CAPITOLO 2

Metodi classici (indiretti) nel Calcolo delle Variazioni: variazione prima e variazione seconda

I *metodi classici (indiretti) nel Calcolo delle Variazioni* (riconducibili a prima del 1900) si basano sulla dimostrazione di condizioni necessarie di estremalità per funzionali di tipo integrale.

2.1. Metodi classici nel Calcolo delle Variazioni: caso unidimensionale.

Nel 1744, Eulero dedusse la prima condizione necessaria che deve essere soddisfatta da una funzione che minimizza un funzionale integrale.
Nel caso unidimensionale abbiamo i seguenti risultati.

TEOREMA 2.1.1. *Sia* $F = F(x, u, p) \in C^1([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$*; consideriamo*

$$\mathcal{F}[u] := \int_a^b F(x, u(x), u'(x))\, dx$$

e

$$\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)} = \left\{u \in C^1([a, b]); u(a) = \alpha, u(b) = \beta\right\}.$$

Valgono:

(i) *(*VARIAZIONE PRIMA*)*
Se u *è minimo per* $\mathcal{F}$ *in* $\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)}$*:*
$\forall v \in C^1([a, b]), \quad v(a) = v(b) = 0$

$$\int_a^b [F_p(x, u(x), u'(x))v'(x) + F_u(x, u(x), u'(x))v(x)]\, dx = 0. \tag{2.19}$$

(Equazione di Eulero in forma debole)

(ii) *Se* $F \in C^2([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ *e* u *è minimo per* $\mathcal{F}$ *in* $\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)} \cap C^2([a, b])$*:*

$$-\frac{d}{dx}F_p(x, u(x), u'(x)) + F_u(x, u(x), u'(x)) = 0 \tag{2.20}$$

o, equivalentemente,

$$
\begin{aligned}
F_{pp}(x,u(x),u'(x))u''(x) \quad &+ \quad F_{pu}(x,u(x),u'(x))u'(x) \\
&+ \quad F_{px}(x,u(x),u'(x)) \\
&- \quad F_u(x,u(x),u'(x)) = 0 \quad \forall x \in (a,b).
\end{aligned}
$$

(Equazione di Eulero in forma forte)

(ii') *Se* $F \in C^2([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ *e* u *è minimo per* $\mathcal{F}$ *in* $\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)} \cap C^2([a,b])$*:* $\forall x \in (a,b)$

$$\frac{d}{dx}[F(x,u(x),u'(x)) - u'(x)F_p(x,u(x),u'(x))] = F_x(x,u(x),u'(x)). \quad (2.21)$$

Viceversa:

(iii) *Se* $\overline{u}$ *soddisfa (2.20) e se* $(u,p) \mapsto F(x,u,p)$ *è convessa per ogni* $x \in [a,b]$*, allora* $\overline{u}$ *è minimo di* $\mathcal{F}$ *in* $\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)} \cap C^2\,[a,b]$*.*

(iv) *Se, inoltre, la funzione* $(u,p) \mapsto F(x,u,p)$ *è strettamente convessa per ogni* $x \in [a,b]$*, allora il minimo di* $\mathcal{F}$ *in* $\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)} \cap C^2([a,b])$*, se esiste, è unico.*

(v) (Variazione seconda)
Se $F \in C^2([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ *e* $u \in \mathcal{A}_{(\alpha,\beta)}$ *è minimo di* $\mathcal{F}$*:*
$\forall v \in C^1_0([a,b])$

$$
\begin{aligned}
\int_a^b [F_{pp}(x,u(x),u'(x))v'^2(x) \quad &+ \quad 2F_{up}(x,u(x),u'(x))v(x)v'(x) \\
&+ \quad F_{uu}(x,u(x),u'(x))v^2(x)]\,dx \geq 0
\end{aligned}
$$

Dim.

(i) Poiché u è minimo per $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}[u] \leq \mathcal{F}[u+tv] \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \forall v \in C^1([a,b]), v(a) = v(b) = 0.$$

Poniamo $\phi(t) := \mathcal{F}[u+tv]$. Allora $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ e $\phi(0) \leq \phi(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Pertanto

$$\phi'(0) = \frac{d}{dt}\mathcal{F}[u+tv]_{|t=0} = 0, \quad \text{e quindi}$$

$$\int_a^b [F_p(x,u(x),u'(x))v'(x) + F_u(x,u(x),u'(x))v(x)]\,dx = 0.$$

(ii) Integrando per parti la (2.19):
$\forall v \in C^1([a,b]), v(a) = v(b) = 0$ risulta

$$\int_a^b [-\frac{d}{dx}F_p(x,u(x),u'(x))v(x) + F_u(x,u(x),u'(x))v(x)]\,dx = 0$$

e quindi (per il lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni 1.2.9) otteniamo la (2.20).

(ii') Osserviamo dapprima che per ogni $u \in C^2([a,b])$ si ha

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx}[F(x,u(x),u'(x)) - u'(x)F_p(x,u(x),u'(x))] \\
= \; & F_p(x,u(x),u'(x))u''(x) + F_u(x,u(x),u'(x))u'(x) + F_x(x,u(x),u'(x)) \\
- \; & u''(x)F_p(x,u(x),u'(x)) - u'(x)\frac{d}{dx}F_p(x,u(x),u'(x)) \\
= \; & F_x(x,u(x),u'(x)) + u'(x)[F_u(x,u(x),u'(x)) - \frac{d}{dx}F_p(x,u(x),u'(x))].
\end{aligned}$$

Per (2.20) si ha la tesi.

