CAPITOLO 5

Caso vettoriale. Funzioni quasi-convesse, policonvesse, convesse di rango uno e loro relazioni

Il teorema 4.3.4 e il corollario 4.3.6 sono relativi anche al caso vettoriale (cioè le funzioni ammissibili sono definite in un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}^N$, con $n \geq 1$, $N \geq 1$). Possiamo schematizzare la relazione tra convessità e sequenziale semicontinuità inferiore nel seguente modo:

sia $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$ una Lagrangiana,
$F(x, u, v)$ convessa in v

$\overset{\text{teor. 4.3.4}}{\Longrightarrow} \mathcal{F}[u, v] = \displaystyle\int_\Omega F(x, u(x), v(x))\, dx$ seq. s.c.i. in
$L^1_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^N)_{\text{forte}} \times L^1_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^\nu)_{\text{debole}} \overset{?}{\Rightarrow} F(x, u, v)$ convessa in v;

sia $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n \times N} \to \mathbb{R}$ una Lagrangiana,
$F(x, u, p)$ convessa in $p := \nabla u$

$\overset{\text{cor. 4.3.6}}{\Longrightarrow} \mathcal{F}[u] = \displaystyle\int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$ seq. deb. s.c.i. in $W^{1,m}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$,
$m \geq 1 \overset{?}{\Longrightarrow} F(x, u, p)$ convessa in p.

La convessità di $F(x, u, v)$ rispetto a v è <u>anche</u> necessaria per la semicontinuità inferiore di $\mathcal{F}[u, v]$ (vedi successivo teorema 5.1.1), mentre è necessaria per la semicontinuità inferiore di $\mathcal{F}[u]$ <u>solo se</u> $n = 1$ con $N \geq 1$ o $N = 1$ con $n \geq 1$. Nel caso generale $n > 1$ e $N > 1$ è verificata per $\mathcal{F}[u]$ la condizione naturale (strettamente più debole rispetto alla convessità) di "<u>quasi-convessità</u>" (nel senso di Morrey, 1952).

Quindi nel caso $n = 1$ o $N = 1$ il corollario 4.3.6 è ottimale, nel senso che l'ipotesi di convessità della Lagrangiana $F(x, u, p)$ rispetto a p è anche necessaria per la semicontinuità inferiore del funzionale
$\mathcal{F}[u] = \displaystyle\int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$ rispetto alla convergenza debole in

$W^{1,m}_{\rm loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, $m \geq 1$; nel caso $n > 1$ con $N > 1$ esistono funzionali integrali, di notevole interesse nella teoria della elasticità non-lineare (cfr. cap. 6), che sono s.c.i. senza che la Lagrangiana sia convessa rispetto alla matrice $p = \left(p^i_\alpha\right)_{\substack{i=1,\cdots,N\\ \alpha=1,\cdots,n}}$.

5.1. Condizioni necessarie per la semicontinuità inferiore dei funzionali

$$\mathcal{F}\,[u,v] := \int_\Omega F(x,u(x),v(x))\,dx \quad \mathbf{e}$$
$$\mathcal{F}\,[u] := \int_\Omega F(x,u(x),\nabla u(x))\,dx.$$

Cominciamo col dimostrare che la convessità di $F(x,u,v)$ rispetto a v è necessaria per la semicontinuità inferiore di $\mathcal{F}[u,v]$.

Teorema 5.1.1. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $F(x,u,v)$ una funzione di Carathéodory in $\Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^\nu$ con $F(\cdot,u,v)$ localmente sommabile in Ω per ogni (u,v). Se per ogni $u \in \mathbb{R}^N$ il funzionale*

$$\mathcal{F}_u[v] = \int_\Omega F(x,u,v(x))\,dx$$

è s.c.i. nella topologia debole di $L^\infty_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^\nu)$ rispetto alla variabile v, allora $F(x,u,\cdot)$ è convessa per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $u \in \mathbb{R}^N$.*

Dim. Sia $x_0 \in \Omega$ e sia $Y \subset \Omega$ un cubo con centro in x_0. Per ogni $\lambda \in [0,1]$ si può trovare una successione χ_{E_h}, di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili $E_h \subset Y$, tale che

$$\chi_{E_h} \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda\chi_Y.$$

Siano $a,b \in \mathbb{R}^\nu$, $u \in \mathbb{R}^N$ e poniamo

$$v_h := \begin{cases} a\chi_{E_h} + b(1-\chi_{E_h}) & \text{in } Y \\ 0 & \text{in } \Omega\setminus Y \end{cases}$$

e

$$v := \begin{cases} a\lambda + b(1-\lambda) & \text{in } Y \\ 0 & \text{in } \Omega\setminus Y. \end{cases}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_u[v_h] - \mathcal{F}_u[v] &= \int_Y [F(x,u,a\chi_{E_h} + b(1-\chi_{E_h})) - F(x,u,a\lambda + b(1-\lambda))]\, dx \\
&= \int_Y \chi_{E_h}\, F(x,u,a)\, dx + \int_Y (1-\chi_{E_h})\; F(x,u,b)\, dx \\
&\quad - \int_Y F(x,u,a\lambda + b(1-\lambda))\, dx.
\end{aligned}$$

Nell'ultima uguaglianza abbiamo tenuto conto del fatto che le χ_{E_h} sono funzioni caratteristiche.

Quindi, tenuto conto dell'ipotesi di semicontinuità inferiore per $\mathcal{F}_u[\cdot]$ rispetto alla convergenza debole* di $L^\infty_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$, per $h \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \liminf_{h\to+\infty} \mathcal{F}_u[v_h] - \mathcal{F}_u[v] \\
&= \lambda \int_Y F(x,u,a)\, dx + (1-\lambda) \int_Y F(x,u,b)\, dx \\
&\quad - \int_Y F(x,u,a\lambda + b(1-\lambda))\, dx.
\end{aligned}$$

Allora, dividendo per $|Y|$, risulta

$$\begin{aligned}
0 \leq \frac{\lambda}{|Y|} \int_Y F(x,u,a)\, dx \quad &+ \quad \frac{(1-\lambda)}{|Y|} \int_Y F(x,u,b)\, dx \\
&- \quad \frac{1}{|Y|} \int_Y F(x,u,a\lambda + b(1-\lambda))\, dx,
\end{aligned}$$

e facendo tendere a zero il lato di Y, otteniamo (poiché $F(\cdot, u, v)$ è localmente sommabile in Ω)

$$0 \leq \lambda F(x_0,u,a) + (1-\lambda) F(x_0,u,b) - F(x_0,u,a\lambda + b(1-\lambda))$$

per quasi ogni $x_0 \in \Omega$ (x_0 punto di Lebesgue di $F(\cdot, u, v)$), ossia

$$F(x_0,u,a\lambda + b(1-\lambda)) \leq \lambda F(x_0,u,a) + (1-\lambda) F(x_0,u,b) \tag{5.43}$$

per q.o. $x_0 \in \Omega$ e per ogni $u \in \mathbb{R}^N$, che esprime la convessità di $F(x,u,\cdot)$.

A priori l'insieme (sottoinsieme di Ω) di misura nulla per il quale (5.43) non sussiste può dipendere da $\lambda \in [0,1]$, $u \in \mathbb{R}^N$, a e $b \in \mathbb{R}^\nu$.

