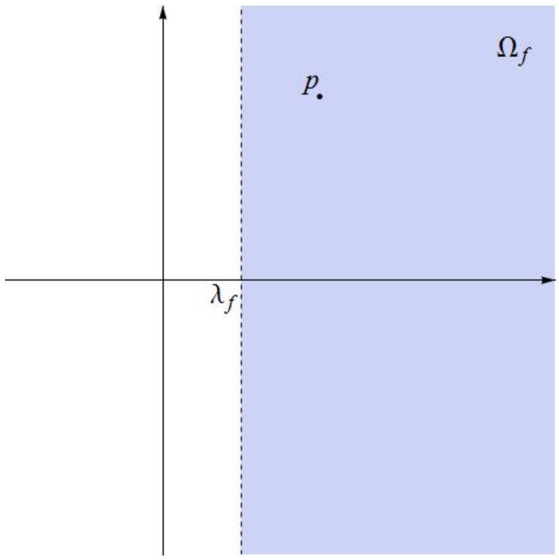
si dice insieme di convergenza assoluta per f.

Definizione 8.2.3 (trasformata di Laplace)**.** Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ $\mathcal{L}$-trasformabile; l'applicazione:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}[f] : \Omega_f \to \mathbb{C} \\ &\qquad p \mapsto \mathcal{L}[f](p) := \int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)\,dt \end{aligned} \tag{8.14}$$

è detta *trasformata di Laplace di f*. La funzione $f(t)$ si dice *funzione generatrice* di $\mathcal{L}[f](p)$. In seguito $\mathcal{L}[f](p)$ potrà essere indicato anche con $F(p)$.

Osservazione 8.2.4. Se $\lambda \in \mathbb{R} \cap \Omega_f$, allora, per ogni $p \in \mathbb{C}$ tale che $Re(p) > \lambda$ risulta $e^{-pt}f(t) \in L^1([0, +\infty[)$, e quindi $p \in \Omega_f$; ne segue che Ω_f è un semipiano.



Dimostrazione. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $e^{-\lambda t}f(t) \in L^1([0, +\infty[)$ e sia $p \in \mathbb{C}$ con $Re(p) > \lambda$; si ha:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}f(t) \cdot e^{(-Re(p)+\lambda)t} \cdot e^{-i\,Im(p)\,t}\,dt$$

da cui:

$$\int_0^{+\infty} \left|e^{-pt}f(t)\right|\,dt = \int_0^{+\infty} |\underbrace{e^{-\lambda t}f(t)}_{(I)}| \cdot |\underbrace{e^{(-Re(p)+\lambda)t}}_{(II)}| \cdot |\underbrace{e^{-i(Im(p))t}}_{(III)}|\,dt < +\infty$$

in quanto $(I) \in L^1([0, +\infty[)$ per ipotesi, (II) è limitata (anzi, compresa tra 0 e 1) poiché $Re(p) > \lambda$ ed è infinitesima per $t \to +\infty$ e (III) ha modulo uguale a 1. □

Definizione 8.2.5 (ascissa di convergenza assoluta)**.** Sia f $\mathcal{L}$-trasformabile; definiamo *ascissa di convergenza assoluta* di f:

$$\lambda_f := \inf\left\{\lambda \in \mathbb{R} : e^{-\lambda t}f(t) \in L^1\left([0, +\infty[\right)\right\}$$

Notiamo che tale definizione è ben posta: essendo f $\mathcal{L}$-trasformabile, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $e^{-\lambda t} f(t) \in L^1([0,+\infty[)$, perciò l'insieme di cui λ_f è l'estremo inferiore non è vuoto. Inoltre, dall'osservazione 8.2.4, risulta:

$$\Omega_f = \{p \in \mathbb{C} : Re(p) > \lambda_f\}$$

In particolare, se $\lambda_f = -\infty$, si ha $\Omega_f = \mathbb{C}$.

Osservazione 8.2.6. La trasformata di Laplace è lineare e iniettiva (nel senso degli spazi L^p).

Infatti, per ogni f, g $\mathcal{L}$-trasformabili (con $Re(p) > \lambda_f$ e $Re(p) > \lambda_g$ rispettivamente) e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} (\alpha f(t) + \beta g(t)) \, dt = \\
&= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt + \beta \int_0^{+\infty} e^{-pt} g(t) \, dt = \\
&= \alpha \mathcal{L}[f](p) + \beta \mathcal{L}[g](p),
\end{aligned}$$

con $Re(p) > \max\{\lambda_f, \lambda_g\}$. Inoltre, se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni $p \in \mathbb{C}$ con $Re(p) > \lambda$, risulta

$$\mathcal{L}[f](p) = \mathcal{L}[g](p),$$

allora

$$f = g \quad \text{q.o.}$$

La funzione

$$f(t) := e^{t^2}$$

fornisce un esempio di funzione non $\mathcal{L}$-trasformabile. Infatti, l'integrale di Laplace

$$\mathcal{L}\left[e^{t^2}\right](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{t^2} \, dt$$

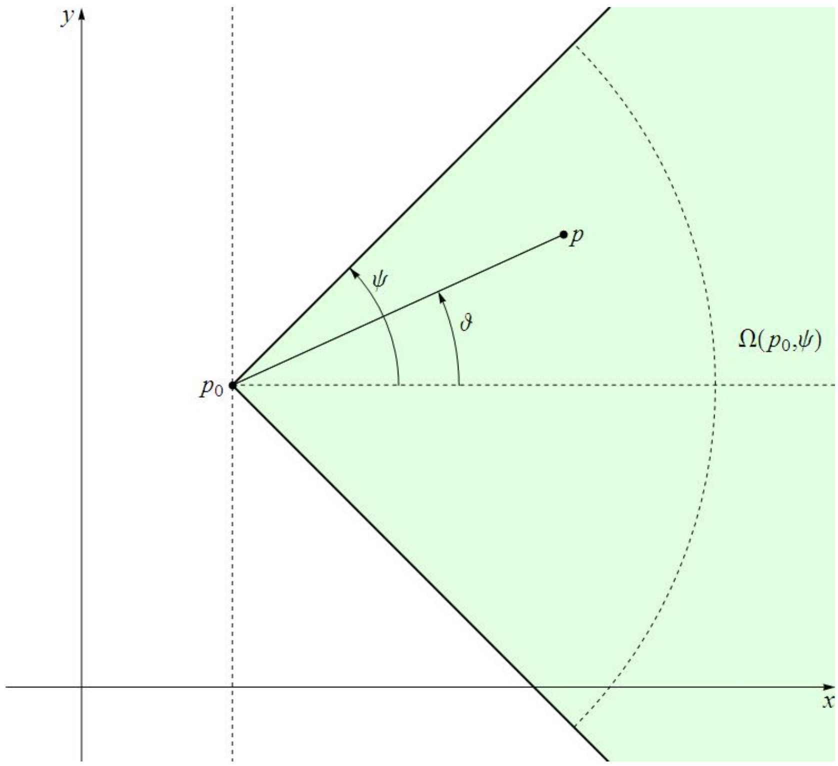
non converge per alcun valore di p.

Enunciamo ora un risultato sulla convergenza uniforme della Trasformata di Laplace.

Supposto che l'integrale

$$F(p) = \mathcal{L}[f](p) := \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) \, dt$$

converga per $p = p_0$, conduciamo per il punto p_0 due semirette che giacciano nel semipiano $Re(p) > Re(p_0)$ e formino ciascuna un angolo ψ $(0 < \psi < \pi/2)$ con la semiretta parallela al semiasse reale positivo condotta da p_0. Tali semirette delimitano un dominio illimitato (angolo) $\Omega(p_0, \psi)$ che è definito dalle limitazioni $-\psi \leq \mathrm{Arg}(p - p_0) \leq \psi$.



Vale il seguente risultato che fornisce un utile complemento all'importante Osservazione 8.2.4 (cfr. anche 8.2.5).

Lemma 8.2.7 (Convergenza uniforme della Trasformata di Laplace). *Se l'integrale*

$$F(p) = \mathcal{L}[f](p) := \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$$

converge per $p = p_0$, allora esso converge uniformemente (rispetto a p) in ogni dominio illimitato (angolo) $\Omega(p_0, \psi)$, con $0 < \psi < \pi/2$.