(iii) Essendo $(u,p) \mapsto F(x,u,p)$ convessa per ogni $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned}
F(x,u(x),u'(x)) \geq F(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x)) \quad & + \quad F_u(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))(u(x)-\overline{u}(x)) \\
& + \quad F_p(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))(u'(x)-\overline{u}'(x))
\end{aligned}$$

per ogni $u \in \mathcal{A}_{(\alpha,\beta)} \cap C^2([a,b])$. Integrando:

$$\begin{aligned}
\int_a^b F(x,u(x),u'(x))\,dx \quad \geq \quad & \int_a^b F(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x)\,dx) \\
+ \quad & \int_a^b F_u(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))(u(x)-\overline{u}(x))\,dx \\
+ \quad & \int_a^b F_p(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))(u'(x)-\overline{u}'(x))\,dx
\end{aligned}$$

cioè, integrando per parti il terzo integrale e tenuto presente che $u(a) - \overline{u}(a) = 0 = u(b) - \overline{u}(b)$,

$$\mathcal{F}[u] \geq \mathcal{F}[\overline{u}] + \int_a^b [F_u(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x) - \frac{d}{dx}F_p(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x)](u(x)-\overline{u}(x))\,dx.$$

Usando la (2.20) otteniamo

$$\mathcal{F}[u] \geq \mathcal{F}[\overline{u}] \quad \text{per ogni } u \in \mathcal{A}_{(\alpha,\beta)} \cap C^2([a,b]).$$

(iv) Siano $u, v \in \mathcal{A}_{(\alpha,\beta)} \cap C^2\,([a,b])$ minimi di $\mathcal{F}[\cdot]$; la funzione $w := \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \in \mathcal{A}_{(\alpha,\beta)} \cap C^2\,([a,b])$.

Per la convessità di $(u,p) \mapsto F(x,u,p)$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}F(x,u(x),u'(x)) \quad + \quad & \frac{1}{2}F(x,v(x),v'(x)) \geq \\
& F(x, \frac{1}{2}u(x) + \frac{1}{2}v(x), \frac{1}{2}u'(x) + \frac{1}{2}v'(x)) \\
& = F(x,w(x),w'(x))
\end{aligned}$$

e quindi, posto μ il valore del minimo di $\mathcal{F}$ in $\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)} \cap C^2([a,b])$:

$$\mu = \frac{1}{2}\mathcal{F}[u] + \frac{1}{2}\mathcal{F}[v] \geq \mathcal{F}[w] \geq \mu.$$

Pertanto
$$\int_a^b [\frac{1}{2}F(x,u(x),u'(x)) + \frac{1}{2}F(x,v(x),v'(x)) - F(x,w(x),w'(x))]\,dx = 0.$$
Per l'ipotesi di stretta convessità, l'integrando è positivo a meno che $u = v$ e $u' = v'$; quindi $u = v$.

(v) Poiché u è minimo per $\mathcal{F}$ risulta, con la notazione introdotta in (i): $\phi''(0) \geq 0$ e con facili calcoli segue la tesi.

$\square$

Osservazione 2.1.2. (2.21) è detta equazione di DuBois-Reymond (o seconda forma dell'equazione di Eulero), utile quando F non dipende esplicitamente da x.

Osservazione 2.1.3. Se $F \in C^3([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e u è minimo di $\mathcal{F}$ in $\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)} \cap C^2([a,b])$, osservato che $\forall v \in C_0^1([a,b])$ risulta $2vv' = (v^2)'$ e $v(a) = v(b) = 0$, da 2.1.1(v) abbiamo
$$\int_a^b \Big[F_{pp}(x,u(x),u'(x))v'^2(x) + \Big(F_{uu}(x,u(x),u'(x)) - \frac{d}{dx}F_{up}(x,u(x),u'(x))\Big)v^2(x)\Big]\,dx \geq 0.$$

2.2. Metodi classici nel Calcolo delle Variazioni: caso multidimensionale.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con frontiera lipschitziana.

Teorema 2.2.1 (Variazione prima).
Siano $F = F(x,u,p)$ una funzione di classe $C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN})$, $\varphi \in C^1\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N\right)$ assegnata e indichiamo con
$$\mathcal{A}_\varphi = \left\{u \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right);\ u = \varphi \text{ su } \partial\Omega\right\}$$
la classe delle funzioni ammissibili. Valgono:

(i) *Se u è minimo per $\mathcal{F}$ in $\mathcal{A}_\varphi$, allora:*
$$\int_\Omega \left[F_{p_\alpha^i}(x,u,\nabla u)\,D_\alpha v^i + F_{u^i}(x,u,\nabla u)\,v^i\right]\,dx = 0 \tag{2.22}$$
per ogni $v \in C_0^\infty\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$[1]*, ($\alpha = 1,\dots,n$, $i = 1,\dots,N$ e $p_\alpha^i = D_\alpha u^i$).*

[1] D'ora in poi useremo la convenzione che indici ripetuti sono sommati e i simboli di sommatoria omessi.

