CAPITOLO 1

Preliminari

In questo capitolo, allo scopo di fissare la notazione e rendere l'esposizione autosufficiente, presentiamo alcuni dei risultati basilari della misura e integrale di Lebesgue, della misura di Hausdorff, degli spazi di Lebesgue e di Sobolev (in particolare dei risultati sulla convergenza debole in questi spazi), delle funzioni convesse e delle principali proprietà delle funzioni armoniche.

1.1. Alcuni risultati relativi alla misura e all'integrale di Lebesgue. Misura e dimensione di Hausdorff.

DEFINIZIONE 1.1.1. Una famiglia $\mathcal{M}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ si chiama σ-algebra se

(i) $\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{M}$,
(ii) $E \in \mathcal{M} \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus E \in \mathcal{M}$,
(iii) se $\{E_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$, allora $\displaystyle\bigcup_{h\in\mathbb{N}} E_h \in \mathcal{M}$ e $\displaystyle\bigcap_{h\in\mathbb{N}} E_h \in \mathcal{M}$.

Il seguente teorema indica l'esistenza im $\mathbb{R}^n$ di una σ-algebra $\mathcal{M}$ e di una misura su $\mathcal{M}$.

TEOREMA 1.1.2. *In $\mathbb{R}^n$ esiste una σ-algebra $\mathcal{M}$ e una misura*

$$|\cdot| : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$$

con le seguenti proprietà:

(i) *ogni sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, e quindi ogni sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^n$, appartiene a $\mathcal{M}$;*
(ii) *se $\Omega \in \mathcal{M}$ e ha misura nulla, allora ogni sottoinsieme di Ω appartiene a $\mathcal{M}$ e ha misura nulla;*

(iii) *se* $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n;\ a_i < x_i < b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, *allora*
$|\Omega| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$;

(iv) *se* $\{\Omega_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ *e gli insiemi* Ω_h *sono a due a due disgiunti, allora*

$$\left|\bigcup_{h\in\mathbb{N}} \Omega_h\right| = \sum_{h\in\mathbb{N}} |\Omega_h| \quad \textit{(σ-additività o additività numerabile).}$$

Osservazione 1.1.3. Gli insiemi appartenenti alla σ-algebra $\mathcal{M}$ si chiamano insiemi misurabili secondo Lebesgue e la misura $|\cdot|$ si chiama misura di Lebesgue n-dimensionale.

Vale la seguente caratterizzazione degli insiemi misurabili:

$$\Omega \in \mathcal{M} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, A \text{ aperto}, \exists\, K \text{ compatto}, K \subset \Omega \subset A \text{ e } |A \setminus K| < \varepsilon.$$

Osservazione 1.1.4. Si dice che una proprietà vale *quasi ovunque* (q.o.) in $\Omega \in \mathcal{M}$ se è verificata in tutti i punti di Ω tranne che in un sottoinsieme avente misura di Lebesgue nulla.

Definizione 1.1.5. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ misurabile. Una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice misurabile se $u^{-1}(C)$ è misurabile per ogni sottoinsieme chiuso $C \subset \mathbb{R}$.

Osservazione 1.1.6. Valgono le seguenti proprietà:

(i) se u è una funzione continua, allora è misurabile;
(ii) somma e prodotto di funzioni misurabili sono misurabili;
(iii) massimo limite, minimo limite e limiti puntuali di successioni di funzioni misurabili sono misurabili.

Definizione 1.1.7. Una funzione misurabile $s : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice *funzione semplice* se assume un numero finito di valori $a_1, a_2, \ldots, a_k$.
Se s è una funzione semplice che assume i valori $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sugli insiemi misurabili e a due a due disgiunti $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ contenuti in Ω, possiamo scrivere

$$s = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{\Omega_i}.$$

Teorema 1.1.8. *Se* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *è una funzione misurabile allora esiste una successione* $\{s_h\}$ *di funzioni semplici convergente ad* u *in ogni punto di* Ω. *Inoltre, se* u *è non negativa, si può scegliere* $\{s_h\}$ *monotona crescente in* Ω.

Introduciamo ora la definizione di integrale di Lebesgue per una funzione misurabile

$$u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

con Ω insieme misurabile.
Per una funzione semplice s si definisce

$$\int_\Omega s(x)\,dx := \sum_{i=1}^k a_i\,|\Omega_i|$$

con la convenzione che se $\alpha_i = 0$ e $|\Omega_i| = +\infty$, allora $\alpha_i\,|\Omega_i| = 0$.
Per $u \geq 0$ misurabile, definiamo

$$\int_\Omega u(x)\,dx := \sup \int_\Omega s(x)\,dx$$

dove l'estremo superiore è calcolato al variare di s tra tutte le funzioni semplici minori o uguali a u su Ω.
In generale, per una funzione misurabile u, osservato che

$$u = u^+ - u^-$$

dove $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \max\{-u, 0\}$ sono rispettivamente la parte positiva e negativa di u, si definisce

$$\int_\Omega u(x)\,dx := \int_\Omega u^+(x)\,dx - \int_\Omega u^-(x)\,dx$$

con la condizione che almeno uno dei due integrali sia finito.
La funzione u è detta *sommabile* in Ω se entrambi gli integrali sono finiti.
Si dice invece che u è *integrabile* in Ω se u ha un integrale (che può essere anche uguale a $+\infty$ o $-\infty$).
Segue dalla definizione che una funzione misurabile u è sommabile se e solo se $|u|$ lo è.

Teorema 1.1.9 (Beppo Levi o della convergenza monotona).
Sia $\{u_h\}$ una successione di funzioni misurabili, tali che

$$0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \ldots u_h \leq u_{h+1} \leq \ldots.$$

Allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{h\to+\infty} u_h\,dx = \lim_{h\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u_h\,dx.$$

Teorema 1.1.10 (Lemma di Fatou).
Sia $\{u_h\}$ una successione di funzioni non negative e sommabili. Allora [1]

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{h\to+\infty} u_h\,dx \leq \liminf_{h\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u_h\,dx.$$

---

[1] $\liminf\limits_{h\to\infty} v_h := \sup\limits_{\nu\in\mathbb{N}} \left(\inf\limits_{h\geq\nu} v_h\right)$,
$\limsup\limits_{h\to\infty} v_h := \inf\limits_{\nu\in\mathbb{N}} \left(\sup\limits_{h\geq\nu} v_h\right)$.

Teorema 1.1.11 (Lebesgue o della convergenza dominata).
Sia $\{u_h\}$ una successione di funzioni integrabili con

$$u_h \to u \qquad q.o.,$$

e supponiamo inoltre che esista una funzione g sommabile tale che per ogni $h \in \mathbb{N}$

$$|u_h| \le g \qquad q.o..$$

Allora

$$\lim_{h\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u_h \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} u \, dx.$$

Teorema 1.1.12 (Fubini).
Siano

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \ -\infty \le a_i < x_i < b_i \le +\infty, \ \ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

e

$$E_2 = \left\{y \in \mathbb{R}^N : \ -\infty \le c_j < y_j < d_j \le +\infty, \ \ j = 1, 2, \ldots, N\right\}.$$

Sia u sommabile su $E = E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^{n+N}$. Allora

(i) *per quasi ogni $x \in E_1$, la funzione $u(x, \cdot)$ è sommabile in E_2;*
(ii) *la funzione*

$$v(x) = \int_{E_2} u(x, y) \, dy$$

è sommabile in E_1 e risulta

$$\int_E u\,(x, y) \ dx\, dy = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} u\,(x, y) \ dy \right) \, dx.$$

Il teorema fondamentale del calcolo integrale si estende all'integrale di Lebesgue nella forma seguente.

Teorema 1.1.13 (di differenziazione di Lebesgue).
Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ localmente sommabile ($u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$).
Allora per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$ [2]

$$\exists \lim_{\rho\to0^+} \frac{1}{\omega_n \rho^n} \int_{B_\rho(x)} u(y) \, dy = \lim_{\rho\to0^+} \frac{1}{|B_\rho\,(x)|} \int_{B_\rho(x)} u(y) \, dy = u(x),$$

dove ω_n è la misura di Lebesgue della palla unitaria n-dimensionale (tali x si chiamano punti di Lebesgue di u).
In particolare, se u è sommabile in $\mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x u(t) \, dt = u(x) \qquad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}.$$

[2] Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso.
$u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} u \in L^1(K)$ per ogni compatto $K \subset \Omega$;
$B_\rho\,(x)$ indica la palla di centro $x \in \mathbb{R}^n$ e raggio ρ.

Teorema 1.1.14 (Severini, 1910-Egorov, 1911).
Sia $\{u_h\}$ *una successione di funzioni* $u_h : \Omega \to \mathbb{R}$ *misurabili, dove* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *è misurabile con* $|\Omega| < \infty$*, tale che* $u_h \longrightarrow u$ *q.o. in* Ω*. Allora*

(i) *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $K_\varepsilon \subset \Omega$ *compatto tale che* $|\Omega \setminus K_\varepsilon| < \varepsilon$,
(ii) $u_h \rightrightarrows u$ *in* K_ε [3],

((i)+(ii) $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\{u_h\}$ *converge a* u *quasi-uniformemente).*

Dim. Dall'ipotesi segue che la funzione u è misurabile. Definiamo per ogni m, $h \in \mathbb{N}$ fissati, l'insieme

$$\Omega_h^m := \bigcap_{i \geq h} \left\{ x \in \Omega : \, |u_i(x) - u(x)| < \frac{1}{m} \right\}$$

e sia $\Omega^m := \bigcup_h \Omega_h^m$. Dalla definizione degli insiemi Ω_h^m risulta per m fissato $\Omega_1^m \subset \Omega_2^m \subset \ldots \subset \Omega_h^m \subset \ldots$.
Allora per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $h \in \mathbb{N}$ esiste $h_0(m) \in \mathbb{N}$ tale che
$\left|\Omega^m \setminus \Omega^m_{h_0(m)}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2^{m+1}}$.

Posto $A_\varepsilon := \bigcap_m \Omega^m_{h_0(m)}$, valutiamo la misura di $\Omega \setminus A_\varepsilon$. Per questo osserviamo preliminarmente che $|\Omega \setminus \Omega^m| = 0$ per ogni m (in virtù della convergenza q.o. in Ω della successione $\{u_h\}$ a u). Ne deriva che

$$\left|\Omega \setminus \Omega^m_{h_0}\right| = \left|\Omega^m \setminus \Omega^m_{h_0}\right| < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} |\Omega \setminus A_\varepsilon| &= \left|\Omega \setminus \bigcap_m \Omega^m_{h_0(m)}\right| = \left|\bigcup_m \left(\Omega \setminus \Omega^m_{h_0(m)}\right)\right| \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left|\Omega \setminus \Omega^m_{h_0(m)}\right| < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Poiché A_ε è misurabile, esiste un compatto $K_\varepsilon \subset A_\varepsilon$ tale che $|A_\varepsilon \setminus K_\varepsilon| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Ne segue (i). Se $x \in K_\varepsilon$, per ogni $m \in \mathbb{N}$ abbiamo $|u_i(x) - u(x)| < 1/m$ per $i > h_0(m)$ da cui segue (ii). $\square$

Teorema 1.1.15 (Lusin, 1912).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aperto misurabile con* $|\Omega| < \infty$ *e sia* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione misurabile. Allora*

---

[3] D'ora in avanti con la notazione $v_h \rightrightarrows v$ indicheremo la convergenza uniforme di v_h a v.