Possiamo però trovare degli insiemi numerabili densi $J \subset [0,1]$, $E \subset \mathbb{R}^N$, $A \subset \mathbb{R}^\nu$ e un insieme $\Omega' \subset \Omega$ con $|\Omega'| = 0$ tali che la (5.43) valga per ogni $\lambda \in J$, $u \in E$, per ogni a, $b \in A$ e per ogni $x \in \Omega \setminus \Omega'$.

Possiamo inoltre supporre $F(x,\cdot,\cdot)$ continua per ogni $x \in \Omega \setminus \Omega'$ (per ipotesi $F(x,u,v)$ è una Lagrangiana di Carathéodory).

Possiamo ora approssimare ogni $\lambda \in [0,1]$, $u \in \mathbb{R}^N$, a e $b \in \mathbb{R}^\nu$ con successioni $\lambda_h \in J$, $u_h \in E$, a_h e $b_h \in A$. Scrivendo la (5.43) per questi ultimi, e passando al limite per $h \to +\infty$ otteniamo la tesi. $\square$

Osservazione 5.1.2. Osserviamo che la convergenza nella topologia debole* di $L^\infty_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$ implica la convergenza nella topologia debole di $L^1_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$. Ne segue che il teorema 5.1.1, insieme al teorema 4.3.4, forniscono una condizione necessaria e sufficiente per la semicontinuità inferiore di funzionali del tipo

$$\mathcal{F}[u,v] = \int_\Omega F(x, u(x), v(x))\, dx.$$

Osservazione 5.1.3. Nel teorema 5.1.1 le funzioni $u(x)(\equiv u)$ e $v(x)$ sono completamente indipendenti tra loro. Per i funzionali del tipo

$$\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

risulta invece $v(x) = \nabla u(x)$. Se lasciamo inalterata la convergenza nella topologia debole* di $L^\infty_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^{n\times N})$ per le funzioni $v_h(x) = \nabla u_h(x)$, si avrà $||\nabla u_h||_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^{n\times N})} \leq c$, e di conseguenza non sarà restrittivo supporre che la successione $\{u_h\}$ converga uniformemente, dato che qualsiasi altra convergenza più debole si ridurrebbe a questa per il teorema di Ascoli-Arzelà. In definitiva possiamo supporre che il funzionale $\mathcal{F}[u]$ sia s.c.i. rispetto a successioni convergenti nella topologia debole* di
$W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N) = Lip(\Omega, \mathbb{R}^N) = C^{0,1}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$.
D'altra parte il legame $v_h(x) = \nabla u_h(x)$ restringe la scelta delle possibili $v_h \rightharpoonup v$ (contrariamente a quanto visto nel teorema 5.1.1), e quindi la convessità in v, necessaria per $\mathcal{F}[u,v]$, potrebbe non esserlo più per il funzionale $\mathcal{F}[u]$.

Osserviamo che, se Ω è limitato,

$$u_h \xrightarrow{*} u \text{ in } W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N) \Longrightarrow u_h \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ per ogni } m \geq 1.$$

Una condizione necessaria per la semicontinuità inferiore di $\mathcal{F}[u]$ è data dal seguente teorema (in cui preliminarmente la Lagrangiana F dipende solo da ∇u)

Teorema 5.1.4. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato e $F : \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$ una Lagrangiana continua, e supponiamo che il funzionale*

$$\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(\nabla u(x))\, dx$$

sia seq. s.c.i. nella topologia debole di $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Allora per ogni funzione $\varphi \in C^1_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ (anche $\varphi \in W^{1,\infty}_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$, per la continuità di F)*

e per ogni $p_0 \in \mathbb{R}^{n\times N}$ *si ha*

$$|\Omega| F(p_0) \leq \int_\Omega F(p_0 + \nabla\varphi(x))\, dx. \tag{5.44}$$

In particolare, se $n = 1$ *ed* $N \geq 1$, *oppure* $N = 1$ *ed* $n \geq 1$ *la Lagrangiana* $F(p)$ *è convessa in* p.

Dim. Sia Y un cubo n-dimensionale che contiene Ω, e che a meno di cambiamento di variabili possiamo supporre essere il cubo unitario $[0,1]^n$. Sia $\varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$; estendiamo la φ prima assegnandole il valore 0 in $Y \setminus \Omega$, e poi estendendola periodicamente in $\mathbb{R}^n$ con periodo uguale a uno in ogni variabile

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \varphi(\{x_1\}, \cdots, \{x_n\})$$

dove con $\{a\}$ è indicata la parte frazionaria di a.

Per ogni $h \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ poniamo

$$\begin{aligned} \varphi_h(x) &= \frac{1}{h}\varphi(hx) \\ u_h(x) &= p_0 x + \varphi_h(x), \qquad \text{con } p_0 \in \mathbb{R}^{n\times N}. \end{aligned}$$

Evidentemente $u_h \xrightarrow{*} p_0 x$ in $W^{1,\infty}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$ (poiché da $|\varphi_h(x)| \leq \frac{1}{h}\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^N)}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ segue $\varphi_h \rightrightarrows 0$, e $\|\nabla\varphi_h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n\times N})} = \|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n\times N})}$ per ogni $h \in \mathbb{N}$), e dunque per l'ipotesi di sequenziale semicontinuità inferiore rispetto alla debole*-convergenza in $W^{1,\infty}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$, abbiamo:

$$|Y|\, F(p_0) = \int_Y F(p_0)\, dx \leq \liminf_{h\to+\infty} \int_Y F(p_0 + \nabla\varphi_h(x))\, dx. \tag{5.45}$$

Osservato che $\nabla\varphi_h(x) = \nabla\varphi(hx)$, dopo il cambio di variabili $y = hx$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_Y F(p_0 + \nabla\varphi_h(x))\, dx &= h^{-n} \int_{hY=[0,h]^n} F(p_0 + \nabla\varphi(y))\, dy \\ &= \int_Y F(p_0 + \nabla\varphi(x))\, dx \end{aligned} \tag{5.46}$$

(perché essendo φ periodica di periodo 1, l'integrale su hY è uguale ad h^n volte l'integrale su Y).
Da (5.46) e da (5.45) segue la tesi, tenuto conto che il supporto di φ è contenuto in Ω.
Per completare la dimostrazione del teorema consideriamo il caso $n = 1$ ed $N \geq 1$.

Sia allora $\Omega = (0,1)$ e $p_0 = \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2$ con $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^N$ e $\lambda \in (0,1)$. Sia $u \in W^{1,\infty}\big((0,1),\mathbb{R}^N\big) = Lip\big((0,1),\mathbb{R}^N\big)$ tale che

$$u'(x) = \begin{cases} p_1 & \text{se } x \in [0,\lambda] \\ p_2 & \text{se } x \in [\lambda, 1]. \end{cases}$$

Ovviamente

$$\begin{aligned} u(1) &= u(0) + \int_0^1 u'(x)\,dx \\ &= u(0) + \int_0^\lambda p_1\,dx + \int_\lambda^1 p_2\,dx \\ &= u(0) + p_0. \end{aligned}$$

Perciò, se definiamo $\varphi(x) := u(x) - u(0) - p_0 x$, abbiamo $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ e quindi $\varphi \in W_0^{1,\infty}\big((0,1),\mathbb{R}^N\big)$.

