CAPITOLO 7

Metodi diretti: regolarità interna

Dopo il 1900, il XIX problema di Hilbert veniva affrontato dapprima in dimensione 2, ricorrendo a tecniche proprie dell'Analisi complessa:

- S. Bernstein (1904) ha dimostrato che *ogni soluzione di classe* $C^3(\Omega)$ *dell'equazione di Eulero analitica*

$$-D_\alpha F_{p_\alpha}(x,u,\nabla u) + F_u(x,u,\nabla u) = 0 \qquad \textit{in } \Omega \tag{7.64}$$

($n=2, N=1$*) è analitica in* Ω.

Successivamente

- L. Lichtenstein (1912) ha migliorato il risultato di Bernstein provando che *ogni soluzione di classe* $C^2(\Omega)$ *dell'equazione di Eulero (7.64) (sempre nel caso* $n=2, N=1$*) è di classe* $C^3(\Omega)$ *(e quindi analitica).*

Qualche anno più tardi

- E. Hopf (1929) ha provato che *ogni soluzione* $C^{1,\sigma}(\Omega)$ *di (7.64) (*$n=2, N=1$*) è di classe* $C^3(\Omega)$ *(e quindi analitica).*

Questi risultati sono stati estesi al caso generale $n \geq 2$ con il contributo di molti autori (per citarne alcuni: Leray-Schauder (1934), Petrowsky (1939), Caccioppoli (1934, 1950-'51), Stampacchia (1952), Morrey (1958), ...).

Negli anni precedenti la seconda guerra mondiale venivano dimostrati risultati di esistenza, relativi cioè al XX problema di Hilbert. Però i metodi diretti forniscono, come visto nei capitoli precedenti, una soluzione di un problema regolare del Calcolo delle Variazioni (e quindi, come vedremo dopo (cfr. teorema 7.3.1), una soluzione dell'equazione di Eulero, nella formulazione debole,

$$\int_\Omega \left[F_{p_\alpha}(x,u,\nabla u)\, D_\alpha v + F_u(x,u,\nabla u)\, v\right] dx = 0 \qquad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)) \tag{7.65}$$

in uno spazio di Sobolev $W^{1,m}(\Omega)$ per qualche $m > 1$.
A tali soluzioni non si poteva applicare il risultato di regolarità, perché esse in generale non sono nemmeno funzioni continue.

Il processo di esistenza-regolarità mostrava così una lacuna.
Per ottenere la regolarità mancava infatti il passo seguente:

$$u \in W^{1,m}, u \text{ SOLUZIONE} \Longrightarrow u \in C^{1,\sigma}. \tag{7.66}$$

Questo anello mancante è stato ottenuto con due risultati fondamentali, in ipotesi di "*crescita naturale*" dell'integrando (vedi (7.111) successivo).
I risultati sono dovuti a Morrey (1938) per $n = 2$ e $N \geq 1$ (cioè relativamente anche a *sistemi* in *due* variabili), ed a De Giorgi (1957) e Nash (1958) nel caso $n \geq 2$ e $N = 1$ (cioè per *equazioni* in un numero arbitrario di variabili).
Il teorema di hölderianità di De Giorgi-Nash-Moser 7.5.6 è ottenuto per $m = 2$. Questo risultato è stato poi ripreso e rivisto alla fine degli anni '60 da molti autori, estendendolo anche per $m \in (1, +\infty)$: ricordiamo Morrey (1966) [**58**], Stampacchia (1966) [**68**], Ladyzhenskaya-Ural'tseva (1968) [**48**], Moser (1960) [**59**].

7.1. Regolarità: il caso scalare.

Qui affrontiamo la prova dell'implicazione (7.66) nel caso scalare $N = 1$.

7.2. Un risultato unidimensionale di Tonelli e fenomeno di Lavrentieff.

E' di Tonelli (1915) il seguente celebre *teorema di esistenza e regolarità parziale.*

Teorema 7.2.1 (Esistenza e regolarità parziale, Tonelli).
Sia $F : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una Lagrangiana soddisfacente le seguenti condizioni:

(i) $F \in C^2([0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$;
(ii) $F_{pp}(x,u,p) > 0$ *per ogni* (x,u,p);
(iii) *esistono* $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $m > 1$ *tali che*

$$F(x,u,p) \geq c_1 |p|^m - c_2 \quad \textit{per ogni } (x,u,p).$$

Allora il problema di minimo

$$\min \left\{ \int_0^1 F(x, u(x), u'(x))\, dx;\ u \in W^{1,1}((0,1)),\ u(0) = 0,\ u(1) = 1 \right\} \tag{7.67}$$

ha almeno una soluzione u parzialmente regolare, nel senso che esiste un insieme chiuso $E \subset [0,1]$ con $|E| = 0$ tale che $u \in W^{1,\infty}((0,1) \setminus E)$.

Con questo risultato Tonelli stabiliva che, per ottenere l'esistenza di un minimo, una appropriata classe di funzioni ammissibili è un sottoinsieme delle funzioni assolutamente continue.
Tonelli, tuttavia, non era riuscito a provare se il suo risultato era ottimale, cioè non era riuscito a dimostrare se $E = \emptyset$ o a dare un esempio in cui $E \neq \emptyset$. Lo stesso Tonelli, durante una conferenza a Mosca, pose il problema di trovare un esmpio in cui $E \neq \emptyset$.
In questo ambito, nel 1926 Lavrentieff osservò che se $E = \emptyset$, allora sussiste l'uguaglianza

$$\begin{aligned} & \inf\left\{\int_0^1 F\left(x, u(x), u'(x)\right)\, dx;\ u \in W^{1,1}((0,1)),\, u(0)=0,\, u(1)=1\right\} \\ = \; & \inf\left\{\int_0^1 F\left(x, u(x), u'(x)\right)\, dx;\ u \in W^{1,\infty}((0,1)),\, u(0)=0,\, u(1)=1\right\} \end{aligned}$$

(ciò vuol dire che il problema è "insensibile" alla regolarità richiesta alle funzioni ammissibili), e che quindi per esibire un esempio in cui $E \neq \emptyset$ era sufficiente trovare una Lagrangiana F per cui vale la stretta disuguaglianza

$$\begin{aligned} & \inf\left\{\int_0^1 F(x, u(x), u'(x))\, dx;\ u \in W^{1,1}((0,1))\, u(0)=0,\, u(1)=1\right\} \\ < & \inf\left\{\int_0^1 F(x, u(x), u'(x))\, dx;\ u \in W^{1,\infty}((0,1))\, u(0)=0,\, u(1)=1\right\}. \end{aligned} \tag{7.68}$$

Il termine "*fenomeno di Lavrentieff*" si riferisce al sorprendente risultato dimostrato per la prima volta da M. Lavrentieff nel 1926. Egli dimostra che l'integrale variazionale – seq. deb. s.c.i. nella classe delle funzioni ammissibili $W^{1,1}((0,1))$ – di un problema di Lagrange ai limiti può avere un estremo inferiore in $W^{1,\infty}((0,1))$ strettamente maggiore del minimo su tutta la classe ammissibile. In altri termini per opportune Lagrangiane $F = F(x, u(x), u'(x))$ risulta la (7.68). Quindi nel passaggio da un problema ad una sua formulazione debole è doverosa la verifica che la formulazione debole non alteri il valore minimo del problema nella sua formulazione originale.

Osservazione 7.2.2. E' interessante notare che se si utilizzano i metodi degli elementi finiti (prendendo funzioni affini a tratti, che sono in $W^{1,\infty}((0,1))$) il verificarsi della stretta diseguaglianza (7.68) impedisce il raggiungimento del minimo. Quindi il fenomeno di Lavrentieff costituisce un ostacolo serio per gli schemi numerici di minimizzazione.
Il fenomeno di Lavrentieff mostra in definitiva quanto sia delicata la scelta della classe delle funzioni ammissibili.

Presentiamo ora un esempio (dovuto essenzialmente a B. Manià, 1934 [**52**]) in cui si manifesta il fenomeno di Lavrentieff.

Teorema 7.2.3 ([**16**]). *Sia* $F(x,u,p) = \left(x-u^3\right)^2 p^6$ *e sia* $\mathcal{F}[u] := \int_0^1 F(x,u(x),u'(x))\,dx$. *Siano* [1]

$$\mathcal{A}^1 = \left\{u \in W^{1,1}((0,1));\; u(0)=0,\, u(1)=1\right\},$$
$$\mathcal{A}^\infty = \left\{u \in W^{1,\infty}((0,1));\; u(0)=0,\, u(1)=1\right\}$$

allora

$$\inf\left\{\mathcal{F}[u]\,;\; u\in\mathcal{A}^\infty\right\} \geq \frac{7^2\cdot 3^5}{2^{18}\cdot 5^5} = c_0 > 0 = \inf\left\{\mathcal{F}[u]\,;\; u\in\mathcal{A}^1\right\}.$$

Inoltre il minimo di $\mathcal{F}[\cdot]$ *su* $\mathcal{A}^1$ *è dato da* $u(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

Alla dimostrazione del precedente teorema premettiamo il seguente risultato.

Lemma 7.2.4. *Siano* $0<\alpha<\beta<1$ *e sia*

$$\mathcal{A} = \left\{u\in W^{1,\infty}((\alpha,\beta));\; \frac{1}{4}x^{\frac{1}{3}} \leq u(x) \leq \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}\;\forall x\in[\alpha,\beta]\,,\; u(\alpha)=\frac{1}{4}\alpha^{\frac{1}{3}},\; u(\beta)=\frac{1}{2}\beta^{\frac{1}{3}}\right\}.$$

Se $F(x,u,p) := \left(x-u^3\right)^2 p^6$ *e* $\mathcal{G}[u] := \int_\alpha^\beta F(x,u(x),u'(x))\,dx$, *allora* $\mathcal{G}[u] \geq \frac{c_0}{\beta}$ *per ogni* $u\in\mathcal{A}$, *dove* $c_0 = \frac{7^2\cdot 3^5}{2^{18}\cdot 5^5}$.

Dim. Da $u(x) \leq \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}$ segue che

$$1-\frac{u^3(x)}{x} \geq 1-\frac{1}{x}\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{2}\right)^3 = \frac{7}{2^3} \quad \text{per ogni } x\in[\alpha,\beta].$$

Allora risulta

$$\mathcal{G}[u] = \int_\alpha^\beta x^2\left(1-\frac{u^3(x)}{x}\right)^2 \left(u'(x)\right)^6\,dx \geq \frac{7^2}{2^6}\int_\alpha^\beta x^2\left(u'(x)\right)^6\,dx. \tag{7.69}$$

Sia ora $y = x^{\frac{3}{5}}$, allora $u(x) = \overline{u}(y) = \overline{u}(x^{\frac{3}{5}})$; pertanto

$$u'(x) = \overline{u}'(y)\frac{dy}{dx} = \frac{3}{5}\overline{u}'(y)x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}\overline{u}'(y)y^{-\frac{2}{3}}.$$

Sostituendo in (7.69) abbiamo

$$\mathcal{G}[u] \geq \frac{7^2}{2^6}\int_{\alpha^{\frac{3}{5}}}^{\beta^{\frac{3}{5}}} y^{\frac{10}{3}}\left(\frac{3}{5}\overline{u}'(y)y^{-\frac{2}{3}}\right)^6\cdot\left(\frac{5}{3}y^{\frac{2}{3}}\right)dy = \frac{7^2\cdot 3^5}{2^6\cdot 5^5}\int_{\alpha^{\frac{3}{5}}}^{\beta^{\frac{3}{5}}}\left(\overline{u}'(y)\right)^6\,dy.$$

[1] $\mathcal{A}^1$ è l'insieme delle funzioni u assolutamente continue in $(0,1)$ soddisfacenti $u(0)=0$, $u(1)=1$, mentre $\mathcal{A}^\infty$ è l'insieme delle funzioni Lipschitziane in $(0,1)$ soddisfacenti le stesse condizioni ai limiti.