(ii) *Se $F \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN})$ e u è minimo per $\mathcal{F}$ in $\mathcal{A}_\varphi \cap C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$:*

$$-D_\alpha\, F_{p^i_\alpha}\,(x,u,\nabla u) + F_{u^i}\,(x,u,\nabla u) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \tag{2.23}$$

($i = 1,\dots,N$), o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} &F_{p^i_\alpha p^j_\beta}\,(x,u,\nabla u)\; D_\alpha\, D_\beta u^j + F_{p^i_\alpha u^j}\,(x,u,\nabla u)\; D_\alpha\, u^j \\ &\quad + F_{p^i_\alpha x_\alpha}\,(x,u,\nabla u) - F_{u^i}\,(x,u,\nabla u) = 0 \end{aligned} \tag{2.24}$$

in Ω ($i = 1,\dots,N$).

Dim.

(i) Siano $t \in \mathbb{R}$ e $v \in C^\infty_0\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$. Consideriamo la funzione $u + tv$. Tale funzione appartiene ancora ad $\mathcal{A}_\varphi$ (per questo motivo tv prende il nome di variazione ammissibile). Poiché u è minimo per $\mathcal{F}$ deve essere:

$$\frac{d}{dt}\,\mathcal{F}\,[u+tv]_{|t=0} = 0.$$

Essendo

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega F\,(x, u+tv, \nabla u + t\nabla v)\,dx$$

$$= \int_\Omega \left[F_{p^i_\alpha}\,(x, u+tv, \nabla u + t\nabla v)\, D_\alpha v^i + F_{u^i}\,(x, u+tv, \nabla u + t\nabla v)\, v^i\right]\, dx,$$

abbiamo, per $t = 0$,

$$\int_\Omega \left[F_{p^i_\alpha}\,(x,u,\nabla u)\, D_\alpha v^i + F_{u^i}\,(x,u,\nabla u)\, v^i\right]\, dx = 0 \quad \forall v \in C^\infty_0\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$$

(ii) Integrando per parti la (2.22), otteniamo:

$$\int_\Omega \left[-D_\alpha F_{p^i_\alpha}\,(x,u,\nabla u) + F_{u^i}\,(x,u,\nabla u)\right] v^i\, dx = 0 \quad \forall v \in C^\infty_0\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$$

da cui (2.23) per il lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni 1.2.9.

□

Osservazione 2.2.2. L' equazione (2.22) prende il nome di equazione di Eulero (formulazione debole) di $\mathcal{F}$ in u. Il membro a sinistra di (2.22) prende il nome di *Variazione prima* di $\mathcal{F}$ in u.
La (2.23) è l'equazione di Eulero, formulazione forte, di $\mathcal{F}$ in u. Le soluzioni di (2.23) sono chiamate *estremali* (termine introdotto da Kneser).

Osservazione 2.2.3. (2.24) costituisce un sistema di N equazioni alle derivate parziali del secondo ordine in forma di divergenza, quasi lineare perché è lineare rispetto alle derivate seconde e non lineare rispetto alle derivate prime e di ordine zero.

Esempio 2.2.4. *L'equazione di Eulero per l'integrale di Dirichlet, dove* $F(x,u,p) = \frac{1}{2}|p|^2$, *risulta*

$$\Delta u = 0 \qquad \text{in } \Omega \qquad \textit{(equazione di Laplace)},$$

mentre l'equazione di Eulero per l'integrale dell'area, dove $F(x,u,p) = \left(1+|p|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, *è*

$$D_\alpha \left(\frac{u_{x_\alpha}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = 0 \quad \textit{(equazione delle superfici di area minima).}$$

Ne segue, poiché il primo membro di questa espressione è proporzionale alla curvatura media della superficie $\{(x,u(x))\,,\ x\in\Omega\}$, *che le superfici di area minima hanno curvatura media nulla.*

Osservazione 2.2.5. Nel dedurre l'equazione di Eulero per il funzionale $\mathcal{F}$ abbiamo considerato il problema di Dirichlet, cioè abbiamo scelto come funzioni ammissibili le funzioni $u \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right)$ con valore prescritto φ su $\partial\Omega$.

Assumiamo ora che u minimizzi il funzionale $\mathcal{F}$ tra tutte le funzioni $v \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right)$. Allora tutte le funzioni $v \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right)$ sono variazioni ammissibili; pertanto otteniamo le condizioni naturali:

$$\nu_\alpha F_{p_\alpha^i}\left(x,u,\nabla u\right) = 0 \qquad \text{su } \partial\Omega \quad (i = 1,2,\ldots,N).$$

dove $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ indica il versore normale (per convenzione esterno) a $\partial\Omega$.

Infatti, sia $v \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right)$, allora

$$\int_\Omega \left[F_{p_\alpha^i}\left(x,u,\nabla u\right) D_\alpha v^i + F_{u^i}\left(x,u,\nabla u\right) v^i\right]\, dx = 0.$$

Integrando per parti (teorema 1.1.18):

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left[-D_\alpha F_{p_\alpha^i}\left(x,u,\nabla u\right)\right. \quad &+ \quad \left. F_{u^i}\left(x,u,\nabla u\right)\right] v^i\, dx \\ &+ \quad \int_{\partial\Omega} \nu_\alpha F_{p_\alpha^i}\left(x,u,\nabla u\right) v^i\, d\mathcal{H}^{n-1} = 0. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Poiché (2.25) vale anche per ogni $v \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, deduciamo che anche (2.22) vale e pertanto

$$\int_{\partial\Omega} \nu_\alpha F_{p_\alpha^i}\left(x,u,\nabla u\right) v^i\, d\mathcal{H}^{n-1} = 0 \qquad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N).$$

Dall'arbitrarietà di v seguono le condizioni naturali.