Ne segue per la (5.44)

$$\begin{aligned} F(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) = F(p_0) &\leq \int_0^1 F(u'(x))\,dx \\ &= \int_0^\lambda F(p_1)\,dx + \int_\lambda^1 F(p_2)\,dx \\ &= \lambda F(p_1) + (1-\lambda)F(p_2). \end{aligned}$$

Un argomento simile vale se $N = 1$ ed $n \geq 1$. □

Più in generale vale il seguente teorema:

Teorema 5.1.5 (Morrey, 1952).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato, e sia $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$ una Lagrangiana continua, e supponiamo che il funzionale

$$\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\,dx$$

sia seq. s.c.i. nella topologia debole* di $W^{1,\infty}\big(\Omega,\mathbb{R}^N\big)$. Allora per ogni funzione $\varphi \in C_0^1(\Omega,\mathbb{R}^N)$ (anche $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^N)$) e per ogni $x_0 \in \Omega$, $u_0 \in \mathbb{R}^N$ e $p_0 \in \mathbb{R}^{n\times N}$ si ha

$$|\Omega| F(x_0, u_0, p_0) \leq \int_\Omega F(x_0, u_0, p_0 + \nabla\varphi(x))\,dx.$$

In particolare, se $n = 1$ ed $N \geq 1$, oppure $N = 1$ ed $n \geq 1$ la Lagrangiana $F(x,u,p)$ è convessa in p per ogni fissato $x_0 \in \Omega$ e $u_0 \in \mathbb{R}^N$.

Alla luce del teorema precedente diamo la seguente definizione.

Definizione 5.1.6. Una funzione $F(x, u, p)$ continua e verificante la condizione

$$|\Omega| F(x_0, u_0, p_0) \leq \int_\Omega F(x_0, u_0, p_0 + \nabla\varphi(x))\, dx \qquad (5.47)$$

per ogni $(x_0, u_0, p_0) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n\times N}$ e per ogni $\varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ (anche $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, per la continuità di F) si dice quasi-convessa (nel senso di Morrey).

Osservazione 5.1.7. Notiamo che x e u svolgono il ruolo di parametri nella (5.47); pertanto talvolta ometteremo di indicare esplicitamente la dipendenza da x e u e useremo per F quasi-convessa la notazione $F = F(p)$.

Carattere variazionale della nozione di quasi-convessità.
Sia $u(x) = p_0 x + \varphi(x)$ con $\varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, allora la (5.47) diviene

$$\int_\Omega F(\nabla u(x))\, dx \geq \int_\Omega F(p_0)\, dx$$

per ogni $p_0 \in \mathbb{R}^{n\times N}$, $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ con $u_{|\partial\Omega} = p_0 x$.
Questo significa che

$$F \text{ quasi-convessa} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \min\left\{\int_\Omega F(\nabla u(x))\, dx;\ u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N),\ u_{|\partial\Omega} = p_0 x\right\} \\ \text{è assunto in } u_0(x) = p_0 x \ \ \forall p_0 \in \mathbb{R}^{n\times N}. \end{array}$$

□

Osservazione 5.1.8. Tramite dilatazioni dell'insieme, si riconosce che la definizione di quasi-convessità non dipende da Ω.

Osservazione 5.1.9. La quasi-convessità è strettamente più debole della convessità.

Sussiste infatti la seguente

Proposizione 5.1.10. *Sia* $F = F(x, u, p) : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$. *Allora*

$F(x, u, p)$ *convessa in* $p \quad \Rightarrow \quad F(x, u, p)$ *quasi-convessa*

$F(x, u, p)$ *convessa in* $p \quad \not\Leftarrow \quad n > 1$ *e* $N > 1$, $F(x, u, p)$ *quasi-convessa.*

Dim. Usando la disuguaglianza di Jensen 1.5.4:

$$\begin{aligned} F(x_0, u_0, p_0) &= F\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega (x_0, u_0, p_0 + \nabla\varphi(x))\, dx\right) \\ &\leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega F(x_0, u_0, p_0 + \nabla\varphi(x))\, dx \end{aligned}$$

per ogni $x_0 \in \Omega$, $u_0 \in \mathbb{R}^N$, $p_0 \in \mathbb{R}^{n\times N}$ e $\varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, dove la prima uguaglianza è ottenuta integrando per parti e sfruttando il fatto che φ è nulla sulla frontiera di Ω. □

Proviamo ora che la quasi-convessità è strettamente più debole della convessità.

Esempio 5.1.11. *Sia $n = N = 2$ e sia $F(p) = \det p = p_1^1 p_2^2 - p_2^1 p_1^2$ dove*

$$p = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_2^1 \\ p_1^2 & p_2^2 \end{pmatrix}.$$

Allora $F(p)$ non è convessa, ma è quasi-convessa in p.

Infatti, siano

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

allora

$$\lambda F(p) + (1-\lambda)F(q) = 0 \quad \forall \lambda \in]0,1[,$$

mentre

$$F(\lambda p + (1-\lambda)q) = \lambda(1-\lambda) > 0.$$

Pertanto $F(p)$ non è convessa.
Proviamo ora che $F(p)$ *è quasi-convessa.*
Infatti, per ogni $u = (u^1, u^2) \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ ($\partial\Omega$ lipschitziana), essendo

$$\nabla u = \begin{pmatrix} u^1_{x_1} & u^1_{x_2} \\ u^2_{x_1} & u^2_{x_2} \end{pmatrix},$$

abbiamo l'identità

$$F(\nabla u) = \det \nabla u = u^1_{x_1}\, u^2_{x_2} - u^1_{x_2}\, u^2_{x_1} = (u^1\, u^2_{x_2})_{x_1} - (u^1\, u^2_{x_1})_{x_2}$$

(cioè il determinante della matrice gradiente può sciversi come una divergenza; in generale cfr. (6.59)).

Allora, per il teorema della divergenza 1.1.17, otteniamo:

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \det \nabla u(x)\, dx &= \int_\Omega \left[u^1_{x_1}(x)\, u^2_{x_2}(x) - u^1_{x_2}(x)\, u^2_{x_1}(x)\right]\, dx \\
&= \int_\Omega \left[\left(u^1(x)\, u^2_{x_2}(x)\right)_{x_1} - \left(u^1(x)\, u^2_{x_1}(x)\right)_{x_2}\right]\, dx \\
&= \int_{\partial\Omega} \left(u^1(\xi)\, u^2_{x_2}(\xi),\, -u^1(\xi)\, u_{x_1}(\xi)\right) \cdot (\nu_1(\xi), \nu_2(\xi))\, d\mathcal{H}^1(\xi) \\
&= \int_{\partial\Omega} u^1(\xi)\left(u^2_{x_2}(\xi)\nu_1(\xi) - u^2_{x_1}(\xi)\nu_2(\xi)\right)\, d\mathcal{H}^1(\xi) \\
&= \int_{\partial\Omega} u^1(\xi)\left(u^2_{x_1}(\xi), u^2_{x_2}(\xi)\right) \cdot (-\nu_2(\xi), \nu_1(\xi))\, d\mathcal{H}^1(\xi) \\
&= \int_{\partial\Omega} u^1(\xi) \nabla u^2(\xi) \cdot \tau(\xi)\, d\mathcal{H}^1(\xi) \\
&= \int_{\partial\Omega} u^1(\xi)\, \frac{\partial u^2}{\partial \tau}(\xi)\, d\mathcal{H}^1(\xi)
\end{aligned}
$$

dove $\tau(\xi) = (-\nu_2(\xi), \nu_1(\xi))$ è il versore tangente alla frontiera di Ω (orientato in maniera opportuna). Dunque il valore di $\displaystyle\int_\Omega \det \nabla u(x)\, dx$ dipende solo dai valori di u su $\partial\Omega$. Se scegliamo $u(x) = p_0 x + \varphi(x)$ con $p_0 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ e $\varphi \in C^2_0(\Omega, \mathbb{R}^2)$, abbiamo

$$
\int_\Omega \det(p_0 + \nabla\varphi(x))\, dx = \int_\Omega \det p_0\, dx = |\Omega| \det p_0.
$$