Applicando la disuguaglianza di Jensen (1.12) all'integrale a destra otteniamo

$$\begin{aligned}\mathcal{G}[u] \quad &\geq \quad \frac{7^2 \cdot 3^5}{2^6 \cdot 5^5} \cdot \frac{\left(\overline{u}(\beta^{\frac{3}{5}}) - \overline{u}(\alpha^{\frac{3}{5}})\right)^6}{\left(\beta^{\frac{3}{5}} - \alpha^{\frac{3}{5}}\right)^5} = \frac{7^2 \cdot 3^5}{2^6 \cdot 5^5} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\beta^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\alpha^{\frac{1}{3}}\right)^6}{\left(\beta^{\frac{3}{5}} - \alpha^{\frac{3}{5}}\right)^5} \\ &= \quad \frac{7^2 \cdot 3^5}{2^{12} \cdot 5^5} \cdot \frac{\beta^2}{\beta^3} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^6}{\left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{3}{5}}\right)^5}. \end{aligned} \tag{7.70}$$

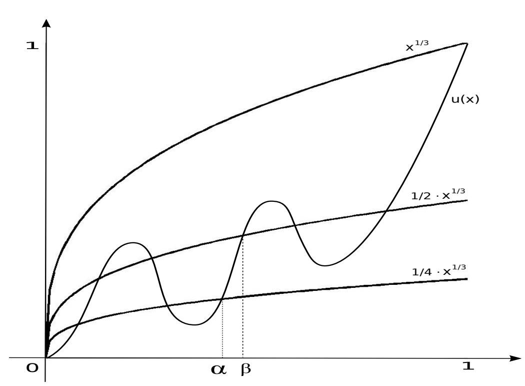
Osserviamo infine che poiché $0 < \alpha < \beta < 1$, abbiamo

$$\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^6 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^6 \quad \text{e} \quad \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{3}{5}}\right)^{-5} \geq 1. \tag{7.71}$$

Da (7.70) e (7.71) segue la tesi. □

Dim. [teorema 7.2.3] Cominciamo col provare che se $u \in \mathcal{A}^\infty$ allora esistono $0 < \alpha < \beta < 1$ tali che $u \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ come nel lemma 7.2.4), cioè

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4}x^{\frac{1}{3}} \leq u(x) \leq \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{3}} & \text{per ogni } x \in [\alpha, \beta] \\ \\ u(\alpha) = \frac{1}{4}\alpha^{\frac{1}{3}},\ u(\beta) = \frac{1}{2}\beta^{\frac{1}{3}}. \end{cases} \tag{7.72}$$



Siano

$$A = \left\{ a \in (0,1);\ u(a) = \frac{1}{4} a^{\frac{1}{3}} \right\}$$
$$B = \left\{ b \in (0,1);\ u(b) = \frac{1}{2} b^{\frac{1}{3}} \right\}.$$

Poiché u è Lipschitziana, $u(0) = 0$ e $u(1) = 1$, necessariamente $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$.
Scegliamo per esempio

$$\alpha = \max \{a;\ a \in A\}$$

e

$$\beta = \min \{b;\ b \in B,\, b > \alpha\}.$$

Chiaramente α e β soddisfano le condizioni (7.72).
Allora, usando il lemma 7.2.4, deduciamo che per $u \in \mathcal{A}^1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u] &= \int_0^1 \left(x - u^3(x)\right)^2 \left(u'(x)\right)^6\, dx \geq \int_\alpha^\beta \left(x - u^3(x)\right)^2 \left(u'(x)\right)^6\, dx \\ &\geq \frac{c_0}{\beta} > c_0 > 0. \end{aligned}$$

Infine che $u(x) = x^{\frac{1}{3}}$ sia il minimo di $\mathcal{F}[\cdot]$ su $\mathcal{A}^1$ è immediato, poiché $\mathcal{F}[u] \geq 0$ per ogni $u \in \mathcal{A}^1$ e $\mathcal{F}\left[x^{\frac{1}{3}}\right] = 0$. □

Osservazione 7.2.5 ([**11**]). La Lagrangiana $F(x,u,p) := \left(x - u^3\right)^2 p^6$ del teorema 7.2.3 non è genuinamente sopralineare e degenera per $u(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Ma non è questo che determina il fenomeno di Lavrentieff.
Infatti, osserviamo che se $1 < m < \dfrac{3}{2}$ allora $x^{\frac{1}{3}} \in W^{1,m}((0,1))$, pertanto esiste $\eta > 0$ tale che

$$\eta \int_0^1 \left| D\, x^{\frac{1}{3}} \right|^m dx < c_0 \quad (c_0 \text{ è la costante definita nel teorema 7.2.3}).$$

Sia $\mathcal{F}_1[u] := \displaystyle\int_0^1 \left[\left(x - u^3\right)^2 u'^6 + \eta \left|u'\right|^m \right] dx$; allora l'integrando $F_1(x,u,p)$ di $\mathcal{F}_1$ è ora non degenere, convesso in p e soddisfa
$\eta \left|p\right|^m \leq F_1(x,u,p) \leq c_1 \left|p\right|^6 + c_2$.
Ovviamente $\mathcal{F}_1[u] > c_0$ per ogni $u \in \mathcal{A}^\infty$, mentre $\mathcal{F}_1[u_0] < c_0$ per $u_0(x) = x^{\frac{1}{3}}$, cioè vale la relazione

$$\inf \left\{ \mathcal{F}_1[u];\ u \in \mathcal{A}^1 \right\} < \inf \left\{ \mathcal{F}_1[u];\ u \in \mathcal{A}^\infty \right\}.$$

Pertanto, anche in questa circostanza, si presenta il fenomeno di Lavrentieff.

Osservazione 7.2.6. Il fenomeno di Lavrentieff non è raro, si presenta e.g. anche nell'ambito della elasticità non lineare, pertanto conviene inquadrare questo fenomeno in termini generali.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato e siano $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$ una assegnata Lagrangiana e $\mathcal{F} : W^{1,1}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right) \to \mathbb{R}$ il funzionale definito da

$$\mathcal{F}[u] := \int_\Omega F\left(x, u(x), \nabla u(x)\right)\, dx.$$

Sia $\mathcal{A}$ un prescritto (da condizioni di Dirichlet o altre condizioni) sottoinsieme di $W^{1,1}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$.
Per ogni $m \in [1, +\infty]$, definiamo la classe delle funzioni ammissibili

$$\mathcal{A}^m := \mathcal{A} \cap W^{1,m}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right).$$

Evidentemente se m cresce le funzioni in $\mathcal{A}^m$ risultano più regolari.
Considerato il problema

$$\inf_{u\in\mathcal{A}^m} \mathcal{F}[u],$$

l'estremo inferiore è non-decrescente rispetto ad m.
Per molti problemi l'estremo inferiore non è influenzato dal valore di m.
Nel caso in cui

$$\inf_{u\in\mathcal{A}^1} \mathcal{F}[u] < \inf_{u\in\mathcal{A}^\infty} \mathcal{F}[u],$$

cioè se si verifica la dipendenza da m, allora diremo che il problema variazionale presenta il fenomeno di Lavrentieff.
Questo fenomeno in definitiva è ascrivibile alla "sensibilità" dell'estremo inferiore di un problema variazionale rispetto alla regolarità richiesta alle funzioni ammissibili.

7.3. Soluzioni deboli dell'equazione di Eulero e derivate seconde per i minimi.

Per dare un'idea del problema della regolarità (quindi della dimostrazione dell'implicazione (7.66)) supponiamo, per semplicità, che *la Lagrangiana $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dipenda solo da p e sia di classe C^2.* Inoltre assumiamo che *il funzionale regolare $\mathcal{F}[u] := \int_\Omega F(\nabla u(x))\, dx$ sia quadratico*, cioè tale che per ogni $p \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} |F(p)| &\leq c_0\, |p|^2\,, && (7.73)\\ |F_p(p)| &\leq c_1\, |p|\,, && (7.74)\\ |F_{pp}(p)| &\leq c_2, && (7.75) \end{aligned}$$

con c_0, c_1, c_2 costanti positive.
In questo caso il teorema 4.5.1 dà il seguente risultato di esistenza per il problema di Dirichlet.
Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ e sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una Lagrangiana tale che il funzionale $\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(\nabla u(x))\, dx$ sia seq. deb. s.c.i. in $W^{1,2}(\Omega)$.
Sia inoltre $F(p) \geq c|p|^2$ (cioè $F(p)$ ha crescita superlineare per $|p| \to +\infty$).

Allora, per ogni $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ con $\mathcal{F}[\varphi] < +\infty$, esiste il minimo di $\mathcal{F}[u]$ nella classe

$$\mathcal{A}_\varphi = \left\{ v \in W^{1,2}(\Omega), \ \ v - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \right\}.$$

In realtà dimostreremo che per ogni minimo $u \in \mathcal{A}_\varphi$ di $\mathcal{F}[\cdot]$ abbiamo

(i) u è una soluzione debole dell'equazione di Eulero

$$D_\alpha F_{p_\alpha}(\nabla u(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{7.76}$$

cioè

$$\int_\Omega F_{p_\alpha}(\nabla u(x))\, D_\alpha v(x)\, dx = 0 \quad \text{per ogni } v \in W_0^{1,2}(\Omega) \tag{7.77}$$

(cfr. teorema 7.3.1 successivo);

inoltre (cfr. teorema 7.3.5 successivo)

(ii) u appartiene allo spazio $W^{2,2}_{\text{loc}}(\Omega)$.

Teorema 7.3.1 (Soluzione debole dell'equazione di Eulero). *Supponiamo che F verifichi le condizioni di crescita (7.73) e (7.74) e che $u \in \mathcal{A}_\varphi$ soddisfi $\mathcal{F}[u] = \min\limits_{w \in \mathcal{A}_\varphi} \mathcal{F}[w]$; allora u è una soluzione debole dell'equazione di Eulero*

$$D_\alpha F_{p_\alpha}(\nabla u(x)) = 0 \quad \textit{in } \Omega, \tag{7.78}$$

cioè verifica

$$\int_\Omega F_{p_\alpha}(\nabla u(x))\, D_\alpha v(x)\, dx = 0 \quad \textit{per ogni } v \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{7.79}$$

Dim. Procediamo come nella dimostrazione della proposizione 2.2.1 facendo attenzione alla differeziazione sotto il segno di integrale.
Siano $t \in \mathbb{R}$ e $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Consideriamo la funzione $u + tv \in \mathcal{A}_\varphi$.
Per la (7.73) $\mathcal{F}[u + tv] < +\infty$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Sia $t \neq 0$ e consideriamo

$$\frac{\mathcal{F}[u+tv] - \mathcal{F}[u]}{t} = \int_\Omega \frac{F(\nabla u(x) + t\nabla v(x)) - F(\nabla u(x))}{t}\, dx. \tag{7.80}$$

Osserviamo che

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(\nabla u(x) + t\nabla v(x)) - F(\nabla u(x))}{t} = F_{p_\alpha}(\nabla u(x)) D_\alpha v(x) \tag{7.81}$$

per q.o. $x \in \Omega$.
Inoltre

$$\begin{aligned}
\frac{F(\nabla u(x) + t\nabla v(x)) - F(\nabla u(x))}{t} &= \frac{1}{t} \int_0^t \frac{d}{d\,s} F(\nabla u(x) + s\nabla v(x))\, ds \\
&= \frac{1}{t} \int_0^t F_{p_\alpha}(\nabla u(x) + s\nabla v(x))\, D_\alpha v(x)\, ds.
\end{aligned}$$

Poiché $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$, la (7.74) e la disuguaglianza $a \cdot b \leq \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$ implicano che

$$\left| \frac{F(\nabla u(x) + t\nabla v(x)) - F(\nabla u(x))}{t} \right| \leq c(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) \in L^1(\Omega)$$

per ogni $t \neq 0$.

Di conseguenza, per il teorema della convergenza dominata 1.1.11 da (7.80) e (7.81) concludiamo che $\dfrac{d}{dt}\mathcal{F}[u+tv]_{\big|t=0}$ esiste ed è uguale a
$\displaystyle\int_\Omega F_{p_\alpha}(\nabla u(x))\, D_\alpha v(x)\, dx.$
Ma allora, poiché $\mathcal{F}[u+tv]$ ha minimo per $t = 0$, abbiamo
$\dfrac{d}{dt}\mathcal{F}[u+tv]_{\big|t=0} = 0$, e così u è una soluzione debole di (7.78). $\square$

Osserviamo che il risultato precedente non segue dalla proposizione 2.2.1 poiché non sappiamo che u è regolare, ma soltanto che $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Per questo occorrono le condizioni (7.73) e (7.74) di crescita su F e sulle sue derivate prime.

Osservazione 7.3.2. In generale, l'equazione di Eulero (7.79) può avere altre soluzioni che non corrispondono a minimi di $\mathcal{F}[\cdot]$. Tuttavia:
Se $p \mapsto F(p)$ è convessa allora ogni soluzione debole di (7.78) *è un minimo di $\mathcal{F}[\cdot]$.*

Dim. Sia $u \in \mathcal{A}_\varphi$ una soluzione debole di (7.78) e sia $w \in \mathcal{A}_\varphi$. Allora per la convessità di $p \mapsto F(p)$, abbiamo

$$F(q) \geq F(p) + F_p(p)(q-p) \qquad \forall p, q \in \mathbb{R}^n.$$

Sia $p = \nabla u(x)$ e $q = \nabla w(x)$ e integriamo su Ω, allora

$$\mathcal{F}[w] \geq \mathcal{F}[u] + \int_\Omega F_p(\nabla u(x))(\nabla w(x) - \nabla u(x))\, dx.$$

Per la (7.79) risulta

$$\int_\Omega F_p(\nabla u(x))(\nabla w(x) - \nabla u(x))\, dx = 0,$$

per cui $\mathcal{F}[u] \leq \mathcal{F}[w]$ per ogni $w \in \mathcal{A}_\varphi$. $\square$

Osservazione 7.3.3. Nel caso dell'integrale di Dirichlet, l'equazione di Eulero nella formulazione debole (7.79) è

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx = 0 \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega)\,. \tag{7.82}$$

Introduciamo, ora, il metodo dei quozienti differenziali dovuto a Nirenberg, che utilizzeremo per dimostrare un importante risultato (teorema 7.3.5).
Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione localmente sommabile e sia $\Omega' \subset\subset \Omega$.
Definiamo *rapporto incrementale* (o *quoziente differenziale*) parziale di incremento r rispetto a x_γ

$$D^r_\gamma u(x) := \frac{u(x + r\, e_\gamma) - u(x)}{r} \quad (\gamma = 1, \dots, n)$$

per $x \in \Omega'$, $0 < |r| < \text{dist}\,(\Omega', \partial\Omega)$ con $e_\gamma = (0, \dots, 0, \overset{\overset{\gamma}{\uparrow}}{1}, 0, \dots, 0)$;
poniamo $D^r u = (D^r_1 u, \dots, D^r_n u)$.

Sussiste il seguente risultato che caratterizza per $1 < m < \infty$ lo spazio di Sobolev $W^{1,m}\,(\Omega)$:

Teorema 7.3.4 (Rapporti incrementali e derivate deboli).

(i) *Sia $1 \le m < \infty$ e sia $u \in W^{1,m}(\Omega)$.*
Allora
$$\forall \Omega' \subset\subset \Omega \quad \|D^r u\|_{L^m(\Omega', \mathbb{R}^n)} \le c\, \|\nabla u\|_{L^m(\Omega, \mathbb{R}^n)} \quad (c > 0)$$
per ogni $0 < |r| < \frac{1}{2}\, dist\,(\Omega', \partial\Omega)$.