ESEMPIO 2.2.6. *Se u minimizza l'integrale di Dirichlet senza condizioni al contorno, allora u è soluzione del problema di Neumann omogeneo*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ \dfrac{du}{d\nu} = \nu_\alpha \, D_\alpha u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 2.2.7. Consideriamo il problema

$$\min_{u \in \mathcal{K}} \mathcal{F}[u]$$

dove $\mathcal{K}$ è il sottoinsieme convesso di $C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right)$ definito da

$$\mathcal{K} = \left\{ u \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right); \ u = \varphi \text{ su } \partial\Omega \text{ e } u^i \geq h^i \text{ in } \overline{\Omega}, \ \ i = 1, \ldots, N \right\}.$$

Naturalmente assumiamo $h^i \leq \varphi^i$ su $\partial\Omega$ affinché sia $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Tale problema è noto come *problema con ostacolo unilaterale.*

Se u è un minimo di $\mathcal{F}$, allora vale la seguente *disequazione variazionale*

$$\int_\Omega \left[F_{p_\alpha^i}\left(x, u, \nabla u\right) D_\alpha \left(v^i - u^i\right) + F_{u^i}\left(x, u, \nabla u\right) \left(v^i - u^i\right) \right] \, dx \geq 0$$

per ogni $v \in \mathcal{K}$.

Infatti, poiché $\mathcal{K}$ è convesso, per ogni $v \in \mathcal{K}$ e per ogni $t \in [0, 1]$ abbiamo

$$tv + (1-t)u = u + t(v-u) \in \mathcal{K}$$

e quindi

$$\mathcal{F}[u] \leq \mathcal{F}[u + t(v-u)] \qquad \forall t \in [0, 1];$$

essendo, in questo caso,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}\left[u + t(v-u)\right]_{|t=0} \geq 0$$

ne segue facilmente l'asserto.

TEOREMA 2.2.8 (VARIAZIONE SECONDA).
Sia $F \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n \times N})$ e sia u minimo per $\mathcal{F}$ in $\mathcal{A}_\varphi$. Allora:
se $N = 1$, risulta

$$F_{p_\alpha p_\beta}\left(x, u(x), \nabla u(x)\right) \xi_\alpha \, \xi_\beta \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \forall x \in \Omega; \tag{2.26}$$

se $N > 1$, risulta

$$F_{p_\alpha^i p_\beta^j}\left(x, u(x), \nabla u(x)\right) \xi_\alpha \, \xi_\beta \eta^i \, \eta^j \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \forall \eta \in \mathbb{R}^N, \ \forall x \in \Omega \tag{2.27}$$

DIM. Per ogni $v \in C_0^\infty\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$ risulta

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{F}[u + tv]_{|t=0} \geq 0.$$

Nel caso scalare $N = 1$ abbiamo

$$\frac{d}{dt}\,\mathcal{F}[u{+}tv] = \int_\Omega \left[F_{p_\alpha}\left(x, u+tv, \nabla u + t\nabla v\right) D_\alpha v + F_u\left(x, u+tv, \nabla u + t\nabla v\right) v\right]\,dx,$$

e

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\mathcal{F}[u{+}tv] = \int_\Omega \big[F_{p_\alpha p_\beta}\left(x, u+tv, \nabla u + t\nabla v\right) D_\alpha v D_\beta v$$
$$+2F_{p_\alpha u}\left(x, u+tv, \nabla u + t\nabla v\right) D_\alpha v\, v + F_{uu}\left(x, u+tv, \nabla u + t\nabla v\right) v^2\big]\,dx.$$

Pertanto

$$0 \leq \frac{d^2}{dt^2}\,\mathcal{F}[u+tv]_{|t=0} \tag{2.28}$$

$$= \int_\Omega \left[F_{p_\alpha p_\beta}\left(x, u, \nabla u\right) D_\alpha v D_\beta v + 2F_{p_\alpha u}\left(x, u, \nabla u\right) D_\alpha v\, v + F_{uu}\left(x, u, \nabla u\right) v^2\right]\,dx$$

per ogni $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Deduciamo da questa la (2.26). Osserviamo dapprima che, per il teorema di Rademacher 1.3.2, la (2.28) è valida anche per ogni funzione lipschitziana v nulla su $\partial\Omega$. Fissiamo ora $\xi \in \mathbb{R}^n$ e definiamo una siffatta funzione ponendo (per ogni $\varepsilon > 0$)

$$v(x) := \varepsilon\rho\left(\frac{x\cdot\xi}{\varepsilon}\right)\zeta(x) \qquad \forall x \in \Omega \tag{2.29}$$

dove $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$, $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione periodica così definita

$$\rho(t) = \begin{cases} t & \text{se } 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ 1-t & \text{se } \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$\rho(t+1) = \rho(t)$ per ogni t numero reale; osserviamo che

$$|\rho'(t)| = 1 \text{ q.o. in } \mathbb{R}, \tag{2.30}$$

Risulta

$$D_\alpha v = \rho'\left(\frac{x\cdot\xi}{\varepsilon}\right)\xi_\alpha\,\zeta(x) + O(\varepsilon),$$

pertanto, sostituendo la (2.29) in (2.28), otteniamo

$$0 \leq \int_\Omega F_{p_\alpha p_\beta}\left(x, u, \nabla u\right)\,\left(\rho'\right)^2\,\xi_\alpha\,\xi_\beta\,\zeta^2(x)\,dx + O(\varepsilon).$$