(i) *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $K_\varepsilon \subset \Omega$ *compatto tale che* $|\Omega \setminus K_\varepsilon| < \varepsilon$,
(ii) u *è continua in* K_ε,

((i)+(ii) $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ u *quasi-continua).*

Dim. Per ogni intero positivo h consideriamo una famiglia numerabile di boreliani disgiunti $\left\{B_h^j\right\}_j \subset \mathbb{R}$ tali che $\mathbb{R} = \bigcup_j B_h^j$ e $\operatorname{diam} B_h^j < 1/h$.
Definiamo $\Omega_h^j := u^{-1}\left(B_h^j\right) \cap \Omega$.
Allora, per ogni h, j, Ω_h^j sono misurabili e $\Omega = \bigcup_j \Omega_h^j$ per ogni $h \in \mathbb{N}$.
Sia $\varepsilon > 0$; per la proprietà di regolarità della misura di Lebesgue, fissati h, j interi positivi, esiste un compatto $K_h^j \subset \Omega_h^j$ tale che $\left|\Omega_h^j \setminus K_h^j\right| < \dfrac{\varepsilon}{2^{h+j}}$.
Pertanto

$$\begin{aligned}\left|\Omega \setminus \bigcup_j K_h^j\right| &= \left|\bigcup_j \Omega_h^j \setminus \bigcup_j K_h^j\right| \\ &\le \left|\bigcup_j \left(\Omega_h^j \setminus K_h^j\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2^h}.\end{aligned}$$

Poiché $\lim_{m\to\infty} \left|\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{m} K_h^j\right| = \left|\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_h^j\right|$, esiste un intero $m_0(h)$ tale che

$$\left|\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{m_0(h)} K_h^j\right| < \frac{\varepsilon}{2^h}.$$

Posto $K_h := \bigcup_{j=1}^{m_0(h)} K_h^j$, abbiamo che K_h è compatto.
Per ogni h, j fissiamo $b_h^j \in B_h^j$ e definiamo la funzione $u_h : K_h \to \mathbb{R}$, ponendo $u_h(x) = b_h^j$ se $x \in K_h^j$ $(j \le m_0(h))$.
Poiché $K_h^1, \ldots, K_h^{m_0(h)}$ sono compatti e disgiunti, le u_h sono funzioni continue.
Posto $K_\varepsilon := \bigcap_h K_h$, abbiamo che K_ε è compatto e

$$|\Omega \setminus K_\varepsilon| \le \sum_{h=1}^{\infty} |\Omega \setminus K_h| < \varepsilon.$$

Inoltre, poiché $|u(x) - u_h(x)| < 1/h$ per ogni $x \in K_h$, risulta che $u_h \rightrightarrows u$ su K_ε e, in quanto limite uniforme di funzioni continue, $u_{|K_\varepsilon}$ è continua. $\square$

Il seguente teorema generalizza il precedente teorema di Lusin

TEOREMA 1.1.16 (SCORZA DRAGONI, 1948 [**66**]).
Siano $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile, con $|\Sigma| < +\infty$, $S \subset \mathbb{R}^s$ e $g(x,y)$ una funzione reale definita in $\Sigma \times S$, misurabile in x per ogni $y \in S$, e uniformemente continua in S per q.o. $x \in \Sigma$ [4].
Allora, per ogni $\delta > 0$ esiste un compatto $K_\delta \subset \Sigma$, tale che

(i) $|\Sigma \setminus K_\delta| < \delta$
(ii) *la restrizione di $g(x,y)$ a $K_\delta \times S$ è continua.*

DIM. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \Sigma$, poniamo

$$w_h(x) := \sup\left\{|g(x,y') - g(x,y'')|;\ y', y'' \in S,\ \ |y' - y''| < \frac{1}{h}\right\}.$$

Essendo per ipotesi $g(x,\cdot)$ uniformemente continua in S per q.o. $x \in \Sigma$, abbiamo

$$w_h(x) \xrightarrow[h\to+\infty]{} 0 \qquad \text{per q.o. } x \in \Sigma.$$

Per il teorema di Severini-Egorov 1.1.14, in corrispondenza di un arbitrario $\delta > 0$ esiste un compatto $K_{1,\delta} \subset \Sigma$, con $|\Sigma \setminus K_{1,\delta}| < \dfrac{\delta}{2}$, tale che $w_h \rightrightarrows 0$ in $K_{1,\delta}$. Ciò vuol dire, in altri termini, che, al variare di $x \in K_{1,\delta}$, $g(x,\cdot)$ è una famiglia di funzioni equicontinue in S.
Sia ora $\widetilde{S} = \{\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, \widetilde{y}_j, \ldots\}$ un insieme numerabile e denso in S e sia $\{\delta_j\}$ una successione di numeri positivi, con $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \delta_j < \frac{\delta}{2}$.
Per il teorema di Lusin 1.1.15, in corrispondenza di ogni $\widetilde{y}_j$ esiste un compatto $\widetilde{K}_j \subset \Sigma$ tale che $\left|\Sigma \setminus \widetilde{K}_j\right| < \delta_j$ e $g(\cdot, \widetilde{y}_j)$ è continua in $\widetilde{K}_j$.

Poniamo $K_{2,\delta} := \displaystyle\bigcap_{j=1}^{+\infty} \widetilde{K}_j$; in $K_{2,\delta}$ tutte le funzioni $g(\cdot, \widetilde{y}_j)$ sono continue e

$$\begin{aligned}
|\Sigma \setminus K_{2,\delta}| &= \left|\Sigma \setminus \bigcap_{j=1}^{+\infty} \widetilde{K}_j\right| = \left|\bigcup_{j=1}^{+\infty} \left(\Sigma \setminus \widetilde{K}_j\right)\right| \le \sum_{j=1}^{+\infty} \left|\Sigma \setminus \widetilde{K}_j\right| \\
&< \sum_{j=1}^{+\infty} \delta_j < \frac{\delta}{2}.
\end{aligned}$$

Posto $K_\delta := K_{1,\delta} \cap K_{2,\delta}$ risulta $|\Sigma \setminus K_\delta| < \delta$. Sia ora $(\{x_h\}, \{y_h\})$ una successione in $K_\delta \times S$ tale che $x_h \to x \in K_\delta$ e $y_h \to y \in S$. Abbiamo:

$$|g(x_h, y_h) - g(x,y)| \le |g(x_h, y_h) - g(x_h, y)| + |g(x_h, y) - g(x,y)|. \tag{1.2}$$

[4] anche, $g : \Sigma \times S \to \mathbb{R}$ funzione di Carathéodory (cfr. definizione 4.1.1)

Il primo termine a destra di (1.2) tende a zero, per $h \to +\infty$, dato che le funzioni $g(x,\cdot)$ sono equicontinue per $x \in K_\delta \subset K_{1,\delta}$. Quanto al secondo termine, abbiamo

$$\begin{aligned} |g(x_h,y)-g(x,y)| \le |g(x,\widetilde{y})-g(x,y)| &+ |g(x_h,\widetilde{y})-g(x,\widetilde{y})| \\ &+ |g(x_h,\widetilde{y})-g(x_h,y)|, \end{aligned} \tag{1.3}$$

dove $\widetilde{y} \in \widetilde{S}$ è scelto in modo che per ogni $x \in K_\delta$ risulti

$$|g(x,\widetilde{y})-g(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(ciò è possibile per la equicontinuità delle funzioni $g(x,\cdot)$ al variare di $x \in K_\delta \subset K_{1,\delta}$).
In questo modo il primo e il terzo termine nel secondo membro di (1.3) risultano entrambi minori di $\frac{\varepsilon}{2}$, mentre il secondo termine tende a zero per $h \to +\infty$ (essendo $g(\cdot,\widetilde{y})$ continua in $K_\delta \subset K_{2,\delta}$). Ne segue

$$\limsup_{h\to+\infty} |g(x_h,y_h)-g(x,y)| < \varepsilon \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

e dunque la tesi. □

La misura di Lebesgue non permette di distinguere tra loro insiemi di misura nulla né di assegnare a questi una dimensione. Per questo scopo sono state introdotte numerose misure. Quella di Hausdorff si è rivelata molto utile nello studio delle equazioni alle derivate parziali.

Misura di Hausdorff k-dimensionale (1918).
Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ e siano k intero positivo con $0 < k \le n$ e $\delta > 0$; poniamo

$$\mathcal{H}^k_\delta(E) := \omega_k 2^{-k} \inf \left\{ \sum_{j=1}^{+\infty} (\mathrm{diam} E_j)^k ;\ E \subset \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j,\ \mathrm{diam} E_j < \delta \right\},$$

dove ω_k è la misura di Lebesgue della palla unitaria k-dimensionale.
Se δ decresce l'estremo inferiore è fatto su una famiglia più piccola di ricoprimento di E, sicché $\mathcal{H}^k_\delta(E)$ cresce (i.e. $0 < \delta' < \delta \Rightarrow \mathcal{H}^k_{\delta'}(E) \ge \mathcal{H}^k_\delta(E)$, quindi $\mathcal{H}^k_\delta(E)$ è monotona non crescente rispetto a δ).
Allora

$$\exists \lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}^k_\delta(E) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^k_\delta(E) := \mathcal{H}^k(E);$$

$\mathcal{H}^k(E)$ è la *misura di Hausdorff k-dimensionale di E*.
Si pone $\mathcal{H}^0(E) :=$ cardinalità di E.

La definizione di misura di Hausdorff si estende a ogni k numero reale positivo (la definizione di ω_k è estesa tramite la funzione gamma di Eulero

$\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} s^{t-1} e^{-s}\, ds \quad (t > 0)\ :\ \omega_k := \pi^{k/2} / \Gamma\left(k/2 + 1\right))$.

Proprietà delle misure di Hausdorff.

(i) Se $E \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile, si ha $\mathcal{H}^n(E) = \mathcal{L}^n(E)$ (dove $\mathcal{L}^n(E)$ è la misura di Lebesgue n-dimensionale di E);

(ii)

$$0 < \mathcal{H}^k(E) < +\infty \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{H}^m(E) = 0 & \forall m > k \\ \\ \mathcal{H}^m(E) = +\infty & \forall m < k; \end{cases}$$

(iii) $\mathcal{H}^k(E + x) = \mathcal{H}^k(E) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ (invarianza per traslazioni);

(iv) $\mathcal{H}^k(\lambda E) = \lambda^k \mathcal{H}^k(E) \quad \forall \lambda > 0$ ($\mathcal{H}^k$ è omogenea di grado k) dove $\lambda E = \{\lambda x;\ x \in E\}$.

Alla luce della proprietà (ii) ha senso porre la seguente definizione di *dimensione di Hausdorff dell'insieme E*

$$\mathcal{H} - \dim(E) := \inf\left\{k \geq 0;\ \mathcal{H}^k(E) = 0\right\}.$$

Teorema 1.1.17 (della divergenza in $\mathbb{R}^n$, Gauss-Green).
Sia $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ compatto con frontiera lipschitziana; sia $u \in C^1\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n\right)$ [5]*, allora*

$$\int_\Omega div\, u(x)\, d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\partial\Omega} u(\xi) \cdot \nu(\xi)\, d\mathcal{H}^{n-1}(\xi),$$

dove $\nu(\xi)$ è il versore normale esterno applicato a $\xi \in \partial\Omega$ (ove definito). Se $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$:

$$\int_\Omega u_{x_i}(x)\, d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\partial\Omega} u(\xi)\nu_i(\xi)\, d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

5

$$u \in C^k\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m\right) \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \begin{array}{l} u \in C^k\left(\Omega; \mathbb{R}^m\right) \text{ e } \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^N,\ |\boldsymbol{\alpha}| \leq k \text{ e } \forall \xi \in \partial\Omega \\ \text{esiste } \displaystyle\lim_{\substack{x \to \xi \\ x \in \Omega}} D^{\boldsymbol{\alpha}} u(x) = D^{\boldsymbol{\alpha}} u(\xi). \end{array}$$

Ricordiamo che

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^N & \text{con } \alpha_i \text{ numeri naturali } (i = 1, \ldots, n); \\ |\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, & D^{\boldsymbol{\alpha}} u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{(\partial x_1)^{\alpha_1} (\partial x_2)^{\alpha_2} \cdots (\partial x_n)^{\alpha_n}}; \\ \boldsymbol{\alpha}! = (\alpha_1!)\,(\alpha_2!) \ldots (\alpha_n!)\,; & \\ \text{se } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n: & x^{\boldsymbol{\alpha}} = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots x_n^{\alpha_n}. \end{array}$$

Teorema 1.1.18 (integrazione per parti).
Sia $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ compatto con frontiera lipschitziana; se $u, v \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, allora

$$\int_\Omega u_{x_i}(x)v(x)\,d\mathcal{L}^n(x) = -\int_\Omega u(x)v_{x_i}(x)\,d\mathcal{L}^n(x) + \int_{\partial\Omega} u(\xi)v(\xi)\nu_i(\xi)\,d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) \qquad (i = 1, \ldots, n)\,.$$

1.2. Spazi di Lebesgue L^m.

Definizione 1.2.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e sia $1 \le m \le \infty$.
Una funzione misurabile $u : \Omega \to \mathbb{R}$ appartiene a $L^m(\Omega)$ se

$$\|u\|_{L^m(\Omega)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_\Omega |u(x)|^m \,dx\right)^{\frac{1}{m}} & \text{se } 1 \le m < \infty \\ \inf\{\alpha : \, |u(x)| \le \alpha \text{ q.o. in } \Omega\} & \text{se } m = \infty. \end{cases}$$

è finito.

Teorema 1.2.2 (Disuguaglianza di Chebyshev).
Sia $u \in L^m(\Omega)$ $(1 \le m < \infty)$; posto $U_t = \{x \in \Omega;\ |u(x)| > t\}$, si ha $|U_t| \le t^{-m} \|u\|^m_{L^m(\Omega)}$.