(ii) *Sia $1 < m < \infty$, $u \in L^m(\Omega')$, e supponiamo che esista una costante c tale che $\|D^r u\|_{L^m(\Omega', \mathbb{R}^n)} \le c$ per ogni $0 < |r| < \frac{1}{2}\, dist\,(\Omega', \partial\Omega)$.*
Allora $u \in W^{1,m}(\Omega')$ con $\|\nabla u\|_{L^m(\Omega', \mathbb{R}^n)} \le c$.

Osserviamo che (ii) è falsa per $m = 1$.

Dim.

(i) Sia $1 \le m < \infty$ e supponiamo dapprima che u sia di classe $C^1(\Omega)$. Allora per ogni $x \in \Omega'$, $\gamma = 1, \dots, n$ e $0 < |r| < \frac{1}{2}\text{dist}\,(\Omega', \partial\Omega)$, abbiamo
$$u(x + re_\gamma) - u(x) = \int_0^1 D_\gamma u(x + tre_\gamma)\, dt \cdot re_\gamma;$$
sicché
$$|u(x + re_\gamma) - u(x)| \le |r| \int_0^1 |\nabla u(x + tre_\gamma)|\, dt.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}\int_{\Omega'} |D^r u(x)|^m \, dx &\leq c \sum_{\gamma=1}^{n} \int_{\Omega'} \left(\int_0^1 |\nabla u(x + tre_\gamma)|^m \, dt \right) dx \\ &= c \sum_{\gamma=1}^{n} \int_0^1 \left(\int_{\Omega'} |\nabla u(x + tre_\gamma)|^m \, dx \right) dt.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_{\Omega'} |D^r u(x)|^m \, dx \leq c \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^m \, dx$$

cioè

$$\|D^r u\|_{L^m(\Omega', \mathbb{R}^n)} \leq c \, \|\nabla u\|_{L^m(\Omega, \mathbb{R}^n)} .$$

Questa stima vale per $u \in C^1(\Omega)$, e quindi è valida, per approssimazione, per $u \in W^{1,m}(\Omega)$.

(ii) Supponiamo ora che valga

$$\|D^r u\|_{L^m(\Omega', \mathbb{R}^n)} \leq c \tag{7.83}$$

per ogni $0 < |r| < \dfrac{1}{2}\text{dist}\,(\Omega', \partial\Omega)$.
Sia $\gamma = 1, \dots, n$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$; osserviamo che per r sufficientemente piccolo

$$\int_{\Omega'} u(x) \left[\frac{\varphi(x + re_\gamma) - \varphi(x)}{r} \right] dx = - \int_{\Omega'} \left[\frac{u(x) - u(x - re_\gamma)}{r} \right] \varphi(x) \, dx,$$

cioè

$$\int_{\Omega'} u(x) \left(D_\gamma^r \varphi(x) \right) \, dx = - \int_{\Omega'} \left(D_\gamma^{-r} u(x) \right) \varphi(x) \, dx. \tag{7.84}$$

Questa è la *formula "di integrazione per parti" per i rapporti incrementali (quozienti differenziali).*
L'ipotesi (7.83) implica

$$\sup_r ||D_\gamma^{-r} u||_{L^m(\Omega')} < +\infty;$$

e, pertanto, poiché $1 < m < \infty$, esiste una funzione $v_\gamma \in L^m(\Omega')$ (spazio riflessivo) e una sottosuccessione $r_h \to 0$ tale che

$$D_\gamma^{-r_h} u \rightharpoonup v_\gamma \qquad \text{in } L^m(\Omega'). \tag{7.85}$$

Ma allora

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'} u\, D_\gamma \varphi\, dx &= \int_{\Omega} u\, D_\gamma \varphi\, dx \\
&= \lim_{r_h \to 0} \int_{\Omega} u\, D_\gamma^{r_h} \varphi\, dx \\
&\overset{\text{per (7.84)}}{=} -\lim_{r_h \to 0} \int_{\Omega'} D_\gamma^{-r_h} u\, \varphi\, dx \\
&= -\int_{\Omega'} v_\gamma\, \varphi\, dx = -\int_{\Omega} v_\gamma\, \varphi\, dx.
\end{aligned}$$

Pertanto $v_\gamma = D_\gamma u$ in senso debole ($\gamma = 1, \dots, n$) e così $\nabla u \in L^m(\Omega', \mathbb{R}^n)$. Poiché $u \in L^m(\Omega')$, deduciamo che $u \in W^{1,m}(\Omega')$. Infine osserviamo che

$$\|D_\gamma u\|_{L^m(\Omega', \mathbb{R}^n)} \leq \liminf_{r_h \to 0} \left\| D_\gamma^{-r_h} u \right\|_{L^m(\Omega')} \leq \text{cost.}$$

□

Teorema 7.3.5 (Derivate seconde per i minimi).
Sia $u \in W^{1,2}(\Omega)$ una soluzione debole di (7.78), con F che soddisfa la (7.75) ed uniformemente convessa, cioè

$$\exists \theta > 0 : \quad F_{p_\alpha\, p_\beta}(p) \xi_\alpha\, \xi_\beta \geq \theta |\xi|^2, \quad (p, \xi \in \mathbb{R}^n). \tag{7.86}$$

Allora $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$ e fissato $\gamma \in \{1, \dots, n\}$ e un aperto $\Omega' \subset\subset \Omega$, $\widetilde{u} := D_\gamma u$ è una soluzione debole dell'equazione lineare, ellittica del secondo ordine in forma di divergenza

$$D_\alpha(A_{\alpha\,\beta}(x)\, D_\beta \widetilde{u}(x)) = 0 \quad \textit{in } \Omega' \tag{7.87}$$

con

$$A_{\alpha\,\beta} := F_{p_\alpha\, p_\beta}(\nabla u) \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n). \tag{7.88}$$

Dim. Fissiamo un aperto $\Omega' \subset\subset \Omega$ e sia Ω'' un aperto tale che $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$. Sia $\zeta \in C^\infty$ una funzione di taglio tale che

$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 & \text{su } \Omega' \\ \zeta \equiv 0 & \text{su } \mathbb{R}^n \setminus \Omega'' \\ 0 \leq \zeta \leq 1 & \text{su } \Omega'' \setminus \Omega'. \end{cases}$$

Sia $|r| > 0$ sufficientemente piccolo, sia $\gamma \in \{1, \dots, n\}$ e sostituiamo $v := D_\gamma^{-r}(\zeta^2\, D_\gamma^r u)$ nell'equazione (7.79).
Usando l'identità

$$\int_\Omega u\, D_\gamma^{-r} v\, dx = -\int_\Omega v\, D_\gamma^r u\, dx,$$

e il fatto che il quoziente differenziale di una derivata è la derivata del quoziente differenziale (i.e. $D_\gamma^r\,(D_\alpha v) = D_\alpha\left(D_\gamma^r v\right)$), deduciamo

$$\int_\Omega D_\gamma^r F_{p_\alpha}(\nabla u(x))\, D_\alpha(\zeta^2\, D_\gamma^r u)\, dx = 0. \tag{7.89}$$

Ora

$$\begin{aligned} D_\gamma^r F_{p_\alpha}\,(\nabla u(x)) &= \frac{F_{p_\alpha}(\nabla u(x+re_\gamma)) - F_{p_\alpha}(\nabla u(x))}{r} \qquad (7.90)\\ =&\quad \frac{1}{r}\int_0^1 \frac{d}{d\,s} F_{p_\alpha}(s\nabla u(x+re_\gamma) + (1-s)\nabla u(x))\, ds\\ =&\quad \frac{1}{r}\int_0^1 \left[F_{p_\alpha p_\beta}(s\nabla u(x+re_\gamma) + (1-s)\nabla u(x))\right]\, ds\\ &\quad \cdot\left[D_\beta u(x+re_\gamma) - D_\beta u(x)\right]\\ =&\quad a_{\alpha\,\beta}^r(x)\, D_\gamma^r D_\beta u(x), \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$a_{\alpha\beta}^r(x) := \int_0^1 \left[F_{p_\alpha p_\beta}(s\nabla u(x+re_\gamma) + (1-s)\nabla u(x))\right]\, ds \tag{7.91}$$

$(\alpha, \beta = 1, \dots, n)$.
Sostituendo (7.90) in (7.89), e tenuto conto che
$D_\alpha(\zeta^2\, D_\gamma^r u) = \zeta^2\, D_\gamma^r\, D_\alpha u + 2\zeta\, D_\alpha\zeta\, D_\gamma^r u$, abbiamo

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 \quad :=& \quad \int_\Omega \zeta^2(x)\, a_{\alpha\,\beta}^r(x)\, D_\gamma^r\,(D_\beta u(x))\, D_\gamma^r\,(D_\alpha u(x))\; dx \qquad (7.92)\\ +& \quad \int_\Omega 2\zeta(x)\, a_{\alpha\beta}^r(x)\, D_\alpha\zeta(x) D_\gamma^r\,(D_\beta u(x))\, D_\gamma^r u(x)\, dx = 0. \end{aligned}$$

Per l'ipotesi (7.86) di uniforme convessità abbiamo

$$A_1 \geq \theta \int_\Omega \zeta^2(x)\left|D_\gamma^r \nabla u(x)\right|^2\, dx. \tag{7.93}$$

Inoltre per l'ipotesi (7.75) abbiamo, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} |A_2| \quad \leq& \quad \mathrm{c}\int_{\Omega''} \zeta(x)\left|D_\gamma^r \nabla u(x)\right| \cdot \left|D_\gamma^r u(x)\right|\, dx \qquad (7.94)\\ \leq& \quad \varepsilon\int_{\Omega''} \zeta^2(x)\,|D_\gamma^r \nabla u(x)|^2\, dx + \frac{\mathrm{c}}{\varepsilon}\int_{\Omega''} |D_\gamma^r u(x)|^2\, dx. \end{aligned}$$

Sia $\varepsilon = \dfrac{\theta}{4}$; allora da (7.93) e (7.94) abbiamo

$$\begin{aligned} &\theta\int_\Omega \zeta^2(x)\left|D_\gamma^r \nabla u(x)\right|^2\, dx - \frac{\theta}{4}\int_{\Omega''} \zeta^2(x)\left|D_\gamma^r \nabla u(x)\right|^2\, dx\\ &-\frac{4c}{\theta}\int_{\Omega''} |D_\gamma^r u(x)|^2\, dx \leq A_1 + A_2 = 0 \end{aligned}$$

per (7.92), e quindi

$$\int_{\Omega} \zeta^2(x) \left|D_\gamma^r \nabla u(x)\right|^2 \, dx \leq c \int_{\Omega''} \left|D_\gamma^r u(x)\right|^2 \, dx.$$

Poiché $\zeta \equiv 1$ su Ω'

$$\int_{\Omega'} \left|D_\gamma^r \nabla u(x)\right|^2 \, dx \leq c \int_{\Omega''} \left|D_\gamma^r u(x)\right|^2 \, dx \leq c \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx$$

per $\gamma = 1, \ldots, n$ e per ogni $|r| > 0$ sufficientemente piccolo (l'ultima disuguaglianza è valida per il teorema 7.3.4(i)).
Di conseguenza il teorema 7.3.4(ii) implica $\nabla u \in W^{1,2}(\Omega')$ e quindi $u \in W^{2,2}(\Omega')$ per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$; pertanto $u \in W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.
Sia $w \in C_0^\infty(\Omega)$, fissiamo $\gamma \in \{1, \ldots, n\}$ e poniamo $v = D_\gamma w$ in (7.79). Allora risulta

$$\int_{\Omega} F_{p_\alpha}(\nabla u(x)) D_\alpha D_\gamma w(x) \, dx = 0.$$

Poiché $u \in W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, possiamo integrare per parti e ottenere

$$\int_{\Omega} F_{p_\alpha\, p_\beta}(\nabla u(x)) D_\beta(D_\gamma u(x)) D_\alpha w(x) \, dx = 0. \tag{7.95}$$

Poniamo

$$\widetilde{u} := D_\gamma u, \tag{7.96}$$

$$A_{\alpha\,\beta} := F_{p_\alpha\, p_\beta}(\nabla u) \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n), \tag{7.97}$$

e fissiamo un aperto $\Omega' \subset\subset \Omega$.
Allora, per densità, da (7.95), (7.96) e (7.97) otteniamo

$$\int_{\Omega} A_{\alpha\,\beta}(x)\, D_\beta \widetilde{u}(x)\, D_\alpha w(x) \, dx = 0 \quad \text{per ogni } w \in W_0^{1,2}(\Omega'), \tag{7.98}$$

cioè $\widetilde{u} \in W^{1,2}(\Omega')$ è una soluzione debole dell'equazione <u>lineare</u>, ellittica del secondo ordine in forma di divergenza

$$D_\alpha(A_{\alpha\,\beta}(x)\, D_\beta \widetilde{u}(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega'. \tag{7.99}$$

□

7.4. Caso modello multidimensionale: integrale di Dirichlet e lemma di Caccioppoli-Weyl.

In questa sezione, sospendiamo lo studio della regolarità posto in 7.3 per illustrare il risultato classico relativo alla regolarità interna della soluzione debole del Principio di Dirichlet (cfr. osservazione 3.3.4).

Come già visto nell'osservazione 7.3.3, per l'integale di Dirichlet $D[u] := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx$, il minimo $u \in \mathcal{A}_\varphi$ soddisfa

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{7.100}$$

Proviamo che $u \in C^\infty(\Omega)$, e u soddisfa

$$\Delta u(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Sussiste il seguente risultato [2]

Teorema 7.4.1 (Lemma di Caccioppoli, 1937 [**12**]- Weyl, 1940 [**74**]).

