CAPITOLO 4

Spazi (di Lebesgue) $L^p(\Omega)$

4.1 Definizione e proprietà elementari degli spazi $L^p(\Omega)$

Definizione 4.1.1. Sia Ω sottoinsieme aperto connesso non vuoto di $\mathbb{R}^N$. Definiamo

$$L^1(\Omega) := \left\{ u;\ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ misurabile, } \int_\Omega |u(x)|\, d\mathcal{L}^N(x) < +\infty \right\},$$

e per $p \in \mathbb{R}$, $1 < p < +\infty$

$$L^p(\Omega) := \left\{ u;\ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ misurabile, } |u|^p \in L^1(\Omega) \right\},$$

inoltre, per $1 \leq p < +\infty$, poniamo

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \|u\|_{p,\Omega} := \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{1}{p}};$$

definiamo

$$L^\infty(\Omega) := \left\{ u;\ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ misurabile, } \quad \exists c \in \mathbb{R}^+ : \quad |u(x)| \leq c \text{ per q.o. } x \in \Omega \right\},$$

(funzioni essenzialmente limitate)

e poniamo

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|u\|_\infty = \|u\|_{\infty,\Omega} := \inf \left\{ c \in \mathbb{R}^+; \quad |u(x)| \leq c \text{ per q.o. } x \in \Omega \right\}$$

(sup. essenziale di u).

Si precisa che gli elementi degli spazi $L^p(\Omega)$ ($1 \leq p \leq +\infty$) sono classi di equivalenza di funzioni, due funzioni della stessa classe di equivalenza differendo in un insieme di misura (di Lebesgue) nulla.

Osservazione 4.1.2. Se $u \in L^\infty(\Omega)$ allora $|u(x)| \le \|u\|_\infty$ per q.o. $x \in \Omega$.

Dimostrazione. Esiste $(c_n) \subset \mathbb{R}^+$ tale che

$$c_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \|u\|_\infty$$

e per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste E_n misurabile, $|E_n| = 0$, tale che

$$|u(x)| \le c_n \qquad \forall\, x \in \Omega \setminus E_n.$$

Posto

$$E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n,$$

risulta

$$|E| = 0$$

e

$$|u(x)| \le c_n \qquad \forall\, x \in \Omega \setminus E, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ si ha pertanto

$$|u(x)| \le \|u\|_\infty \qquad \forall\, x \in \Omega \setminus E, \quad |E| = 0. \quad \square$$

Osservazione 4.1.3. $L^\infty(\Omega)$ è uno spazio vettoriale, inoltre

(1) $\|u\|_\infty \ge 0$;

(2) $\|u\|_\infty = 0 \iff u = 0$ q.o. in Ω;

(3) $\|\lambda u\|_\infty = |\lambda|\, \|u\|_\infty \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$;

(4) $\|u + v\|_\infty \le \|u\|_\infty + \|v\|_\infty \quad \forall\, u, v \in L^\infty(\Omega)$.

Dimostrazione. Per provare la (4) osserviamo che

$$|u(x) + v(x)| \le |u(x)| + |v(x)| \le \|u\|_\infty + \|v\|_\infty \quad \text{per q.o. } x \in \Omega\,,$$

da cui segue la tesi. $\square$

Quindi $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio normato.

Teorema 4.1.4. *(Teorema di completezza)*

$$(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty) \ \textit{è di Banach.}$$

Dimostrazione. Sia $(u_n) \subset L^\infty(\Omega)$ di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_\infty$. Allora

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \quad \exists \nu_k \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall\, n, m > \nu_k \quad \|u_n - u_m\|_\infty < \frac{1}{k}.$$

Allora $\forall\, k \in \mathbb{N} \quad \exists\, \nu_k \in \mathbb{N} \quad \exists\, E_k$ misurabile con $|E_k| = 0$ tale che

$$\forall\, n, m > \nu_k \quad |u_n(x) - u_m(x)| < \frac{1}{k} \quad \forall\, x \in \Omega \setminus E_k\,;$$

posto

$$E := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k,$$

si ha

$$|E| = 0$$

ed inoltre

$$\forall\, n, m > \nu_k \quad |u_n(x) - u_m(x)| < \frac{1}{k} \quad \forall\, x \in \Omega \setminus E.$$

Poiché $\mathbb{R}$ è completo

$$u_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} u(x) \in \mathbb{R} \qquad \forall\, x \in \Omega \setminus E.$$