Dim. L'insieme U_t è misurabile e risulta

$$\int_\Omega |u(x)|^m \,dx \ge \int_{U_t} |u(x)|^m \,dx \ge t^m\,|U_t|\,, \quad \text{da cui la tesi.}$$

□

Nel seguente teorema elenchiamo le più importanti proprietà degli spazi $L^m(\Omega)$ che useremo in seguito.

Teorema 1.2.3. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e sia $1 \le m \le \infty$. Valgono:*

(i) $\|\cdot\|_{L^m(\Omega)}$ *è una norma e $L^m(\Omega)$ munito di questa norma è uno spazio di Banach. Lo spazio $L^2(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare dato da*

$$(u|v) = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx.$$

(ii) (immersione continua)
Se $|\Omega| < \infty$ e se $m, q \in \mathbb{N}$ con $1 \le m < q \le \infty$, risulta:

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^m(\Omega) \quad \text{e} \quad \|u\|_{L^m(\Omega)} \le |\Omega|^{\frac{1}{m}-\frac{1}{q}} \|u\|_{L^q(\Omega)} \quad \forall u \in L^q(\Omega).$$

(iii) (INTERPOLAZIONE)
Se $u \in L^m(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ *con* $1 \leq m < q \leq \infty$, *allora:*

$$u \in L^r(\Omega) \quad \forall r \in \mathbb{R} \text{ tale che } m \leq r \leq q$$

e inoltre:

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^m(\Omega)} \cdot \|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)} \text{ dove } \theta \in [0,1] \text{ e } \frac{1}{r} = \frac{\theta}{m} + \frac{1-\theta}{q}.$$

(iv) (TEOREMA DI RIESZ) [6]
Lo spazio duale di $L^m(\Omega)$, *indicato con* $(L^m(\Omega))'$ *può essere identificato con* $L^{m'}(\Omega)$, *dove* $\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1$, *per* $1 \leq m < \infty$.

Questo significa che: se $\Phi \in (L^m(\Omega))'$ *per* $1 \leq m < \infty$ *esiste un'unica* $u \in L^{m'}(\Omega)$ *tale che*

$$(\Phi|f) = \Phi(f) = \int_{\Omega} u(x) f(x)\, dx, \quad \forall f \in L^m(\Omega)$$

e inoltre

$$\|u\|_{L^{m'}(\Omega)} = \|\Phi\|_{(L^m(\Omega))'}.$$

Questo risultato è falso per $m = \infty$ *(cioè se* $m' = 1$*).*

(v) $L^m(\Omega)$ *è separabile per* $1 \leq m < \infty$ *e riflessivo per* $1 < m < \infty$.

(vi) *Le funzioni di classe* $C_0^\infty(\Omega)$ *sono dense in* $L^m(\Omega)$. *Più precisamente:* $\forall u \in L^m(\Omega)$

$$\exists \{u_h\} \subset C_0^\infty(\Omega) \text{ tale che } \lim_{h\to\infty} \|u_h - u\|_{L^m(\Omega)} = 0.$$

Questo risultato è falso per $m = \infty$.

OSSERVAZIONE 1.2.4. Utilizzando i precedenti risultati sulla dualità abbiamo:

$$(L^m(\Omega))' = L^{m'}(\Omega) \quad \text{se } 1 < m < \infty,$$

$$\left(L^2(\Omega)\right)' = L^2(\Omega), \quad \left(L^1(\Omega)\right)' = L^\infty(\Omega), \quad L^1(\Omega) \subsetneqq (L^\infty(\Omega))'.$$

Riassumendo

---

[6] Sia $\left(X, |\cdot|_X\right)$ un spazio di Banach.
Lo spazio duale topologico di X, indicato con X', è definito da

$$X' := \left\{ l : X \to \mathbb{R};\ l \text{ lineare e } \|l\|_{X'} := \sup_{x\neq 0} \frac{|l(x)|}{|x|_X} < +\infty \right\}.$$

Lo spazio X si dice *riflessivo* se $\left(X'\right)' = X$.
Lo spazio X si dice *separabile* se X contiene un sottoinsieme numerabile denso.

Spazio di Lebesgue	Riflessivo	Separabile	Spazio Duale
$L^m(\Omega)$ $1 < m < \infty$	SI	SI	$L^{m'}(\Omega)$
$L^1(\Omega)$	NO	SI	$L^\infty(\Omega)$
$L^\infty(\Omega)$	NO	NO	contiene strettamente $L^1(\Omega)$

Introduciamo ora i concetti di CONVERGENZA FORTE E DEBOLE NEGLI SPAZI $L^m(\Omega)$.

DEFINIZIONE 1.2.5. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e sia $1 \leq m \leq \infty$.

(i) La successione $\{u_h\}$ converge fortemente a u in $L^m(\Omega)$ se $u_h, u \in L^m(\Omega)$ e se
$$\lim_{h\to\infty} \|u_h - u\|_{L^m(\Omega)} = 0.$$
In questo caso scriviamo: $u_h \to u$ in $L^m(\Omega)$.

(ii) Se $1 \leq m < \infty$, la successione $\{u_h\}$ converge debolmente a u in $L^m(\Omega)$ se $u_h, u \in L^m(\Omega)$ e se
$$\lim_{h\to\infty} \int_\Omega [u_h(x) - u(x)]\, w(x)\, dx = 0,\ \forall w \in L^{m'}(\Omega).$$
In questo caso scriviamo: $u_h \rightharpoonup u$ in $L^m(\Omega)$.

(iii) Se $m = \infty$, la successione $\{u_h\}$ converge debolmente* a u in $L^\infty(\Omega)$ se $u_h, u \in L^\infty(\Omega)$ e se
$$\lim_{h\to\infty} \int_\Omega [u_h(x) - u(x)]\, w(x)\, dx = 0,\ \forall w \in L^1(\Omega).$$
In questo caso scriviamo: $u_h \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in $L^\infty(\Omega)$.

OSSERVAZIONE 1.2.6.

a. Parliamo di convergenza debole* in $L^\infty(\Omega)$ e non di convergenza debole poiché $L^1(\Omega) \subsetneqq (L^\infty(\Omega))'$, sebbene la convergenza debole in $L^m(\Omega)$ e la convergenza debole* in $L^\infty(\Omega)$ abbiano la stessa forma.
b. Il limite (debole o forte) è unico.
c. E' ovvio che
$$u_h \to u \text{ in } L^m(\Omega) \Rightarrow \begin{cases} u_h \rightharpoonup u \,\text{in}\, L^m(\Omega) & \text{se } 1 \leq m < \infty \\ \\ u_h \overset{*}{\rightharpoonup} u \,\text{in}\, L^\infty(\Omega) & \text{se } m = \infty. \end{cases}$$

TEOREMA 1.2.7. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato. Valgono:*

(i) *Se $u_h \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in $L^\infty(\Omega)$, allora $u_h \rightharpoonup u$ in $L^m(\Omega)$ $1 \leq m < \infty$.*
(ii) *Se $u_h \to u$ in $L^m(\Omega)$, allora $\|u_h\|_{L^m(\Omega)} \to \|u\|_{L^m(\Omega)}$, $1 \leq m \leq \infty$.*

(iii) *Se* $1 \leq m < \infty$ *e se* $u_h \rightharpoonup u$ *in* $L^m(\Omega)$*, allora esiste una costante* $c > 0$ *tale che* $\|u_h\|_{L^m(\Omega)} \leq c$ *ed inoltre* $\|u\|_{L^m(\Omega)} \leq \liminf_{h\to\infty} \|u_h\|_{L^m(\Omega)}$.

Questo risultato vale anche se $m = \infty$ *e se* $u_h \overset{*}{\rightharpoonup} u$ *in* $L^\infty(\Omega)$.

(iv) (compattezza debole in spazi di Lebesgue riflessivi) *Se* $1 < m < \infty$ *e se* $\{u_h\} \subset L^m(\Omega)$ *è limitata (cioè esiste una costante* $c > 0$ *tale che* $\|u_h\|_{L^m(\Omega)} \leq c$*), allora esistono un'estratta* $\{u_{h_j}\}$ *ed una funzione* $u \in L^m(\Omega)$ *tali che* $u_{h_j} \rightharpoonup u$ *in* $L^m(\Omega)$.

Questo risultato vale anche se $m = \infty$ *(dunque avremo* $u_{h_j} \overset{*}{\rightharpoonup} u$ *in* $L^\infty(\Omega)$*).*

(v) *Se* $1 \leq m \leq \infty$ *e se* $u_h \to u$ *in* $L^m(\Omega)$*, allora esistono un'estratta* $\{u_{h_j}\}$ *ed una funzione* $g \in L^m(\Omega)$ *tali che* $u_{h_j} \to u$ *q.o. e* $|u_{h_j}| \leq g$ *q.o. in* Ω.

Osservazione 1.2.8.

a. Confrontando (ii) e (iii) del teorema 1.2.7, osserviamo che la norma è semicontinua inferiormente rispetto alla convergenza debole, mentre la norma è continua rispetto alla convergenza forte.
b. La parte più interessante del teorema 1.2.7 è (iv). Questa dice, infatti, che come in $\mathbb{R}^n$, per il teorema di Bolzano-Weierstrass, da ogni successione limitata se ne può estrarre una convergente, così in $L^m(\Omega)$ vale un risultato analogo a patto di sostituire la convergenza forte con quella debole (il risultato non vale in $L^m(\Omega)$ con la convergenza forte).
c. Il risultato (iv) è falso se $m = 1$ in quanto $L^1(\Omega)$ non è uno spazio riflessivo.

Teorema 1.2.9 (Lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aperto e sia* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tale che*

$$\int_\Omega u(x)\psi(x)\,dx = 0 \quad \textit{per ogni } \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Allora $u = 0$ *q.o. in* Ω.

Dim. Osservato che Ω è unione numerabile di compatti, la tesi si riduce a provare che fissato un arbitrario compatto $K \subset \Omega$ si ha $u = 0$ q.o. in K. Definiamo

$$v(x) = \begin{cases} \text{segno}\, u(x) & \text{se } x \in K \\ \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus K \end{cases}$$

dove

$$\operatorname{segno} u(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } u(x) > 0 \\ 0 & \text{se } u(x) = 0 \\ -1 & \text{se } u(x) < 0. \end{cases}$$

Abbiamo che $v \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ed ha supporto compatto $K \subset \Omega$. Dall'ipotesi e dal teorema 1.2.3(vi) otteniamo facilmente che vale

$$0 = \int_K u(x)v(x)\,dx = \int_K |u(x)|\,dx$$

e quindi $u = 0$ q.o. in K. □

Corollario 1.2.10. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aperto e sia* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tale che*

$$\int_\Omega u(x)\psi(x)\,dx = 0 \quad \textit{per ogni } \psi \in C_0^\infty(\Omega) \textit{ con } \int_\Omega \psi(x)\,dx = 0.$$

Allora $u =$*costante q.o. in* Ω.

Dim. Fissiamo una $v \in C_0^\infty(\Omega)$ con $\int_\Omega v(x)\,dx = 1$ e sia $w \in C_0^\infty(\Omega)$ arbitraria; definiamo

$$\psi(x) := w(x) - \left[\int_\Omega w(y)\,dy\right] v(x).$$

Allora $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\displaystyle\int_\Omega \psi(x)\,dx = 0$, pertanto per l'ipotesi

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega u(x)\psi(x)\,dx \\ &= \int_\Omega u(x)w(x)\,dx - \int_\Omega v(x)u(x)\,dx \cdot \int_\Omega w(y)\,dy \\ &= \int_\Omega u(x)w(x)\,dx - \int_\Omega v(y)u(y)\,dy \cdot \int_\Omega w(x)\,dx \\ &= \int_\Omega \left[u(x) - \int_\Omega v(y)u(y)\,dy\right] w(x)\,dx. \end{aligned}$$

Per il teorema 1.2.9 abbiamo

$$u(x) = \int_\Omega v(y)u(y)\,dy = \text{costante} \qquad \text{per q.o. } x \in \Omega.$$

□

Con $L^m(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$ indichiamo l'insieme delle $u : \Omega \to \mathbb{R}^\nu$, $u = \left(u^1, \ldots, u^\nu\right)$ con $u^i \in L^m(\Omega)$ per ogni $i = 1, \ldots, \nu$.

1.3. Spazi di Sobolev $W^{1,m}$.

Prima di definire gli spazi di Sobolev, diamo la il concetto di derivata debole. Sia $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, allora $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ è la derivata debole di u rispetto a x_α ($\alpha = 1, \dots, n$) se e solo se

$$\int_\Omega v(x)\psi(x)\,dx = -\int_\Omega u(x) D_\alpha \psi(x)\,dx \quad \text{per ogni } \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Nel seguito scriveremo (con abuso di notazione) $v = D_\alpha u$.
Per il teorema 1.2.9, se una derivata debole esiste essa è unica (q.o.).