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ t.c.

$$\int_\Omega u(x)\Delta v(x) \, dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega) \tag{7.101}$$

Allora u è (equivalente ad una funzione) armonica in Ω e $u \in C^\infty(\Omega)$.

Osservazione 7.4.2. Una soluzione della (7.100) soddisfa (7.101).

Dim. [del teorema 7.4.1 nell'ipotesi che $u \in L^1(\Omega)$] Consideriamo la regolarizzata di u di parametro $h \in \mathbb{N}$

$$u_h(x) = h^n \int_\Omega \rho\,(h\,|x-y|)\, u(y) \, dy.$$

Fissata $v \in C_0^\infty(\Omega)$, scegliamo h sufficientemente grande da verificare dist $(\mathrm{supp} v, \partial\Omega) > \frac{1}{h}$. Risulta:

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_h(x)\Delta v(x) \, dx &= \int_\Omega \left[h^n \int_\Omega \rho\,(h\,|x-y|)\, u(y) \, dy\right] \Delta v(x) \, dx \\ &= \int_\Omega u(y)\Delta v_h(y) \, dy\end{aligned} \tag{7.102}$$

per il teorema di Fubini 1.1.12 ($v_h(y) = h^n \int_\Omega \rho\,(h\,|x-y|)\, v(x) \, dx$).
Applicando l'ipotesi (7.101) a $v_h \in C_0^\infty(\Omega)$ (per la scelta fatta su h):

$$\int_\Omega u_h(x)\Delta v(x) \, dx = 0. \tag{7.103}$$

Allora $u_h \in C^\infty(\Omega_h)$, $\Omega_h := \left\{x \in \Omega | \text{dist}\,(x, \partial\Omega) > \frac{1}{h}\right\}$ e pertanto da (7.103) risulta:

$$\Delta u_h = 0 \text{ in } \Omega_h.$$

[2]Nel lavoro [**12**] del 1937 è dimostrato per la prima volta (cfr. [**56**] pag. 122) il teorema sull'armonicità delle funzioni ortogonali a tutti i laplaciani.

Inoltre

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_h} |u_h(y)|\, dy &\leq \int_{\Omega_h} \left[h^n \int_{\Omega} \rho\left(h\,|x-y|\right)|u(x)|\, dx\right] dy \\ &\leq \int_{\Omega} |u(x)|\, dx < \infty\end{aligned}$$

per il teorema di Fubini 1.1.12, usando

$$h^n \int_{\Omega} \rho\left(h\,|x-y|\right)\, dy = 1$$

e ricordando che $u \in L^1(\Omega)$. Quindi, $\{u_h\}$ è uniformemente limitata in L^1. In quanto armoniche le u_h soddisfano la proprietà di uguaglianza del valor medio. Inoltre, poiché la $\{u_h\}$ è limitata in L^1, da

$$u_h(x^0) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x^0)} u_h(x)\, dx$$

ricaviamo che $u_h(x^0)$ è limitata per R fissato tale che $B_R(x^0) \subset \Omega_h$. Pertanto $\{u_h\}$ è uniformemente limitata in Ω_{h_0} per $h \geq 2h_0$. Inoltre, dalla proprietà del valor medio 1.7.3 segue direttamente che, se $B_R(x'), B_R(x'') \subset \Omega_{h_0}$:

$$\begin{aligned}|u_h(x') - u_h(x'')| &\leq c(R) \int_{\{B_R(x')\setminus B_R(x'')\}\cup\{B_R(x'')\setminus B_R(x')\}} |u_h(x)|\, dx. \\ &\leq c(R)\,|x'-x''|\end{aligned}$$

Pertanto $\{\nabla u_h\}$ è uniformemente limitata in Ω_{h_0}; e, analogamente, tutte le derivate di ogni ordine delle u_h, in quanto funzioni armoniche, sono uniformemente limitate in Ω_{h_0} (basta ripetere lo stesso procedimento usato per le u_h). Pertanto, per $h \to +\infty$, un'estratta di $\{u_h\}$ converge, con le sue derivate, ad una funzione $w \in C^\infty(\Omega)$. E, in quanto limite uniforme di funzioni armoniche, anche w è armonica. Ma $\{u_h\}$ converge a u in $L^1(\Omega)$, perciò $u = w$ q.o., cioè $u \in C^\infty(\Omega)$ ed è armonica in Ω. □

Osservazione 7.4.3. Nella dimostrazione si è usato il fatto che Δ commuta con le regolarizzate, in altri termini che l'operatore di Laplace è invariante per rotazioni (è questa la ragione per cui si sceglie ρ radiale). Proprio per questo, però, la dimostrazione precedente non può essere estesa ad altri problemi variazionali.

Più in generale, si prova che *se u è una distribuzione verificante $\Delta u = 0$ in Ω, allora $u \in C^\infty(\Omega)$* (cfr. [**65**], pag. 216).
Diamo ora una seconda dimostrazione del teorema 7.4.1, basata essenzialmente sulla proprietà del valor medio.

Dim. Sia $x^0 \in \Omega$ e sia $R > 0$ tale che

$$\overline{B_R}\left(x^0\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|x - x^0\right| \leq R\right\} \subset \Omega.$$

Proviamo che se

$$\overline{u}(x^0) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x^0)} u(\xi)\ d\mathcal{H}^{n-1}(\xi), \tag{7.104}$$

allora $\overline{u}$ è indipendente da R, $\overline{u} \in C^0(\Omega)$ e $\overline{u} = u$ q.o. in Ω.
Ne seguirà che $\overline{u}(x^0) = \dfrac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \displaystyle\int_{\partial B_R(x^0)} \overline{u}(\xi)\ d\mathcal{H}^{n-1}(\xi)$ con $\overline{u} \in C^0(\Omega)$ e quindi, per il teorema 1.7.15, $\Delta\overline{u} = 0$ in Ω e dunque $\overline{u} \in C^\infty(\Omega)$, da cui la tesi.
Scegliamo opportunamente la funzione v in (7.100).
Assumiamo la (7.104) e sia $\varepsilon \in (0, R)$ e $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ con supp$\varphi \subset (\varepsilon, R)$. Definiamo

$$v(x) = \varphi\left(\left|x - x^0\right|\right)$$

e osserviamo che $v \in C_0^\infty\left(B_R\left(x^0\right)\right)$. Allora, posto $r = \left|x - x^0\right|$, si ha (cfr. proposizione 1.7.2)

$$\Delta v = \varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\varphi'(r) = r^{1-n}\frac{d}{dr}\left[r^{n-1}\varphi'(r)\right].$$

Assumiamo $n \geq 2$ (il caso $n = 1$ è semplice).
Poniamo

$$\psi(r) := \frac{d}{dr}\left[r^{n-1}\varphi'(r)\right]. \tag{7.105}$$

Osserviamo che $\psi \in C_0^\infty((\varepsilon, R))$ e

$$\int_\varepsilon^R \psi(r)\ dr = 0 \tag{7.106}$$

1. Sia ψ un'arbitraria funzione di classe $C_0^\infty((\varepsilon, R))$ per cui valga (7.106). Definiamo φ e v come sopra e usiamo questa v in (7.100). Poiché $v \equiv 0$ in $\Omega \setminus B_R\left(x^0\right)$, abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega u(x)\Delta v(x)\,dx = \int_{B_R(x^0)} u(x)\Delta v(x)\,dx \\ &= \int_\varepsilon^R \psi(r)\,r^{1-n}\left(\int_{\partial B_r(x^0)} u(\xi)\ d\mathcal{H}^{n-1}(\xi)\right) dr \\ &= \int_\varepsilon^R \psi(r)\,w(r)\ dr \end{aligned}$$

   dove abbiamo posto

$$w(r) = r^{1-n}\int_{\partial B_r(x^0)} u(\xi)\ d\mathcal{H}^{n-1}(\xi).$$

   Dal corollario 1.2.10 segue che

$$w(r) = c \qquad \text{per q.o. } r \in (\varepsilon, R).$$

Poniamo $c = n\omega_n \overline{u}\left(x^0\right)$; per l'arbitrarietà di ε:

$$w(r) = n\omega_n \overline{u}\left(x^0\right) \qquad \text{per q.o. } r \in (0, R). \tag{7.107}$$

2. Osserviamo che (7.107) altro non è che (7.104), con $\overline{u}$ indipendente da R. Integrando ora (7.104):

$$\overline{u}\left(x^0\right) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x^0)} u(x)\, dx. \tag{7.108}$$

Da (7.108) segue che $\overline{u} \in C^0(\Omega)$. Infatti, siano $x', x'' \in \Omega$ e sia R sufficientemente piccolo tale che $\overline{B}_R(x') \cup \overline{B}_R(x'') \subset \Omega$, risulta

$$\begin{aligned} |\overline{u}(x') - \overline{u}(x'')| &= \frac{1}{\omega_n R^n} \left| \int_{B_R(x')} u(x)\, dx - \int_{B_R(x'')} u(x)\, dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{\{B_R(x') \setminus B_R(x'')\} \cup \{B_R(x'') \setminus B_R(x')\}} |u(x)|\, dx. \end{aligned}$$

Poiché $u \in L^1(B_R(x') \cup B_R(x''))$, per l'assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue per funzioni sommabili, $\overline{u}$ è continua.

3. Rimane da provare che $\overline{u} = u$ q.o. in Ω. Questo segue dal teorema di differenziazione di Lebesgue 1.1.13 e dal fatto che $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (basta far tendere R a 0^+ in (7.108)).

□

Osservazione 7.4.4. E' evidente che del teorema 7.4.1 possiamo dare anche un'altra dimostrazione che usa i rapporti incrementali introdotti da Nirenberg.

Proviamo ora un risultato di maggiore regolarità interna: u è analitica reale.

Teorema 7.4.5. *Sia u armonica e limitata in Ω. Allora u è analitica reale in Ω.*

Dim. Fissato $x^0 \in \Omega$, consideriamo $R > 0$ t.c.

$$(ne^{2n+1} + 1)R < \min\left\{\text{dist}\,(x^0, \partial\Omega); 1\right\}.$$

Lo sviluppo di Taylor di u di centro x^0 in $B_R(x^0)$ è:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \forall x \in B_R(x^0)$$

$$u(x) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq k} \frac{D^{\boldsymbol{\alpha}} u(x^0)}{\boldsymbol{\alpha}!}(x - x^0)^{\boldsymbol{\alpha}} + \sum_{|\boldsymbol{\beta}| = k+1} \frac{D^{\boldsymbol{\beta}} u(y)}{\boldsymbol{\beta}!}(x - x^0)^{\boldsymbol{\beta}}, \tag{7.109}$$

dove $y \in B_R(x^0)$.

Applicando (1.16) alla palla di centro y e raggio $ne^{2n+1}R$ e la disuguaglianza

$$|\boldsymbol{\beta}|! \leq e^{n|\boldsymbol{\beta}|}\boldsymbol{\beta}! \quad {}^{3}, \tag{7.109}$$

abbiamo:

$$\frac{\left|D^{\boldsymbol{\beta}}u(y)\right|}{\boldsymbol{\beta}!}\left|(x-x^0)^{\boldsymbol{\beta}}\right| \leq e^{n|\boldsymbol{\beta}|}\left(\frac{ne}{ne^{2n+1}R}\right)^{|\boldsymbol{\beta}|}R^{|\boldsymbol{\beta}|}\sup_{\Omega}|u| = e^{-n|\boldsymbol{\beta}|}\sup_{\Omega}|u|\,.$$

Poiché $\sup_{\Omega}|u| \leq M$, abbiamo:

$$\left|\sum_{|\boldsymbol{\beta}|=k+1}\frac{D^{\boldsymbol{\beta}}u(y)}{\boldsymbol{\beta}!}(x-x^0)^{\boldsymbol{\beta}}\right| \leq M\sum_{|\boldsymbol{\beta}|=k+1}e^{-n|\boldsymbol{\beta}|} \leq M\left(|\boldsymbol{\beta}|+1\right)^n e^{-n|\boldsymbol{\beta}|}.$$

Per $|\boldsymbol{\beta}| \to +\infty$, otteniamo la tesi. □

Osservazione 7.4.6. In virtù di questo risultato la soluzione debole $u \in \mathcal{A}_{\varphi}$ del Principio di Dirichlet è analitica in Ω (regolarità interna). Per quanto concerne la condizione al contorno, questa è stata acquisita nella forma implicita $u-\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Sotto opportune ipotesi di regolarità per Ω e φ si ha $u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ e $u=\varphi$ su $\partial\Omega$ (regolarità fino alla frontiera).