Da cui, per $\varepsilon \to 0^+$, tenuto conto della (2.30), segue:

$$0 \leq \int_\Omega F_{p_\alpha p_\beta}\left(x, u, \nabla u\right)\,\xi_\alpha\,\xi_\beta\,\zeta^2(x)\,dx,$$

per ogni $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$, e quindi

$$F_{p_\alpha p_\beta}\left(x, u(x), \nabla u(x)\right)\,\xi_\alpha\,\xi_\beta \geq 0 \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^n \text{ e } \forall x \in \Omega.$$

Per il caso vettoriale $N > 1$, rimandiamo alla dimostrazione della proposizione 5.1.19 (a partire dalla (5.49) alla (5.51)). $\square$

Osservazione 2.2.9. La disequazione in (2.26) è detta condizione di Legendre (L). Tale condizione è equivalente alla convessità di $F(x,u,p)$ rispetto a p ed alla condizione di ellitticità dell'equazione di Eulero.

La disequazione in (2.27) è chiamata condizione di Legendre-Hadamard (L-H).

Osservazione 2.2.10. *Il problema* $\min \mathcal{F}[u]$ *non ha necessariamente soluzione di classe* C^1.
Infatti, sia $F(p) = (p^2-1)^2$ e consideriamo il problema

$$\min_{u\in\mathcal{A}_{(0,0)}} \mathcal{F}[u] := \min \int_0^1 F(u'(x))\,dx.$$

Posto $\mu := \inf\limits_{u\in\mathcal{A}_{(0,0)}} \mathcal{F}[u]$, proviamo che $\mu = 0$.
Consideriamo la successione $(h \geq 2)$

$$u_h(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{h}\right] \\ -2h^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^3 - 4h\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - x + 1 & \text{se } x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{h}, \frac{1}{2}\right] \\ 1-x & \text{se } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Osserviamo che $u_h \in \mathcal{A}_{(0,0)}$ e si ha:

$$0 \leq \mathcal{F}[u_h] = \int_0^1 \left[(u_h'(x))^2 - 1\right]^2\,dx = \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{h}}^{\frac{1}{2}} \left[(u_h'(x))^2 - 1\right]^2\,dx \leq \frac{4}{h} \overset{h\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ciò implica che $\mu = 0$.
La funzione $u \equiv 0 \in \mathcal{A}_{(0,0)}$, è soluzione dell'equazione di Eulero $\dfrac{d}{dx}\left[u'((u')^2-1)\right] = 0$, tuttavia essa non è minimo per $\mathcal{F}$ poiché $\mu = 0$ e $\mathcal{F}[0] = 1$.
Inoltre, se esistesse $u \in \mathcal{A}_{(0,0)}$ minimo di $\mathcal{F}$, avremmo $\mathcal{F}[u] = 0$ e questo implicherebbe che $|u'| = 1$ q.o., condizione che nessuna funzione $u \in \mathcal{A}_{(0,0)}$ può soddisfare (in quanto per la continuità della derivata avremmo $u' = 1$ ovunque o $u' = -1$ ovunque e questo è incompatibile con le condizioni ai limiti).
Infine, osserviamo, che se, invece della classe ammissibile $\mathcal{A}_{(0,0)}$, consideriamo la classe più ampia di funzioni ammissibili

$$\widetilde{\mathcal{A}}_{(0,0)} = \left\{u \in C^1[a,b] \text{ a tratti }; u(0) = u(1) = 0\right\}$$

il problema di minimo per $\mathcal{F}$ in $\widetilde{\mathcal{A}}_{(0,0)}$ ha come soluzione la *spezzata*

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1-x & \text{se } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

2.3. Due problemi variazionali classici: la brachistocrona e la disuguaglianza isoperimetrica in dimensione $n = 2$.

La brachistocrona(dal greco *brachistos*(il più breve)+*chronos*(tempo)).

La data di nascita del Calcolo delle Variazioni è fissata tradizionalmente al 1696, quando Johan Bernoulli propose sugli *Acta Eruditorum Lipsiae* il problema della brachistocrona (cioè di tempo minimo).

Problema nuovo alla cui soluzione sono invitati i Matematici.

Dati in un piano verticale due punti A e B, trovare il profilo AMB tale che un mobile M, che discende su di esso per gravità a partire da A, giunga in B nel minimo tempo possibile.