Definizione 1.3.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e sia $1 \le m \le \infty$.

(i) Indichiamo con $W^{1,m}(\Omega)$ lo spazio vettoriale delle funzioni $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in L^m(\Omega)$ aventi derivate parziali deboli $D_\alpha u \in L^m(\Omega)$ per ogni $\alpha = 1, \dots, n$. Muniamo questo spazio della seguente norma

$$\|u\|_{W^{1,m}(\Omega)} := \left(\|u\|^m_{L^m(\Omega)} + \|\nabla u\|^m_{L^m(\Omega,\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{m}} \quad \text{se } 1 \le m < \infty$$

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} := \max\left\{ \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)} \right\} \quad \text{se } m = \infty.$$

Se Ω è limitato e convesso $W^{1,\infty}(\Omega) = C^{0,1}(\overline{\Omega}) = \text{Lip}(\overline{\Omega})$ (cfr. nota 7).

(ii) Indichiamo con $W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$ l'insieme delle funzioni $u : \Omega \to \mathbb{R}^\nu$, $u = (u^1, \dots, u^\nu)$, con $u^i \in W^{1,m}(\Omega)$ per ogni $i = 1, \dots, \nu$.

(iii) Se $1 \le m < \infty$, poniamo $W_0^{1,m}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{1,m}(\Omega)}$. Se Ω è limitato, diciamo -con abuso di linguaggio- che se $u \in W_0^{1,m}(\Omega)$, allora $u \in W^{1,m}(\Omega)$ e $u = 0$ su $\partial\Omega$.

(iv) Scriviamo $u \in u_0 + W_0^{1,m}(\Omega)$ se $u, u_0 \in W^{1,m}(\Omega)$ e $u - u_0 \in W_0^{1,m}(\Omega)$.

(v) Poniamo $W_0^{1,\infty}(\Omega) := W^{1,\infty}(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega)$.

(vi) Se $k \in \mathbb{N}$, indichiamo con $W^{k,m}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni $u : \Omega \to \mathbb{R}$ aventi deriate parziali deboli $D^{\boldsymbol{\alpha}} u \in L^m(\Omega)$ per ogni multi indice $\boldsymbol{\alpha}$ con $|\boldsymbol{\alpha}| = j$, $0 \le j \le k$. Muniamo questo spazio della seguente norma

$$\|u\|_{W^{k,m}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{0 \le |\boldsymbol{\alpha}| \le k} \|D^{\boldsymbol{\alpha}} u\|^m_{L^m(\Omega)} \right)^{\frac{1}{m}} & \text{se } 1 \le m < \infty \\ \max_{0 \le |\boldsymbol{\alpha}| \le k} (\|D^{\boldsymbol{\alpha}} u\|_{L^\infty(\Omega)}) & \text{se } m = \infty. \end{cases}$$

(vii) Se $1 \le m < \infty$, poniamo $W_0^{k,m}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{k,m}(\Omega)}$ e

$W_0^{k,\infty}(\Omega) := W^{k,\infty}(\Omega) \cap W_0^{k,1}(\Omega)$.

(viii) $W^{1,m}(\Omega)$ è separabile per $1 \leq m < \infty$ e riflessivo per $1 < m < \infty$.

TEOREMA 1.3.2 (RADEMACHER).
Sia u localmente lipschitziana in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Allora u è differenziabile q.o. in Ω.

Introduciamo i concetti di CONVERGENZA FORTE E DEBOLE IN $W^{1,m}(\Omega)$.

DEFINIZIONE 1.3.3. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e sia $1 \leq m \leq \infty$.

(i) La successione $\{u_h\}$ converge fortemente a u in $W^{1,m}(\Omega)$ se $u_h, u \in W^{1,m}(\Omega)$ e se

$$\lim_{h\to\infty} \|u_h - u\|_{W^{1,m}(\Omega)} = 0.$$

(ii) Se $1 \leq m < \infty$, la successione $\{u_h\}$ converge debolmente a u in $W^{1,m}(\Omega)$ se $u_h, u \in W^{1,m}(\Omega)$ e se

$$u_h \rightharpoonup u \text{ in } L^m(\Omega) \text{ e } \nabla u_h \rightharpoonup \nabla u \text{ in } L^m(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

(iii) Se $m = \infty$, la successione $\{u_h\}$ converge debolmente* a u in $W^{1,\infty}(\Omega)$ se $u_h, u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e se

$$u_h \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ in } L^\infty(\Omega) \text{ e } \nabla u_h \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla u \text{ in } L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

In $W^{1,m}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ le precedenti definizioni di convergenza si intendono verificate in ogni compatto $K \subset \Omega$.
E' evidente che l'estensione di una $u \in W^{1,m}(\Omega)$ a tutto $\mathbb{R}^n$ ponendo $u = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, non garantisce che essa sia in $W^{1,m}(\mathbb{R}^n)$. Questo perché l'estensione banale a tutto $\mathbb{R}^n$ può creare discontinuità su $\partial\Omega$ tali che la funzione estesa non abbia derivate parziali prime deboli in $L^m(\mathbb{R}^n)$.
Una corretta estensione di $u \in W^{1,m}(\Omega)$ che "preservi le derivate deboli attraverso $\partial\Omega$" è data dal seguente teorema

TEOREMA 1.3.4 (DI ESTENSIONE, CALDERÓN).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con frontiera lipschitziana. Sia $1 \leq m \leq \infty$ e sia $V \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato tale che $\Omega \subset\subset V$. Allora esiste un operatore $\mathcal{E}$ lineare e continuo:

$$\mathcal{E} : W^{1,m}(\Omega) \to W^{1,m}(\mathbb{R}^n)$$

tale che $\forall u \in W^{1,m}(\Omega)$ risulta

(i) $\mathcal{E}u = u$ *q.o. in* Ω
(ii) $\mathcal{E}u$ *ha supporto contenuto in* V
(iii) $\|\mathcal{E}u\|_{W^{1,m}(\mathbb{R}^n)} \leq c\,\|u\|_{W^{1,m}(\Omega)}$, $c = c(m, \Omega, V) > 0$.

TEOREMA 1.3.5 (IMMERSIONI CONTINUE PER $W^{1,m}(\Omega)$).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con frontiera lipschitziana. Valgono:

(i) Immersione continua di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg

Se $1 \le m < n$*:* $\quad W^{1,m}(\Omega) \hookrightarrow L^{m^*}(\Omega), \quad m^* = \dfrac{nm}{n-m}$

$\|u\|_{L^{m^*}(\Omega)} \le c\,\|u\|_{W^{1,m}(\Omega)}\ \forall u \in W^{1,m}(\Omega)$

con $c = c(m,n,\Omega) > 0$.

(ii) Caso limite

Se $m = n$*:* $\quad W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1,+\infty[$

$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le c\,\|u\|_{W^{1,n}(\Omega)}\ \forall u \in W^{1,n}(\Omega)$

con $c > 0$.

(iii) Immersione continua di Morrey [7]

Se $m > n$*:* $\quad W^{1,m}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}), \quad \gamma = 1 - \dfrac{n}{m}$

$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \le c\,\|u\|_{W^{1,m}(\Omega)}\ \forall u \in W^{1,m}(\Omega)$

con $c = c(m,n,\Omega) > 0$*, essendo*

$\max\limits_{\overline{\Omega}} |u| \le c\,\|u\|_{W^{1,m}(\Omega)}$,

$|u(x) - u(y)| \le c\,|x-y|^{1-\frac{n}{m}}\,\|\nabla u\|_{L^m(\Omega,\mathbb{R}^n)}$ *per ogni* $x, y \in \Omega$.

Osservazione 1.3.6. Se $1 \le m < n$ risulta:

$$W^{1,m}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \le q \le m^*.$$

L'immersione in (i) del teorema 1.3.5 è tuttavia la migliore, poiché $L^{m^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ per ogni $1 \le q \le m^*$.

Proposizione 1.3.7 (Diseguaglianza di Poincaré in $W_0^{1,m}(\Omega)$, $1 \le m < \infty$). *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aperto limitato. Allora:*

$\exists\, c = c(n,m,\Omega) > 0$ *tale che* $\|u\|_{L^m(\Omega)} \le c\,\|\nabla u\|_{L^m(\Omega,\mathbb{R}^n)}\quad \forall u \in W_0^{1,m}(\Omega)$.

---

[7] Sia $0 < \sigma \le 1$. Una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è hölderiana con esponente σ (lipschitziana se $\sigma = 1$) se la seminorma, detta coefficiente di Hölder di u,

$$[u]_{\sigma,\Omega} := \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\sigma}} < +\infty.$$

$[u]_{\sigma,\Omega}$ non è una norma perché è zero per ogni funzione costante.
Scriveremo $u \in C^{0,\sigma}\left(\overline{\Omega}\right)$ per indicare che u è limitata ed hölderiana in Ω.
Lo spazio $C^{0,\sigma}\left(\overline{\Omega}\right)$ è di Banach munito della norma

$$\|u\|_{C^{0,\sigma}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + [u]_{\sigma,\Omega}$$

(per dimostrarlo usare il teorema di Ascoli-Arzelà 1.3.13).
Sia $k \in \mathbb{N}$,

$u \in C^{k,\sigma}\left(\overline{\Omega}\right) \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad u$ e le sue derivate fino all'ordine k sono continue e limitate in $\overline{\Omega}$,
e $\quad D^\alpha u \in C^{0,\sigma}\left(\overline{\Omega}\right)$ per ogni α con $|\alpha| = k$.

Proposizione 1.3.8 (Disuguaglianza di Poincaré in $W^{1,m}(\Omega)$, $1 \leq m < \infty$).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con frontiera lipschitziana. Allora:
$\exists\, c = c(n, m, \Omega) > 0$ tale che

$$\int_\Omega \left| u(x) - \fint_\Omega u(y)\, dy \right|^m dx \leq c \int_\Omega |\nabla u|^m \, dx \;\; \forall u \in W^{1,m}(\Omega) \quad {}^{8}.$$

Inoltre, se $m < n$ si ha

$$\left\| u - \fint_\Omega u \right\|_{L^{m^*}(\Omega)} \leq c(n, m, \Omega) \, \|\nabla u\|_{L^m(\Omega, \mathbb{R}^n)} \quad \forall u \in W^{1,m}(\Omega) .$$

La proposizione successiva fornisce una disuguaglianza del tipo Poincaré-Sobolev per le funzioni di $W^{1,m}(\Omega)$ (non necessariamente nulle su $\partial\Omega$), purché si annullino su un insieme di misura positiva.

Proposizione 1.3.9. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con frontiera lipschitziana. Se $m < n$, per ogni $u \in W^{1,m}(\Omega)$ che si annulla su un insieme A di misura positiva, risulta*

$$\|u\|_{L^{m^*}(\Omega)} \leq c \left(\frac{|\Omega|}{|A|} \right)^{\frac{1}{m^*}} \cdot \|\nabla u\|_{L^m(\Omega, \mathbb{R}^n)} .$$

Corollario 1.3.10. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto con $|\Omega| < +\infty$; siano $m, r \geq 1$ e $t = \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} \geq 0$. Allora esiste $c = c(n, r)$ tale che*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq c \, \|\nabla u\|_{L^m(\Omega, \mathbb{R}^n)} \, |\Omega|^t \quad \text{per ogni } u \in W_0^{1,m}(\Omega).$$

Dim. Poniamo

$$s = \begin{cases} 1 & \text{se } rn \leq r + n \\ \frac{rn}{r+n} & \text{se } rn > r + n \end{cases}$$

Allora

$$1 \leq s \leq m, \qquad s < n \qquad \text{e} \qquad s^* \geq r.$$

Dal teorema di immersione di Lebesgue 1.2.3(ii) e dal teorema di immersione di Sobolev 1.3.5 otteniamo:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^r(\Omega)} &\leq \|u\|_{L^{s^*}(\Omega)} \cdot |\Omega|^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s^*}} = \|u\|_{L^{s^*}(\Omega)} \, |\Omega|^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s} + \frac{1}{n}} \\ &\leq c \, \|\nabla u\|_{L^m(\Omega, \mathbb{R}^n)} \, \|\Omega|^{\frac{1}{r} - \frac{1}{m} + \frac{1}{n}} . \end{aligned}$$

□

Affrontiamo il problema della “compattezza” in spazi funzionali che useremo in seguito. Un primo teorema di compattezza è dovuto a G. Ascoli (1884) e C. Arzelà (1894/95).