[3]Sia $\boldsymbol{\beta}$ un multi indice n-dimensionale. Vale:

$$|\boldsymbol{\beta}|! \leq e^{n|\boldsymbol{\beta}|}\boldsymbol{\beta}!.$$

Dim. Siano $x_i \in \mathbb{R}$, per $i=1,\dots,n$ e sia $k \in \mathbb{N}$. Se $\boldsymbol{\beta}$ denota un multi-indice n-dimensionale di lunghezza k, dalla versione di Leibniz della formula di Newton, abbiamo:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^k = \sum_{|\boldsymbol{\beta}|=k}\frac{k!}{\boldsymbol{\beta}!}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\beta_i}.$$

Considerando $x_i=1$, per $i=1,\dots,n$:

$$n^{|\boldsymbol{\beta}|} = \sum_{|\boldsymbol{\beta}|=k}\frac{|\boldsymbol{\beta}|!}{\boldsymbol{\beta}!} \Rightarrow \frac{|\boldsymbol{\beta}|!}{\boldsymbol{\beta}!} \leq \sum_{|\boldsymbol{\beta}|=k}\frac{|\boldsymbol{\beta}|!}{\boldsymbol{\beta}!} = n^{|\boldsymbol{\beta}|} \Rightarrow |\boldsymbol{\beta}|! \leq n^{|\boldsymbol{\beta}|}\boldsymbol{\beta}! \leq e^{n|\boldsymbol{\beta}|}\boldsymbol{\beta}!.$$

□

7.5. Regolarità ellittica: teoremi di Schauder e di De Giorgi-Nash-Moser. Il caso dei funzionali quadratici.

Riprendiamo ora il problema della regolarità, posto in 7.3, per un minimo debole di funzionali più generali (rispetto all'integrale di Dirichlet)

$$\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(\nabla u(x))\, dx \quad \text{con } F = F(p) \text{ quadratica in } p.$$

La maggiore regolarità di un minimo debole di $\mathcal{F}[\cdot]$ è conseguenza della teoria della regolarità delle equazioni lineari ellittiche.
Infatti, fondamentale per la regolarità delle soluzioni deboli dell'equazione di Eulero quasilineare (7.78)

$$D_\alpha F_{p_\alpha}(\nabla u(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega \qquad\qquad (Eq - quasilineare)$$

(dove i coefficienti dipendono dalla soluzione), è lo studio della differenziabilità delle soluzioni deboli dell'equazione lineare

$$D_\alpha (A_{\alpha\beta}(x) D_\beta u(x)) = 0. \quad \text{in } \Omega \qquad\qquad (Eq - lineare)$$

Vi sono due tipi di risultati di REGOLARITÀ ELLITTICA PER LA (EQ-LINEARE).
Il primo (basato su un metodo perturbativo) assume regolarità σ-hölderiana per i coefficienti $A_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}(x)$. Sotto tale ipotesi si confrontano le soluzioni della (Eq-lineare) con le funzioni armoniche. La regolarità delle soluzioni dipende da quanto "vicine" esse sono alle funzioni armoniche.
Sussiste il seguente teorema classico (cfr. [**64**] [**35**] [**34**] [**31**]):

TEOREMA 7.5.1 (IL CASO DEI COEFFICIENTI HÖLDERIANI, SCHAUDER, 1934 [**64**]).
Sia $u \in W^{1,2}(\Omega)$ una soluzione debole dell'equazione differenziale lineare alle derivate parziali del secondo ordine in forma di divergenza

$$D_\alpha(A_{\alpha\beta}(x) D_\beta u(x)) = 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{7.110}$$

(ossia $\int_\Omega A_{\alpha\beta}(x) D_\beta u(x) D_\alpha v(x)\, dx = 0\ \forall v \in C^1_0(\Omega)$),
dove $(A_{\alpha\beta}(x))_{\alpha,\beta=1,\dots,n}$ è una matrice simmetrica a coefficienti $A_{\alpha\beta}(x) \in C^{k,\sigma}_{loc}(\Omega)$ tale che

$$\lambda|\xi|^2 \le A_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\,\xi_\beta \le \Lambda|\xi|^2 \quad \text{per q.o. } x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \tag{7.111}$$

con Λ, λ costanti positive.
Allora $u \in C^{k+1,\sigma}_{loc}(\Omega)$ $(0 < \sigma < 1)$.

Nel secondo tipo (basato su un metodo iterativo introdotto da De Giorgi) la regolarità relativa alla (Eq-lineare) è dimostrata assumendo i coefficienti $A_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}(x)$ discontinui (misurabili e limitati).
La dimostrazione è basata su uno studio fine, al crescere del valore k , degli

insiemi di sopra-livello della soluzione $u \in W^{1,2}(\Omega)$ di cui si vuole provare la regolarità, e cioè (fissato un punto $x^0 \in \Omega$) sullo studio degli insiemi

$$A(k,r) := B_r\left(x^0\right) \cap \{x \in \Omega : \ u(x) > k\}$$

per ogni livello k.
Osserviamo che:

$$|A(k,r)| = \left|B_r\left(x^0\right)\right| - |\{x \in \Omega : \ u(x) < k\}| \quad \text{per q.o. } k.$$

Proviamo dapprima la LOCALE LIMITATEZZA delle soluzioni di (7.110), punto nodale della successiva dimostrazione della regolarità.

LEMMA 7.5.2 (DISUGUAGLIANZA DI TIPO CACCIOPPOLI).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ aperto limitato e sia $N = 1$. Sia $u \in W^{1,2}(\Omega)$ una soluzione debole *dell'equazione* (7.110) *dove $(A_{\alpha\beta}(x))_{\alpha,\beta=1,\dots,n}$ è una matrice simmetrica a coefficienti $A_{\alpha\beta}(x) \in L^\infty(\Omega)$ verificante la condizione (7.111).*
Allora, esiste un costante $c = c(n, \lambda, \Lambda) > 0$ tale che

$$\int_{B_r(x^0)} \left|\nabla (u-k)^+\right|^2 dx \leq \frac{c}{(R-r)^2} \int_{B_R(x^0)} \left|(u-k)^+\right|^2 dx \qquad (7.112)$$

per ogni $k \in \mathbb{R}$, $0 < r < R < +\infty$ e $B_R(x^0) \subset \Omega$, quindi

$$\int_{A(k,r)} |\nabla u(x)|^2 \, dx \leq \frac{c}{(R-r)^2} \int_{A(k,R)} |u(x) - k|^2 \, dx. \qquad (7.113)$$

DIM. Fissato $x^0 \in \Omega$, sia $\eta \in C^\infty(\Omega)$, con

$$\begin{cases} \eta \equiv 1 & \text{in } B_r\left(x^0\right) \\ \eta \equiv 0 & \text{in } \Omega \setminus B_R\left(x^0\right) \\ 0 \leq \eta \leq 1 & \text{in } B_R\left(x^0\right) \setminus B_r\left(x^0\right), \end{cases}$$

$|\nabla \eta| \leq c(R-r)^{-1}$, consideriamo in (7.110) la funzione test $v := w\eta^2$ dove $w := (u-k)^+$.
Osserviamo che

$$\begin{array}{llll} w = u - k, & \nabla w = \nabla u & \text{q.o. in } \{u > k\} & \text{e} \\ w \equiv 0, & \nabla w = 0 & \text{q.o. in } \{u \leq k\}. & \end{array}$$

Allora da (7.110) risulta:

$$\int_\Omega A_{\alpha\beta}\eta^2 D_\beta u D_\alpha w \, dx = -2 \int_\Omega A_{\alpha\beta}\eta w D_\beta u D_\alpha \eta \, dx.$$

Da quest' ultima relazione, dalla limitazione inferiore in (7.111), applicando la disuguaglianza di Young abbiamo, per ogni $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}\lambda \int_\Omega \left[|\nabla w|^2 \eta^2\right] dx &\leq c \|A_{\alpha\beta}\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega [\eta w |\nabla u| |\nabla \eta|] \, dx \\ &\leq c \|A_{\alpha\beta}\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \left[\varepsilon^2 |\nabla w|^2 \eta^2 + \varepsilon^{-2} w^2 |\nabla \eta|^2\right] dx.\end{aligned}$$

Scelto opportunamente ε, otteniamo la tesi. □

Teorema 7.5.3 (locale limitatezza).
Se u soddisfa (7.112), allora, fissato $x^0 \in \Omega$, risulta

$$\sup_{B_{R/2}(x^0)} u \leq k_0 + c \left(\frac{1}{R^n} \int_{A(k_0,R)} |u - k_0|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{|A(k_0, R)|}{R^n}\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \tag{7.114}$$

dove σ è la soluzione positiva dell'equazione $2\sigma^2 - n(\sigma + 1) = 0$,

$$A(k_0, R) := B_R(x^0) \cap \{x \in \Omega : \ u(x) > k_0\}$$

e

$$c = c(n, \lambda, \Lambda) > 0.$$

Dim. Siano $0 < r < R$ e poniamo $\overline{r} = \dfrac{r + R}{2}$.
Fissato $x^0 \in \Omega$, sia $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, tale che

$$\begin{cases} \eta \equiv 1 & \text{in } B_{\overline{r}}(x^0) \\ \eta \equiv 0 & \text{in } \Omega \setminus B_R(x^0) \\ 0 \leq \eta \leq 1 & \text{in } B_R(x^0) \setminus B_{\overline{r}}(x^0) \end{cases}$$

e $|\nabla \eta| \leq c(R - r)^{-1}$; allora, posto $w := (u - k)^+$, per il corollario 1.3.10, abbiamo:

$$\int_{B_{\overline{r}}(x^0)} |\eta w|^2 \, dx \leq c \left(\int_{B_{\overline{r}}(x^0)} |\nabla(\eta w)|^{\frac{2n}{n+2}} \, dx\right)^{\frac{n+2}{n}}, \tag{7.115}$$

mentre per la disuguaglianza di Hölder risulta [4]

$$\left(\int_{B_{\overline{r}}(x^0)} |\nabla(\eta w)|^{\frac{2n}{n+2}} \, dx\right)^{\frac{n+2}{n}} \leq |A(k, R)|^{\frac{2}{n}} \int_{B_{\overline{r}}(x^0)} |\nabla(\eta w)|^2 \, dx \tag{7.117}$$

[4] De Giorgi consegue questa disuguaglianza

$$\int_{A(k,r)} |u(x) - k|^2 \, dx \leq c \, |A(k, r)|^{\frac{2}{n}} \cdot \int_{A(k,r)} |\nabla u(x)|^2 \, dx \tag{7.116}$$

ricorrendo alle sue tecniche introdotte per lo studio della misura $(n-1)$-dimensionale in $\mathbb{R}^n$ (disuguaglianze isoperimetriche) [**19**] [**20**].

inoltre per l'ipotesi

$$
\begin{aligned}
\int_{B_{\overline{r}}(x^0)} |\nabla(\eta w)|^2 \, dx &\leq 2\left[\int_{B_{\overline{r}}(x^0)} |\nabla w|^2 \eta^2 \, dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{B_{\overline{r}}(x^0)} |w|^2 |\nabla \eta|^2 \, dx\right] \\
&\overset{(7.112)}{\leq} \frac{c}{(R-r)^2} \int_{B_R(x^0)} |w|^2 \, dx.
\end{aligned}
$$

Ne segue che

$$
\int_{A(k,r)} |u(x)-k|^2 \, dx \leq \frac{c\,|A(k,R)|^{\frac{2}{n}}}{(R-r)^2} \int_{A(k,R)} |u(x)-k|^2 \, dx \tag{7.118}
$$

Proviamo che, fissato k_0, esiste $d>0$ tale che
o $\displaystyle\int_{A(k_0+d,R/2)} |u(x)-k_0|^2 \, dx = 0$ o $|A(k_0+d,R/2)| = 0.$
Posto

$$
a(h,r) := |A(h,r)|, \tag{7.119}
$$

$$
u(h,r) := \int_{A(h,r)} |u(x)-h|^2 \, dx, \tag{7.120}
$$

e osservato che per $h>k$ abbiamo $A(h,r) \subset A(k,r)$, quindi $a(h,r) \leq a(k,r)$ e $u(h,r) \leq u(k,r)$, dalla (7.118) abbiamo

$$
u(h,r) \leq u(k,r) \leq \frac{c}{(R-r)^2} u(k,R) \left[a(k,R)\right]^{\frac{2}{n}}
$$

dove $h>k$; inoltre, da (7.119) e (7.120), essendo

$$
a(h,r) = \left|B_r\left(x^0\right) \cap \{u-k > h-k\}\right|,
$$

applicando la disuguaglianza di Chebyshev 1.2.2, otteniamo

$$
a(h,r) \leq \frac{1}{(h-k)^2} u(k,R),
$$

pertanto per $\sigma > 0$

$$
[u(h,r)]^\sigma a(h,r) \leq \frac{c^\sigma}{(R-r)^{2\sigma}} \frac{1}{(h-k)^2} [u(k,R)]^{\sigma+1} [a(k,R)]^{\frac{2\sigma}{n}}.
$$

Posto

$$
\Phi(h,r) := [u(h,r)]^\sigma a(h,r), \tag{7.121}
$$

e scelto per σ la soluzione positiva dell'equazione $2\sigma^2 - n(\sigma+1) = 0$ risulta [5]

$$\Phi(h,r) \leq \frac{c^\sigma}{(R-r)^{2\sigma}(h-k)^2}\left[\Phi(k,R)\right]^{1+\frac{1}{\sigma}}. \tag{7.122}$$

A questo punto si innesca il *procedimento iterativo.*
Partendo da una coppia (k_0, R), siano ora

$$\begin{aligned}
&r_j := \left(1+2^{-j}\right)R/2 \qquad (\{r_j\} \text{ decrescente}),\\
&k_j := k_0 + d - 2^{-j}d = k_0 + (1-2^{-j})d \qquad (\{k_j\} \text{ crescente})\\
&\Phi_j := \Phi(k_j, r_j),
\end{aligned}$$

dove

$$d^2 := \frac{2^{2(1+\sigma)^2}c^\sigma}{(R/2)^{2\sigma}}\left[\Phi(k_0,R)\right]^{\frac{1}{\sigma}}. \tag{7.123}$$

Allora, applicando (7.122) con $(h,r) = (k_j, r_j)$ e $(k,R) = (k_{j-1}, r_{j-1})$, si ha:

$$\begin{aligned}
\Phi_j &\leq \frac{c^\sigma}{\left[2^{-j-1}R\right]^{2\sigma}\left[2^{-j}d\right]^2}\Phi_{j-1}^{1+\frac{1}{\sigma}}\\
&\overset{\text{per } (7.123)}{=} 2^{\frac{\gamma}{\sigma}(j-1-\sigma)}\left[\Phi(k_0,R)\right]^{-\frac{1}{\sigma}}\Phi_{j-1}^{1+\frac{1}{\sigma}} \qquad \text{dove } \gamma = 2\sigma(\sigma+1).
\end{aligned}$$