Teorema 8.2.8 (Olomorfia della trasformata di Laplace nel semipiano di convergenza assoluta Ω_f). *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\mathcal{L}$-trasformabile con $\mathrm{supp} f \subseteq [0, +\infty[$. Allora $\mathcal{L}[f](p)$ è olomorfa nel semipiano di convergenza assoluta*

Ω_f e, per ogni p tale che $Re(p) > \lambda_f$ e per ogni $k \in \mathbb{N}_0$, si ha:

$$\frac{d^k}{dp^k}\mathcal{L}\left[f(t)\right](p) = (-1)^k\mathcal{L}\left[t^k f(t)\right](p).$$

Dimostrazione. Fissato un numero naturale m, poniamo

$$F_m(p) = \int_0^m e^{-pt}f(t)\,dt, \tag{8.15}$$

ed osserviamo che, essendo $f(t)$ sommabile in ogni intervallo limitato, l'integrale (8.15) è una funzione di p definita in tutto il piano complesso.

Verifichiamo che $F_m(p)$ è derivabile per ogni p (cioè è funzione intera) e che

$$F_m'(p) = -\int_0^m e^{-pt}t\,f(t)\,dt. \tag{8.16}$$

Si ha

$$\frac{F_m(p+\Delta p)-F_m(p)}{\Delta p} + \int_0^m e^{-pt}t\,f(t)\,dt = \int_0^m e^{-pt}\left[\frac{e^{-t\Delta p}-1}{\Delta p}+t\right]f(t)\,dt,$$

ed essendo, per $0 \leq t \leq m$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{-t\Delta p}-1}{\Delta p}+t\right| &= \left|\frac{t^2}{2!}\Delta p - \frac{t^3}{3!}(\Delta p)^2+\ldots\right| \leq\\ &\leq t^2|\Delta p|\left[\frac{1}{2!}+\frac{t|\Delta p|}{3!}+\frac{(t|\Delta p|)^2}{4!}+\ldots\right| \leq\\ &\leq t^2|\Delta p|\left[1+\frac{t|\Delta p|}{1!}+\frac{(t|\Delta p|)^2}{2!}+\ldots\right| \leq m^2|\Delta p|e^{m|\Delta p|},\end{aligned}$$

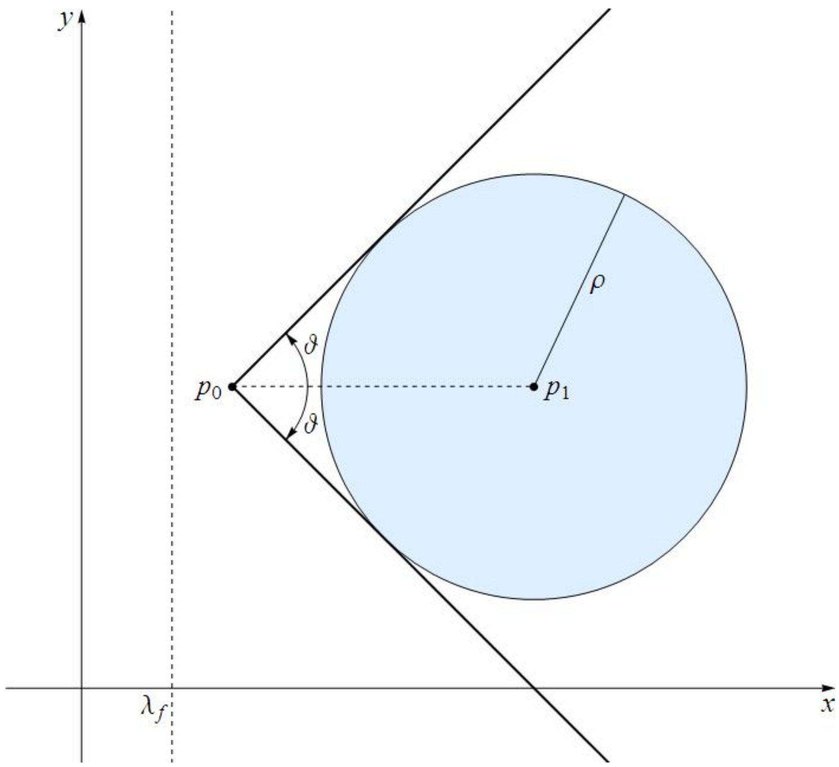
si ha

$$\begin{aligned}0 \leq &\left|\frac{F_m(p+\Delta p)-F_m(p)}{\Delta p}+\int_0^m e^{-pt}t\,f(t)\,dt\right| =\\ &\leq m^2|\Delta p|e^{m(|\Delta p|+|p|)}\int_0^m |f(t)|\,dt.\end{aligned}$$

Poiché l'ultimo membro è infinitesimo per $\Delta p \to 0$, risulta dimostrata la (8.16).

Detta ora λ_f l'ascissa di convergenza assoluta di f, sia $B_\rho(p_1)$ un cerchio interno al semipiano $Re(p) > \lambda_f$; evidentemente risulta $Re(p_1)-\rho > \lambda_f$. Scelto p_0 in modo che si abbia

$$\lambda_f < Re(p_0) < Re(p_1)-\rho, \quad Im(p_0) = Im(p_1),$$



e detto 2ϑ l'angolo tra le tangenti a $B_\rho(p_1)$ condotte da p_0, il cerchio $B_\rho(p_1)$ risulta interno ad ogni angolo $\Omega(p_0, \psi)$ per il quale si abbia $\vartheta < \psi < \pi/2$.

Si ha allora

$$F(p) = \lim_{m \to +\infty} F_m(p)$$

e, per il precedente Lemma 8.2.7, la convergenza è uniforme in $B_\rho(p_1)$. Dal Teorema di convergenza di Weierstrass 3.3.4 segue che $F(p)$ è olomorfa in $B_\rho(p_1)$ e quindi, per l'arbitrarietà di $B_\rho(p_1)$, segue la tesi. $\square$

Proposizione 8.2.9 (Comportamento asintotico della trasformata di Laplace). *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\mathcal{L}$-trasformabile con supp$f \subseteq [0, +\infty[$. Allora*

$$\lim_{Re(p) \to +\infty} \mathcal{L}\left[f\right](p) = 0.$$

Calcoliamo ora la trasformata di Laplace di alcune funzioni elementari. Nel seguito considereremo la funzione trasformanda f definita in $[0, +\infty[$, perciò, a rigore, andremo a calcolare la trasformata di $f \cdot H$, con H funzione di Heaviside.

1. (Trasformata di Laplace della funzione di Heaviside). Consideriamo la funzione di Heaviside:

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Si ha:

$$\mathcal{L}\left[H(t)\right](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} H(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt = \frac{1}{p}. \tag{8.17}$$

L'integrale è convergente per $Re(p) > 0$, perciò l'insieme di convergenza assoluta è il semipiano $\{p \in \mathbb{C} : Re(p) > 0\}$.

2. (Trasformata di Laplace della potenza ad esponente complesso). Sia

$$f(t) = t^a,$$

con $Re(a) > -1$ e $t > 0$. Sia $p \in \mathbb{R}$; in particolare, consideriamo $p > 0$ affinché converga l'integrale

$$\mathcal{L}\left[t^a\right](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^a\, dt.$$

Operiamo la sostituzione:

$$\tau := pt.$$

Otteniamo:

$$\mathcal{L}\left[t^a\right](p) = \int_0^{+\infty} e^{-\tau} \left(\frac{\tau}{p}\right)^a \frac{d\tau}{p} = \frac{1}{p^{a+1}} \int_0^{+\infty} e^{-\tau} \tau^a\, d\tau =$$
$$= \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$$

Per il teorema di estensione delle uguaglianze 4.4.4, l'uguaglianza precedente vale anche per i p nel semipiano $\{p \in \mathbb{C} : Re(p) > 0\}$, per i quali l'integrale converge; dunque possiamo concludere che:

$$\mathcal{L}\left[t^a\right](p) = \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}, \quad Re(p) > 0, \tag{8.18}$$

scegliendo per p^{a+1} la determinazione principale.