[8] $\fint_\Omega v(x)\, dx := \dfrac{1}{|\Omega|} \displaystyle\int_\Omega v(x)\, dx =$ media integrale di v su Ω.

Premettiamo le seguenti definizioni:

Sia $u_h : \Omega \to \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{N}$ una successione di funzioni.

Definizione 1.3.11.
$\{u_h\}$ equilimitata in $\Omega \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists M > 0$ tale che $\sup\limits_{x\in\Omega} |u_h(x)| \le M \quad \forall h \in \mathbb{N}$.

Definizione 1.3.12.
$\{u_h\}$ equicontinua in $\Omega \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta_\varepsilon > 0$ tale che $|x - y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |u_h(x) - u_h(y)| < \varepsilon$
$\forall x, \, y \in \Omega, \forall h \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.3.13 (Ascoli-Arzelà).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato e sia $\{u_h\}$ una successione di funzioni $u_h : \Omega \to \mathbb{R}$, equilimitata ed equicontinua.
Allora esiste una sottosuccessione $\{u_{h_j}\}$ di $\{u_h\}$ e una funzione continua u, tale che

(i) $u_{h_j}(x) \to u(x)$ *per ogni* $x \in \Omega$;
(ii) $u_{h_j} \rightrightarrows u$ *sui compatti contenuti in* Ω.

Dim.

(i) Indichiamo con $\mathcal{R}_\Omega$ l'insieme dei punti di Ω aventi coordinate razionali. $\mathcal{R}_\Omega$ è numerabile e denso in Ω.
Sia $x_1 \in \mathcal{R}_\Omega$. Poiché la successione di numeri reali $\{u_h(x_1)\}$ è limitata, per il teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione $\{u_{h1}(x_1)\}$ convergente a un numero reale $u(x_1)$.
Consideriamo ora la successione $\{u_{h1}\}$, estratta di $\{u_h\}$; sia $x_2 \in \mathcal{R}_\Omega$. Poiché la successione di numeri reali $\{u_{h1}(x_2)\}$ è limitata, per il teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione $\{u_{h2}(x_2)\} \to u(x_2)$.
Proseguendo il procedimento di estrazione successiva, costruiamo infinite successioni -la j-esima delle quali è denotata con $\{u_{hj}\}$- tali che
   - ogni successione è estratta della precedente;
   - per ogni j fissato, la successione di numeri reali $\{u_{hj}(x_j)\}$ converge a un numero reale $u(x_j)$;
   - per ogni j fissato, $u_{hj}(x_m) \to u(x_m)$ per ogni $m = 1, \ldots, j-1$.

Consideriamo quindi la successione "diagonale" $\{u_{jj}\}$ avente al j-esimo posto la j-esima funzione della j-esima successione.

$$\begin{array}{cccccccc}
u_{11}(x_1) & & u_{21}(x_1) & & u_{31}(x_1) & \cdots & u_{j1}(x_1) & \cdots \\
& \searrow & & & & & & \\
u_{12}(x_2) & & u_{22}(x_2) & & u_{32}(x_2) & \cdots & u_{j2}(x_2) & \cdots \\
& & & \searrow & & & & \\
u_{13}(x_3) & & u_{23}(x_3) & & u_{33}(x_3) & \cdots & u_{j3}(x_3) & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \searrow & \vdots & \\
u_{1j}(x_j) & & u_{2j}(x_j) & & u_{3j}(x_j) & \cdots & u_{jj}(x_j) & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \searrow
\end{array}$$

Osserviamo che $\{u_{jj}\}$ è un'estratta della successione iniziale e $\{u_{jj}(x)\}$ converge per ogni $x \in \mathcal{R}_\Omega$.
Sia ora $x \in \Omega \setminus \mathcal{R}_\Omega$. Poiché $\mathcal{R}_\Omega$ è denso in Ω, per ogni $0 < \varepsilon < 1$ esiste $x_\varepsilon \in \mathcal{R}_\Omega$ tale che $|x - x_\varepsilon| < \varepsilon$. Pertanto, dalla disuguaglianza triangolare e dall'ipotesi di equicontinuità, segue:

$$\begin{aligned}
|u_{jj}(x) - u_{kk}(x)| &\leq |u_{jj}(x) - u_{jj}(x_\varepsilon)| + |u_{jj}(x_\varepsilon) - u_{kk}(x_\varepsilon)| \\
&\quad + |u_{kk}(x_\varepsilon) - u_{kk}(x)| \\
&< 2\varepsilon + |u_{jj}(x_\varepsilon) - u_{kk}(x_\varepsilon)|\,.
\end{aligned}$$

Poiché $x_\varepsilon \in \mathcal{R}_\Omega$ e $\{u_{jj}(x_\varepsilon)\}$ è convergente, esiste $\nu(x_\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande tale che $|u_{jj}(x_\varepsilon) - u_{kk}(x_\varepsilon)| < \varepsilon$ per ogni $j, k > \nu(x_\varepsilon)$.
Perciò, per ogni tale j e k abbiamo:

$$|u_{jj}(x) - u_{kk}(x)| < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Questo implica che, per ogni $x \in \Omega \setminus \mathcal{R}_\Omega$, $\{u_{jj}(x)\}$ è una successione (di numeri reali) di Cauchy, quindi convergente.
In definitiva esiste una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $u_{jj}(x) \to u(x)$ per ogni $x \in \Omega$.
Inoltre, da $|u(x) - u(y)| = \lim\limits_{j\to\infty} |u_{jj}(x) - u_{jj}(y)|$, per ogni x, $y \in \Omega$, e dall'equicontinuità della successione $\{u_{jj}\}$ segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$|x - y| < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; |u(x) - u(y)| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x,\, y \in \Omega.$$

(ii) Dimostriamo ora che la successione $\{u_{jj}\}$ converge uniformemente in ogni compatto K di Ω.
Sia $K \subset \Omega$ compatto e fissiamo $\varepsilon > 0$. Ovviamente $K \subset \bigcup\limits_{x\in\Omega} B_\varepsilon(x)$ e, per compattezza, esistono $x_1, \ldots, x_k \in \Omega$ tali che $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} B_\varepsilon(x_i)$.
Selezioniamo un $\nu(k) \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande tale che $|u_{jj}(x_i) - u(x_i)| < \varepsilon$ per ogni $j > \nu(k)$, per ogni $i = 1, \ldots, k$. Poiché per ogni $x \in K$ esiste una palla $B_\varepsilon(x_i)$ che lo contiene, dall'ipotesi di

equicontinuità, abbiamo:

$$\begin{aligned} |u_{jj}(x) - u(x)| &\leq |u_{jj}(x) - u_{jj}(x_i)| + \left|u_{jj}(x_i) - u_(x_i)\right| \\ &\quad + |u(x_i) - u(x)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

□

Più in generale sussiste il seguente risultato.

TEOREMA 1.3.14 (COMPATTEZZA IN $C^0(X,Y)$ [9]).
Sia X uno spazio topologico separabile e sia (Y,d) uno spazio metrico completo. Sia $U \subset C^0(X,Y)$ con $U \neq \emptyset$ tale che

(i) *U è equicontinuo in X;*
(ii) *per ogni $x \in X$ la chiusura dell'insieme $\{u(x);\ u \in U\}$ è un sottoinsieme compatto di Y.*

Allora ogni successione $\{u_h\} \subset U$ ammette un'estratta convergente -puntualmente in X ed uniformemente sui compatti di X- ad una funzione $u \in C^0(X,Y)$.

Ai risultati di immersione compatta per $W^{1,m}(\Omega)$ premettiamo

DEFINIZIONE 1.3.15. Siano X e Y due spazi di Banach. Diciamo che X è immerso con compattezza in Y (e scriviamo $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$) se

(i) $X \hookrightarrow Y$ ossia $\exists c > 0$ tale che $\|x\|_Y \leq c\,\|x\|_X$ $\forall x \in X$
(ii) ogni successione limitata in X ammette un'estratta convergente in Y.

TEOREMA 1.3.16 (IMMERSIONI COMPATTE PER $W^{1,m}(\Omega)$, RELLICH, 1930-KONDRACHOV, 1945).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con frontiera lipschitziana. Valgono

(i) *Se $1 \leq m < n$: $W^{1,m}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, m^*[$.*
(ii) *Se $m = n$: $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$.*
(iii) *Se $m > n$: $W^{1,m}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$.*

DIM.

---

[9] $v \in C^0(X,Y) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} v : X \to Y$ continua.
Per ogni $x \in X$,
l'insieme U è equicontinuo in x $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists V(x)$, intorno di x, tale che $\mathrm{d}(u(t), u(x)) < \varepsilon\ \ \forall t \in V(x)$ e $\forall u \in U$.

(i) Sia $1 \leq q < m^*$.

1. Intanto, per l'immersione continua di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg 1.3.5(i), $W^{1,m}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, ossia $\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c\,\|u\|_{W^{1,m}(\Omega)}$.
2. Rimane allora da provare che se $\{u_h\}$ è una successione limitata di $W^{1,m}(\Omega)$ esiste un'estratta $\left\{u_{h_j}\right\}$ di Cauchy in $L^q(\Omega)$. Per il teorema di estensione 1.3.4 possiamo supporre $\Omega = \mathbb{R}^n$ e u_h a supporto compatto in $V \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato. Possiamo inoltre supporre
$$\sup_{h\in\mathbb{N}} \|u_h\|_{W^{1,m}(V)} < +\infty. \tag{1.4}$$
3. Studiamo dapprima le funzioni regolarizzate
$$u_h^\varepsilon := \rho_\varepsilon * u_h \quad (\varepsilon > 0,\, h \in \mathbb{N})$$
dove ρ_ε è l'usuale mollificatore definito da
$$\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (\mathrm{supp}\rho_\varepsilon \subset \overline{B_\varepsilon(0)}),$$
$$\rho(x) = \begin{cases} ce^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$
e c è una costante tale che $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx = 1$. Possiamo supporre anche che le u_h^ε abbiano supporto contenuto in V.
4. Proviamo che
$$u_h^\varepsilon \to u_h \quad \text{in } L^q(V) \quad \text{per } \varepsilon \to 0^+ \tag{1.5}$$
uniformemente in h.
Consideriamo inizialmente il caso $q = 1$. Osserviamo preliminarmente che se $u_h \in C^1(V)$, allora
$$\begin{aligned} u_h^\varepsilon(x) - u_h(x) &= \int_{B_1(0)} \rho(y)\left[u_h(x-\varepsilon y) - u_h(x)\right]\,dy \\ &= \int_{B_1(0)} \rho(y) \int_0^1 \frac{d}{dt} u_h(x - \varepsilon t y)\,dt\,dy \\ &= -\varepsilon \int_{B_1(0)} \rho(y) \int_0^1 Du_h(x-\varepsilon t y)\cdot y\,dt\,dy. \end{aligned}$$
Pertanto
$$\begin{aligned} &\int_V \left|u_h^\varepsilon(x) - u_h(x)\right|\,dx \\ \leq\ & \varepsilon \int_{B_1(0)} \rho(y) \int_0^1 \int_V \left|Du_h(x-\varepsilon t y)\right|\,dx\,dt\,dy \\ \leq\ & \varepsilon \int_V \left|Du_h(z)\right|\,dz. \end{aligned}$$

Per densità tale stima vale anche se $u_h \in W^{1,m}(V)$. Essendo V limitato, per il teorema di immersione continua negli spazi di Lebesgue 1.2.3(ii), abbiamo

$$\|u_h^\varepsilon - u_h\|_{L^1(V)} \leq \varepsilon \|Du_h\|_{L^1(V,\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon c \|Du_h\|_{L^m(V,\mathbb{R}^n)} .$$

Dall'ipotesi (1.4) segue

$$u_h^\varepsilon \to u_h \quad \text{in } L^1(V) \text{ per } \varepsilon \to 0^+ \tag{1.6}$$

uniformemente in h.

Per estendere il risultato ad un arbitrario $1 \leq q < m^*$, utilizzando la diseguaglianza di interpolazione 1.2.3(iii), otteniamo

$$\|u_h^\varepsilon - u_h\|_{L^q(V)} \leq \|u_h^\varepsilon - u_h\|_{L^1(V)}^\theta \cdot \|u_h^\varepsilon - u_h\|_{L^{m^*}(V)}^{1-\theta}$$

dove $\dfrac{1}{q} = \theta + \dfrac{1-\theta}{m^*}$, $0 < \theta < 1$.

Di conseguenza, dalla diseguaglianza di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg 1.3.5(i) e da (1.4),

$$\|u_h^\varepsilon - u_h\|_{L^q(V)} \leq c \|u_h^\varepsilon - u_h\|_{L^1(V)}^\theta$$

con la costante c che non dipende da ε; quindi l'asserto (1.5) segue da (1.6).