Per induzione:

$$\Phi_j \leq 2^{-\gamma j}\Phi(k_0,R). \tag{7.124}$$

Infatti:
se $j=1$ abbiamo immediatamente

$$\Phi_1 \leq 2^{-\gamma}\Phi(k_0,R);$$

Supponiamo la tesi vera per $j-1$, allora

$$\begin{aligned}
\Phi_j &\leq 2^{\frac{\gamma}{\sigma}(j-1-\sigma)}\left[\Phi(k_0,R)\right]^{-\frac{1}{\sigma}}\Phi_{j-1}^{1+\frac{1}{\sigma}}\\
&\leq 2^{\frac{\gamma}{\sigma}(j-1-\sigma)}\left[\Phi(k_0,R)\right]^{-\frac{1}{\sigma}}\left[2^{-\gamma(j-1)}\Phi(k_0,R)\right]^{1+\frac{1}{\sigma}}\\
&= 2^{-\gamma j}\Phi(k_0,R).
\end{aligned}$$

Per $j \to +\infty$ da (7.124) e (7.121) risulta:

$$0 = \Phi_\infty(k_0+d, R/2) = \left[u(k_0+d, R/2)\right]^\sigma a(k_0+d, R/2).$$

Ne segue che o $u(k_0+d, R/2) = 0$ o $a(k_0+d, R/2) = 0$.
Così

$$u(x) \leq k_0 + d \qquad \text{q.o. su } B_{R/2}\left(x^0\right)$$

e quindi

$$\sup_{B_{R/2}(x^0)} u \leq k_0 + d.$$

[5] A pag.45 in [**13**], L. Caffarelli scrive che si crea un "effetto non lineare" che favorisce la convergenza del processo iterativo (citazione da [**67**]).

e da (7.123) otteniamo la tesi. □

OSSERVAZIONE 7.5.4. Ripetendo lo stesso procedimento per la funzione $-u$, che pure verifica la (7.113), si dimostra anche la limitazione dal basso per la u e in definitiva la locale (essenziale) limitatezza di u.

Proviamo ora la REGOLARITÀ HÖLDERIANA delle soluzioni di (7.110). Valutiamo dapprima la misura dell'insieme $A(k,R)$, quando k è vicino al sup della u.

LEMMA 7.5.5. *Supponiamo che u soddisfi* (7.112) *per ogni k e, fissato $x^0 \in \Omega$, poniamo*

$$M(R) := \sup_{B_R(x^0)} u \qquad e \qquad m(R) := \inf_{B_R(x^0)} u.$$

Se $|A(k_0,R)| \leq \frac{1}{2}\left|B_R(x^0)\right|$ *dove* $k_0 := \frac{1}{2}[M(2R)+m(2R)]$, *allora per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta = \delta(\varepsilon, n, \lambda, \Lambda) > 0$ *tale che*

$$|A(k_\delta, R)| \leq \varepsilon \left|B_{2R}(x^0)\right|, \quad dove\ k_\delta = M(2R) - \delta[M(2R) - m(2R)].$$

DIM. Per $h > k > k_0$ poniamo

$$v(x) := \begin{cases} h-k & \text{se } u(x) \geq h \\ u(x)-k & \text{se } k < u(x) < h \\ 0 & \text{se } u(x) \leq k. \end{cases}$$

Allora

$$\left|B_R(x^0) \cap \{v=0\}\right| = |\{u<k\}| \geq |\{u<k_0\}| \geq \frac{1}{2}\left|B_R(x^0)\right|.$$

Per la disuguaglianza di Poincaré-Sobolev 1.3.9 risulta

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_R(x^0)} [v(x)]^{\frac{n}{n-1}}\, dx\right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq c\int_{B_R(x^0)} |\nabla v(x)|\, dx \\ &= c\int_{A(k,R)\setminus A(h,R)} |\nabla u(x)|\, dx. \end{aligned}$$

Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} \left(\int_{A(h,R)} [v(x)]^{\frac{n}{n-1}}\, dx\right)^{\frac{n-1}{n}} &= (h-k)\,|A(h,R)|^{\frac{n-1}{n}} \\ &\leq \left(\int_{B_R(x^0)} [v(x)]^{\frac{n}{n-1}}\, dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &\overset{\text{(Hölder)}}{\leq} c\,|A(k,R)\setminus A(h,R)|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{A(k,R)} |\nabla u(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

da cui, per l'ipotesi (7.112), abbiamo

$$\begin{aligned}(h-k)^2\,|A(h,R)|^{\frac{2n-2}{n}} &\leq c\,|A(k,R)\setminus A(h,R)|\int_{A(k,R)\setminus A(h,R)}|\nabla u(x)|^2\,dx\\ &\overset{(7.112)}{\leq} c\,|A(k,R)\setminus A(h,R)|\,R^{-2}\int_{A(k,2R)}|u(x)-k|^2\,dx\\ &\leq c\,|A(k,R)\setminus A(h,R)|\,R^{n-2}\,[M(2R)-k]^2\,.\end{aligned}$$

Scrivendo la relazione precedente per i livelli $h=k_i:=M(2R)-2^{-i}[M(2R)-k_0]$ e $k=k_{i-1}$ $(k_i>k_{i-1})$, e osservato che

$$\begin{aligned}&k_i-k_{i-1}=2^{-i}[M(2R)-k_0]\\ &M(2R)-k_{i-1}=2^{-i+1}[M(2R)-k_0]\,,\end{aligned}$$

otteniamo

$$\left(2^{-i}\right)^2[M(2R)-k_0]^2\,|A(k_i,R)|^{\frac{2n-2}{n}}\leq c\,[|A(k_{i-1},R)|-|A(k_i,R)|]\,R^{n-2}\,[M(2R)-k_{i-1}]^2\,,$$

da cui

$$|A(k_l,R)|^{\frac{2n-2}{n}}\leq|A(k_i,R)|^{\frac{2n-2}{n}}\leq 4cR^{n-2}\,[|A(k_{i-1},R)|-|A(k_i,R)|]$$

per $i=1,2,\ldots,l$. Sommando su i da 1 a l, otteniamo

$$\begin{aligned}l\,|A(k_l,R)|^{\frac{2n-2}{n}} &\leq 4cR^{n-2}\,[|A(k_0,R)|-|A(k_l,R)|]\\ &\leq 4cR^{n-2}\,|A(k_0,R)|\\ &\leq 4c\left|B_R\left(x^0\right)\right|^{\frac{2n-2}{n}}\leq c\left|B_{2R}(x^0)\right|^{\frac{2n-2}{n}}\,;\end{aligned}$$

ne segue che

$$|A(k_l,R)|\leq\frac{c}{l^{\frac{n}{2n-2}}}\left|B_{2R}(x^0)\right|.$$

Fissato $\varepsilon>0$, scegliamo l il più piccolo intero positivo maggiore di $\left(\dfrac{\varepsilon}{c}\right)^{\frac{2-2n}{n}}$ e poniamo $\delta=2^{-l-1}$, allora

$$|A(k_\delta,R)|=|A(k_l,R)|\leq\varepsilon\left|B_{2R}\left(x^0\right)\right|$$

dove $k_\delta:=k_l=M(2R)-\delta[M(2R)-m(2R)]$. $\square$

Siamo ora in grado di provare il seguente teorema fondamentale

Teorema 7.5.6 (di regolarità hölderiana, De Giorgi, 1957 [**21**] [**22**] [**25**]). [6]

---

[6] Poco tempo dopo l'articolo di De Giorgi, è pubblicato in [**62**] il seguente Teorema di Nash, 1958.
Ogni soluzione debole, limitata dell' equazione parabolica

$$D_t u(x,t)=D_\alpha\left(A_{\alpha\beta}(x,t)D_\beta u(x,t)\right) \tag{7.125}$$

con coefficienti uniformemente ellittici, è hölderiana in (x,t).

La dimostrazione si basa su tecniche diverse da quelle introdotte da De Giorgi.
Se i coefficienti $A_{\alpha\beta}$ non dipendono dal tempo t, fra le soluzioni dell'equazione (7.125)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ aperto limitato e sia $N = 1$. Sia $u \in W^{1,2}(\Omega)$ una soluzione debole *dell'equazione* (7.110) *dove $(A_{\alpha\beta}(x))_{\alpha,\beta=1,\dots,n}$ è una matrice simmetrica a coefficienti $A_{\alpha\beta}(x) \in L^\infty(\Omega)$ verificante la condizione (7.111).*
Allora $u \in C^{0,\sigma}_{loc}(\Omega)$ $(0 < \sigma = \sigma(n, \lambda, \Lambda) < 1)$.

Dim. Sia $k_0 := \frac{1}{2}[M(2R) + m(2R)]$. Possiamo assumere, senza perdita di generalità, che sia

$$|A(k_0, R)| \leq \frac{1}{2}\left|B_R\left(x^0\right)\right|,$$

perché in caso contrario risulterà

$$\left|\left\{x \in B_R\left(x^0\right): \ u(x) < k_0\right\}\right| = \left|B_R\left(x^0\right)\right| - |A(k_0, R)| \leq \frac{1}{2}\left|B_R\left(x^0\right)\right|$$

e basterà scrivere $-u$ al posto di u.
Fissiamo $\varepsilon > 0$ e applichiamo il teorema 7.5.3 con k_δ al posto di k_0, dove k_δ è come nel lemma 7.5.5:

$$\begin{aligned}
\sup_{B_{R/2}(x^0)} u =: M(R/2) &\leq k_\delta + c\left(R^{-n}\int_{A(k_\delta,R)} |u - k_\delta|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{|A(k_\delta, R)|}{R^n}\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \\
&\leq k_\delta + c\,[M(2R) - k_\delta]\left(\frac{|A(k_\delta, R)|}{R^n}\right)^{\frac{\sigma+1}{2\sigma}} \\
&\leq k_\delta + \frac{1}{2}[M(2R) - k_\delta]
\end{aligned}$$

scelto $\delta > 0$ sufficientemente piccolo in modo che risulti

$$c\left(\frac{|A(k_\delta, R)|}{R^n}\right)^{\frac{\sigma+1}{2\sigma}} < \frac{1}{2}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
M(R/2) &\leq k_\delta + \frac{1}{2}[M(2R) - k_\delta] = M(2R) - \frac{\delta}{2}[M(2R) - m(2R)] \\
&= m(2R) + \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)[M(2R) - m(2R)].
\end{aligned}$$

Allora, posto $\omega(t) := \mathrm{osc}_{B_t(x^0)} u = \sup\limits_{B_t(x^0)} u - \inf\limits_{B_t(x^0)} u$ (oscillazione di u su $B_t\left(x^0\right)$) e posto $\gamma := 1 - \frac{\delta}{2}$, l'oscillazione di u soddisfa

$$\omega(R/2) \leq M(R/2) - m(2R) \leq \gamma\, \omega(2R).$$

---

vi sono in particolare quelle *stazionarie*, $u = u(x)$, che evidentemente risolvono la parte ellittica dell'equazione.
Pertanto dal teorema di Nash segue quello di De Giorgi, limitatamente a quelle soluzioni che sono *a priori* limitate (cfr. [**67**]).

In definitiva:

$$\omega\left(R/2\right) \leq \gamma\,\omega\left(2R\right) \qquad \text{con } 0<\gamma<1. \tag{7.126}$$

(i.e. l'oscillazione di u, che è limitata poiché lo è la funzione u, si riduce di una quantità fissa, $0<\gamma=\gamma\left(n,\lambda,\Lambda\right)<1$, passando da una palla di raggio $2R$ ad una concentrica di raggio $R/2$).
Sia ora $R_j := 2^{1-2j}R \qquad j=0,1,2,\ldots$.
Da (7.126), per induzione, risulta

$$\omega\left(R_j\right) \leq \gamma^j\,\omega\left(2R\right).$$

Osserviamo che $\gamma^{-1}=\dfrac{2}{2-\delta}\in(1,2)$.
Siano ora $x,y\in\Omega$ e sia j tale che $R_{j+1}<|x-y|\leq R_j$. Dalla stima precedente otteniamo [7]:

$$\begin{aligned} |u(x)-u(y)| &\leq \omega\left(R_j\right) \leq \gamma^j\omega(2R) = 2^{-j|\log_2\gamma|}\omega(2R) \\ &\leq \omega(2R)\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{|log_2\gamma|}{2}}|x-y|^{\frac{|log_2\gamma|}{2}}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$|u(x)-u(y)| \leq c\,|x-y|^{\sigma},$$

con $0<\sigma:=\dfrac{|\log_2\gamma|}{2}=\dfrac{\log_2\gamma^{-1}}{2}=-\dfrac{\log\gamma}{2\log 2}<\dfrac{1}{2}$. □

Osservazione 7.5.7. In sintesi, la dimostrazione del teorema di De Giorgi 7.5.6 si basa su due disuguaglianze in competizione aventi differenti omogeneità:
la disuguaglianza (7.113)

$$\int_{A(k,r)}|\nabla u(x)|^2\,dx \leq \frac{c}{(R-r)^2}\int_{A(k,R)}|u(x)-k|^2\,dx$$

per ogni k, $0<r<R$,
e la disuguaglianza (Poincaré-Sobolev) (7.116)

$$\int_{A(k,r)}|u(x)-k|^2\,dx \leq c\,|A\left(k,r\right)|^{\frac{2}{n}}\cdot\int_{A(k,r)}|\nabla u(x)|^2\,dx.$$

Da queste due disuguaglianze ricaviamo la (7.118), da cui otteniamo la *disuguaglianza ricorsiva* (7.122).