La soluzione fu data tra gli altri (Leibniz, Jackob Bernoulli, l'Hospital, Newton) dallo stesso J. Bernoulli nel 1697.
Se in un sistema di coordinate cartesiane, con gravità che agisce nella direzione negativa dell'asse y, $A = \left(x^1, y^1\right)$ indica il punto iniziale e $B = \left(x^2, y^2\right)$ quello finale, con $x^1 < x^2$, $y^2 < y^1$ e se $u : \left[x^1, x^2\right] \to \mathbb{R}$ è una funzione della generica curva che li connette tale che $u\left(x^1\right) = y^1$ e $u\left(x^2\right) = y^2$ e $u(x) < y^1$ per $x^1 < x \leq x^2$, nel punto A la velocità è nulla e l'energia è tutta potenziale, mentre in un punto di ascissa x avremo una velocità v che dovrà verificare la legge di conservazione dell'energia totale

$$mgy_1 = \frac{1}{2}mv^2(x) + mgu(x)$$

dove m è la massa del punto materiale e g è la costante di gravità.
Troviamo quindi

$$v(x) = \sqrt{2g\left(y^1 - u(x)\right)}$$

da cui ricaviamo che per percorrere lungo la curva data uno spazio ds si impiega un tempo

$$dt = \frac{ds}{v} = \sqrt{\frac{1 + |u'(x)|^2}{2g\left(y^1 - u(x)\right)}}dx$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla relazione tra ascissa curvilinea e ascissa cartesiana

$$ds = \sqrt{1 + |u'(x)|^2}dx.$$

Il tempo di percorrenza lungo la curva $u(x)$ sarà dato dal'integrale

$$\mathcal{F}[u] := \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x^1}^{x^2}\sqrt{\frac{1 + |u'(x)|^2}{y^1 - u(x)}}\,dx$$

e il problema di minimo diviene

$$\min_{u\in\mathcal{A}} \mathcal{F}[u] \qquad \text{dove } \mathcal{A} := \left\{u \in C^1\left(\left[x^1, x^2\right]\right);\ u\left(x^1\right) = y^1,\ u\left(x^2\right) = y^2\right\}.$$

L'equazione di DuBois-Reymond (2.21) è

$$\frac{u'^2}{\left(1+u'^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(y^1-u\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\left(1+u'^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(y^1-u\right)^{\frac{1}{2}}} = c.$$

e questa, dopo alcuni calcoli, si riduce a

$$c^2\left(1+u'^2(x)\right)\left(y^1-u(x)\right) = 1.$$

Conviene esprimere la sua soluzione in forma parametrica;
poiché è evidente che $u \le y^1$, possiamo scrivere $u(t) = y^1 - k\,(1-\cos t)$ dove k denota un'opportuna costante positiva. L'equazione precedente diventa allora

$$c^2\left(1+\frac{k^2\sin^2 t}{\dot{x}^2(t)}\right)k\,(1-\cos t) = 1$$

e con la scelta $kc^2 = \dfrac{1}{2}$, otteniamo

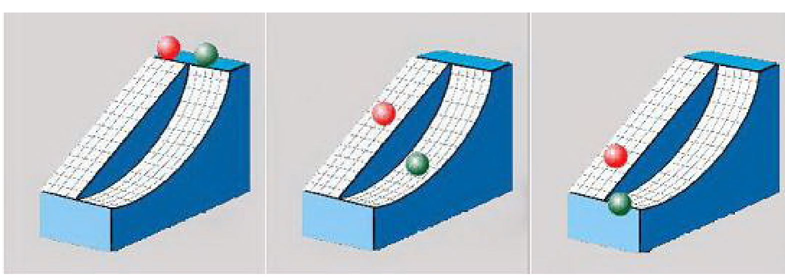
$$\dot{x}(t) = k\,(1-\cos t)\,.$$

Pertanto la soluzione risulta essere una **cicloide**, che in forma parametrica è data da

$$\begin{cases} x(t) &= x^1 + k\,(t-\sin t) \\ u(t) &= y^1 - k\,(1-\cos t)\,, \qquad t\in[0,T]\,, \end{cases}$$

dove le costanti k e T sono determinate dalle condizioni

$$\begin{aligned} x\,(T) &= x^2 \\ u\,(T) &= y^2. \end{aligned}$$



La brachistocrona.

(1697, Johan Bernoulli: **la brachistocrona è la cicloide**.)

La disuguaglianza isoperimetrica in dimensione $n = 2$.

Tra tutte le curve semplici chiuse del piano di assegnata lunghezza L, la circonferenza di lunghezza L racchiude l'area massima.

Questa proprietà è espressa sinteticamente nella *disuguaglianza isoperimetrica.*

$$L^2 \geq 4\pi A, \tag{2.31}$$

dove A è l'area racchiusa da una curva semplice chiusa C di lunghezza L; l'uguaglianza in (2.31) vale se e solo se C è la circonferenza di lunghezza L.

Osservazione 2.3.1. Probabilmente questo problema (*problema isoperimetrico*) è uno dei più antichi in matematica. Possiamo riscrivere (2.31) come problema di minimo. Parametrizziamo la curva semplice chiusa C ($n = 1$, $N = 2$)

$$C = \{(u(x), v(x)) : \ x \in [a, b]\}$$

e poniamo

$$L := L[u, v] = \int_a^b \sqrt{[u'(x)]^2 + [v'(x)]^2}\, dx$$

e

$$A := A[u, v] = \int_a^b u(x)v'(x)\, dx.$$

Allora il problema posto ha la seguente equivalente formulazione variazionale (duale): $\displaystyle\min_{\substack{u,v\in W^{1,1}((a,b))\\ u(a)=u(b),\, v(a)=v(b)}} \{L[u, v] : \ A[u, v] = 1\} = 2\sqrt{\pi}.$

Qui diamo una dimostrazione classica (dovuta a Hurwitz [**17**], [**63**]) di (2.31).