In particolare, se $a = n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{L}\left[t^n\right](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad Re(p) > 0. \tag{8.19}$$

3. (Trasformata di Laplace dell'esponenziale). Sia:

$$f(t) = e^{at},$$

con $a \in \mathbb{C}$ e $t > 0$. Sia $p \in \mathbb{C}$ con $Re(p) > Re(a)$; allora:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{at}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-p)t}\, dt = \frac{1}{p-a}$$

(la convergenza dell'integrale è garantita dalla condizione $Re(p) > Re(a)$). Dunque, il semipiano di convergenza assoluta è

$$\{p \in \mathbb{C} : Re(p) > Re(a)\}$$

e possiamo concludere che:

$$\mathcal{L}\left[e^{at}\right](p) = \frac{1}{p-a}, \quad Re(p) > Re(a). \tag{8.20}$$

4. (Trasformata di Laplace delle funzioni trigonometriche). Sia:

$$f(t) = \sin(\omega t),$$

con $\omega > 0$ e $t > 0$. Sia $p \in \mathbb{C}$ con $Re(p) > 0$; allora, ricordando la formula di Eulero per il seno (1.8):

$$\mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\right](p) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\right](p),$$

da cui, per linearità:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\right](p) &= \frac{1}{2i}\left\{\mathcal{L}\left[e^{i\omega t}\right](p) - \mathcal{L}\left[e^{-i\omega t}\right](p)\right\} = \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right),\end{aligned}$$

quindi:

$$\mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\right](p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \quad Re(p) > 0 (= Re(i\omega)). \tag{8.21}$$

Allo stesso modo, applicando la formula di Eulero per il coseno (1.7) otteniamo:

$$\mathcal{L}\left[\cos(\omega t)\right](p) = \frac{p}{p^2+\omega^2}, \quad Re(p) > 0. \tag{8.22}$$

5. (Trasformata di Laplace delle funzioni iperboliche). Sia:

$$f(t) = \sinh(\omega t),$$

con $\omega \in \mathbb{R}$ e $t > 0$. Sia $p \in \mathbb{C}$ con $Re(p) > |\omega|$; allora, ricordando la definizione del seno iperbolico:

$$\mathcal{L}\left[\sinh(\omega t)\right](p) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}\right](p),$$

da cui, per linearità:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\sinh(\omega t)\right](p) &= \frac{1}{2}\left\{\mathcal{L}\left[e^{\omega t}\right](p) - \mathcal{L}\left[e^{-\omega t}\right](p)\right\} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{p+\omega}\right),\end{aligned}$$

quindi:

$$\mathcal{L}\left[\sinh(\omega t)\right](p) = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, \quad Re(p) > |\omega|. \tag{8.23}$$

Allo stesso modo, per il coseno iperbolico otteniamo:

$$\mathcal{L}\left[\cosh(\omega t)\right](p) = \frac{p}{p^2 - \omega^2}, \quad Re(p) > |\omega|. \tag{8.24}$$

6. (Trasformata di Laplace del logaritmo). Sia:

$$f(t) = \log t$$

La costante di Eulero-Mascheroni è definita da:

$$-\gamma = \Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-s} \log s \, ds.$$

Posto $s := pt$, con $p > 0$, otteniamo:

$$\begin{aligned}-\gamma &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \log(pt)\, p\, dt = p \int_0^{+\infty} e^{-pt} \left(\log p + \log t\right)\, dt = \\ &= p\left[\int_0^{+\infty} e^{-pt} \log p\, dt + \int_0^{+\infty} e^{-pt} \log t\, dt\right] = \\ &= p\left[\log p \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt + \mathcal{L}\left[\log t\right](p)\right] = \\ &= p\left[\log p \cdot \frac{1}{p} + \mathcal{L}\left[\log t\right](p)\right] = \log p + p\mathcal{L}\left[\log t\right](p).\end{aligned}$$

In definitiva, per il teorema di estensione delle uguaglianze 4.4.4:

$$\mathcal{L}\left[\log t\right](p) = -\frac{\gamma}{p} - \frac{\operatorname{Log} p}{p}, \quad Re(p) > 0. \tag{8.25}$$

7. (Trasformata di Laplace della gaussiana). Sia:

$$f(t) = e^{-t^2}$$

Osserviamo innanzitutto che $\Omega_f = \mathbb{C}$; infatti l'integrale

$$\mathcal{L}\left[e^{-t^2}\right](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{-t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t(p+t)}\,dt$$

è convergente se $Re(p) > -t$ per ogni $t \in [0, +\infty[$. Dunque:

$$\Omega_f = \{p \in \mathbb{C} : Re(p) > -\infty\} = \mathbb{C}.$$

Sia ora $p \in \mathbb{R}$; risulta:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[e^{-t^2}\right](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-(t^2+pt)}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(t+\frac{p}{2})^2+\frac{p^2}{4}}\,dt \overset{\tau:=t+\frac{p}{2}}{\overset{\downarrow}{=}} \\
&= e^{\frac{p^2}{4}}\int_{\frac{p}{2}}^{+\infty} e^{-\tau^2}\,d\tau = \\
&= e^{\frac{p^2}{4}}\left[\int_0^{+\infty} e^{-\tau^2}\,d\tau - \int_0^{\frac{p}{2}} e^{-\tau^2}\,d\tau\right] = \\
&= e^{\frac{p^2}{4}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{p}{2}\right)\right],
\end{aligned}$$

dove la *funzione degli errori* è definita da

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\tau^2}\,d\tau$$

con

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{erf}(x) = 1.$$

In definitiva, applicando il teorema di estensione delle uguaglianze 4.4.4:

$$\mathcal{L}\left[e^{-t^2}\right](p) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{p^2}{4}}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{p}{2}\right)\right], \quad \forall\, p \in \mathbb{C}. \tag{8.26}$$

I precedenti risultati sono riassunti, per comodità del lettore, nella tabella.

Derivate della trasformata di Laplace di $f(t)$ $\mathcal{L}$-trasformabile

$$\frac{d^k}{dp^k}\mathcal{L}\left[f(t)\right](p) = (-1)^k\mathcal{L}\left[t^k f(t)\right](p), \quad Re(p) > \lambda_f$$

$\circ$ $f(t)$	$\bullet$ $\mathcal{L}[f(t)](p)$	Ω_f
$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0, \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases}$	$\frac{1}{p}$	$Re(p) > 0$
$t^a \quad (Re(a) > -1)$	$\frac{1}{p^{a+1}}\Gamma(a+1)$	$Re(p) > 0$
t	$\frac{1}{p^2}$	$Re(p) > 0$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$Re(p) > 0$
$e^{at} \quad (a \in \mathbb{C})$	$\frac{1}{p-a}$	$Re(p) > Re(a)$
$\sin(\omega t) \quad (\omega > 0)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$Re(p) > 0$
$\cos(\omega t) \quad (\omega > 0)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$Re(p) > 0$
$\sinh(\omega t) \quad (\omega \in \mathbb{R})$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$	$Re(p) > \lvert\omega\rvert$
$\cosh(\omega t) \quad (\omega \in \mathbb{R})$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$	$Re(p) > \lvert\omega\rvert$
$\log t$	$-\frac{1}{p}\left[\gamma + \mathrm{Log}\, p\right]$	$Re(p) > 0$
e^{-t^2}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{\frac{p^2}{4}}\left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{p}{2}\right)\right]$	$p \in \mathbb{C}$

Tabella 8.1: Trasformate di Laplace di alcune funzioni elementari

Studiamo ora alcune proprietà della trasformata di Laplace.

Proposizione 8.2.10 (regole di trasformazione algebriche)**.**

- Cambiamento di scala. *Sia* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ $\mathcal{L}$*-trasformabile e sia* $a > 0$*. Allora* $f(at)$ *è* $\mathcal{L}$*-trasformabile e risulta:*

$$\mathcal{L}\left[f(at)\right](p) = \frac{1}{a}\mathcal{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{p}{a}\right), \quad Re(p) > a \cdot \lambda_f.$$

  Infatti:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f(at)\right](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(at)\, dt \overset{\overset{\tau:=at}{\downarrow}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-p\frac{\tau}{a}} f(\tau)\, \frac{d\tau}{a} = \\ &= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{p}{a}\right)\tau} f(\tau)\, d\tau = \frac{1}{a}\mathcal{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{p}{a}\right).\end{aligned}$$

  Osserviamo che nell'ultima uguaglianza è necessario imporre $Re\left(\dfrac{p}{a}\right) > \lambda_f$, e quindi, poiché a è reale e positivo, $Re(p) > a \cdot \lambda_f$.