[7]Infatti:

$$\begin{aligned} 2^{1-2(j+1)}<\frac{|x-y|}{R}<2^{1-2j} \quad &\Rightarrow \quad 2^{-2j}<\frac{2\,|x-y|}{R}\Rightarrow -2j<\log_2\left(\frac{2\,|x-y|}{R}\right) \\ &\Rightarrow \quad -j<\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2\,|x-y|}{R}\right), \end{aligned}$$

allora

$$2^{-j}<2^{\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2|x-y|}{R}\right)}=\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{2}}|x-y|^{\frac{1}{2}}.$$

Per dimostrare che u, oltre ad essere localmente (essenzialmente) limitata, è anche localmente hölderiana, De Giorgi prova la **stima di decadimento per l'oscillazione di u** (7.126), da cui, iterando, ricava

$$\operatorname{osc}_{B_\rho(x^0)} u \leq c\rho^\sigma \qquad \text{per ogni } \rho < R \ (0 < \sigma < 1).$$

□

Osservazione 7.5.8. Nel 1961 Moser [**60**] ha esteso a soluzioni deboli e positive di equazioni lineari uniformemente ellittiche a coefficienti limitati in forma di divergenza il classico risultato di Harnack per funzioni armoniche e positive (cfr. teorema 1.8.2).

Definizione 7.5.9. $w \in W^{1,2}(\Omega)$ è una $\underset{\text{(soprasoluzione)}}{\text{sottosoluzione}}$ debole di $D_\alpha\left(A_{\alpha\beta}(x)D_\beta\right)$ se

$$\int_\Omega D_\alpha\left(A_{\alpha\beta}(x)D_\beta w(x)\right)v(x)\,dx \underset{(\leq 0)}{\geq 0} \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega)\,,\ v \geq 0 \text{ q.o. in } \Omega,$$

cioè, se

$$\int_\Omega A_{\alpha\beta}(x)D_\beta w(x)D_\alpha v(x)\,dx \underset{(\geq 0)}{\leq 0} \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega)\,,\ v \geq 0 \text{ q.o. in } \Omega.$$

Lemma 7.5.10. *Sia $w \in W^{1,2}(\Omega)$ una sottosoluzione debole e positiva in $B_{4R}\left(x^0\right) \subset \mathbb{R}^n$ e sia $m > 1$.*
Allora

$$\sup_{B_R(x^0)} w \leq c_1\left(n, \frac{\Lambda}{\lambda}\right)\left(\frac{m}{m-1}\right)^{\frac{2}{m}}\left(\fint_{B_{2R}(x^0)} [w(x)]^m\,dx\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Lemma 7.5.11. *Sia $w \in W^{1,2}(\Omega)$ una soprasoluzione debole e positiva in $B_{4R}\left(x^0\right) \subset \mathbb{R}^n$.*
Per $0 < m < \dfrac{n}{n-2}$, e se $n \geq 3$, allora

$$\left(\fint_{B_{2R}(x^0)} [w(x)]^m\,dx\right)^{\frac{1}{m}} \leq \frac{c_2\left(n, \frac{\Lambda}{\lambda}\right)}{\left(\frac{n}{n-2} - m\right)^2} \inf_{B_R(x^0)} w.$$

Se $n = 2$ la stima precedente vale per ogni $0 < m < \infty$, con $c_2\left(m, n, \dfrac{\Lambda}{\lambda}\right)$ al posto di $\dfrac{c_2\left(n, \frac{\Lambda}{\lambda}\right)}{\left(\frac{n}{n-2} - m\right)^2}$.

Intanto dai due precedenti lemmi deduciamo direttamente il seguente risultato.

Corollario 7.5.12. *Sia* $w \in W^{1,2}(\Omega)$ *una soluzione debole e positiva di* $D_\alpha\left(A_{\alpha\beta}(x)D_\beta w(x)\right) = 0$ *in* $B_{4R}\left(x^0\right) \subset \mathbb{R}^n$. *Allora*

$$\sup_{B_R(x^0)} w \leq c_3\left(n, \frac{\Lambda}{\lambda}\right) \inf_{B_R(x^0)} w.$$

Osserviamo che la costante $c_3\left(n, \frac{\Lambda}{\lambda}\right)$ non dipende da R.
Per generici aperti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abbiamo infine il seguente risultato.

Teorema 7.5.13 (Disuguaglianza di Moser-Harnack).
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto connesso e* $w \in W^{1,2}(\Omega)$ *una soluzione debole e positiva di* $D_\alpha\left(A_{\alpha\beta}(x)D_\beta w(x)\right) = 0$ $\forall x \in \Omega$. *Allora per ogni connesso* Ω', $\Omega' \subset\subset \Omega$, *esiste una costante* $c = c\left(n, \Omega, \Omega', \frac{\Lambda}{\lambda}\right) > 0$ *tale che*

$$\sup_{\Omega'} w \leq c \inf_{\Omega'} w. \tag{7.127}$$

Dim. La dimostrazione è analoga a quella del teorema 1.8.2, utilizzando qui il corollario 7.5.12. □

La disuguaglianza di Moser-Harnack (7.127) è utile per dimostrare la locale hölderianità di una soluzione debole u di $D_\alpha\left(A_{\alpha\beta}(x)D_\beta w(x)\right) = 0$ $\forall x \in \Omega$.
Richiamiamo l'enunciato del teorema di De Giorgi-Nash-Moser 7.5.6

Teorema 7.5.14. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ *aperto limitato e sia* $N = 1$.
Sia $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *una* soluzione debole *dell'equazione* (7.110) *dove* $\left(A_{\alpha\beta}(x)\right)_{\alpha,\beta=1,\dots,n}$ *è una matrice simmetrica a coefficienti* $A_{\alpha\beta}(x) \in L^\infty(\Omega)$ *verificante la condizione (7.111).*
Allora $u \in C^{0,\sigma}_{loc}(\Omega)$ $(0 < \sigma = \sigma(n, \lambda, \Lambda) < 1)$.

Dim. [Metodo di Moser]
La limitatezza locale di u segue dai lemmi 7.5.10 e 7.5.11.
Poniamo come prima $M(R) := \sup_{B_R(x^0)} u$ e $m(R) := \inf_{B_R(x^0)} u$. Applichiamo la disuguaglianza di Moser-Harnack (7.127) alle funzioni $w := M(2R) - u$ e $w := u - m(2R)$ (positive in $B_{R/2}\left(x^0\right)$; altrimenti consideriamo $w_\varepsilon := M(2R) - u + \varepsilon$ e $w_\varepsilon := u - m(2R) + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ e facciamo il limite per $\varepsilon \to 0$ dopo aver ottenuto la stima, essendo c indipendente da ε). Otteniamo

$$\sup_{B_{R/2}(x^0)} [M(2R) - u] \leq c \inf_{B_{R/2}(x^0)} [M(2R) - u]$$

cioè

$$M(2R) - m(R/2) \leq c\left[M(2R) - M(R/2)\right] \tag{7.128}$$

e

$$\sup_{B_{R/2}(x^0)} [u - m(2R)] \leq c \inf_{B_{R/2}(x^0)} [u - m(2R)]$$

cioè

$$M\,(R/2) - m(2R) \leq c\,[m\,(R/2) - m(2R)]\,. \tag{7.129}$$

Sommando (7.128) e (7.129) abbiamo

$$(c+1)\,[M\,(R/2) - m\,(R/2)] \leq (c-1)\,[M\,(2R) - m\,(2R)]\,.$$

Posto, come in precedenza $\omega(t) := M(t) - m(t)$ abbiamo che

$$\omega\,(R/2) \leq \frac{c-1}{c+1}\omega(2R) = \gamma\,\omega(2R) \qquad \text{con } \gamma < 1. \tag{7.130}$$

A meno di scegliere c più grande in (7.127) (possiamo supporre $c > 3$) risulta $0 < \gamma < 1$ e $\gamma^{-1} \in (1,2)$. La (7.130) è proprio la (7.126). Iterando (come già visto in precedenza, a partire dalla (7.126)) si dimostra la locale σ-hölderianità della funzione u. □

Ritornando ora al problema della regolarità di una soluzione debole $u \in W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ (cfr. teorema 7.3.5) della (Eq-quasilineare), è decisivo il teorema di De Giorgi 7.5.6 applicato con $A_{\alpha\beta}(x) := F_{p_\alpha p_\beta}(\nabla u(x)) \in L^\infty(\Omega)$ e $\widetilde{u}(x) := D_\gamma u(x) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ($\gamma = 1, 2, \ldots, n$) (cfr. (7.133),(7.132),(7.131) successivi) per dedurre che $\widetilde{u} \in C^{0,\sigma}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.
A partire da questo risultato fondamentale si inizia un procedimento di "boot-strap" cioè una reiterata applicazione del teorema di Schauder 7.5.1, che conduce alla maggiore regolarità di u in relazione alla (stessa) maggiore regolarità di F.
Precisamente sussiste il seguente risultato:

Teorema 7.5.15 (maggiore regolarità interna).
Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una Lagrangiana di classe C^∞ soddisfacente le condizioni (7.73), (7.74), (7.75). Sia $u \in W^{1,2}(\Omega)$ una soluzione debole di (7.78). Allora $u \in C^\infty_{loc}(\Omega)$.
Inoltre, se F è analitica reale, allora u è analitica reale.

Dim. [procedimento di linearizzazione]
Nel teorema 7.3.5 abbiamo visto che, posto

$$\widetilde{u}(x) := D_\gamma u(x), \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, n) \tag{7.131}$$

$$A_{\alpha\,\beta}(x) := F_{p_\alpha\,p_\beta}(\nabla u(x)) \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n), \tag{7.132}$$

e fissato un aperto $\Omega' \subset\subset \Omega$, $\widetilde{u} \in W^{1,2}(\Omega')$ è una soluzione debole dell'equazione lineare, ellittica del secondo ordine in forma di divergenza

$$D_\alpha(A_{\alpha\,\beta}(x)\,D_\beta \widetilde{u}(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega'. \tag{7.133}$$

Dall'ipotesi (7.75) e da (7.132) segue che $A_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega')$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$ e verificano (7.111).
Per il teorema di De Giorgi-Nash 7.5.6, abbiamo che $\widetilde{u} \in C^{0,\sigma}(\Omega'')$ per ogni $\Omega'' \subset\subset \Omega'$; pertanto, tenuto conto di (7.131),

$$u \in C^{1,\sigma}_{\text{loc}}(\Omega).$$

Ora, poiché F è di classe C^∞ e $\nabla u \in C^{0,\sigma}_{\text{loc}}(\Omega)$, dalla (7.132) segue che $A_{\alpha\beta} \in C^{0,\sigma}_{\text{loc}}(\Omega)$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$.
Dalla (7.133) e per il teorema 7.5.1 di Schauder segue che $\widetilde{u} \in C^{1,\sigma}_{\text{loc}}(\Omega)$, e quindi, tenuto conto di (7.131),

$$u \in C^{2,\sigma}_{\text{loc}}(\Omega).$$

Ma allora $A_{\alpha\beta} \in C^{1,\sigma}_{\text{loc}}(\Omega)$ e quindi sempre da (7.133) e per il teorema 7.5.1 di Schauder segue che

$$u \in C^{3,\sigma}_{\text{loc}}(\Omega).$$

Possiamo continuare questo argomento detto "boot-strap", per dedurre che $u \in C^{k,\sigma}_{\text{loc}}(\Omega)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e quindi $u \in C^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$.
Se poi F è analitica reale, l'analiticità di u segue dai risultati classici di Hopf [**44**] e Stampacchia [**68**]. □

7.6. Estensione del teorema di maggiore regolarità a funzionali non necessariamente quadratici.

Usando la versione di Moser del lavoro di De Giorgi, si può provare il seguente risultato più generale del precedente (cfr. [**58**] pag. 27 e teorema 1.10.4(ii) ibidem).

Teorema 7.6.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato e sia $F \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $F = F(x, u, p)$ tale che per ogni $(x, u, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$*

$$\text{(i)}\ \ c_1\left(1 + u^2 + |p|^2\right)^{\frac{m}{2}} - c_2 \le F(x, u, p) \le c_3\left(1 + u^2 + |p|^2\right)^{\frac{m}{2}},$$

$$\text{(ii)}\ \ |F_u|, |F_p|, |F_{xu}|, |F_{xp}| \le c_3\left(1 + u^2 + |p|^2\right)^{\frac{m-1}{2}},$$

$$|F_{uu}|, |F_{up}| \le c_3\left(1 + u^2 + |p|^2\right)^{\frac{m-2}{2}},$$

$$\text{(iii)}\ \ c_4\left(1 + u^2 + |p|^2\right)^{\frac{m-2}{2}}|\xi|^2 \le F_{p_\alpha p_\beta}(x, u, p)\,\xi_\alpha\xi_\beta \le c_5\left(1 + u^2 + |p|^2\right)^{\frac{m-2}{2}}|\xi|^2$$

*dove $m \ge 2$ e $c_i > 0$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ sono costanti.
Allora un minimo di $\mathcal{F}[v] := \int_\Omega F(x, v(x), \nabla v(x))\,dx$ in $\mathcal{A}_\varphi = \left\{v \in W^{1,m}(\Omega);\ u - \varphi \in W^{1,m}_0(\Omega)\right\}$ è di classe $C^\infty_{loc}(\Omega)$.*

Osservazione 7.6.2. Per la regolarità delle soluzioni fin sulla frontiera $\partial\Omega$ rinviamo e.g. a [**58**], [**48**], [**35**], [**37**].