Posto $\mathcal{A} := \left\{u \in W^{1,2}\left((-1, 1)\right) : \ u(-1) = u(1), \ \displaystyle\int_{-1}^{1} u(x)\, dx = 0\right\}$, premettiamo due lemmi.

Lemma 2.3.2 (Disuguaglianza di Wirtinger).
Vale la disuguaglianza

$$\int_{-1}^{1} [u'(x)]^2\ dx \geq \pi^2 \int_{-1}^{1} [u(x)]^2\ dx \quad \forall u \in \mathcal{A}. \tag{2.32}$$

Inoltre l'uguaglianza vale se e solo se

$$u(x) = a\cos(\pi x) + b\sin(\pi x) \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Dim. E' sufficiente provare la (2.32) per $u \in \mathcal{A} \cap C^2\left([-1, 1]\right)$. Questa restrizione può essere successivamente rimossa usando un argomento di densità.

Sia $u(x) = \sum_{\nu=1}^{+\infty} [a_\nu \cos(\nu\pi x) + b_\nu \sin(\nu\pi x)]$.

Osserviamo che il termine $\frac{a_0}{2} = 0$ poiché $\int_{-1}^{1} u(x)\, dx = 0$.

Risulta

$$u'(x) = \pi \sum_{\nu=1}^{+\infty} [-\nu a_\nu \sin(\nu\pi x) + \nu b_\nu \cos(\nu\pi x)] .$$

Per la formula di Parseval otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} [u(x)]^2\, dx &= \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left(a_\nu^2 + b_\nu^2\right), \\ \int_{-1}^{1} [u'(x)]^2\, dx &= \pi^2 \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left(a_\nu^2 + b_\nu^2\right) \nu^2 \end{aligned}$$

da cui segue la disuguaglianza (2.32).
L'uguaglianza in (2.32) vale se e solo se $a_\nu = b_\nu = 0$ per ogni $\nu \geq 2$.
Di conseguenza l'uguaglianza in (2.32) vale se e solo se

$$u(x) = a\cos(\pi x) + b\sin(\pi x), \qquad \text{per ogni } a, b \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Lemma 2.3.3. *Per ogni* $(u, v) \in W^{1,2}\left((-1, 1), \mathbb{R}^2\right)$ *con* $u(-1) = u(1)$ *e* $v(-1) = v(1)$*, vale la disuguaglianza*

$$\int_{-1}^{1} \left\{[u'(x)]^2 + [v'(x)]^2\right\} dx \geq 2\pi \int_{-1}^{1} u(x)v'(x)\, dx. \tag{2.33}$$

Inoltre l'uguaglianza vale se e solo se

$$[u(x) - r_1]^2 + [v(x) - r_2]^2 = r_3^2 \qquad \textit{per ogni } x \in [-1, 1] \tag{2.34}$$

dove $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ *sono costanti.*

Dim. La disuguaglianza (2.33) rimane valida se, posto $r_1 := \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u(x)\, dx$ e $r_2 := \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} v(x)\, dx$, sostituiamo u con $u - r_1$ e v con $v - r_2$; pertanto, possiamo assumere che

$$\int_{-1}^{1} u(x)\, dx = \int_{-1}^{1} v(x)\, dx = 0,$$

e quindi in defintiva che $u, v \in \mathcal{A}$. Proviamo la (2.33) nella forma equivalente

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} \left\{[u'(x)]^2 + [v'(x)]^2 - 2\pi u(x)v'(x)\right\} dx \\ = \;&\int_{-1}^{1} [v'(x) - \pi u(x)]^2\, dx + \int_{-1}^{1} \left\{[u'(x)]^2 - [\pi u(x)]^2\right\} dx \geq 0. \end{aligned}$$

La tesi è provata osservato che il primo termine a destra dell'uguaglianza è ovviamente non negativo, e il secondo termine è non negativo per il lemma 2.3.2 applicato a $u \in \mathcal{A}$.
Per provare il caso dell'uguaglianza, osserviamo che questa vale se e solo se $v'(x) = \pi u(x)$ e $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left\{ [u'(x)]^2 - [\pi u(x)]^2 \right\} dx = 0$, che implica per il lemma 2.3.2

$$\begin{aligned} u(x) &= a\cos(\pi x) + b\sin(\pi x) \qquad \text{e} \\ v(x) &= a\sin(\pi x) - b\cos(\pi x). \end{aligned}$$

Poiché possiamo sostituire u con $u - r_1$ e v con $v - r_2$, abbiamo (2.34) con $r_3 = \sqrt{a^2 + b^2}$. □

Proviamo ora la disuguaglianza isoperimetrica.

Teorema 2.3.4 (Disuguaglianza isoperimetrica).
Posto per ogni $(u, v) \in W^{1,1}\left((a, b), \mathbb{R}^2\right)$ *con* $u(a) = u(b)$ *e* $v(a) = v(b)$

$$\begin{aligned} L := L[u, v] &= \int_a^b \sqrt{[u'(x)]^2 + [v'(x)]^2}\, dx, \\ A := A[u, v] &= \int_a^b u(x)v'(x)\, dx, \end{aligned}$$

vale la (2.31) $$L^2 \geq 4\pi A$$
per ogni $(u, v) \in W^{1,1}\left((a, b), \mathbb{R}^2\right)$ *con* $u(a) = u(b)$ *e* $v(a) = v(b)$.