Resta così definita una funzione u misurabile (limite di funzioni misurabili). Osservato che

$$|u(x)| \leq |u_n(x) - u(x)| + |u_n(x)| \qquad \forall\, x \in \Omega \setminus E$$

si riconosce che $u \in L^\infty(\Omega)$. Inoltre, poiché

$$\forall\, n, m > \nu_k \qquad |u_n(x) - u_m(x)| < \frac{1}{k} \quad \forall\, x \in \Omega \setminus E,$$

si ha, passando al limite per $m \to +\infty$,

$$\|u_n - u\|_\infty < \frac{1}{k} \quad \forall\, n > \nu_k$$

e quindi

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} u \;\text{ in } (L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)\,.$$

Pertanto $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ è di Banach. □

4.2 Disuguaglianza di Hölder

Definizione 4.2.1. Siano $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq +\infty$ e $p' \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

p, p' si chiamano **esponenti coniugati**.

Ad esempio l'esponente coniugato di $p = 2, 1, +\infty$ sarà, rispettivamente, $p' = 2, +\infty, 1$.

Teorema 4.2.2. *(Disuguaglianza di Young)*
Sia $p \in \mathbb{R}$, $1 < p < +\infty$. *Risulta*

$$|a \cdot b| \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'} \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}\,,$$

dove p' *è l'esponente coniugato di* p.

Dimostrazione. Se $a = 0$ o $b = 0$ la disuguaglianza è ovvia. Se a e $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dalla concavità della funzione log si ha

$$\log\left(\frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'}\right) \geq \frac{1}{p}\log|a|^p + \frac{1}{p'}\log|b|^{p'} = \log|ab|$$

e passando all'esponenziale in base e, si ha la tesi. □

Teorema 4.2.3. *(Disuguaglianza di Hölder)*
Sia $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq +\infty$; $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^{p'}(\Omega)$. *Risulta*

$$u \cdot v \in L^1(\Omega) \quad \wedge \quad \|u \cdot v\|_1 \leq \|u\|_p \cdot \|v\|_{p'}\,.$$

Dimostrazione. Se $p = 1$ o $p = +\infty$ la tesi è banale. Infatti se $p = 1$ allora $p' = +\infty$ e

$$\int_\Omega |u \cdot v|\, d\mathcal{L}^N(x) \leq \|v\|_\infty \int_\Omega |u|\, d\mathcal{L}^N(x) = \|v\|_\infty\, \|u\|_1\,.$$

Resta da provare la tesi per $1 < p < +\infty$.
Dalla disuguaglianza di Young si ha

$$|u(x)v(x)| \leq \frac{1}{p}|u(x)|^p + \frac{1}{p'}|v(x)|^{p'} \qquad \text{per q.o. } x \in \Omega\,,$$

da cui segue

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(x) \cdot v(x)|\, d\mathcal{L}^N(x) &\leq \frac{1}{p}\int_\Omega |u(x)|^p\, d\mathcal{L}^N(x) + \frac{1}{p'}\int_\Omega |v(x)|^{p'}\, d\mathcal{L}^N(x)\\ &= \frac{1}{p}\,\|u\|_p^p + \frac{1}{p'}\,\|v\|_{p'}^{p'} < +\infty\end{aligned}$$

e pertanto $u \cdot v \in L^1(\Omega)$ e

$$\|u \cdot v\|_1 \leq \frac{1}{p}\,\|u\|_p^p + \frac{1}{p'}\,\|v\|_{p'}^{p'}\,.$$

Allora preso λu con $\lambda > 0$, si ha

$$\|\lambda u \cdot v\|_1 \leq \frac{1}{p}\,\|\lambda u\|_p^p + \frac{1}{p'}\,\|v\|_{p'}^{p'}\,,$$

da cui

$$\lambda\,\|u \cdot v\|_1 \leq \frac{\lambda^p}{p}\,\|u\|_p^p + \frac{1}{p'}\,\|v\|_{p'}^{p'}$$

e quindi

$$\|u \cdot v\|_1 \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{\lambda p'} \|v\|_{p'}^{p'} .$$

Sia

$$F(\lambda) := \frac{\lambda^{p-1}}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{\lambda p'} \|v\|_{p'}^{p'} \qquad (\lambda > 0).$$