- Traslazione. *Sia* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ $\mathcal{L}$*-trasformabile e sia* $a > 0$*. Allora* $f(t-a)$ *è* $\mathcal{L}$*-trasformabile e risulta:*

$$\mathcal{L}\left[f(t-a)\right](p) = e^{-ap}\mathcal{L}\left[f(t)\right](p), \quad Re(p) > \lambda_f.$$

  Infatti (f è considerata nulla in $[0, a[$), abbiamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f(t-a)\right](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t-a)\, dt \overset{\overset{\tau:=t-a}{\downarrow}}{=} \\ &= e^{-ap}\int_0^{+\infty} e^{-p\tau} f(\tau)\, d\tau = e^{-ap}\mathcal{L}\left[f(t)\right](p).\end{aligned}$$

- Modulazione. *Sia* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ $\mathcal{L}$*-trasformabile e sia* $a \in \mathbb{C}$*. Allora* $e^{at}f(t)$ *è* $\mathcal{L}$*-trasformabile e risulta:*

$$\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right](p) = \mathcal{L}\left[f(t)\right](p-a), \quad Re(p) > \lambda_f + Re(a).$$

  Infatti:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{at} f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)t} f(t)\, dt = \\ &= \mathcal{L}\left[f(t)\right](p-a).\end{aligned}$$

$f(at)$	$(a>0)$	$\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{a}\,F\left(\frac{p}{a}\right)$	$Re(p) > a\lambda_f$
$f(t-a)$	$(a>0)$	$\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-ap}\,F(p)$	$Re(p) > \lambda_f$
$e^{at}f(t)$	$(a\in\mathbb{C})$	$\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$	$F(p-a)$	$Re(p) > \lambda_f + Re(a)$

Tabella 8.2: Regole di trasformazione algebriche

Alle regole di trasformazione analitiche, premettiamo la seguente definizione.

Definizione 8.2.11 (funzioni assolutamente continue secondo Vitali)**.** Sia $I\subseteq\mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I\to\mathbb{C}$. Si dice che f è *assolutamente continua in* I ($f\in AC(I)$) se, per ogni $\varepsilon>0$, esiste $\delta>0$ tale che, assegnato un numero finito di intervalli aperti a due a due disgiunti

$$I_j =]a_j, b_j[\subset I, \quad j=1,\dots,m,$$

se vale la condizione

$$\sum_{j=1}^{m}(b_j-a_j)<\delta,$$

allora dev'essere anche

$$\sum_{j=1}^{m}|f(b_j)-f(a_j)|<\varepsilon.$$

Dalla definizione precedente segue che $f\in AC(I)$ è uniformemente continua (basta considerare il caso $m=1$) e quindi continua in I.

Si dice che f è *localmente assolutamente continua in* I ($f\in AC_{loc}(I)$) se e solo se $f\in AC([a,b])$ per ogni $[a,b]\subseteq I$.

Una caratterizzazione delle funzioni assolutamente continue in I è data dal seguente risultato.

Teorema 8.2.12 (di Lebesgue, 1904)**.** $f\in AC(I)$ *se e solo se:*

(a) f *è derivabile q.o. in* I,

(b) $f'\in L^1(I)$,

(c) $\displaystyle\int_{t'}^{t} f'(\tau)\,d\tau = f(t)-f(t'), \quad \forall\, t,t'\in I.$

Proposizione 8.2.13 (regole di trasformazione analitiche)**.**

(i) Trasformata della derivata. *Sia* $f \in AC_{loc}([0,+\infty[)$ $\mathcal{L}$*-trasformabile, con* f' $\mathcal{L}$*-trasformabile*[1]*; allora:*

$$\mathcal{L}[f'](p) = p \cdot \mathcal{L}[f](p) - f(0^+), \quad Re(p) > \lambda_f$$ [2]

e

$$\lim_{Re(p)\to+\infty} p \cdot \mathcal{L}[f](p) = f(0^+) \quad \textit{(valore iniziale)}.$$

(ii) Trasformata della primitiva. *Sia* $f : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ *continua a tratti,* $\mathcal{L}$*-trasformabile, con* $f(0) = 0$*. Se*

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau$$

è $\mathcal{L}$*-trasformabile, allora:*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right](p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}\,[f]\,(p), \quad Re(p) > \max\{\lambda_f, 0\}.$$

(iii) Trasformata del prodotto di convoluzione (Teorema di Borel)*. Siano* $f, g : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ $\mathcal{L}$*-trasformabili; allora il prodotto di convoluzione definito per ogni* $t > 0$ *da:*

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau \tag{8.27}$$

è $\mathcal{L}$*-trasformabile e risulta:*

$$\mathcal{L}\,[f * g]\,(p) = \mathcal{L}\,[f]\,(p) \cdot \mathcal{L}\,[g]\,(p), \quad Re(p) > \lambda_{f*g} = \max\{\lambda_f, \lambda_g\}.$$

---

[1] L'ipotesi può essere solo 'f' $\mathcal{L}$-trasformabile' (da cui segue che f è $\mathcal{L}$-trasformabile). Osserviamo che 'f $\mathcal{L}$-trasformabile' in generale non implica 'f' $\mathcal{L}$-trasformabile' (esempio: $f(t) = \log t$ con $t > 0$ è $\mathcal{L}$-trasformabile, ma $f'(t) = \dfrac{1}{t}$, con $t > 0$, non è $\mathcal{L}$-trasformabile).

[2] In generale, sotto le ovvie ipotesi,

$$\mathcal{L}[f^{(k)}](p) = p^k \left[\mathcal{L}[f](p) - \frac{f(0^+)}{p} - \frac{f'(0^+)}{p^2} - \cdots - \frac{f^{(k-1)}(0^+)}{p^k}\right].$$

Queste formule convertono operazioni di derivazione in operazioni di tipo algebrico.

(iv) Integrale della trasformata. *Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ $\mathcal{L}$-trasformabile e supponiamo anche $f(t)/t$ $\mathcal{L}$-trasformabile. Allora:*

$$\int_{Re(p)}^{+\infty} \mathcal{L}\left[f(t)\right](s)\, ds = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](p), \quad Re(p) > \max\left\{\lambda_f, 0\right\}.$$

(l'integrale va calcolato sulla parte reale di p da $Re(p)$ a $+\infty$)

Dimostrazione.

(i) Sia p un valore del parametro per cui entrambi gli integrali di Laplace di $f(t)$ e $f'(t)$ convergano; per ogni $0 < t' < t$, integrando per parti, si ha:

$$\int_{t'}^{t} f'(\tau)e^{-p\tau}\, d\tau = e^{-pt}f(t) - e^{-pt'}f(t') + p\int_{t'}^{t} f(\tau)e^{-p\tau}\, d\tau.$$

Per $t' \to 0^+$ e $t \to +\infty$ i due integrali a primo e secondo membro convergono, poiché f e f' sono $\mathcal{L}$-trasformabili; da qui segue che esistono finiti i limiti:

$$\lim_{t' \to 0^+} e^{-pt'}f(t') = f(0^+) \in \mathbb{C}$$

e

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-pt}f(t) = 0.$$

Ne segue che

$$\mathcal{L}[f'](p) = p \cdot \mathcal{L}[f](p) - f(0^+).$$

Inoltre, per la $\mathcal{L}$-trasformabilità di f', si ha $\mathcal{L}[f'](p) \to 0$ per $Re(p) \to +\infty$, perciò

$$\lim_{Re(p) \to +\infty} p \cdot \mathcal{L}[f](p) = f(0^+).$$

(ii) Poniamo:

$$g(t) := \int_0^t f(\tau)\, d\tau$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$g'(t) = f(t).$$

Ne segue che:

$$\mathcal{L}\left[f\right](p) = \mathcal{L}\left[g'\right](p) \overset{\overset{\text{(i)}}{\downarrow}}{=} p \cdot \mathcal{L}\left[g\right](p) - g(0^+) = p \cdot \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right](p),$$

da cui la tesi.