7.7. Regolarità: il caso vettoriale.

Dal 1957 al 1968 altre dimostrazioni del teorema 7.5.6 di regolarità höderiana di De Giorgi vengono date, anche con l'intento di estendere il risultato ai sistemi, cioè al caso $N > 1$. [8]
Nessuna di queste dimostrazioni, però, risultava estendibile al caso $N > 1$: il motivo non era tecnico, ma sostanziale.
Infatti, che il teorema di hölderianità di De Giorgi non valga in generale per i sistemi è dimostrato dallo stesso De Giorgi nel 1968 con un controesempio (relativo al caso vettoriale, $n = N \geq 3$) di un sistema con coefficienti L^∞ che ha come soluzione una funzione vettoriale non continua e non limitata.
Successivamente E. Giusti e M. Miranda [**38**] mostrano, sempre nel caso vettoriale $n = N \geq 3$ e per un sistema ellittico quasi-lineare con coefficienti analitici reali, l'esistenza di una soluzione che presenta singolarità.

7.8. Esempio di estremale discontinua per un problema variazionale di tipo ellittico (De Giorgi, 1968).

Teorema 7.8.1 ([**24**]).
Sia $B_1(0)$ la palla unitaria di $\mathbb{R}^n$, con centro l'origine.
Per $n = N \geq 3$, la funzione vettoriale

$$u(x) = \frac{x}{|x|^\sigma}\ , \qquad con\ \sigma = \frac{n}{2}\left\{1 - \frac{1}{\sqrt{(2n-2)^2+1}}\right\} > 1, \tag{7.134}$$

appartiene a $W^{1,2}(B_1(0), \mathbb{R}^n)$, non è continua né limitata nell'intorno dell'origine di $\mathbb{R}^n$, ed è l'unico minimo del funzionale

$$\mathcal{F}[v] = \int_{B_1(0)} \underbrace{\left\{\left[(n-2)\sum_{j=1}^n D_j v^j + n\sum_{i,j=1}^n \frac{x_i x_j}{|x|^2} D_i v^j\right]^2 + \sum_{i,j=1}^n \left(D_i v^j\right)^2\right\}}_{:=F(x,\nabla v)} dx \tag{7.135}$$

tra tutte le funzioni $v \in W^{1,2}(B_1(0), \mathbb{R}^n)$ tali che $v(x) = x$ su $\partial B_1(0)$.

[8] Nel 1966, Morrey nel suo libro [**58**] a pag. 27 così si esprimeva:
"An unfortunate feature of the De Giorgi-Nash results is that they have been proved only for $N = 1$".

Dim. Posto $\mathcal{F}[v] := \int_{B_1(0)} A^{i\,j}_{\alpha\,\beta} D_\alpha v^i(x) D_\beta v^j(x)\,dx$, i coefficienti

$$A^{ij}_{\alpha\,\beta}(x) := \left[(n-2)\,\delta_{\alpha\,i} + n\frac{x_\alpha\,x_i}{|x|^2}\right]\cdot\left[(n-2)\,\delta_{\beta\,j} + n\frac{x_\beta\,x_j}{|x|^2}\right] + \delta_{\alpha\,\beta}\delta_{i\,j} \in L^\infty(B_1(0));$$

inoltre esistono due costanti $0 < \lambda \leq \Lambda$ tali che

$$\lambda|\xi|^2 \leq A^{ij}_{\alpha\beta}(x)\xi^i_\alpha\,\xi^j_\beta \leq \Lambda|\xi|^2 \quad \text{per q.o. } x \in B_1(0) \text{ e per ogni } \xi \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Il funzionale $\mathcal{F}[\cdot]$ è convesso, e dunque u è il minimo (unico) di $\mathcal{F}[\cdot]$ se (e solo se) u è soluzione dell'equazione di Eulero (estremale) in forma debole (cfr. osservazione 7.3.2)

$$\int_{B_1(0)} A^{ij}_{\alpha\beta}(x) D_\alpha u^i\, D_\beta\varphi^j\,dx = 0 \quad \forall\varphi \in W^{1,2}_0(B_1(0),\mathbb{R}^n). \tag{7.136}$$

In $B_1(0)\setminus\{0\}$, per (2.23)

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left[F_{p^j_i}(x,\nabla v)\right] = 0 \qquad (j = 1,\ldots,n)\,,$$

pertanto le equazioni di Eulero relative all'integrale (7.135) in $B_1(0)\setminus\{0\}$ sono

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\left[(n-2)\sum_{t=1}^n \frac{\partial v^t}{\partial x_t} + n\sum_{t,s=1}^n \frac{x_t x_s}{|x|^2}\frac{\partial v^t}{\partial x_s}\right]\cdot\left[(n-2)\,\delta_{ji} + n\frac{x_j x_i}{|x|^2}\right] + \frac{\partial v^j}{\partial x_i}\right\} = 0$$

$(j = 1,\ldots,n)$, da cui:

$$\begin{aligned} & (n-2)\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(n-2)\sum_{t=1}^n \frac{\partial v^t}{\partial x_t} + n\sum_{t,s=1}^n \frac{x_t\,x_s}{|x|^2}\frac{\partial v^t}{\partial x_s}\right] \\ + \quad & n\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{x_j\,x_i}{|x|^2}\left[(n-2)\sum_{t=1}^n \frac{\partial v^t}{\partial x_t} + n\sum_{t,s=1}^n \frac{x_t\,x_s}{|x|^2}\frac{\partial v^t}{\partial x_s}\right]\right\} \\ + \quad & \Delta v^j = 0 \qquad\qquad (j = 1,\ldots,n) \qquad \text{in } B_1(0)\setminus\{0\}. \end{aligned} \tag{7.137}$$

Ora, per $v(x) = \dfrac{x}{|x|^\sigma}$, risulta:

$$\begin{aligned}
&\Delta v^j = \left(-\sigma n + \sigma^2\right) x_j \, |x|^{-\sigma-2} \, ; \\
&\sum_{t=1}^n \frac{\partial v^t}{\partial x_t} = (n-\sigma) \, |x|^{-\sigma} \, ; \\
&\sum_{t,s=1}^n \frac{x_t \, x_s}{|x|^2} \frac{\partial v^t}{\partial x_s} = (-\sigma + 1) \, |x|^{-\sigma} \, ; \\
&\frac{\partial}{\partial x_j} \, |x|^{-\sigma} = -\sigma x_j \, |x|^{-\sigma-2} \, ; \\
&\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_j \, x_i \cdot |x|^{-\sigma-2} \right) = (n - \sigma - 1) \, x_j \, |x|^{-\sigma-2} \, .
\end{aligned}$$

Quindi le equazioni di Eulero (7.137) sono soddisfatte in senso forte in $B_1(0) \setminus \{0\}$ non appena si ponga $u(x) = \dfrac{x}{|x|^\sigma}$ e l'esponente σ verifichi l'equazione

$$(2n-2)^2 \left(-\sigma + \frac{n}{2}\right)^2 + \left(-\sigma n + \sigma^2\right) = 0.$$

In definitiva la (7.136) è soddisfatta da (7.134) se φ ha supporto in $B_1(0) \setminus \{0\}$.
Supponiamo ora che φ abbia supporto in $B_1(0)$, e sia $\zeta \in C^\infty(B_1(0))$, con

$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 & \text{in } B_1(0) \setminus B_{2R}(0) \ (0 < R < \frac{1}{2}) \\ \zeta \equiv 0 & \text{in } B_R(0) \\ 0 \le \zeta \le 1 & \text{in } B_{2R}(0) \setminus B_R(0). \end{cases}$$

e $|\nabla \zeta| \le \dfrac{2}{R}$.
La funzione $\zeta \, \varphi^j$ ha supporto in $B_1(0) \setminus B_R(0)$, e pertanto si ha

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{B_1(0)} A^{ij}_{\alpha\beta}(x) D_\alpha u^i \, D_\beta(\zeta \varphi^j) \, dx \qquad (7.138) \\
&= \int_{B_1(0)} \zeta \, A^{ij}_{\alpha\beta}(x) D_\alpha u^i \, D_\beta \varphi^j \, dx + \int_{B_1(0)} \varphi^j \, A^{ij}_{\alpha\beta}(x) D_\alpha u^i \, D_\beta \zeta \, dx.
\end{aligned}$$

Osserviamo che per l'ultimo integrale vale la maggiorazione:

$$\begin{aligned}
\int_{B_1(0)} \left| \varphi^j A^{ij}_{\alpha\beta}(x) D_\alpha u^i D_\beta \zeta \right| \, dx &\le \sup_{B_1(0)} |\varphi| \cdot \sup_{B_1(0)} \left| A^{ij}_{\alpha\beta} \right| \cdot \left(\int_{B_1(0)} |\nabla u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \cdot \left(\int_{B_{2R}(0) \setminus B_R(0)} |D_\beta \zeta|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le 2^{\frac{n}{2}+1} \omega_n^{\frac{1}{2}} R^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{2}{R} \left(\int_{B_1(0)} |\nabla u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} ;
\end{aligned}$$

pertanto possiamo maggiorare l'ultimo integrale della (7.138) con

$$c\left(\int_{B_1(0)} |\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot R^{\frac{n-2}{2}}$$

e questo, ricordando l'ipotesi $n \geq 3$, è infinitesimo per $R \to 0^+$.
Passando al limite per $R \to 0^+$ in (7.138), si ha allora la (7.136) per ogni $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0), \mathbb{R}^n)$, e dunque per ogni $\varphi \in W_0^{1,2}(B_1(0), \mathbb{R}^n)$. □

Osservazione 7.8.2. Il controesempio di De Giorgi mostra che non è possibile provare la regolarità delle soluzioni deboli di un problema variazionale regolare di tipo vettoriale allo stesso modo seguito nel caso scalare.
Il XIX problema di Hilbert nel caso vettoriale non ha in generale risposta affermativa per $n \geq 3$.
Tuttavia, lo stesso controesempio di De Giorgi non chiude [9] il problema della regolarità nel caso vettoriale: eccetto che in dimensione $n = 2$ (come già ricordato, risultati di Morrey), nel caso vettoriale è raro, in generale, ottenere minimi regolari ovunque; si dimostrano comunque risultati di *regolarità parziale* (ogni soluzione debole u è di classe $C^{1,\sigma}$ in un insieme aperto $\Omega_0 \subset \Omega$ e *l'insieme singolare* $\Omega \setminus \Omega_0$ è di misura nulla).

---

[9] *La scoperta di un controesempio che smentisce una congettura molto importante rappresenta un punto di svolta che apre alla scienza orizzonti più ampi ed affascinanti dei precedenti.*
Con una frase un po' paradossale potremmo dire che la normale crescita della scienza segue la logica dello "sfruttamento del successo" mentre le grandi svolte della scienza obbediscono alla logica dello "sfruttamento dell'insuccesso".

Ennio De Giorgi

pag. 124 in Quaderni dell' Accademia Pontaniana (n. 18), *Riflessioni su Matematica e Sapienza*, 1996.

E' motivo di riflessione il fatto che in De Giorgi la fiducia nella capacità dell'uomo di ricercare la verità si completa con una autentica visione sapienziale.

Per quanto ricchi possono essere i nostri schemi concettuali, essi non abbracciano mai tutta la realtà.
Questa considerazione è interessante per lo scienziato perché proprio il fatto che la realtà è molto più ampia delle nostre conoscenze ci induce a tentare sempre di allargare il campo della nostra riflessione scientifica, ad ampliare l'angolo della realtà illuminato dalle nostre teorie.
*Nello stesso tempo dobbiamo riconoscere che comunque quest'***angolo illuminato** *sarà una piccola parte dell'enorme immensità che rimane oscura.*
Vi è in fondo all'origine di ogni progresso scientifico questo atteggiamento sapienziale: il riconoscimento di quanto grande sia la realtà che si trova fuori dall'angolo illuminato delle nostre teorie.
Questo non ci deve portare a spegnere il riflettore, ma piuttosto a cercare di migliorarlo ed ampliarlo.

Ennio De Giorgi

pag. 106 ibidem.

7.9. Un caso di regolarità parziale negli spazi di Hölder.

Descrivere le idee nuove e le tecniche per affrontare le problematiche relative alla *regolarità parziale*, supera ampiamente i limiti della presente trattazione; per questo rinviamo a [**33**], [**34**].
Qui ci limitiamo a enunciare un risultato di regolarità parziale in un caso semplice.

TEOREMA 7.9.1. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *(*$n \geq 3$*) aperto limitato e sia* $F : \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$ *(*$N \geq 2$*) una Lagrangiana tale che*

(i) $\lambda |p|^2 \leq F(p) \leq \Lambda |p|^2 \ \forall p \in \mathbb{R}^{n\times N}$, *con* Λ, λ *costanti positive,*
(ii) $F \in C^2\left(\mathbb{R}^{n\times N}\right)$, $|F_{pp}| \leq c_1$ *(*$c_1 > 0$*),*
$F_{p^i_\alpha p^j_\beta}(p)\zeta^i_\alpha \zeta^j_\beta \geq c_2 |\zeta|^2$ *(*$c_2 > 0$*)* $\forall p \in \mathbb{R}^{n\times N}$, $\forall \zeta \in \mathbb{R}^{n\times N}$.

Sia $u \in W^{1,2}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$ *un minimo del funzionale* $\mathcal{F}[u] := \displaystyle\int_\Omega F\left(\nabla u(x)\right)\, dx$.
Allora esiste un aperto $\Omega_0 \subset \Omega$, *tale che* $u \in C^{1,\sigma}\left(\Omega_0, \mathbb{R}^N\right)$ *e per la dimensione di Hausdorff dell'insieme singolare* $\Omega \setminus \Omega_0$ *risulta*
$\mathcal{H} - dim(\Omega \setminus \Omega_0) \leq n - 2$.

Naturalmente i risultati di regolarità parziale aprono nuovi interessanti problemi riguardanti la natura topologica e analitica dell'insieme singolare: per una loro formulazione rinviamo e.g. a [**33**] pag. 118.