Osservato che da

$$F'(\lambda) = \frac{(p-1)}{p}\lambda^{p-2} \|u\|_p^p - \frac{1}{\lambda^2 p'} \|v\|_{p'}^{p'} = 0 ,$$

ovvero da

$$p'(p-1)\lambda^p \|u\|_p^p - p \|v\|_{p'}^{p'} = 0 ,$$

si ha

$$\lambda^p = \frac{\|v\|_{p'}^{p'}}{\|u\|_p^p} ,$$

e quindi

$$\lambda = \frac{\|v\|_{p'}^{\frac{p'}{p}}}{\|u\|_p} ,$$

con questa scelta di $\lambda > 0$ si ha

$$\begin{aligned} \|u \cdot v\|_1 &\leq \frac{1}{p} \frac{\|v\|_{p'}}{\|u\|_p^{p-1}} \|u\|_p^p + \frac{1}{p'} \frac{\|u\|_p}{\|v\|_{p'}^{\frac{p'}{p}}} \|v\|_{p'}^{p'} \\ &= \frac{1}{p} \|v\|_{p'} \|u\|_p + \frac{1}{p'} \|u\|_p \|v\|_{p'} \\ &= \|u\|_p \|v\|_{p'} . \qquad \square \end{aligned}$$

<u>Osservazione.</u> In alternativa alla precedente dimostrazione, osservato che se $u = 0$ oppure $v = 0$ q.o. in Ω la disuguaglianza di Hölder è ovvia, si applichi la disuguaglianza di Young con $a = \dfrac{|u|}{\|u\|_p}$ e $b = \dfrac{|v|}{\|v\|_{p'}}$.

Osservazione 4.2.4. $L^p(\Omega)$ è uno spazio vettoriale (reale).

Dimostrazione. Per $p = 1$ è immediata;
per $1 < p < +\infty$ basta osservare che la funzione $x \mapsto |x|^p$ è convessa e quindi

$$\left| \frac{u+v}{2} \right|^p \leq \frac{1}{2} \left(|u|^p + |v|^p \right)$$

pertanto

$$|u+v|^p \leq 2^{p-1} \left(|u|^p + |v|^p \right) . \quad \square$$

Teorema 4.2.5. *(Disuguaglianza di Minkowski)*
Siano $u, v \in L^p(\Omega)$, $1 \le p \le +\infty$. *Allora*

$$\|u+v\|_p \le \|u\|_p + \|v\|_p \,.$$

Dimostrazione. Abbiamo già trattato il caso $p = +\infty$. Inoltre il caso $p = 1$ è facile da verificare.
Consideriamo dunque $1 < p < +\infty$. Si ha

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_p^p &= \int_\Omega |u+v|^p \, d\mathcal{L}^N(x) = \int_\Omega |u+v|^{p-1} \cdot |u+v| \, d\mathcal{L}^N(x) \\
&\le \int_\Omega |u+v|^{p-1} |u| \, d\mathcal{L}^N(x) + \int_\Omega |u+v|^{p-1} |v| \, d\mathcal{L}^N(x) \\
&\le \|u\|_p \left(\int_\Omega |u+v|^{(p-1)p'} \, d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{1}{p'}} + \|v\|_p \left(\int_\Omega |u+v|^{(p-1)p'} \, d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \Big(\|u\|_p + \|v\|_p \Big) \|u+v\|_p^{\frac{p}{p'}} \,,
\end{aligned}$$

dove si è applicata la disuguaglianza di Hölder a

$$|u+v|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega) = L^{p'}(\Omega) \qquad \text{e} \qquad u, v \in L^p(\Omega).$$

Pertanto

$$\|u+v\|_p = \|u+v\|_p^{p-\frac{p}{p'}} \le \|u\|_p + \|v\|_p \,. \quad \square$$

Osservazione 4.2.6. Si riconosce facilmente che

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

è una norma, tenuto conto anche della disuguaglianza di Minkowski.

