
Indice

1	Preliminari	9
1.1	Notazione e premesse	9
1.2	Misura di Lebesgue in \mathbb{R}^N	11
1.3	Funzioni misurabili	12
1.4	Integrale di Lebesgue	13
1.5	Alcuni teoremi fondamentali	14
1.6	Teorema di compattezza (di Ascoli - Arzelà)	16
1.7	Operatore Divergenza, Operatore Gradiente e Operatore di Laplace	18
1.8	Misura di Hausdorff	18
1.9	Teorema della divergenza in \mathbb{R}^N (Gauss-Green)	19
1.10	Le identità di Green	20
1.11	Un criterio di sommabilità	20
2	Elementi della teoria (matematica) del potenziale (scalare): l'equazione di Laplace, di Poisson e problemi connessi	23
2.1	Funzioni armoniche in Ω	23
2.2	Funzioni subarmoniche e superarmoniche in Ω	25
2.3	Principio del massimo (minimo) forte e debole	26
2.4	Problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson (o per l'equazione di Laplace nel caso omogeneo, $f \equiv 0$)	28
2.5	Soluzione fondamentale per l'operatore di Laplace	29
2.6	Rappresentazione di Green	30
2.7	Funzione di Green	31
2.8	"Caratterizzazione" delle funzioni armoniche	35
2.9	Limite uniforme di successioni di funzioni armoniche	36
2.10	Sul concetto di problema ben posto secondo Hadamard e Principio di riflessione di Schwarz	36
2.11	Disuguaglianza di Harnack per funzioni armoniche positive	39
2.12	Stima (interna) a priori del gradiente di una funzione armonica	42
2.13	Il Problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace: Il metodo delle funzioni subarmoniche (<i>di O. Perron</i>)	43
2.14	Potenziale Newtoniano e problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson	50
3	Elementi di Teoria delle Distribuzioni (Laurent Schwartz)	59
3.1	Distribuzioni	59
3.2	Esempi di distribuzioni	61

3.3	Derivate di una distribuzione e Teorema di Malgrange-Ehrenpreis . . .	63
4	Spazi (di Lebesgue) $L^p(\Omega)$	67
4.1	Definizione e proprietà elementari degli spazi $L^p(\Omega)$	67
4.2	Disuguaglianza di Hölder	69
4.3	Immersione continua $L^s(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$	72
4.4	Disuguaglianza di interpolazione	73
4.5	Teorema di completezza di Fisher-Riesz	75
5	Convoluzione e Regolarizzazione per convoluzione	77
5.1	Convoluzione e Regolarizzazione per convoluzione	77
5.2	Successioni regolarizzanti	82
5.3	Approssimazione dell'identità	82
5.4	Densità di $C_0^\infty(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ ($1 \leq p < +\infty$)	84
5.5	Prodotto di convoluzione di due distribuzioni	87
6	Spazi di Hilbert (reali)	93
6.1	Spazi di Hilbert (reali)	93
6.2	Proiezione su un convesso chiuso	94
6.3	Duale di uno spazio di Hilbert. Teorema di rappresentazione di Riesz-Fréchet	98
6.4	Teoremi di Stampacchia e di Lax-Milgram	100
7	Introduzione agli Spazi di Sobolev	103
7.1	Spazi di Sobolev	103
7.2	Disuguaglianze di Sobolev in $W^{1,p}(\Omega)$ (teoremi di immersione continua o compatta)	107
7.3	Disuguaglianze di Sobolev in $W_0^{1,p}(\Omega)$	108
7.4	Disuguaglianze di Poincaré	115
8	Principio di Dirichlet	117
8.1	Principio di Dirichlet	117
8.2	Obiezione (generale) di Weierstrass	117
8.3	Obiezione di Courant	118
8.4	Obiezione (specifica) di Hadamard	119
8.5	Principio di Dirichlet in $W^{1,2}(\Omega)$: esistenza e regolarità interna . . .	121
9	Metodo variazionale per operatori in forma di divergenza: teoria L^2	129
9.1	Il metodo variazionale per operatori in forma di divergenza: una introduzione	129
9.2	Problema di Dirichlet omogeneo per l'equazione di Poisson	129
9.3	Operatori in forma di divergenza	131
9.4	Problema di Dirichlet non-omogeneo per l'equazione di Poisson . . .	135
10	La trasformata di Fourier	137
10.1	La trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R}^N)$	137
10.2	La classe di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (delle funzioni a decrescenza rapida all'infinito)	138
10.3	La trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^N)$	144
10.4	Distribuzioni temperate	146

11	L'equazione del calore e alcuni problemi connessi	151
11.1	Il Problema di Cauchy per l'equazione del calore in \mathbb{R}^N	151
11.2	Soluzione fondamentale per l'operatore del calore	157
11.3	Questioni di unicità della soluzione del Problema di Cauchy per l'equazione del calore	159
11.4	Il Principio del massimo (minimo) debole e unicità, in aperti connessi limitati	160
11.5	Il Principio del massimo in \mathbb{R}^N	166
11.6	Il Problema di Cauchy non-omogeneo per l'equazione del calore: Principio di Duhamel	169
11.7	Metodi dell'integrale dell'energia	176
11.8	Un'applicazione dell'equazione del calore ad un problema di finanza matematica	178
12	L'equazione delle onde (o di d'Alembert) e alcuni problemi connessi	187
12.1	Il Problema di Cauchy per l'equazione delle onde unidimensionale	187
12.2	I movimenti di una corda con gli estremi fissi	190
12.3	Equipartizione dell'energia	191
12.4	Medie sferiche ed Equazione di Darboux	193
12.5	Metodo di Poisson delle medie sferiche ed equazione di Eulero-Poisson-Darboux	194
12.6	Il Problema di Cauchy per l'equazione delle onde in dimensione (spaziale) $N = 3$	196
12.7	Il Problema di Cauchy per l'equazione delle onde in dimensione (spaziale) $N = 2$ (Metodo della discesa di Hadamard)	199
12.8	Il Problema di Cauchy non-omogeneo per l'equazione delle onde: Principio di Duhamel	201
12.9	Metodi dell'integrale dell'energia	202
	Bibliografia	205
	Indice analitico	207