Questa uguaglianza può essere estesa per continuità ad ogni $\varphi \in C^1_0(\Omega, \mathbb{R}^2)$, e dunque $F(p)$ è quasi-convessa. □

Osservazione 5.1.12. In generale, se $n = N$, la Lagrangiana $F(p) = \det p$ non è convessa ma è quasi-convessa, in quanto il valore del funzionale $\mathcal{F}[u] = \int_\Omega \det \nabla u(x)\ dx$ dipende solo dai valori al bordo di u. Lo stesso risultato (senza che sia necessariamente $n = N$) vale se si sostituisce il determinante con un qualsiasi minore della matrice ∇u. Lagrangiane di questo tipo si dicono “Lagrangiane nulle”(cfr. cap. 6).

La quasi-convessità di una funzione è espressa con una condizione che non è puntuale come nel caso delle funzioni convesse, ma è di tipo integrale, pertanto in generale difficile da verificare perché coinvolge una stima su tutto lo spazio $W^{1,\infty}_0\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$.
Una sottoclasse particolarmente interessante di funzioni quasi-convesse è costituita dalle funzioni policonvesse, intermedia tra le funzioni convesse e le quasi-convesse.

Definizione 5.1.13 (Morrey, 1966; Ball, 1977 [**5**] [**6**]).
Sia $p \in \mathbb{R}^{n\times N}$ e indichiamo con $M(p)$ l'insieme dei minori (cioè i determinanti di tutte le sottomatrici quadrate di p) della matrice $p = \left(p^i_\alpha\right)_{\substack{i=1,\cdots,N\\ \alpha=1,\cdots,n}}$.
Se $L(M(p))$ è una funzione convessa di $M(p)$, la funzione $F(p) = L(M(p))$ si dice <u>policonvessa</u>.

Esempio 5.1.14. *Se $n = N = 2$ e $p = \begin{pmatrix} p^1_1 & p^1_2 \\ p^2_1 & p^2_2 \end{pmatrix}$, le funzioni policonvesse sono tutte e sole quelle del tipo*
$F(p) = L(p^1_1, p^1_2, p^2_1, p^2_2, \det p)$ con L funzione convessa.

Osservazione 5.1.15. La convessità di $F(x,u,p)$ in $p \in \mathbb{R}^{n\times N}$ implica la policonvessità di $F(x,u,p)$ rispetto a p (si possono considerare le singole componenti del gradiente, $p = \nabla u = \left(\dfrac{\partial u^i}{\partial x_\alpha}\right)_{\substack{i=1,\cdots,N\\ \alpha=1,\cdots,n}}$, come minori di rango uno).

Per provare che esistono funzioni policonvesse che non sono convesse, basta pensare nel caso $n = N$ al determinante di p, ovvero ad un minore della matrice $p \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Proposizione 5.1.16. *Una funzione $F(p)$ policonvessa è quasi-convessa in p.*

Dim. Sia $F(p) = L(M(p))$ con L convessa. Posto $u(x) = p_0 x$ con $p_0 \in \mathbb{R}^{n\times N}$, per ogni $\varphi \in C^1_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ abbiamo, per la disuguaglianza di Jensen 1.5.4,

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega L(M(p_0 + \nabla\varphi(x)))\,dx \\
= \quad & \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega L(M(\nabla u(x) + \nabla\varphi(x)))\,dx \qquad (5.48)\\
\geq \quad & L\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega M(\nabla u(x) + \nabla\varphi(x))\,dx\right) \\
\overset{\text{oss. 5.1.12}}{=} \quad & L\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega M(\nabla u(x))\,dx\right) = L(M(p_0)),
\end{aligned}
$$

da cui segue la tesi. □

Osservazione 5.1.17. Per un esempio di funzione quasi-convessa che non è policonvessa rinviamo a [**69**].

Un'ultima e più debole forma di convessità è la cosiddetta convessità di rango uno.

Definizione 5.1.18. Una funzione $F(x,u,p)$ definita in $\Omega\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^{n\times N}$ si dice convessa di rango uno se per ogni $(x_0,u_0,p_0)\in\Omega\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^{n\times N}$ la funzione
$$g(\xi,\eta)=F(x_0,u_0,p_0+\xi\otimes\eta) \quad [1]$$
è convessa separatamente in $\xi\in\mathbb{R}^n$ ed $\eta\in\mathbb{R}^N$.

Proposizione 5.1.19. *Una funzione $F(x,u,p)$ quasi-convessa rispetto a p è convessa di rango uno.*

Dim. Possiamo supporre $F=F(p)$ e che (inizialmente) $F\in C^2(\mathbb{R}^{n\times N})$. Poiché F è quasi-convessa rispetto a p, le funzioni lineari minimizzano il funzionale $\mathcal{F}[u]=\int_\Omega F(\nabla u(x))\,dx$, pertanto prese $u(x)=p_0x$, $p_0\in\mathbb{R}^{n\times N}$, funzione lineare e $\varphi\in C_0^1(\Omega,\mathbb{R}^N)$, la funzione
$$G(t)=\mathcal{F}[u+t\varphi]=\int_\Omega F(\nabla u(x)+t\nabla\varphi(x))\,dx=\int_\Omega F(p_0+t\nabla\varphi(x))\,dx$$
ha un minimo per $t=0$. Abbiamo allora $G'(0)=0$ e $G''(0)\ge0$ e dunque
$$\int_\Omega F_{p_\alpha^k\,p_\beta^j}(p_0)D_\alpha\varphi^kD_\beta\varphi^j\,dx\ge0\qquad\forall\varphi\in C_0^1(\Omega,\mathbb{R}^N). \tag{5.49}$$
Se ora (permettiamo alla φ di assumere valori complessi) $\varphi(x)=\lambda(x)+i\mu(x)$, otteniamo
$$\begin{aligned}F_{p_\alpha^k\,p_\beta^j}(p_0)\,D_\alpha\varphi^k\overline{D_\beta\varphi^j} &= F_{p_\alpha^k\,p_\beta^j}(p_0)\left[D_\alpha\lambda^kD_\beta\lambda^j+D_\alpha\mu^kD_\beta\mu^j\right]\\ &\quad+F_{p_\alpha^k\,p_\beta^j}(p_0)\left\{i\left[D_\alpha\mu^kD_\beta\lambda^j-D_\alpha\lambda^kD_\beta\mu^j\right]\right\}\end{aligned}$$
e dunque per (5.49) risulta
$$\mathrm{Re}\int_\Omega F_{p_\alpha^k\,p_\beta^j}(p_0)\,D_\alpha\varphi^k\overline{D_\beta\varphi^j}\,dx\ge0. \tag{5.50}$$
Scegliamo ora $\varphi(x)=\eta e^{i\tau\xi\cdot x}\gamma(x)$, dove $\tau>0$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, $\eta\in\mathbb{R}^N$ e $\gamma\in C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R})$. Dalla (5.50),poiché
$$\begin{aligned}D_\alpha\varphi^k\overline{D_\beta\varphi^j} &= \left(\eta^k\cdot e^{i\tau\xi\cdot x}\cdot\xi_\alpha\,i\tau\gamma(x)+\eta^k\cdot e^{i\tau\xi\cdot x}D_\alpha\gamma(x)\right)\\ &\quad\times\left(\eta^j\cdot e^{-i\tau\xi\cdot x}\xi_\beta(-i\tau)\gamma(x)+\eta^je^{-i\tau\xi\cdot x}D_\beta\gamma(x)\right),\end{aligned}$$
otteniamo
$$\int_\Omega F_{p_\alpha^k\,p_\beta^j}(p_0)\,\eta^k\eta^j\left[\tau^2\xi_\alpha\,\xi_\beta\,\gamma^2+D_\alpha\gamma D_\beta\gamma\right]dx\ge0.$$