4.3 Immersione continua $\mathbf{L^s(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)}$

Proposizione 4.3.1. *Se* $|\Omega| < +\infty$, *per ogni* $1 \le r < s \le +\infty$ *si ha*

$$L^s(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega) \qquad (\textit{immersione continua di } L^s(\Omega) \textit{ in } L^r(\Omega))$$

e

$$\|u\|_r \le |\Omega|^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}} \|u\|_s \qquad \forall\, u \in L^s(\Omega)$$

(la topologia di $L^s(\Omega)$ *è più forte di quella di* $L^r(\Omega)$*).*

Dimostrazione. Sia $u \in L^s(\Omega)$, allora $|u|^r \in L^{\frac{s}{r}}(\Omega)$ e

$$\begin{aligned}
\|u\|_r^r &= \int_\Omega |u(x)|^r \, d\mathcal{L}^N(x) = \int_\Omega 1 \cdot |u(x)|^r \, d\mathcal{L}^N(x) \\
&\le \left(\int_\Omega d\mathcal{L}^N(x) \right)^{1-\frac{r}{s}} \left(\int_\Omega |u(x)|^{r\frac{s}{r}} \, d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{r}{s}} = |\Omega|^{1-\frac{r}{s}} \, \|u\|_s^r
\end{aligned}$$

e quindi

$$\|u\|_r \leq |\Omega|^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}} \|u\|_s \,.$$

□

Osservazione 4.3.2. Nella proposizione precedente l'ipotesi $|\Omega| < +\infty$ non può essere eliminata. Infatti sia $N = 1$ e $\Omega =]1, +\infty[$; poiché

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s}\, d\mathcal{L}^1(x) \begin{cases} \text{diverge} & \text{per } s = 1 \\ \\ \text{converge} & \text{per } s > 1 \end{cases}$$

si ha

$$\frac{1}{x} \notin L^1(]1, +\infty[)$$

ma

$$\forall\, s > 1 \qquad \frac{1}{x^s} \in L^1(]1, +\infty[)\,, \quad \text{ovvero} \quad \frac{1}{x} \in L^s(]1, +\infty[)\,.$$

4.4 Disuguaglianza di interpolazione

Teorema 4.4.1. *(Disuguaglianza di interpolazione)*
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto connesso, $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, $1 \leq p < q \leq +\infty$. Allora

$$u \in L^r(\Omega) \qquad \forall\, r \in \mathbb{R}, \quad p \leq r \leq q$$

ed inoltre

$$\|u\|_r \leq \|u\|_p^{\alpha} \cdot \|u\|_q^{1-\alpha}$$

dove $\alpha \in [0, 1]$ è tale che $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{1-\alpha}{q}$.

Dimostrazione. Sia $\alpha \in [0, 1]$ ed $r \in \mathbb{R}$ tale che $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{1-\alpha}{q}$. Si ha

$$\|u\|_r^r = \int_\Omega |u(x)|^r \, d\mathcal{L}^N(x) = \int_\Omega |u(x)|^{\alpha r} |u(x)|^{(1-\alpha)r} \, d\mathcal{L}^N(x).$$

Osservato che

$$u \in L^p(\Omega) \implies |u|^{\alpha r} \in L^{\frac{p}{\alpha r}}(\Omega)$$
$$u \in L^q(\Omega) \implies |u|^{(1-\alpha)r} \in L^{\frac{q}{(1-\alpha)r}}(\Omega)$$

e che $\dfrac{\alpha r}{p} + \dfrac{(1-\alpha)r}{q} = 1$ si ha, per la disuguaglianza di Hölder,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |u(x)|^{\alpha r} |u(x)|^{(1-\alpha)r} \, d\mathcal{L}^N(x) \\ &\qquad \leq \left(\int_\Omega |u(x)|^{\alpha r \cdot \frac{p}{\alpha r}} \, d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{\alpha r}{p}} \cdot \left(\int_\Omega |u(x)|^{(1-\alpha) r \cdot \frac{q}{(1-\alpha)r}} \, \mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{(1-\alpha)r}{q}} \\ &\qquad = \|u\|_p^{\alpha r} \cdot \|u\|_q^{(1-\alpha)r} \end{aligned}$$

ed elevando ad $\frac{1}{r}$ si ha la disuguaglianza di interpolazione, dalla quale si deduce anche che $u \in L^r(\Omega)$. $\square$

Proposizione 4.4.2. *Sia* $0 < |\Omega| < +\infty$, $u \in L^\infty(\Omega)$*; allora*

$$u \in L^r(\Omega) \qquad \forall\, r \geq 1$$

e si ha

$$\exists \lim_{r \to +\infty} \|u\|_r = \|u\|_\infty .$$

Dimostrazione. Dall'immersione continua

$$\|u\|_r \leq |\Omega|^{\frac{1}{r}} \|u\|_\infty$$

si ha

$$\limsup_{r \to +\infty} \|u\|_r \leq \|u\|_\infty .$$

Inoltre, per le proprietà del sup essenziale, poiché

$$\|u\|_\infty = \min \left\{ c \in \mathbb{R}^+; \quad |u(x)| \leq c \text{ q.o. in } \Omega \right\},$$