5. Proviamo ora che per ogni $\varepsilon > 0$ (fissato) la successione $\{u_h^\varepsilon\}$ è equilimitata ed uniformemente equicontinua.
   Infatti, se $x \in \mathbb{R}^n$, allora

$$\begin{aligned} |u_h^\varepsilon(x)| &\leq \int_{B_\varepsilon(x)} \rho_\varepsilon(x-y)\,|u_h(y)|\,dy \leq \|\rho_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \cdot \|u_h\|_{L^1(V)} \\ &\leq \frac{c}{\varepsilon^n} < +\infty \end{aligned}$$

   per ogni $h \in \mathbb{N}$. Analogamente

$$|Du_h^\varepsilon(x)| \leq \|D\rho_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \cdot \|u_h\|_{L^1(V)} \leq \frac{c}{\varepsilon^{n+1}} < +\infty$$

   per ogni $h \in \mathbb{N}$. Pertanto $\{u_h^\varepsilon\}$ è equicontinua perché equilipschitziana.
6. Fissiamo ora $\delta > 0$. Proviamo che esiste $\left\{u_{h_j}\right\}$ estratta da $\{u_h\}$ tale che

$$\limsup_{j,k\to\infty} \left\|u_{h_j} - u_{h_k}\right\|_{L^q(V)} \leq \delta. \tag{1.7}$$

   Infatti per (1.5) scegliamo $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo tale che

$$\|u_h^\varepsilon - u_h\|_{L^q(V)} \leq \frac{\delta}{2} \quad \text{per ogni } h \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

   Osservato che per il punto 2 le $\{u_h\}$, e quindi le $\{u_h^\varepsilon\}$, hanno supporto nel fissato aperto limitato V e che per il punto 5 $\{u_h^\varepsilon\}$ è uniformemente equicontinua, per il criterio di compattezza di Ascoli-Arzelà 1.3.13, esiste $\left\{u_{h_j}^\varepsilon\right\}$ convergente uniformemente su V.

In particolare

$$\limsup_{j,k\to\infty} \left\| u^{\varepsilon}_{h_j} - u^{\varepsilon}_{h_k} \right\|_{L^q(V)} = 0. \tag{1.9}$$

Ma allora (1.8) e (1.9) implicano

$$\limsup_{j,k\to\infty} \left\| u_{h_j} - u_{h_k} \right\|_{L^q(V)} \le \delta$$

cioè la (1.7).

7. Infine, usando la (1.7) con $\delta = 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dots$ e con un procedimento diagonale, otteniamo un'estratta $\{u_{h_l}\}$ che soddisfa:

$$\limsup_{l,k\to\infty} \| u_{h_l} - u_{h_k} \|_{L^q(V)} = 0.$$

(ii) Poiché $m^* > m$ e $m^* \to +\infty$ per $m \to n$, si ha

$$W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$$

per ogni $q \in [1, +\infty[$.

(iii) segue dall'immersione di Morrey 1.3.5(iii) e dal criterio di compattezza di Ascoli-Arzelà 1.3.13.

□

Osservazione 1.3.17. Poiché $m^* > m$ abbiamo in particolare

$$W^{1,m}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^m(\Omega)$$

per ogni $1 \le m \le +\infty$.
Non è inutile osservare che

$$W^{1,m}_0(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^m(\Omega)$$

anche se non si assume che la frontiera di Ω sia lipschitziana.

Osservazione 1.3.18. Per $q = m^*$ non si ha necessariamente l'immersione compatta (per questo motivo m^* è chiamato *esponente critico di Sobolev*). Basta a tal proposito considerare il seguente controesempio.
Sia $n \ge 3$ e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato. Consideriamo la successione di palle aperte $B_{r_i}(a_i)$ a due a due disgiunte con $B_{r_i}(a_i) \subset \Omega$ e $0 < r_i \le 1$. Sia $\rho \in C^\infty_0(B_1(0))$.
Poniamo, per ogni i, $\rho_i(x) = r_i^{1-\frac{n}{2}} \rho\left(\dfrac{x-a_i}{r_i}\right)$, funzione ottenuta traslando e dilatando ρ.
Evidentemente $\rho_i \in C^\infty_0(B_{r_i}(a_i))$ per ogni i e

$$\begin{aligned} \|\rho_i\|_{L^m(\Omega)} &= r_i^{1-\frac{n}{2}+\frac{n}{m}} A^0_m, \\ \|D\rho_i\|_{L^m(\Omega,\mathbb{R}^n)} &= r_i^{-\frac{n}{2}+\frac{n}{m}} A^1_m, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} A_m^0 &= \|\rho\|_{L^m(B_1(0))}\,, \\ A_m^1 &= \|D\rho\|_{L^m(B_1(0),\mathbb{R}^n)}\,. \end{aligned}$$

Se consideriamo $m = 2$, si ha

$$\|\rho_i\|_{W^{1,2}(\Omega)} = r_i^{1-\frac{n}{2}+\frac{n}{2}} A_2^0 + r_i^{-\frac{n}{2}+\frac{n}{2}} A_2^1 \leq A_2^0 + A_2^1 < +\infty.$$

Quindi $\{\rho_i\}$ è lmitata in $W^{1,2}(\Omega)$.
D'altra parte per $m = 2^*$, si ha

$$\|\rho_i\|_{L^{2^*}(\Omega)} = r_i^{1-\frac{n}{2}+\frac{n}{2^*}} A_{2^*}^0 = A_{2^*}^0$$

da cui segue, poiché le funzioni ρ_i hanno supporti disgiunti, che

$$\|\rho_i - \rho_j\|_{L^{2^*}(\Omega)} = \left[\|\rho_i\|_{L^{2^*}(B_{r_i}(a_i))}^{2^*} + \|\rho_j\|_{L^{2^*}(B_{r_j}(a_j))}^{2^*}\right]^{\frac{1}{2^*}} = 2^{\frac{1}{2^*}} A_{2^*}^0 > 0.$$

Pertanto la successione $\{\rho_i\}$ non può avere un'estratta convergente in $L^{2^*}(\Omega)$.

Osservazione 1.3.19. Una semplice estensione del teorema 1.3.16 mostra che per $W^{k,m}(\Omega)$ (k intero positivo $k \geq 1$) vale l'immersione compatta

$$W^{k,m}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{per } km < n,\ 1 \leq q < \frac{nm}{n-km}.$$

Il corollario successivo afferma che se una successione converge debolmente in $W^{1,m}(\Omega)$, essa converge fortemente in $L^m(\Omega)$.

Corollario 1.3.20. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con frontiera lipschitziana e sia $1 \leq m \leq \infty$.*

(i) *Se $1 \leq m < \infty$:*

$$u_h \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,m}(\Omega) \;\Rightarrow\; u_h \to u \text{ in } L^m(\Omega).$$

(ii) *Se $m = \infty$:*

$$u_h \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ in } W^{1,\infty}(\Omega) \;\Rightarrow\; u_h \to u \text{ in } L^\infty(\Omega).$$

Dim. Proviamo la (i).
La successione $\{u_h\}$ è limitata in $W^{1,m}(\Omega)$ e quindi, per il teorema 1.3.16, da ogni sua sottosuccessione possiamo estrarre una sottosuccessione convergente in $L^q(\Omega)$ $(q < m^*)$ a una funzione v.
Poiché d'altra parte $u_h \rightharpoonup u$ in $L^m(\Omega)$, si ha $v = u$, e di conseguenza tutta la successione converge a u fortemente in $L^q(\Omega)$ $(q < m^*)$ e quindi in $L^m(\Omega)$.
La (ii) si prova in modo analogo. □

1.4. Funzioni assolutamente continue.

Definizione 1.4.1. Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$;
$u \in AC(I)$ (u Assolutamente Continua in I, nel senso di Vitali) $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0$ tale che $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} |u(b_i) - u(a_i)| < \varepsilon$ per ogni k intero positivo e per ogni famiglia di k-sottointervalli disgiunti $[a_i, b_i] \subset I$ tali che la somma delle loro ampiezze sia minore di δ.

Vale il seguente teorema:

Teorema 1.4.2. *Se I è un intervallo aperto di $\mathbb{R}$, allora $AC(I) = W^{1,1}(I)$ e più precisamente:*

(i) *ogni $u \in AC(I)$ ha derivata classica u' q.o. (Teorema di Lebesgue (1904)) che appartiene a $L^1(I)$ e, considerata come elemento di $L^1(I)$, u' è la derivata debole di u;*
(ii) *ogni $u \in W^{1,1}(I)$, a meno di modifiche su un insieme di misura nulla, è una funzione assolutamente continua;*
(iii) *$u \in AC(I) \Leftrightarrow u$ è q.o. derivabile in senso classico, $u' \in L^1(I)$ e vale il teorema fondamentale del calcolo integrale*
$$u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t)\, dt \qquad \forall x, y \in I.$$

1.5. Funzioni convesse.

Definizione 1.5.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso. Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è convessa se
per ogni $x, y \in \Omega$ e per ogni $0 \leq t \leq 1$, vale:
$$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y). \tag{1.10}$$

Teorema 1.5.2 (Iperpiani di supporto).
Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ convessa. Allora per ogni $x \in \Omega$ esiste $r \in \mathbb{R}^n$ tale che
$$f(y) \geq f(x) + r \cdot (y - x) \qquad \textit{per ogni } y \in \Omega. \tag{1.11}$$

Osservazione 1.5.3.

(i) L'applicazione $y \mapsto f(x) + r \cdot (y - x)$ determina l'*iperpiano di supprto* di f in x. La disuguaglianza (1.11) implica che il grafico di f si trova "al di sopra" dell'iperpiano di supporto.

Se f è convessa in Ω, allora f è localmente lipschitziana in Ω.
Se f è differenziabile in x, risulta $r = D\,f(x)$.

(ii) Se $f \in C^2(\Omega)$, allora f è convessa se e solo se $D^2 f \geq 0$.
Se $f \in C^2(\Omega)$, f è uniformemente convessa se $D^2 f \geq \theta I$ con la costante $\theta > 0$, cioè

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} f_{x_\alpha x_\beta}(x)\xi_\alpha \xi_\beta \geq \theta\,|\xi|^2 \quad (x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n)\,.$$

Teorema 1.5.4 (Disuguaglianza di Jensen).
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato. Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sommabile. Vale:

$$f\left(\fint_\Omega u(x)\,dx\right) \leq \fint_\Omega f(u(x))\,dx. \tag{1.12}$$

Dim. Poiché f è convessa, per ogni $p \in \mathbb{R}$ esiste $r \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(q) \geq f(p) + r(q-p) \qquad \text{per ogni } q \in \mathbb{R}.$$

Siano $p = \fint_\Omega u(x)\,dx$, $q = u(x)$, allora:

$$f(u(x)) \geq f\left(\fint_\Omega u(x)\,dx\right) + r\left(u(x) - \fint_\Omega u(x)\,dx\right).$$

Integrando su Ω si ha la tesi. □

1.6. Compattezza debole in spazi riflessivi e teorema di Mazur.

Abbiamo già ricordato che gli spazi di Lebesgue $L^m(\Omega)$ e di Sobolev $W^{k,m}(\Omega)$ sono spazi di Banach riflessivi per $1 < m < \infty$.
Il teorema 1.2.7(iv) è contenuto nel seguente teorema generale:

Teorema 1.6.1 (compattezza debole in spazi riflessivi).
Sia X uno spazio di Banach riflessivo e sia $\{u_h\} \subset X$ limitata. Allora esistono un'estratta $\{u_{h_j}\}$ ed $u \in X$ tale che $u_{h_j} \rightharpoonup u$ in X [10].

Definizione 1.6.2. Sia X uno spazio topologico. Una funzione $\mathcal{G} : X \to \mathbb{R}$ si dice semicontinua inferiormente (nel seguito *s.c.i.*) se per ogni $t \in \mathbb{R}$ il sottolivello

$$\mathcal{G}_t = \{u \in X : \mathcal{G}[u] \leq t\}$$

è chiuso.

[10] $v_h \rightharpoonup v$ in $X \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \langle w, v_h \rangle_{X',X} \to \langle w, v \rangle_{X',X}$ per ogni $w \in X'$
(dove X' è lo spazio duale topologico di X e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X',X}$ denota la dualità tra Xe X', cioè $\langle w, v \rangle_{X',X}$ indica il valore di $w \in X'$ in $v \in X$).

Se X verifica il primo assioma di numerabilità, nozioni topologiche ammettono generalmente delle caratterizzazioni sequenziali. Diamo la definizione di semicontinuità inferiore in termini di successioni (sequenziale).