Inoltre, tra tutte le $(u, v) \in C^1\left([a, b], \mathbb{R}^2\right)$ *con* $u(a) = u(b)$ *e* $v(a) = v(b)$, *l'uguaglianza vale se e solo se*

$$[u(x) - r_1]^2 + [v(x) - r_2]^2 = r_3^2 \qquad \textit{per ogni } x \in [a, b],$$

dove $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ *sono costanti.*

Dim. Proviamo la tesi sotto le ulteriori restrizioni:
$(u, v) \in C^1\left([a, b], \mathbb{R}^2\right)$, $u(a) = u(b)$, $v(a) = v(b)$
(questa restrizione può essere rimossa successivamente con un argomento di densità)
e supponiamo inoltre che [2]

$$[u'(x)]^2 + [v'(x)]^2 > 0 \qquad \text{per ogni } x \in [a, b].$$

[2]Per brevità rinviamo a **[17]** per l'eliminazione di questa restrizione.

Allo scopo di eliminare la radice quadrata in $L[u,v]$, riparametrizziamo la curva con un multiplo della sua lunghezza d'arco, precisamente sia

$$\begin{cases} y & = \theta(x) = -1 + \dfrac{2}{L[u,v]} \displaystyle\int_a^x \sqrt{[u'(t)]^2 + [v'(t)]^2}\, dt \\ \\ \varphi(y) & = u\left(\theta^{-1}(y)\right) \text{ e } \psi(y) = v\left(\theta^{-1}(y)\right). \end{cases}$$

Risulta che: $(\varphi,\psi) \in C^1\left([-1,1],\mathbb{R}^2\right)$, $\varphi(-1) = \varphi(1)$, $\psi(-1) = \psi(1)$ e $\sqrt{[\varphi'(y)]^2 + [\psi'(y)]^2} = \dfrac{L[u,v]}{2}$ per ogni $y \in [-1,1]$

(quindi $\sqrt{[\varphi'(y)]^2 + [\psi'(y)]^2}$ è costante per ogni $y \in [-1,1]$).

Allora abbiamo

$$\begin{aligned} L[u,v] &= \int_{-1}^1 \sqrt{[\varphi'(y)]^2 + [\psi'(y)]^2}\, dy = \left(2\int_{-1}^1 \left\{[\varphi'(y)]^2 + [\psi'(y)]^2\right\}\, dy\right)^{\frac{1}{2}} \\ A[u,v] &= \int_{-1}^1 \varphi(y)\psi'(y)\, dy. \end{aligned}$$

Per il lemma 2.3.3 sappiamo che

$$\int_{-1}^1 \left\{[\varphi']^2 + [\psi']^2\right\}\, dx \geq 2\pi \int_{-1}^1 \varphi\psi'\, dx$$

per ogni $(\varphi,\psi) \in W^{1,2}\left((-1,1),\mathbb{R}^2\right)$ con $\varphi(-1) = \varphi(1)$ e $\psi(-1) = \psi(1)$, da cui segue $(L[u,v])^2 - 4\pi A[u,v] \geq 0$ per ogni $(u,v) \in C^1\left([a,b],\mathbb{R}^2\right)$ con $u(a) = u(b)$ e $v(a) = v(b)$.

L'unicità nel caso dell'uguaglianza segue dal lemma 2.3.3. □

Osservazione 2.3.5. In particolare, abbiamo provato implicitamente che *la disuguaglianza isoperimetrica* (2.31) *è equivalente alla disuguaglianza di Wirtinger* (2.32), grazie alle implicazioni

lemma 2.3.2 ⇒ lemma 2.3.3 ⇒ teorema 2.3.4 ⇒ lemma 2.3.2.

Osservazione 2.3.6. Il procedimento descritto nei due precedenti problemi variazionali è stato il seguente:

se esiste una soluzione del problema variazionale, *allora* essa ha la proprietà . . . ,

prescindendo dalla effettiva prova della esistenza.

In generale, il provare che un problema variazionale ha soluzione, e il descriverne le proprietà sono passi differenti e possono richiedere differenti argomentazioni[3].

[3]Dall'Introduzione in [**14**]:
"A new era in the history of mathematics opened when Gauss proved the fundamental theorem of algebra. Abandoning the futile attempts of his predecessors to solve algebraic equations of higher degree by root extraction, he took a step of general significance by proving merely the existence of the roots in question. For the first time it was clearly understood that the primary task in a mathematical problem is to prove the existence

Nei capitoli successivi di questo Quaderno esponiamo i *metodi diretti nel Calcolo delle Variazioni* il cui primo obiettivo è appunto lo studio dell'esistenza per problemi variazionali relativi a funzionali integrali.

of a solution. To find procedures by which the solution can be explicitly obtained is a further question, distinct from that of existence. Since the beginning of the last century this distinction has played a clarifying role contributing greatly to progress in all fields of mathematics.
Among the existence proofs which dominated the mathematical thinking of this period, the most celebrated and consequential were those based on extremum problems of the calculus of variations and suggested by actual or imagined physical experiments."