[1] ricordato che una "matrice $p\in\mathbb{R}^{n\times N}$ ha rango 1 se e solo se esistono $\xi\in R^n$, $\eta\in\mathbb{R}^N$ tali che $p=\xi\otimes\eta$", risulta $p_\alpha^i=\xi_\alpha\,\eta^i$ $\binom{i=1,\cdots,N}{\alpha=1,\cdots,n}$.

Dividendo per τ^2 e facendo tendere τ all'infinito abbiamo

$$\int_\Omega F_{p^k_\alpha\, p^j_\beta}(p_0)\, \xi_\alpha\, \xi_\beta\, \eta^k\, \eta^j \gamma^2\, dx \geq 0$$

per ogni $\gamma \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, e quindi

$$(L-H) \qquad F_{p^k_\alpha\, p^j_\beta}(p_0)\, \xi_\alpha\, \xi_\beta\, \eta^k\, \eta^j \geq 0 \tag{5.51}$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ ed $\eta \in \mathbb{R}^N$.

Quest'ultima disuguaglianza, che prende il nome di CONDIZIONE DI LEGENDRE-HADAMARD (cfr. osservazione 2.2.9), implica la convessità separata di $F \in C^2(\mathbb{R}^{n\times N})$ in $\xi \in \mathbb{R}^n$ ed $\eta \in \mathbb{R}^N$.

Supponiamo ora che $F = F(p) \in C^0(\mathbb{R}^{n\times N})$ (cioè F sia solo continua) e sia (per $\varepsilon > 0$) F_ε la regolarizzata di F, cioè

$$F_\varepsilon(p) := (F * \rho_\varepsilon)(p) = \int_{\mathbb{R}^{n\times N}} F(p-q)\rho_\varepsilon(q)\, dq,$$

dove $\rho_\varepsilon(q) = \varepsilon^{-nN}\, \rho\left(\dfrac{q}{\varepsilon}\right)$ e $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n\times N})$.
Siano $p_0 \in \mathbb{R}^{n\times N}$, $\vartheta \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$; abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_\Omega F_\varepsilon(p_0 + \nabla\vartheta(x))\, dx &= \int_{\mathbb{R}^{n\times N}} \rho_\varepsilon(q) \left(\int_\Omega F(p_0 + \nabla\vartheta(x) - q)\, dx \right) dq \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^{n\times N}} \rho_\varepsilon(q) |\Omega| F(p_0 - q)\, dq \\
&= |\Omega| F_\varepsilon(p_0),
\end{aligned}$$

ossia

$$\int_\Omega F_\varepsilon(p_0 + \nabla\vartheta(x))\, dx \geq |\Omega| F_\varepsilon(p_0),$$

cioè $F_\varepsilon = F_\varepsilon(p) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n\times N})$ è quasi-convessa rispetto a p al pari di $F \in C^0(\mathbb{R}^{n\times N})$. Per quanto già provato abbiamo allora che F_ε è convessa di rango uno, e passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$ otteniamo che F è convessa di rango uno. □

OSSERVAZIONE 5.1.20. Se $F(p)$ $\left(p = \left(p^i_\alpha\right)_{\substack{i=1,2,\ldots,N \\ \alpha=1,2,\ldots,n}} \right)$ è quasi-convessa, possiamo scrivere $F(p) = F(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ dove $p_\alpha = \begin{pmatrix} p^1_\alpha \\ p^2_\alpha \\ \vdots \\ p^N_\alpha \end{pmatrix}$ è la α-esima colonna di p.

Poiché F è convessa di rango uno, le funzioni $p_\alpha \mapsto F(p_1, \ldots, p_\alpha, \ldots, p_n)$, in quanto convesse, sono localmente lipschitziane rispetto a p_α uniformemente al variare di $p_1, \ldots, p_{\alpha-1}, p_{\alpha+1}, \ldots, p_n$ su insiemi limitati.

Ne concludiamo che *una funzione quasi-convessa in p è localmente lipschitziana in p.*

Osservazione 5.1.21. Sia $F = F(p) \in C^2(\mathbb{R}^{n\times N})$.
La convessità di $F(p)$ è equivalente alla positività della matrice Hessiana (condizione di Legendre)

$$(L) \qquad F_{p^i_\alpha\, p^j_\beta}(p)\, \zeta^i_\alpha\, \zeta^j_\beta \geq 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}^{n\times N},\ \ \forall \zeta \in \mathbb{R}^{n\times N}.$$

La convessità di rango uno è equivalente alla condizione di Legendre-Hadamard

$$(L-H) \qquad F_{p^i_\alpha\, p^j_\beta}(p)\, \xi_\alpha\, \xi_\beta \eta^i\, \eta^j \geq 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}^{n\times N}\ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ \ \forall \eta \in \mathbb{R}^N,$$

(che corrisponde alla scelta di $\zeta \in \mathbb{R}^{n\times N}$, $\zeta = \xi \otimes \eta$ nella (L)).
Chiaramente

$$(L) \Rightarrow (L-H),$$

ma, se $n > 1$ ed $N > 1$, allora

$$(L-H) \not\Rightarrow (L).$$

Infatti sia $n = N = 2$ e definiamo (per $\varepsilon > 0$)

$$A^{ij}_{\alpha\,\beta}\, D_\alpha u^i\, D_\beta u^j := \det(D_\alpha u^i) + \varepsilon\, |\nabla u|^2.$$

Allora

$$(L-H) \Longleftrightarrow A^{ij}_{\alpha\,\beta}\, \xi_\alpha\, \xi_\beta\, \eta^i\, \eta^j = \varepsilon|\xi|^2\, |\eta|^2 \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2,\ \eta \in \mathbb{R}^2$$

(in quanto $\det(\xi_\alpha\, \eta^i) = 0$ per $n = N = 2$); inoltre

$$(L) \Longleftrightarrow A^{ij}_{\alpha\,\beta}\, \zeta^i_\alpha\, \zeta^j_\beta = \det(\zeta^i_\alpha) + \varepsilon|\zeta|^2.$$

Ora per $0 < \varepsilon < 1$ esiste $\zeta \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tale che $\det(\zeta^i_\alpha) + \varepsilon|\zeta|^2 < 0$.
(e.g. , sia $\zeta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; abbiamo $\det \zeta = -1$, $|\zeta|^2 = 2$ per cui

$$\det \zeta + \varepsilon\, |\zeta|^2 = -1 + 2\varepsilon < 0$$

per $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$).