(iii) Innanzitutto osserviamo che il prodotto di convoluzione tra f e g è effettivamente definito da (8.27); infatti, si ha:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)H(\tau)g(t-\tau)H(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau.$$

Ora, esplicitando la trasformata di Laplace di $f * g$ otteniamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f * g](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right)dt = \\ &= \iint_T e^{-pt} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\,dt,\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza vale in virtù del Teorema di Fubini-Tonelli, con

$$T = [0,t[_\tau \times [0,+\infty[_t\,.$$

Consideriamo, ora, la trasformazione:

$$\begin{cases} u = & t-\tau \\ v = & \tau \end{cases}$$

Lo Jacobiano di tale cambiamento di parametri è 1 e l'immagine di T è l'insieme normale:

$$T' = [0,+\infty[_u \times [0,+\infty[_v\,.$$

Pertanto, per la formula di riduzione degli integrali multipli su insiemi normali, otteniamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f * g](p) &= \iint_{T'} e^{-p(u+v)} f(v)g(u)\,du\,dv = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-pv} f(v)\,dv \int_0^{+\infty} e^{-pu} g(u)\,du = \mathcal{L}[f](p)\cdot\mathcal{L}[g](p).\end{aligned}$$

(iv) Per 8.2.8:

$$\frac{d}{dp}\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](p) = -\mathcal{L}\left[t\cdot\frac{f(t)}{t}\right](p) = -\mathcal{L}[f(t)](p).$$

Integrando primo e terzo membro tra $Re(p)$ e $+\infty$, poiché $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](p)$ tende a 0 per $Re(p) \to +\infty$, otteniamo:

$$\int_{Re(p)}^{+\infty} \frac{d}{dp}\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](p)\,dp = -\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](p) = -\int_{Re(p)}^{+\infty} \mathcal{L}[f(t)](s)\,ds.$$

□

$f'(t)$ $(f \in AC_{loc}([0,+\infty[))$	$\circ\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet$	$pF(p) - f(0^+)$, $\lim\limits_{Re(p)\to+\infty} pF(p) = f(0^+), \quad Re(p) > \lambda_f$
$f^{(k)}(t)$	$\circ\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet$	$p^k \left[F(p) - \dfrac{f(0^+)}{p} - \cdots - \dfrac{f^{(k-1)}(0^+)}{p^k} \right], \quad Re(p) > \lambda_f$
$\displaystyle\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ $(f(0) = 0)$	$\circ\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{1}{p}\, F(p), \quad Re(p) > \max\{\lambda_f, 0\}$
$(f * g)(t)$	$\circ\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet$	$F(p) \cdot G(p), \quad Re(p) > \max\{\lambda_f, \lambda_g\}$
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\circ\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet$	$\displaystyle\int_{Re(p)}^{+\infty} F(s)\,ds, \quad Re(p) > \max\{\lambda_f, 0\}$

Tabella 8.3: Regole di trasformazione analitiche

8.3 Cenni sull'inversione della trasformata di Laplace

Non sempre è possibile individuare solo tramite l'uso delle precedenti tabelle la funzione generatrice, nota la sua trasformata di Laplace. Almeno dal punto di vista teorico, è fondamentale il risultato di *Riemann-Fourier-Mellin*, di cui non diamo per brevità la dimostrazione.

Tuttavia, prima di enunciarlo, premettiamo il caso modello (esempio) che segue, dalla cui analisi possiamo trarre spunto per la formulazione del risultato generale.

1. Calcoliamo:

$$\frac{1}{2\pi i}(\text{v.p.}) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{p^{n+1}} \cdot e^{pt}\,dp \quad (n \in \mathbb{N},\ a > 0,\ t > 0)$$

(l'integrale è calcolato sulla retta verticale $Re(p) = a$).

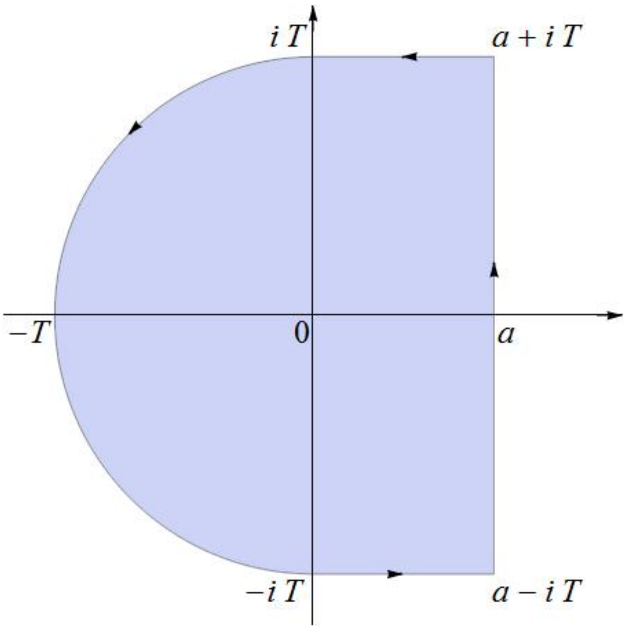
Ricordiamo che:

$$\frac{1}{2\pi i}(\text{v.p.}) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{p^{n+1}} \cdot e^{pt}\,dp = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to+\infty} \int_{a-iT}^{a+iT} \frac{1}{p^{n+1}} \cdot e^{pt}\,dp.$$

Per calcolare l'integrale richiesto applichiamo il primo Teorema dei residui 6.3.1 alla funzione integranda

$$f(p) = \frac{1}{p^{n+1}} \cdot e^{pt}$$

che presenta in $p = 0$ un polo di ordine $n+1$, sul dominio regolare D come in figura,



con

$$\operatorname{Res}(f(p), 0) = \lim_{p\to 0} \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dp^n}\left[p^{n+1} \cdot \frac{e^{pt}}{p^{n+1}}\right] = \lim_{p\to 0} \frac{t^n e^{pt}}{n!} = \frac{t^n}{n!}.$$

Denotando con $\gamma_T^s(0)$ la semicirconferenza a sinistra di raggio T e centro 0, abbiamo:

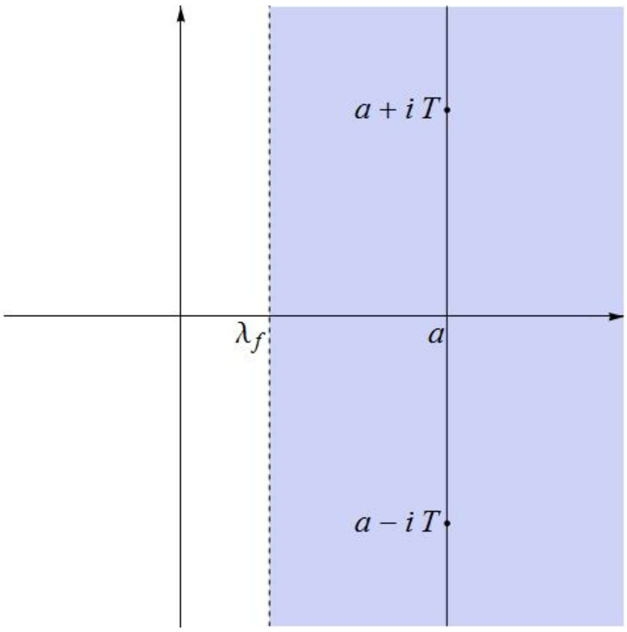
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} f(p)\,dp &= \frac{1}{2\pi i}\Bigg[\underbrace{\int_{a-iT}^{a+iT} f(p)\,dp}_{(I)} + \underbrace{\int_{a+iT}^{iT} f(p)\,dp}_{(II)} + \\ &+ \underbrace{\int_{+\gamma_T^s(0)} f(p)\,dp}_{(III)} + \underbrace{\int_{-iT}^{a-iT} f(p)\,dp}_{(IV)}\Bigg] = \\ &= \operatorname{Res}(f(p), 0)\,,\end{aligned} \tag{8.28}$$

Poiché
$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p^{n+1}} = 0$$
uniformemente in $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$, per il Lemma di Jordan 7.4.3(ii), l'integrale (III) lungo $\gamma_T^s(0)$ è infinitesimo per $T \to +\infty$. Per $T \to +\infty$, gli integrali (II) e (IV) sono infinitesimi (in quanto il numeratore dell'integrando resta limitato in modulo, mentre il denominatore diventa (in modulo) infinito con T). In definitiva, facendo tendere $T \to +\infty$ nella (8.28) si ha:
$$\frac{1}{2\pi i}(\text{v.p.}) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{p^{n+1}} \cdot e^{pt}\, dp = \frac{t^n}{n!}.$$
Allora
$$\frac{1}{2\pi i}(\text{v.p.}) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{n!}{p^{n+1}} \cdot e^{pt}\, dp = t^n,$$
cioè, tenendo presente (8.19):
$$\frac{1}{2\pi i}(\text{v.p.}) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathcal{L}\left[t^n\right](p) e^{pt}\, dp = t^n.$$

Quest'ultima relazione fornisce la funzione generatrice $f(t) = t^n$ in termini della sua trasformata di Laplace $\mathcal{L}\left[t^n\right](p)$.