Definizione 1.6.3. Sia X uno spazio topologico verificante il primo assioma di numerabilità. Una funzione $\mathcal{G} : X \to \mathbb{R}$ si dice semicontinua inferiormente per successioni o sequenzialmente semicontinua inferiormente (nel seguito *seq. s.c.i.*) in $u \in X$ se per ogni successione $\{u_h\}$ convergente ad u vale la seguente disuguaglianza

$$\mathcal{G}[u] \leq \liminf_{h\to\infty} \mathcal{G}[u_h].$$

Diremo che $\mathcal{G}$ è seq. s.c.i. in X se $\mathcal{G}$ è seq. s.c.i. in ogni $u \in X$.

Lemma 1.6.4. *Sia X uno spazio metrico. Le condizioni seguenti sono equivalenti:*

(i) *$\mathcal{G}$ è seq. s.c.i. in X;*
(ii) *per ogni $t \in \mathbb{R}$ il sottolivello $\mathcal{G}_t = \{u \in X : \mathcal{G}[u] \leq t\}$ è chiuso.*

Osservazione 1.6.5. Sia $\{\mathcal{G}_\alpha : \alpha \in I\}$ una famiglia di funzioni s.c.i. in X, dove I è un insieme arbitrario di indici, non necessariamente numerabile. Allora il funzionale definito da

$$\mathcal{G}[u] = \sup_{\alpha\in I} \mathcal{G}_\alpha [u]$$

è s.c.i. in X.

Dim. Per brevità diamo la dimostrazione nel caso sequenziale.
Fissati $u \in X$ e $u_h \to u$, si ha

$$\mathcal{G}_\alpha [u] \leq \liminf_{h\to\infty} \mathcal{G}_\alpha [u_h] \leq \liminf_{h\to\infty} \mathcal{G}[u_h].$$

Prendendo l'estremo superiore per $\alpha \in I$ risulta

$$\mathcal{G}[u] \leq \liminf_{h\to\infty} \mathcal{G}[u_h].$$

□

In particolare, l'estremo superiore di una famiglia di funzioni continue è s.c.i..

Teorema 1.6.6 (Mazur).
Sia X uno spazio di Banach e sia $C \subset X$. Allora:

(i) *C debolmente chiuso* $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ *C fortemente chiuso;*
(ii) *C fortemente chiuso e convesso* $\Rightarrow$ *C debolmente chiuso.*

Corollario 1.6.7. *Siano X uno spazio di Banach e $\mathcal{G} : X \to \mathbb{R}$ convesso. Allora*

$$\mathcal{G} \text{ debolmente s.c.i.} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{G} \text{ fortemente s.c.i.}.$$

1.7. Proprietà elementari delle funzioni armoniche.

Qui riportiamo alcune proprietà elementari delle funzioni armoniche, limitandoci a quelle che sono usate nei successivi capitoli 3 e 7.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto.

Definizione 1.7.1. Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

$$u \text{ armonica in } \Omega \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad u \in C^2(\Omega) \ \text{ e } \ \Delta u = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = 0 \text{ in } \Omega.$$

(equazione di Laplace)

Proposizione 1.7.2 (Funzioni armoniche che dipendono dalla distanza da un punto fissato (soluzioni radiali dell'equazione di Laplace)).
Fissiamo $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ e sia

$$0 < r = \left|x - x^0\right| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_i^0\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

la distanza euclidea di $x \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{x^0\right\}$ da x^0; sia

$$u\left(\left|x - x^0\right|\right) = \varphi(r)$$

e imponiamo che sia armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \left\{x^0\right\}$. Poiché

$$\partial_j u = \varphi'(r) \cdot \partial_j r = \varphi'(r) \cdot \frac{x_j - x_j^0}{r}$$

$$\partial_{jj} u = \varphi''(r) \cdot \frac{\left(x_j - x_j^0\right)^2}{r^2} + \varphi'(r) \cdot \frac{r^2 - \left(x_j - x_j^0\right)^2}{r^3}$$

(dove $\varphi'(r) = \dfrac{d\varphi}{dr}(r)$ e $\varphi''(r) = \dfrac{d^2\varphi}{dr^2}(r)$) si ha

$$0 = \Delta u = \varphi''(r) + \frac{n-1}{r} \cdot \varphi'(r) = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr}\left(r^{n-1} \cdot \varphi'(r)\right)$$

(i.e. il Δ quando agisce su una funzione radiale $\varphi = \varphi(r)$ si trasforma nell'operatore $\dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{n-1}{r} \cdot \dfrac{d}{dr}$ o equivalentemente nell'operatore

$\frac{1}{r^{n-1}} \cdot \frac{d}{dr}\left(r^{n-1} \cdot \frac{d}{dr}\right)$).
Allora, poiché $r \in]0, +\infty[$,

$$r^{n-1} \cdot \varphi'(r) = c.$$

Ne segue che

$$\varphi(r) = \begin{cases} a \log r + b & se\ n = 2 \\ ar^{2-n} + b & se\ n \geq 3 \end{cases}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, *sono funzioni armoniche in* $R^n \setminus \{x^0\}$.

Teorema 1.7.3 (Uguaglianza del valor medio per funzioni armoniche).
Sia u *armonica in* Ω*; allora:*

$$\forall \overline{B_R}(y) \subset \Omega \qquad si\ ha: \qquad u(y) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(y)} u(\xi)\, d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) \tag{1.13}$$

o (equivalentemente)

$$u(y) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(y)} u(x)\, dx$$

(i.e. u *verifica la proprietà del valor medio).*

Dim. Sia $\rho \in]0, R]$ e consideriamo $B_\rho(y)$. Osservato che $u \in C^2\left(\overline{B_\rho}(y)\right)$ e che u è armonica in $B_\rho(y)$, dall'identità

$$\int_{\partial B_\rho(y)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)\, d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) = \int_{B_\rho(y)} \Delta u(x)\, dx = 0$$

otteniamo che

$$0 = \int_{\partial B_\rho(y)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)\, d\mathcal{H}^{n-1}(\xi),$$

e quindi, posto $\omega = \frac{\xi - y}{\rho}$, dove $\rho = |\xi - y|$, abbiamo

$$d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) = d\mathcal{H}^{n-1}(y + \rho\omega) = \rho^{n-1} d\mathcal{H}^{n-1}(\omega),$$

pertanto

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{|\omega|=1} \frac{du}{d\rho}(y + \rho\omega)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y + \rho\omega) \\ &= \rho^{n-1} \frac{d}{d\rho} \int_{|\omega|=1} u(y + \rho\omega)\, d\mathcal{H}^{n-1}(\omega) \\ &= \rho^{n-1} \frac{d}{d\rho} \left[\rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho(y)} u(\xi)\, d\mathcal{H}^{n-1}(\xi)\right]. \end{aligned}$$

Ne segue che la funzione $\Phi(\rho) := \rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho(y)} u(\xi)\, d\mathcal{H}^{n-1}(\xi)$ è costante in $]\,0, R]$, quindi

$$\rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho(y)} u(\xi)\, d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) = R^{1-n} \int_{\partial B_R(y)} u(\xi)\, d\mathcal{H}^{n-1}(\xi)$$

e, passando al limite per $\rho \to 0^+$, otteniamo la tesi.
D'altra parte, da

$$\rho^{n-1} u(y) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_\rho(y)} u(\xi)\, d\mathcal{H}^{n-1}(\xi),$$

integrando rispetto a ρ tra 0 e R abbiamo

$$u(y) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(y)} u(x)\, dx.$$

$\square$

Definizione 1.7.4. Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

$\underset{\text{(superarmonica)}}{u \text{ subarmonica}}$ in $\Omega \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} u \in C^0(\Omega)$ e $\forall \overline{B_R}(y) \subset \Omega$:

$$u(y) \underset{(\geq)}{\leq} \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(y)} u(\xi)\, d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) \text{ oppure}$$
$$u(y) \underset{(\geq)}{\leq} \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(y)} u(x)\, dx.$$

(i.e. u verifica una disuguaglianza del valor medio).

Osservazione 1.7.5.

$$u \in C^2(\Omega) \text{ e } \Delta u \geq 0 \text{ in } \Omega \quad \Rightarrow \quad u \text{ subarmonica in } \Omega.$$

Nel seguito indicheremo con $\sigma(\Omega)$ la classe delle funzioni subarmoniche in Ω.

Osservazione 1.7.6.

$$u \in C^2(\Omega) \text{ e } \Delta u \leq 0 \text{ in } \Omega \quad \Rightarrow \quad u \text{ superarmonica in } \Omega.$$

Osservazione 1.7.7.

$$u \text{ subarmonica in } \Omega \quad \Rightarrow \quad -u \text{ superarmonica in } \Omega.$$

Nel seguito proveremo che se $u \in C^0(\Omega)$ e verifica la proprietà del valor medio, allora u è armonica in Ω. Pertanto si ha

$$u \text{ armonica in } \Omega \quad \Rightarrow \quad u \text{ subarmonica e superarmonica in } \Omega.$$

Teorema 1.7.8 (Principio del massimo forte per funzioni subarmoniche).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto connesso e sia $u \in \sigma(\Omega)$. Se

$$\exists \quad y \in \Omega \qquad \textit{tale che} \qquad u(y) = \sup_{\Omega} u,$$

allora u è costante in Ω.

Dim. Poniamo $M := u(y) = \sup_{\Omega} u$ e $\Omega_M := \{x \in \Omega \ ; \ u(x) = M\}$, osserviamo che, essendo $\Omega_M \neq \emptyset$ ($y \in \Omega_M$ per ipotesi) e che, essendo $\Omega_M = u^{-1}(\{M\})$, Ω_M è chiuso relativamente ad Ω.
D'altra parte, preso $z \in \Omega_M$ (i.e. $u(z) = M$), per la disuguaglianza del valor medio applicata alla funzione subarmonica $u - M$, abbiamo, per $\overline{B_R}(z) \subset \Omega$,

$$0 = u(z) - M \leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(z)} [u(x) - M] \, dx \leq 0$$

cioè $u(x) - M = 0$ per ogni $x \in B_R(z)$, per cui $B_R(z) \subset \Omega_M$. Allora Ω_M è anche aperto relativamente ad Ω, che è connesso, pertanto $\Omega_M = \Omega$, cioè $u(x) = M$ in Ω. □

Teorema 1.7.9 (Principio del minimo forte per funzioni superarmoniche).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e sia u superarmonica in Ω. Se

$$\exists \quad y \in \Omega \qquad \textit{tale che} \qquad u(y) = \inf_{\Omega} u,$$

allora u è costante in Ω.

Dim. Per l'osservazione 1.7.7 la funzione $-u$ è subarmonica in Ω e, da $u(y) = \inf_{\Omega} u$, abbiamo

$$-u(y) = -\inf_{\Omega} u = \sup_{\Omega} (-u) .$$

Applicando il teorema 1.7.8 a $-u$ otteniamo la tesi. □

Teorema 1.7.10 (Principio del massimo debole per funzioni subarmoniche).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato e sia $u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ subarmonica in Ω. Allora

$$\sup_{\overline{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

Teorema 1.7.11 (Principio del minimo debole per funzioni superarmoniche).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato e sia $u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ superarmonica in Ω. Allora

$$\inf_{\overline{\Omega}} u = \inf_{\partial\Omega} u.$$

Teorema 1.7.12 (del massimo (per il) modulo).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato e sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ armonica in Ω. Allora

(i) $\inf\limits_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup\limits_{\partial\Omega} u \ \forall x \in \overline{\Omega}$,
(ii) $\sup\limits_{\overline{\Omega}} |u| = \sup\limits_{\partial\Omega} |u|$.

Dim. (i) è evidente per i teoremi 1.7.10 e 1.7.11.
Per provare (ii) è sufficiente osservare che $|u| = \max\{u, -u\}$, oppure che, essendo u armonica (regolare) allora $|u|$ è subarmonica (regolare). $\square$

Problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato; assegnate $f \in C^0(\Omega)$ e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, risolvere il Problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson significa determinare, se esiste, una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ tale che

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega & \qquad\qquad \text{(equazione di Poisson)} \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega & \qquad\qquad \text{(condizione al contorno, di Dirichlet)} \end{cases}$$

Teorema 1.7.13 (unicità).
Se esiste una $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ soluzione del Problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson, essa è unica.