Riassumendo abbiamo la seguente catena di implicazioni:

convessità $\Rightarrow$ policonvessità $\Rightarrow$ quasi-convessità $\Rightarrow$ convessità di rango uno.

Osservazione 5.1.22. In generale, le implicazioni opposte non sussistono, se non in situazioni particolari.
Comunque tutte le definizioni sono equivalenti se $n = 1$ oppure $N = 1$; infatti, in questi casi la convessità di rango uno implica la convessità (dalla stessa definizione 5.1.18), e dunque tutte queste nozioni sono tra loro equivalenti.

Osservazione 5.1.23. Esistono funzioni convesse di rango uno che non sono quasi-convesse [**70**].

Osservazione 5.1.24. Un altro caso nel quale la convessità di rango uno implica la quasi-convessità, è quello in cui la funzione $F(p)$ è quadratica in p, cioè

$$F(p) = A^{kj}_{\alpha\,\beta}\, p^k_\alpha p^j_\beta$$

con $A^{kj}_{\alpha\,\beta} = \text{cost}$.

Infatti, se $F(p) = A^{kj}_{\alpha\,\beta}\, p^k_\alpha p^j_\beta$ è convessa di rango uno, posto $p = \xi \otimes \eta$ con $\xi \in \mathbb{R}^n$ ed $\eta \in \mathbb{R}^N$, risulta (cfr. osservazione 5.1.21) $A^{kj}_{\alpha\,\beta}\, \xi_\alpha \xi_\beta\, \eta^k \eta^j \geq 0$.

Allora abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_\Omega F(p_0 + \nabla\varphi(x))\, dx &= \int_\Omega \Big[A^{kj}_{\alpha\,\beta}\,(p_0)^k_\alpha (p_0)^j_\beta + A^{kj}_{\alpha\,\beta}\, D_\alpha \varphi^k(x) D_\beta \varphi^j(x) \Big]\, dx \\ &\geq |\Omega| F(p_0) \end{aligned}$$

per ogni $p_0 \in \mathbb{R}^{n\times N}$, $\varphi \in C^1_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$, dato che per il lemma 5.1.25 successivo risulta

$$\int_\Omega A^{kj}_{\alpha\,\beta}\, D_\alpha \varphi^k(x) D_\beta \varphi^j(x)\, dx \geq 0$$

per ogni $\varphi \in C^1_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Quindi una siffatta $F(p)$ è quasi-convessa. □

Più in generale, se invece della condizione

$$A^{kj}_{\alpha\,\beta}\, \xi_\alpha\, \xi_\beta \eta^k \eta^j \geq 0 \quad \text{per ogni } \xi \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^N$$

abbiamo

$$A^{kj}_{\alpha\,\beta}\, \xi_\alpha\, \xi_\beta \eta^k \eta^j \geq c|\xi|^2\, |\eta|^2 \quad \text{per ogni } \xi \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^N \text{ con } c \geq 0,$$

sussiste il seguente risultato:

Lemma 5.1.25. *Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times N}$ una matrice costante verificante la condizione*

$$A^{kj}_{\alpha\,\beta}\, \xi_\alpha\, \xi_\beta \eta^k \eta^j \geq c|\xi|^2\, |\eta|^2 \quad \textit{per ogni } \xi \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^N \tag{5.52}$$

con $c \geq 0$. Allora per ogni $\varphi \in W^{1,2}_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ risulta

$$\int_\Omega A^{kj}_{\alpha\,\beta} D_\alpha \varphi^k(x)\, D_\beta \varphi^j(x)\, dx \geq \frac{c}{4\pi^2} \int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^2\, dx.$$

Dim. Poiché $W^{1,2}_0(\Omega, \mathbb{R}^N) = \overline{C^1_0(\Omega, \mathbb{R}^N)}^{W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)}$ è sufficiente provare la precedente disuguaglianza per $\varphi \in C^1_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

L'idea è di usare la trasformata di Fourier definita da

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, \varphi(x)\, dx, \quad \text{per cui } \widehat{D_\alpha\varphi}(\xi) = -2\pi i \xi_\alpha \widehat{\varphi}(\xi).$$

Risulta

$$\begin{aligned}
\int_\Omega D_\alpha\varphi^k\, D_\beta\varphi^j\, dx &= \int_\Omega D_\alpha\varphi^k\, \overline{D_\beta\varphi^j}\, dx \\
&= \int_\Omega \widehat{D_\alpha\varphi^k}\, \overline{\widehat{D_\beta\varphi^j}}\, d\xi \\
&= \int_\Omega (-2\pi i\xi_\alpha)\, \widehat{\varphi^k}\, \overline{(-2\pi i\xi_\beta)}\, \overline{\widehat{\varphi^j}}\, d\xi \\
&= 4\pi^2 \int_\Omega \xi_\alpha\, \xi_\beta\, \widehat{\varphi^k}\, \overline{\widehat{\varphi^j}}\, d\xi,
\end{aligned}$$

da cui, per $\alpha = \beta$ e $k = j$, ricaviamo

$$\int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^2\, dx = 4\pi^2 \int_\Omega |\xi|^2\, |\widehat{\varphi}|^2\, d\xi. \tag{5.53}$$

D'altra parte, se nella (5.52) permettiamo al vettore η di assumere valori complessi, $\eta^k = \rho^k + i\lambda^k$, abbiamo:

$$A^{kj}_{\alpha\,\beta}\, \xi_\alpha\, \xi_\beta \eta^k \overline{\eta^j} = A^{kj}_{\alpha\,\beta}\, \xi_\alpha\, \xi_\beta \left[\rho^k\, \rho^j + \lambda^k\, \lambda^j + i(\rho^j\, \lambda^k - \rho^k\, \lambda^j)\right]$$

e dunque, per (5.52), essendo

$$\begin{aligned}
A^{kj}_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta\rho^k\rho^j &\geq c\,|\xi|^2\,|\rho|^2\,, \\
A^{kj}_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta\lambda^k\lambda^j &\geq c\,|\xi|^2\,|\rho|^2 \quad \text{e} \\
|\eta|^2 &= |\rho|^2 + |\lambda|^2
\end{aligned}$$

deduciamo che

$$\text{Re}\ A^{kj}_{\alpha\,\beta}\, \xi_\alpha\, \xi_\beta \eta^k \overline{\eta^j} \geq c|\xi|^2\, |\eta|^2.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}
\int_\Omega A^{kj}_{\alpha\,\beta}\, D_\alpha\varphi^k\, D_\beta\varphi^j\, dx &= \text{Re} \int_\Omega A^{kj}_{\alpha\,\beta}\, \xi_\alpha\, \xi_\beta\, \widehat{\varphi^k}\, \overline{\widehat{\varphi^j}}\, d\xi \\
&\geq c \int_\Omega |\xi|^2\, |\widehat{\varphi}|^2\, d\xi \\
&\overset{\text{per (5.53)}}{=} \frac{c}{4\pi^2} \int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^2\, dx.
\end{aligned}$$

□

5.2. Condizioni sufficienti per la debole semicontinuità inferiore in ipotesi di quasi-convessità: teoremi di Morrey, Marcellini, Acerbi-Fusco.