Teorema 8.3.1 (inversione della trasformata di Laplace)**.**
Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ $\mathcal{L}$-trasformabile, con ascissa di convergenza assoluta λ_f; supponiamo che esista $\Sigma \subset [0, +\infty[$ sottoinsieme finito tale che f sia derivabile in $[0, +\infty[\setminus \Sigma$ ed esistano finiti $f(t^-), f(t^+), f'(t^-), f'(t^+)$ per ogni $t \in \Sigma$. Allora, per ogni $a \in]\lambda_f, +\infty[$, risulta:
$$\frac{1}{2\pi i}(\text{v.p.}) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathcal{L}\left[f(t)\right](p) \cdot e^{pt}\, dp = \begin{cases} \dfrac{f(t^+) + f(t^-)}{2} & \text{per } t > 0 \\ \dfrac{f(0^+)}{2} & \text{per } t = 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$$
(l'integrale è calcolato sulla retta verticale $Re(p) = a$).

In particolare, se f è continua in $]0, +\infty[$:
$$\frac{1}{2\pi i}(\text{v.p.}) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathcal{L}\left[f(t)\right](p) \cdot e^{pt}\, dp = f(t) \quad \forall\, t > 0.$$



Quest'ultima formula fornisce la funzione generatrice $f(t)$ in termini della sua trasformata di Laplace.

Osserviamo che, poiché il secondo membro dell'uguaglianza è indipendente da a, anche il primo membro lo è, pertanto è possibile attribuire ad a un qualsiasi valore a_0, fisso, appartenente al semipiano di convergenza dell'integrale di Laplace.

Osservazione 8.3.2 (unicità della funzione generatrice)**.** La funzione generatrice individuata dal teorema 8.3.1 è univocamente determinata (nel senso degli spazi L^p) da $\mathcal{L}\,[f]\,(p)$ (due funzioni f_1, f_2 $\mathcal{L}$-trasformabili con $\mathcal{L}\,[f_1]\,(p) = \mathcal{L}\,[f_2]\,(p)$, possono differire solo nei loro eventuali punti di discontinuità).

2. Calcolare:

$$\frac{1}{2\pi i}(\text{v.p.})\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{pt}}{p^2+1}\,dp \quad (a>0, t>0).$$

Come accennato in precedenza, il teorema 8.3.1 è importante dal punto di vista teorico, ma non è di uso agevole. Nella pratica, si utilizzano risultati più specifici, a seconda della natura della trasformata da invertire.

Esponiamo dapprima uno dei più semplici di questi risultati, riguardante *l'inversione delle trasformate razionali.*

Proposizione 8.3.3 (Formula di Heaviside, inversione di trasformate razionali). *Sia*

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$$

con $P(p), Q(p)$ polinomi in p, primi tra loro, e $\deg P(p) < \deg Q(p)$.[3] *Se $Q(p)$ ha solo zeri semplici $p_1, \dots, p_\nu$, allora la funzione generatrice è data da*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} \cdot e^{p_k t}, \quad t > 0.$$

Dimostrazione. Innanzitutto esprimiamo P/Q in fratte semplici:

$$\frac{P(p)}{Q(p)} = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{a_k}{p - p_k} \tag{8.29}$$

(con a_k costanti opportune).

Consideriamo ora, per ogni fissato $k = 1, \dots, \nu$:

$$\frac{P(p)}{Q(p)} \cdot (p - p_k) = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{a_j}{p - p_j} \cdot (p - p_k).$$

Il secondo membro, per $p \to p_k$, tende a a_k; quindi vi tende anche il primo membro. Ma per quest'ultimo limite si ha (tenendo conto che $Q(p_k) = 0$):

$$\lim_{p \to p_k} \frac{P(p)}{Q(p)} \cdot (p - p_k) = \lim_{p \to p_k} \frac{P(p)}{\dfrac{Q(p) - Q(p_k)}{p - p_k}} = \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}.$$

Di qui, per $p \to p_k$, segue :

$$a_k = \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} \quad \forall\, k = 1, \dots, \nu.$$

In definitiva, da (8.29), si ha:

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} \cdot \frac{1}{p - p_k} = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} \cdot \mathcal{L}\left[e^{p_k t}\right](p),$$

[3] Se $\deg P(p) \geq \deg Q(p)$, allora $\dfrac{P(p)}{Q(p)}$ non è una trasformata di Laplace. Basta osservare che, in tal caso, $\dfrac{P(p)}{Q(p)}$ non è infinitesima per $p \to \infty$ (cfr. 8.2.9).

quindi la funzione generatrice $f(t)$ è data da:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} \cdot e^{p_k t}.$$

$\square$

Osservazione 8.3.4. Con riferimento alla Proposizione 8.3.3, se gli zeri di $Q(p)$ $p_1, \ldots, p_\nu$ hanno molteplicità rispettivamente $\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$, si può dimostrare che la funzione generatrice è data da:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\nu} \operatorname{Res}\left(\frac{P(p)}{Q(p)} \cdot e^{pt}, p_k\right), \quad t > 0.$$

Il successivo teorema riguarda l'inversione di trasformate meromorfe.

Teorema 8.3.5 (inversione di trasformate meromorfe)**.** *Siano $A(p)$ e $B(p)$ funzioni trascendenti intere e sia $f(t)$ una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile tale che*

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](p) = \frac{A(p)}{B(p)}$$

(funzione olomorfa nel semipiano $Re(p) > \lambda_f$), con un numero finito o numerabile di poli $\{p_j\}_{j \in M \subseteq \mathbb{N}}$ tali che $Re(p_j) < \lambda_f$ per ogni $j \in M$.

Se

$$\lim_{k \to +\infty} \sup_{|p| = T_k} \mathcal{L}\left[f(t)\right](p) = 0,$$

dove i T_k sono i raggi di semidischi di centro l'origine tali che $\lim_{k \to +\infty} T_k = +\infty$, allora la funzione generatrice $f(t)$ è data da

$$f(t) = \sum_{j \in M} Res\left(\mathcal{L}\left[f(t)\right](p) e^{pt}, p_j\right), \quad t > 0$$

(purché, nel caso di una infinità numerabile di poli, la serie a secondo membro converga).

8.4 Alcune applicazioni: il metodo della Trasformata di Laplace per le equazioni differenziali e per le equazioni integrali di Volterra

In questa sezione applicheremo la trasformata di Laplace alla determinazione di funzioni generatrici, al calcolo di alcuni integrali, alla risoluzione di problemi di Cauchy per equazioni differenziali lineari e alla risoluzione di equazioni integrali di Volterra.

Quelli che qui trattiamo sono solo degli esempi, ma i metodi usati hanno ampia applicabilità e sono fruibili in casi più generali.