risulta

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists B_\varepsilon \text{ (misurabile) contenuto in } \Omega, \quad 0 < |B_\varepsilon| < +\infty \quad :$$

$$|u(x)| \;\geq\; \|u\|_\infty - \varepsilon \qquad \forall\, x \in B_\varepsilon \,,$$

quindi

$$|u(x)|^r \geq (\|u\|_\infty - \varepsilon)^r \qquad \forall\, x \in B_\varepsilon$$

da cui

$$\int_\Omega |u(x)|^r \, d\mathcal{L}^N(x) \geq \int_{B_\varepsilon} |u(x)|^r \, d\mathcal{L}^N(x) \geq |B_\varepsilon| \, (\|u\|_\infty - \varepsilon)^r$$

pertanto

$$\|u\|_r \geq |B_\varepsilon|^{\frac{1}{r}} \, (\|u\|_\infty - \varepsilon)$$

e quindi

$$\liminf_{r \to +\infty} \|u\|_r \geq \|u\|_\infty - \varepsilon .$$

Pertanto si ha

$$\|u\|_\infty - \varepsilon \leq \liminf_{r \to +\infty} \|u\|_r \leq \limsup_{r \to +\infty} \|u\|_r \leq \|u\|_\infty \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

e quindi la tesi. $\square$

4.5 Teorema di completezza di Fisher-Riesz

Teorema 4.5.1. *(Teorema di Fisher-Riesz)*

$$\forall\, 1 \le p < +\infty \qquad \left(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p\right) \textit{ è di Banach.}$$

Dimostrazione. Sia $1 \le p < +\infty$, (u_n) di Cauchy in $\|\cdot\|_p$, cioè

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n, m \ge \nu_\varepsilon \quad \|u_m - u_n\|_p < \varepsilon.$$

Allora esiste $(u_{n_j}) \subset L^p(\Omega)$ estratta da (u_n) tale che

$$\left\|u_{n_{j+1}} - u_{n_j}\right\|_p < \frac{1}{2^j}, \qquad j = 1, 2, \ldots .$$

Sia

$$v_m(x) = \sum_{j=1}^{m} \left|u_{n_{j+1}}(x) - u_{n_j}(x)\right|, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Allora

$$\|v_m\|_p \le \sum_{j=1}^{m} \left\|u_{n_{j+1}} - u_{n_j}\right\|_p < 1, \qquad m = 1, 2, \ldots .$$

Posto

$$v(x) = \lim_{m \to +\infty} v_m(x),$$

che può essere infinito per qualche x, si ha per il lemma di Fatou

$$\int_\Omega |v(x)|^p \, d\mathcal{L}^N(x) \le \liminf_{m \to +\infty} \int_\Omega |v_m(x)|^p \, d\mathcal{L}^N(x) \le 1.$$

Pertanto $v(x) < +\infty$ per q.o. $x \in \Omega$ e la serie

$$u_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{+\infty} \left(u_{n_{j+1}}(x) - u_{n_j}(x)\right)$$

converge ad un limite $u(x)$ q.o. in Ω. Poiché la serie precedente è telescopica si ha

$$\lim_{m \to +\infty} u_{n_m}(x) = u(x) \quad \text{ q.o. in } \Omega. \tag{4.1}$$

Quindi per il lemma di Fatou

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u(x) - u_n(x)|^p \, d\mathcal{L}^N(x) &= \int_\Omega \lim_{j \to +\infty} \left|u_{n_j}(x) - u_n(x)\right|^p \, d\mathcal{L}^N(x) \\
&\le \liminf_{j \to +\infty} \int_\Omega \left|u_{n_j(x)} - u_n(x)\right|^p \, d\mathcal{L}^N(x) \\
&\le \varepsilon^p \qquad\qquad \forall\, n \ge \nu_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Per cui

$$u = (u - u_n) + u_n \in L^p(\Omega) \qquad (n \ge \nu_\varepsilon)$$

e

$$\|u - u_n\|_p \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Da cui la completezza di $L^p(\Omega)$. □

Dalla dimostrazione del teorema precedente (vedi (4.1)) si deduce il seguente risultato

Corollario 4.5.2. *Da ogni successione di Cauchy in $L^p(\Omega)$ si può estrarre una successione convergente q.o. in Ω.*