E' naturale chiedersi se la quasi-convessità (oltre che condizione necessaria, cfr. teoremi 5.1.4 e 5.1.5) sia anche sufficiente per dimostrare la semicontinuità inferiore in una topologia abbastanza debole da garantire l'esistenza di minimi.

Parte dell'interesse sulla quasi-convessità risiede sui teoremi di debole sequenziale semicontinuità inferiore dovuti a Morrey (1952) [**57**], Marcellini (1985) [**54**], Acerbi-Fusco (1984) [**1**], in ipotesi sempre meno restrittive.

Nei prossimi teoremi supponiamo sempre che Ω sia un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$. Sussistono i seguenti risultati.

Teorema 5.2.1 (Morrey, 1952 [**57**]).
Se $F : \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$ è una Lagrangiana tale che

(i) *F è quasi-convessa in p,*

allora il funzionale $\mathcal{F}[u] = \displaystyle\int_\Omega F(\nabla u(x))\,dx$ è seq. s.c.i. nella topologia debole* di $W^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^N)$.

Dim. Sia $\{u_h\}$ una successione di $W^{1,\infty}\left(\Omega,\mathbb{R}^N\right)$ debolmente* convergente ad una funzione u.
Non è restrittivo supporre che F sia positiva. Infatti essendo F localmente limitata (osservazione 5.1.20) esiste una costante c tale che $c \leq F\left(\nabla u_h(x)\right)$ per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni h. Basta allora sostituire F con $\max\{F + c, 0\}$.
L'idea della dimostrazione è di conseguire la tesi nel caso particolare $u(x) = u_{p_0}(x) = p_0 x$ e poi di estendere il risultato al caso generale.

1. Allora, sia dapprima $u(x) = u_{p_0}(x) = p_0 x$ con $p_0 \in \mathbb{R}^{n\times N}$, $x \in \Omega$ e supponiamo anche che le funzioni $\varphi_h(x) = u_h(x) - u_{p_0}(x)$ abbiano supporto compatto in Ω. Dall'ipotesi di quasi-convessità abbiamo
$$\int_\Omega F(p_0 + \nabla\varphi(x))\,dx \geq |\Omega|\,F(p_0) \qquad \forall \varphi \in C_0^1\left(\Omega,\mathbb{R}^N\right)$$
e anche, per la continuità di F, per ogni $\varphi \in W_0^{1,\infty}\left(\Omega,\mathbb{R}^N\right)$.
Quindi
$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u_h] &= \mathcal{F}[u_{p_0} + \varphi_h] = \int_\Omega F(p_0 + \nabla\varphi_h(x))\,dx \\ &\geq |\Omega|\,F(p_0) = \mathcal{F}[u_{p_0}],\end{aligned}$$

da cui segue la tesi.

2. In questo secondo passo supponiamo soltanto che $u(x) = u_{p_0}(x) = p_0 x$ con $p_0 \in \mathbb{R}^{n\times N}$, $x \in \Omega$.
Sia $\Omega' \subset\subset \Omega$ e sia ψ una funzione di taglio, $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \le \psi \le 1$ in Ω, $\psi = 1$ in Ω'.
Definita la successione di funzioni
$$\varphi_h(x) = \psi(x)u_h(x) + (1-\psi(x))\, u_{p_0}(x),$$
abbiamo, per il passo 1.,
$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u_{p_0}] &\le \mathcal{F}[\varphi_h] = \int_\Omega F\left(\psi\nabla u_h + (1-\psi)p_0 + (u_h - u_{p_0})\nabla\psi\right) dx \\ &\le \mathcal{F}[u_h] + c\,|\Omega\setminus\Omega'|,\end{aligned}$$
da cui otteniamo la tesi facendo tendere prima Ω' ad Ω.

3. Sia infine u un'arbitraria funzione in $W^{1,\infty}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$ e sia v una funzione affine a tratti tale che $\|\nabla v - \nabla u\|_{L^1(\Omega,\mathbb{R}^{n\times N})} \le \varepsilon$.
Consideriamo la successione $v_h = u_h - u + v$ che converge a v nella topologia debole* di $W^{1,\infty}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$. Quindi, per quanto già provato nel punto 2. (osservato che il risultato conseguito nei primi due passi per funzioni lineari si estende al caso di funzioni affini a tratti),
$$\mathcal{F}[v] \le \liminf_{h\to\infty} \mathcal{F}[v_h].$$
Poiché F è localmente lipschitziana (osservazione 5.1.20), abbiamo
$$\begin{aligned}|\mathcal{F}[u_h] - \mathcal{F}[v_h]| &\le \int_\Omega |F(\nabla u_h) - F(\nabla v_h)|\, dx \\ &\le c\int_\Omega |\nabla u_h - \nabla v_h|\, dx \\ &= c\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|\, dx \le \varepsilon c,\end{aligned}$$
da cui segue la tesi. □

Osservazione 5.2.2. I teoremi 5.1.4 e 5.2.1 dimostrano che la debole* sequenziale semicontinuità inferiore in $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ del funzionale
$\mathcal{F}[u] = \displaystyle\int_\Omega F(\nabla u(x))\, dx$ è equivalente alla quasi-convessità di F.

Per assicurare la debole semicontinuità inferiore in $W^{1,m}$ $(1 \le m < \infty)$ sono necessarie aggiuntive condizioni di crescita su F oltre alla quasi-convessità [**7**].
Vale il seguente risultato, che si ottiene con alcune modifiche rispetto alla dimostrazione del teorema 5.2.1.

Teorema 5.2.3 (Marcellini, 1985 [**54**]).
Se $F : \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$ è una Lagrangiana tale che

(i) *F è quasi-convessa in p;*
(ii) $-c\,(1+|p|^r) \le F(p) \le c\,(1+|p|^m)$
per ogni $p \in \mathbb{R}^{n\times N}$ con $c>0$, $1 \le r < m < \infty$;

allora il funzionale $\mathcal{F}[u] = \displaystyle\int_\Omega F(\nabla u(x))\,dx$ è seq. deb. s.c.i. in $W^{1,m}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$.

Il teorema precedente continua a valere anche quando la Lagrangiana F dipende da x e da u. I risultati di Morrey e Marcellini sono stati estesi da Acerbi e Fusco a Lagrangiane discontinue in x. Precisamente, vale il seguente teorema più generale.

Teorema 5.2.4 (Acerbi-Fusco, 1984 [**1**]).
Sia $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$ una Lagrangiana tale che

(i) *$F\,(x,u,p)$ è di Carathéodory;*
(ii) *per ogni $(x,u,p) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n\times N}$*

$$-c\left(|p|^r + |u|^t\right) - h(x) \le F(x,u,p) \le g(x,u)\,(1+|p|^m)$$

con $m>1$, $1 \le r < m$ ($r=1$ se $m^*=1$), $1 \le t < m^* = \dfrac{nm}{n-m}$ se $m<n$, $t \ge 1$ se $m>n$, $c>0$, $h \in L^1(\Omega)$ e $g \ge 0$ di Carathéodory in $\Omega \times \mathbb{R}^N$;
(iii) *$p \mapsto F(x,u,p)$ è quasi-convessa in $\mathbb{R}^{n\times N}$.*

Allora il funzionale $\mathcal{F}[u] = \displaystyle\int_\Omega F(x,u(x),\nabla u(x))\,dx$ è seq. deb. s.c.i. in $W^{1,m}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$.