1. Troviamo la funzione generatrice $f(t)$ $(t > 0)$ tale che:

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](p) = \frac{2}{p+3}.$$

Osserviamo che:

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](p) = 2\mathcal{L}\left[e^{-3t}\right](p).$$

Per l'iniettività dell'operatore $\mathcal{L}$ possiamo concludere che:

$$f(t) = 2e^{-3t}, \quad t > 0.$$

2. Troviamo la funzione generatrice $f(t)$ $(t > 0)$ tale che:

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](p) = \frac{4}{p^3} + \frac{6}{p^2+4}.$$

Osserviamo che:

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](p) = \mathcal{L}\left[2t^2\right](p) + \mathcal{L}\left[3\sin(2t)\right](p).$$

Per la linearità e l'iniettività dell'operatore $\mathcal{L}$ possiamo concludere che:

$$f(t) = 2t^2 + 3\sin(2t), \quad t > 0.$$

3. Troviamo la funzione generatrice $f(t)$ $(t > 0)$ tale che:

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](p) = \frac{1}{(p-2)^2+9}.$$

Osserviamo che:

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](p) = \frac{1}{3}\mathcal{L}\left[\sin(3t)\right](p-2).$$

Per la linearità e l'iniettività dell'operatore $\mathcal{L}$ e applicando il terzo punto di 8.2.10 possiamo concludere che:

$$f(t) = \frac{e^{2t}}{3} \cdot \sin(3t), \quad t > 0.$$

4. Troviamo la funzione generatrice$f(t)$ $(t > 0)$ tale che:

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](p) = \frac{3p^2+5p+1}{p^3-6p^2+11p-6} =: \frac{P(p)}{Q(p)}.$$

Gli zeri (semplici) di Q sono:

$$p_1 = 1,\ \ p_2 = 2,\ \ p_3 = 3.$$

Per 8.3.3:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{3} \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} \cdot e^{p_k t} = \sum_{k=1}^{3} \frac{3p_k^2+5p_k+1}{3p_k^2-12p_k+11} \cdot e^{p_k t} = \frac{9}{2}e^t - 23e^{2t} + \frac{43}{2}e^{3t}.$$

5. Troviamo le funzioni generatrici $f(t), g(t)$ $(t > 0)$ tali che:

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](p) = \frac{1}{p(p^2+1)}, \quad \mathcal{L}\left[g(t)\right](p) = \frac{p+3}{p^2+2p+5}.$$

(Procedendo in modo analogo ai precedenti esercizi si ottiene:

$$f(t) = 1 - \cos t, \quad g(t) = e^{-t}\left[\cos(2t) + \sin(2t)\right],$$

$t > 0$).

6. Troviamo la funzione generatrice $f(t)$ $(t > 0)$ tale che:

$$\mathcal{L}\left[f\right](p) = \frac{\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

Innanzitutto osserviamo che:

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \cdot \frac{p}{p^2+\omega^2} = \mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\right](p) \cdot \mathcal{L}\left[\cos(\omega t)\right](p).$$

Per 8.2.13(iii):

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](p) = \mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\right](p) \cdot \mathcal{L}\left[\cos(\omega t)\right](p) = \mathcal{L}\left[\sin(\omega t) * \cos(\omega t)\right](p).$$

Inoltre, dall'iniettività dell'operatore $\mathcal{L}$, segue che:

$$f(t) = \sin(\omega t) * \cos(\omega t) = \int_0^t \sin(\omega\tau)\cos(\omega(t-\tau))\, d\tau = \frac{t}{2}\sin(\omega t)$$

(per le formule di Werner).

7. Calcoliamo:

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right](p)$$

In virtù di 8.2.13(iv), abbiamo:

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right](p) = \int_{Re(p)}^{+\infty} \mathcal{L}\left[\sin t\right](s)\, ds = \int_{Re(p)}^{+\infty} \frac{1}{1+s^2}\, ds =$$
$$= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(Re(p)\right).$$

8. Calcoliamo $g(t)$ definita da:

$$g(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(t-\tau)}}, \qquad \forall\, t > 0.$$

Innanzitutto osserviamo che:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Pertanto:

$$\mathcal{L}\left[g(t)\right](p) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right](p) \cdot \mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right](p)$$

Da (8.18) abbiamo:

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right](p) = \mathcal{L}\left[t^{-\frac{1}{2}}\right](p) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{p^{-\frac{1}{2}+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{p}},$$

quindi:

$$\mathcal{L}\left[g(t)\right](p) = \left(\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right](p)\right)^2 = \frac{\pi}{p} = \mathcal{L}\left[\pi \cdot H(t)\right](p).$$

Allora, per l'iniettività della trasformata di Laplace, risulta, per ogni $t > 0$:

$$g(t) = \pi \cdot H(t) = \pi.$$

9. Calcoliamo:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx.$$

Posto $\tau := 1 + x$ risulta:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx = \int_{0}^{2} \sqrt{\frac{2-\tau}{\tau}}\, d\tau = \left[\frac{1}{\sqrt{t}} * \sqrt{t}\right]_{t=2}.$$

Allora:

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}} * \sqrt{t}\right](p) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right](p) \cdot \mathcal{L}\left[\sqrt{t}\right](p) = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{p\sqrt{p}} =$$
$$= \frac{\pi}{2p^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \mathcal{L}\left[t\right](p).$$

Per l'iniettività della trasformata di Laplace otteniamo:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} * \sqrt{t} = \frac{\pi}{2} \cdot t \quad \forall\, t > 0.$$

Pertanto, per $t = 2$, l'integrale proposto

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx = \pi.$$

La trasformata di Laplace è spesso applicata ad equazioni differenziali lineari con coefficienti costanti (che possono essere risolte anche in altri modi).

Il metodo della trasformata di Laplace per il problema di Cauchy per equazioni differenziali lineari (a coefficienti costanti) si articola in tre fasi.

(i) Si prendono le trasformate dei due membri dell'equazione data (le trasformate delle derivate si esprimono, grazie alle formule già note, mediante $\mathcal{L}[f](p) =: F(p)$ e le condizioni iniziali).

(ii) La relazione ottenuta è *un'equazione di primo grado* nell'incognita $F(p)$.

(iii) Ricavata $F(p)$, la si inverte, ottenendo così la f, cioè la soluzione del problema di Cauchy.

10. (Risoluzione di un problema di Cauchy lineare omogeneo *a coefficienti costanti*). Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} f''(t) + 2f'(t) + 2f(t) = 0 \\ f(0^+) = 1 \\ f'(0^+) = 2 \end{cases}$$

per $t > 0$. Calcoliamo le trasformate delle derivate di f. Risulta:

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right](p) = p \cdot \mathcal{L}\left[f(t)\right](p) - f(0^+) = p \cdot \mathcal{L}\left[f(t)\right](p) - 1$$
$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right](p) = p^2 \cdot \mathcal{L}\left[f(t)\right](p) - p - 2.$$

Allora, applicando la trasformata di Laplace ai due membri dell'equazione differenziale e utilizzando la notazione abbreviata ($\mathcal{L}\left[f(t)\right](p) =: F(p)$) otteniamo:

$$p^2 \cdot F(p) - p - 2 + 2p \cdot F(p) - 2 + 2F(p) = 0,$$

da cui:

$$F(p) = \frac{p+4}{p^2 + 2p + 2}.$$

Gli zeri del denominatore sono:

$$p_1 = -1 - i, \quad p_2 = -1 + i.$$

Applicando 8.3.3 otteniamo:

$$f(t) = e^{-t}\left(3\sin t + \cos t\right).$$

11. (Risoluzione di un problema di Cauchy lineare non omogeneo *a coefficienti costanti*). Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} f''(t) + 2f'(t) + f(t) = e^{-t} \\ f(0^+) = 0 \\ f'(0^+) = 0 \end{cases}$$

per $t > 0$. Applicando la trasformata di Laplace ai due membri dell'equazione differenziale otteniamo:

$$p^2 \cdot F(p) + 2p \cdot F(p) + F(p) = \frac{1}{p+1},$$

da cui:

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)^3}.$$

Usando la regola sulla modulazione (o l'osservazione 8.3.4), si ha:

$$f(t) = \frac{t^2 e^{-t}}{2}, \quad t > 0.$$

Il metodo della trasformata di Laplace può essere applicato ad equazioni differenziali con coefficienti che sono polinomi al più di primo grado nella variabile indipendente.

12. (Risoluzione di un problema di Cauchy lineare omogeneo *a coefficienti lineari*). Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} f''(t) + tf'(t) + f(t) = 0 \\ f(0^+) = 1 \\ f'(0^+) = 0 \end{cases}$$

per $t > 0$. Osserviamo che, dal teorema 8.2.8 e da 8.2.13(i), risulta:

$$\mathcal{L}\left[tf'(t)\right](p) = -\frac{d}{dp}\left(\mathcal{L}\left[f'(t)\right](p)\right) = -\frac{d}{dp}\left(p\mathcal{L}\left[f(t)\right](p) - f(0^+)\right) =$$
$$= -F(p) - p \cdot F'(p).$$

Applicando l'operatore $\mathcal{L}$ ai due membri dell'equazione differenziale otteniamo:

$$p^2 \cdot F(p) - p - F(p) - p \cdot F'(p) + F(p) = 0,$$

da cui:

$$F'(p) - p \cdot F(p) = -1.$$

Moltiplicando ambo i membri per $e^{-\frac{p^2}{2}}$ otteniamo:

$$e^{-\frac{p^2}{2}}\left(F'(p) - p \cdot F(p)\right) = -e^{-\frac{p^2}{2}}.$$

A primo membro riconosciamo la derivata di un prodotto, pertanto:

$$\frac{d}{dp}\left(e^{-\frac{p^2}{2}} \cdot F(p)\right) = -e^{-\frac{p^2}{2}},$$

e quindi:

$$F(p) = e^{\frac{p^2}{2}}\left[\int_p^{+\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{2}}d\sigma + c\right].$$

Ma $c = 0$ poiché $F(p)$ è infinitesima per $Re(p) \to +\infty$; dunque:

$$F(p) = e^{\frac{p^2}{2}}\int_p^{+\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{2}}d\sigma \overset{\substack{t:=\sigma-p \\ \downarrow}}{=} e^{\frac{p^2}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{(t+p)^2}{2}}dt =$$
$$= e^{\frac{p^2}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{p^2}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-pt}dt = \mathcal{L}\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right](p).$$

In definitiva, per l'iniettività della trasformata di Laplace:

$$f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad t > 0.$$

13. (Risoluzione di un problema di Cauchy lineare omogeneo *a coefficienti lineari*). Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} tf''(t) + f'(t) + tf(t) = 0 \quad (\textit{equazione di Bessel}) \\ f(0^+) = 1 \\ f'(0^+) = 0 \end{cases}$$

per $t > 0$.

Proveremo che la soluzione $f(t)$ è

$$J_0(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{(j!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2j} \qquad (t > 0),$$

dove $J_0(t)$ è la *funzione di Bessel di ordine zero di prima specie.*

Indichiamo con $F(p)$ la trasformata di Laplace di f. Tenuto conto delle condizioni iniziali, si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[tf(t)\right](p) &= -F'(p), \\ \mathcal{L}\left[f'(t)\right](p) &= p \cdot F(p) - 1, \\ \mathcal{L}\left[tf''(t)\right](p) &= -\frac{d}{dp}\left(p^2F(p) - p\right) = 1 - 2p \cdot F(p) - p^2 \cdot F'(p). \end{aligned}$$

Applicando l'operatore $\mathcal{L}$ ai due membri dell'equazione differenziale otteniamo:

$$1 - 2p \cdot F(p) - p^2 \cdot F'(p) + p \cdot F(p) - 1 - F'(p) = 0,$$

da cui:

$$\frac{F'(p)}{F(p)} = -\frac{p}{p^2 + 1},$$

quindi:

$$\mathrm{Log}\,(F(p)) = -\frac{1}{2}\mathrm{Log}(p^2 + 1) + \mathrm{Log}\,k,$$

e in definitiva:

$$F(p) = \frac{k}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

Ricordando la serie binomiale:

$$(1+p)^\alpha = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{j} p^j, \quad |p| < 1,$$

per $Re(p) > 1$ si ha:

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{k}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{k}{\sqrt{p^2\left(1+\frac{1}{p^2}\right)}} = \frac{k}{p}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{k}{p}\sum_{j=0}^{+\infty}\binom{-1/2}{j}\frac{1}{p^{2j}} = k\sum_{j=0}^{+\infty}\binom{-1/2}{j}\frac{1}{p^{2j+1}} = \\ &= k\sum_{j=0}^{+\infty}\binom{-1/2}{j}\mathcal{L}\left[\frac{t^{2j}}{(2j)!}\right](p). \end{aligned}$$

Antitrasformiamo formalmente per serie e si ha:

$$f(t) \stackrel{?}{=} k\sum_{j=0}^{+\infty}\binom{-1/2}{j}\frac{t^{2j}}{(2j)!}.$$

Dalla condizione $f(0^+) = 1$ risulta:

$$1 = f(0^+) = k\binom{-1/2}{0} = k.$$

Poiché

$$\begin{aligned} \binom{-1/2}{j} &= \frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{2}-j+1\right)}{j!} = \frac{(-1)^j\,(2j-1)!!}{2^j j!} = \\ &= \frac{(-1)^j\,(2j)!}{2^j j! 2^j j!}, \end{aligned}$$

risulta[4]

$$f(t) = \sum_{j=0}^{+\infty}\binom{-1/2}{j}\frac{t^{2j}}{(2j)!} = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{(j!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2j} = J_0(t), \quad t > 0.$$

[4]Qui facciamo solo presente che l'uguaglianza $\stackrel{?}{=}$ è giustificata da un teorema di antitrasformazione per serie.

Il metodo della trasformata di Laplace è applicabile alle *equazioni integrali di Volterra* (relative a fenomeni ereditari[5]) della forma:

$$f(t) = w(t) + \int_0^t f(\tau)k(t-\tau)\,d\tau, \quad t \geq 0 \tag{8.30}$$

dove l'incognita è $f(t)$, definita in $[0,+\infty[$, $w(t)$ è il termine noto e $k(t-\tau)$ è il nucleo.

Riscriviamo la (8.30) nella forma:

$$f(t) - (f * k)(t) = w(t) \tag{8.31}$$

Nell'ipotesi che w e k siano $\mathcal{L}$-trasformabili, ammesso che esista una soluzione $f(t)$ $\mathcal{L}$-trasformabile, applichiamo ad entrambi i membri di (8.31) l'operatore $\mathcal{L}$. Per il teorema di Borel 8.2.13(iii) otteniamo l'equazione algebrica di primo grado, nell'incognita $\mathcal{L}[f(t)](p)$, da cui (osservato che per $Re(p)$ sufficientemente grande si ha $|\mathcal{L}[k(t)](p)| < 1$, essendo $\mathcal{L}[k(t)](p)$ infinitesima per $Re(p) \to +\infty$):

$$\mathcal{L}[f(t)](p) - \mathcal{L}[f(t)](p) \cdot \mathcal{L}[k(t)](p) = \mathcal{L}[w(t)](p)$$

e quindi

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \frac{\mathcal{L}[w(t)](p)}{1 - \mathcal{L}[k(t)](p)}. \tag{8.32}$$

La soluzione $f(t)$ si trova invertendo (8.32).

14. Risolviamo la seguente equazione integrale di Volterra:

$$f(t) = \sin t + \int_0^t f(\tau)\sin(2(t-\tau))\,d\tau$$

Indichiamo con $F(p)$ la trasformata di Laplace di f e applichiamo l'operatore $\mathcal{L}$ ai due membri dell'equazione. Esplicitando le trasformate delle funzioni note si ha:

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1} + F(p) \cdot \frac{2}{p^2+4},$$

[5]Fenomeni nella cui descrizione, nell'intervallo di tempo $[0,+\infty[$, compare una funzione (da daterminare) $f(t)$, che dipende, oltre che da una funzione assegnata $w(t)$, dai valori che la stessa f assume negli istanti τ precedenti l'istante t. L'influenza che il valore $f(\tau)$ esercita sul valore $f(t)$ è espressa dalla quantità $f(\tau)k(t-\tau)$, essendo $k(t-\tau)$ (funzione nota) un fattore di trasmissione (o di ereditarietà).

quindi:

$$F(p) = \frac{p^2 + 4}{(p^2 + 1)(p^2 + 2)}.$$

Allora, applicando la formula di Heaviside 8.3.3 otteniamo:

$$f(t) = 3 \sin t - \sqrt{2} \sin(\sqrt{2} t).$$