Una dimostrazione (pur sempre, non semplice) di questo teorema si basa su più risultati preliminari, molti dei quali hanno un interesse in sé e per questo motivo li segnaliamo qui, rinviando per la dimostrazione del teorema 5.2.4 a [**37**] cap. 5 paragrafi 5.3, 5.4 e 5.5.

- Il primo ingrediente è l'*inviluppo quasi convesso di una funzione*: sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e sia $G : \mathbb{R}^{n\times N} \to [\,0,+\infty)$; definiamo

$$\gamma_\Omega(p)) := \inf\left\{ ⨍_\Omega G(p+\nabla\varphi(x))\,dx;\;\; \varphi \in W_0^{1,m}\left(\Omega,\mathbb{R}^N\right)\right\}.$$

γ_Ω è invariante per omotetie e non dipende da Ω; pertanto scriveremo semplicemente $\gamma(p)$ invece di $\gamma_\Omega(p)$. Sotto opportune ipotesi per G, γ è quasi-convessa.

Lemma 5.2.5 ([**37**]).
Sia $\nu\,|p|^m \le G(p) \le c\,(1+|p|^m)$ *(*$\nu > 0$*) ed esista* $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua con* $\omega(0) = 0$ *tale che*

$$|G(p) - G(q)| \le (1 + |p|^m + |q|^m)\,\omega\,(|p-q|)$$

per ogni $p, q \in \mathbb{R}^{n\times N}$*,*
allora γ *è l'inviluppo quasi-convesso di* G*, cioè la massima funzione quasi-convessa che non supera* G*.*

- Il secondo ingrediente è il seguente risultato:

Teorema 5.2.6 (Principio Variazionale di Ekeland [**27**] [**28**] [**29**]).

Sia (V, d) *uno spazio metrico completo. Sia* $\mathcal{G} : V \to [0, +\infty]$ *un funzionale limitato inferiormente, s.c.i. nella topologia indotta dalla metrica* d *che abbia in qualche punto valore finito.*
Se per qualche $v \in V$ *ed* $\eta > 0$ *risulta*

$$\mathcal{G}[v] \le \inf_V \mathcal{G} + \eta$$

allora esiste $u \in V$ *tale che*
a. $d(u, v) \le 1$*;*
b. $\mathcal{G}[u] \le \mathcal{G}[v]$*;*
c. $\mathcal{G}[u] \le \mathcal{G}[w] + \eta d(u, w)$ *per ogni* $w \in V$
(cioè, u *è punto (unico) di minimo del funzionale*
$w \mapsto \mathcal{G}[w] + \eta d(u, w)$*).*

Osserviamo che, se introduciamo in V la nuova distanza $d_1 = \eta^{-\frac{1}{2}} d$, lo spazio metrico (V, d_1) è completo, e $\mathcal{G}$ è s.c.i..
Allora, dal Principio Variazionale di Ekeland segue che se $\mathcal{G}[v] \le \inf_V \mathcal{G} + \eta$, esiste $u \in V$ (a priori diversa da quella di cui all'enunciato del teorema 5.2.6) tale che
a'. $d(u, v) \le \eta^{\frac{1}{2}}$;
b'. $\mathcal{G}[u] \le \mathcal{G}[v]$;
c'. $\mathcal{G}[u] \le \mathcal{G}[w] + \eta^{\frac{1}{2}} d(u, w)$ per ogni $w \in V$.
Ora, se $\{v_h\} \subset V$ è una successione minimizzante per $\mathcal{G}$, cioè se $\eta_h := \mathcal{G}[v_h] - \inf_V \mathcal{G} \overset{h\to\infty}{\to} 0$, la successione corrispondente $\{u_h\} \subset V$ è anch'essa successione minimizzante per $\mathcal{G}$.
Inoltre

$$\mathcal{G}[u_h] \le \mathcal{G}[w] + \eta_h^{\frac{1}{2}} d(u_h, w)$$

per ogni $w \in V$.

- Ultimo e fondamentale ingrediente è questo risultato di maggiore sommabilità.

Lemma 5.2.7 ([**32**] *e lemma 3.2 in* [**53**]).
Sia $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$ *una Lagrangiana tale che*
(i) $\mathcal{G}(x, u, p)$ *è di Carathéodory;*

(ii) $|p|^m \le \mathcal{G}(x,u,p) \le a_1(x) + a_2 |u|^m + a_3 |p|^m$ *con* $a_1 \in L^t_{loc}(\Omega)$, $t > 1$, $m > 1$, $a_2, a_3 > 0$.

Sia $u \in W^{1,m}_{loc}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$ *tale che per ogni aperto* $\Omega' \subset\subset \Omega$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} \mathcal{G}\left(x, u(x), \nabla u(x)\right) dx \quad \le \quad & \int_{\Omega'} \mathcal{G}\left(x, v(x), \nabla v(x)\right) dx \\ & + \eta \int_{\Omega'} \left|\nabla v(x) - \nabla u(x)\right| dx \end{aligned}$$

per ogni $v \in u + W^{1,m}_0\left(\Omega', \mathbb{R}^N\right)$ *dove* $0 \le \eta \le 1$.

Allora esiste $\tau > 0$ *tale che* $u \in W^{1,m+\tau}_{loc}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$.

Osservazione 5.2.8. Il teorema di semicontinuità 5.2.4 è dovuto essenzialmente ad Acerbi e Fusco [**1**] che lo hanno ottenuto in ipotesi leggermente meno generali.

Una prima importante differenza con il caso convesso è la seguente: nel teorema 4.3.6 il funzionale $\mathcal{F}[u] = \displaystyle\int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$ è seq. deb. s.c.i. in $W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega, M)$; invece il teorema 5.2.4 asserisce che il funzionale $\mathcal{F}[u]$ è seq. deb. s.c.i. in $W^{1,m}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, dove m è l'esponente di crescita in (ii).

Una seconda differenza è che nel teorema 4.3.6 (tenuto conto anche dell'osservazione 4.3.8) otteniamo la sequenziale debole semicontinuità inferiore richiedendo solo un controllo dal basso per la Lagrangiana F. Nel teorema 5.2.4 è richiesto anche un controllo dall'alto.

Il teorema 5.2.4 non sussiste se $r = m$, né se $t = m^*$ [**37**].

Come già visto (cfr. teorema 4.5.2), una volta dimostrata la semicontinuità, l'esistenza di minimi sotto opportune condizioni dipende in gran parte dalla coercività del funzionale in esame. Per l'analisi di risultati di esistenza di minimi nel caso in cui $F(x,u,p)$ è solo quasi-convessa o anche policonvessa (ma non convessa) rinviamo al paragrafo 5.6 in [**37**].

Qui, rinviamo ai teoremi di esistenza 6.2.3 e 6.2.4 del successivo capitolo, relativi al caso di funzionali con Lagrangiana policonvessa.