Dim. Se $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ sono soluzioni dello stesso problema, la funzione $w = u_1 - u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ e verifica

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Allora, essendo

$$0 = \inf_{\partial\Omega} w \leq w(x) \leq \sup_{\partial\Omega} w = 0 \qquad \forall x \in \overline{\Omega},$$

abbiamo che $w \equiv 0$ in $\overline{\Omega}$, da cui $u_1 = u_2$ (oppure, dal teorema del massimo modulo $\max\limits_{\overline{\Omega}} |w| = \max\limits_{\partial\Omega} |w| = 0 \Rightarrow w = 0$). $\square$

Teorema 1.7.14 (esistenza, unicità e dipendenza continua della soluzione dal dato φ per il Problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace in $B_R(0)$).
Assegnata $\varphi \in C^0(\partial B_R(0))$, la funzione definita in $B_R(0)$ da:

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R^n} \int_{\partial B_R(0)} \frac{\varphi(\xi)}{|\xi - x|^n} \, d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) \qquad \forall x \in B_R(0)$$

è armonica in $B_R(0)$; inoltre, per ogni $\xi_0 \in \partial B_R(0)$

$$\exists \qquad \lim_{\substack{x \to \xi_0 \\ x \in B_R(0)}} u(x) = \varphi(\xi_0).$$

Pertanto

$$u \in C^2(B_R(0)) \cap C^0\left(\overline{B_R}(0)\right) \qquad e \qquad u = \varphi \;\; su \;\; \partial B_R(0).$$

Infine, per il teorema del massimo modulo:

$$\sup_{\overline{B_R}(0)} |u| = \sup_{\partial B_R(0)} |\varphi|.$$

"Caratterizzazione" delle funzioni armoniche.
Nel teorema 1.7.3 abbiamo provato che ogni funzione armonica soddisfa l'uguaglianza del valor medio.
Viceversa, vale il seguente teorema

Teorema 1.7.15. *Se $u \in C^0(\Omega)$ e verifica la proprietà del valor medio, allora u è armonica in Ω.*

Dim. E' sufficiente provare che u è armonica in ogni $B_R(y)$ tale che $\overline{B_R}(y) \subset \Omega$.
Fissata $\overline{B_R}(y) \subset \Omega$, osserviamo che $u \in C^0(\partial B_R(y))$, pertanto il problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B_R(y) \\ v = u & \text{su } \partial B_R(y) \end{cases}$$

ha, per il teorema 1.7.14, un'unica soluzione $v \in C^2(B_R(y)) \cap C^0\left(\overline{B_R}(y)\right)$.
Consideriamo

$$w := v - u \in C^0\left(\overline{B_R}(y)\right)$$

e osserviamo che w (e quindi anche $-w$) verifica la proprietà del valor medio (per la linearità dell'integrale, in quanto v verifica (1.13) perché armonica e u la verifica per ipotesi), pertanto, per il principio del massimo debole 1.7.10

$$\sup_{\overline{B_R}(y)} |w| = \sup_{\partial B_R(y)} |w| = 0;$$

ne segue che $w = 0$, cioè $u \equiv v$ in $\overline{B_R}(y)$, quindi u è armonica regolare in $B_R(y)$. $\square$

TEOREMA 1.7.16. *Una funzione armonica ha derivate di qualsiasi ordine, e queste sono funzioni armoniche.*

TEOREMA 1.7.17. *Sia $\{u_h\}$ una successione di funzioni armoniche in Ω tale che $u_h \rightrightarrows u$ in Ω.*
Allora u è armonica in Ω.

DIM. In quanto limite uniforme di funzioni continue, u è continua.
Inoltre,

$$\forall h \in \mathbb{N} \text{ e } \forall \overline{B_R}(y) \subset \Omega : \quad u_h(y) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(y)} u_h(x)\, dx$$

e,passando al limite per $h \to +\infty$, otteniamo

$$u(y) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(y)} u(x)\, dx.$$

Per il teorema 1.7.15, abbiamo la tesi. □

Proviamo ora le STIME INTERNE PER LE DERIVATE DI UNA FUNZIONE ARMONICA.

LEMMA 1.7.18. *Sia $u \in C^2(\Omega)$ una funzione armonica e limitata in Ω e sia $\sup_\Omega |u| \le M$. Allora*

$$\forall x^0 \in \Omega, \forall \overline{B_R}(x^0) \subset \Omega \quad \textit{e per} \quad i = 1, 2, \ldots, n :$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^0) \right| \le \frac{n}{R} M. \tag{1.14}$$

DIM. $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ (in quanto derivata di u armonica) è armonica in Ω per ogni $i = 1, \ldots, n$ e, pertanto, soddisfa la proprietà di uguaglianza del valor medio.
Applicando il teorema della divergenza 1.1.17:

$$\forall x^0 \in \Omega, \forall B_R(x^0) \subset \Omega \quad \text{e per} \quad i = 1, 2, \ldots, n :$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x^0) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_R(x^0)} u(\xi) \frac{\xi_i - x_i^0}{|\xi - x^0|}\, d\mathcal{H}^{n-1}(\xi); \tag{1.15}$$

ne segue:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^0) \right| \le \frac{n}{R} M.$$

□

Tale stima è un caso particolare del seguente

Lemma 1.7.19. *Sia $u \in C^2(\Omega)$ armonica e limitata in Ω e sia $\sup_{\Omega} |u| \le M$. Allora*

$$\forall x^0 \in \Omega, \quad \forall B_R(x^0) \subset \Omega \quad e \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \quad \textit{multi indice}:$$

$$\left|D^{\boldsymbol{\alpha}} u(x^0)\right| \le \left(\frac{ne}{R}\right)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \frac{|\boldsymbol{\alpha}|!}{e} M. \tag{1.16}$$

Dim. Proviamo il teorema per induzione su $|\boldsymbol{\alpha}|$. Per $|\boldsymbol{\alpha}| = 1$, abbiamo (1.14).
Sia (1.16) vera per $\boldsymbol{\alpha}$ multi indice di lunghezza $|\boldsymbol{\alpha}|$ e proviamo che essa vale per i multi indici $\boldsymbol{\beta}$ di lunghezza $|\boldsymbol{\beta}| = |\boldsymbol{\alpha}| + 1$. Per tale $\boldsymbol{\beta}$ abbiamo che

$$D^{\boldsymbol{\beta}} u = \frac{\partial}{\partial x_i} D^{\boldsymbol{\alpha}} u \quad \text{per un } \ i \in \{1, \ldots, n\}\,.$$

Poiché $D^{\boldsymbol{\beta}} u$ è armonica in Ω (in quanto derivata di u armonica), fissato $\tau \in (0,1)$, $D^{\boldsymbol{\beta}} u$ è armonica nella palla $B_{\tau R}(x^0)$; quindi, dalla proprietà di uguaglianza del valor medio e dal teorema della divergenza 1.1.17, otteniamo:

$$D^{\boldsymbol{\beta}} u(x^0) = \frac{1}{\omega_n \tau^n R^n} \int_{\partial B_{\tau R}(x^0)} D^{\boldsymbol{\alpha}} u(\xi) \frac{\xi_i - x_i^0}{|\xi - x^0|} \, d\mathcal{H}^{n-1}(\xi).$$

Per (1.16) applicata alla palla aperta di centro $\xi \in \partial B_{\tau R}(x^0)$ e raggio $(1-\tau)R$

$$|D^{\boldsymbol{\alpha}} u(\xi)| \le \left(\frac{ne}{(1-\tau)R}\right)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \frac{|\boldsymbol{\alpha}|!}{e} M.$$

Quindi

$$\left|D^{\boldsymbol{\beta}} u(x^0)\right| \le \left(\frac{ne}{R}\right)^{|\boldsymbol{\alpha}|+1} \frac{1}{(1-\tau)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\tau} \frac{|\boldsymbol{\alpha}|!}{e^2} M.$$

Scelto

$$\tau = \frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}| + 1} = \frac{1}{|\boldsymbol{\beta}|}$$

abbiamo:

$$(1-\tau)^{-|\boldsymbol{\alpha}|} = \left(1 - \frac{1}{|\boldsymbol{\beta}|}\right)^{-|\boldsymbol{\beta}|+1} < e,$$

da cui la tesi. □

1.8. Disuguaglianza di Harnack per funzioni armoniche positive.

Proviamo infine la disuguaglianza di Harnack per funzioni armoniche positive.
Questa disuguaglianza esprime una notevole proprietà delle funzioni armoniche e positive in Ω, precisamente il fatto che il rapporto tra il loro

estremo superiore e il loro estremo inferiore, calcolati in un arbitrario compatto e connesso Ω' contenuto in Ω, è limitato superiormente da una costante che dipende dalla dimensione dello spazio euclideo, da Ω e da Ω'.
Proviamo dapprima la disuguaglianza di Harnack nal caso particolare in cui Ω è una palla di $\mathbb{R}^n$.

LEMMA 1.8.1. *Siano $y \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ e u una funzione armonica e positiva in $B_{4R}(y)$.*
Allora

$$\sup_{B_R(y)} u \leq 3^n \inf_{B_R(y)} u. \tag{1.17}$$

DIM. Comunque si scelgano due punti $x^1, x^2 \in B_R(y) \subseteq B_{4R}(y)$ applicando il teorema del valor medio 1.7.3 si ottiene

$$u(x^1) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x^1)} u(x)\, dx \leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_{2R}(y)} u(x)\, dx$$

(poiché $u \geq 0$ e $B_R\left(x^1\right) \subset B_{2R}\left(y\right)$), da cui

$$\sup_{B_R(y)} u \leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_{2R}(y)} u(x)\, dx.$$

Analogamente

$$u(x^2) = \frac{1}{\omega_n 3^n R^n} \int_{B_{3R}(x^2)} u(x)\, dx \geq \frac{1}{\omega_n 3^n R^n} \int_{B_{2R}(y)} u(x)\, dx$$

(poiché $u \geq 0$ e $B_{2R}\left(y\right) \subset B_{3R}\left(x^2\right)$), da cui

$$\inf_{B_R(y)} u \geq \frac{1}{\omega_n 3^n R^n} \int_{B_{2R}(y)} u(x)\, dx.$$

In definitiva

$$\frac{1}{3^n} \sup_{B_R(y)} u \leq \frac{1}{\omega_n 3^n R^n} \int_{B_{2R}(y)} u(x)\, dx \leq \inf_{B_R(y)} u$$

e quindi

$$\sup_{B_R(y)} u \leq 3^n \inf_{B_R(y)} u.$$

□

TEOREMA 1.8.2 (DISUGUAGLIANZA DI HARNACK PER FUNZIONI ARMONICHE POSITIVE; 1887, nel caso $n = 2$).
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso e u una funzione armonica in Ω, u positiva. Allora per ogni Ω' connesso, $\Omega' \subset\subset \Omega$[11], esiste una costante $c = c\left(n, \Omega, \Omega'\right)$ tale che

$$\sup_{\Omega'} u \leq c \inf_{\Omega'} u. \tag{1.18}$$

[11] $\Omega' \subset\subset \Omega \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ la chiusura $\overline{\Omega}'$ è compatta e contenuta in Ω.

Dim. Il compatto e connesso $\overline{\Omega}'$ può essere ricoperto con un numero finito di palle $B_R\left(\omega^i\right) \subset \Omega$, $i = 1, \ldots, m$, con centri in Ω' (sia $R < 1/4\,\mathrm{dist}\ (\Omega', \partial\Omega)$).
Siano $x^1, x^2 \in \Omega'$: senza ledere la generalità, $x^1 \in B_R\left(\omega^k\right)$ e $x^2 \in B_R\left(\omega^{k+j}\right)$ per qualche $j \geq 1$, e le palle siano numerate in modo che risulti
$B_R\left(\omega^l\right) \cap B_R\left(\omega^{l+1}\right) \neq \emptyset$ per $l = k, \ldots, k+j-1$.
Applichiamo la stima (1.17) alle palle $B_R\left(\omega^k\right), B_R\left(\omega^{k+1}\right), \ldots, B_R\left(\omega^{k+j}\right)$, e, posto $c_1 := 3^n$, otteniamo

$$\begin{aligned}
u(x^1) &\leq \sup_{B_R(\omega^k)} u \leq c_1 \inf_{B_R(\omega^k)} u \\
&\leq c_1 \sup_{B_R(\omega^{k+1})} u \qquad \left(\text{poiché } B_R\left(\omega^k\right) \cap B_R\left(\omega^{k+1}\right) \neq \emptyset\right) \\
&\leq c_1^2 \inf_{B_R(\omega^{k+1})} u \leq \ldots \\
&\leq c_1^{j+1} \inf_{B_R(\omega^{k+j})} u \leq c_1^{m+1} u\left(x^2\right) \qquad (\text{poiché } j \leq m).
\end{aligned}$$

Essendo x^1 e x^2 arbitrari, posto $c := c_1^{m+1}$, abbiamo in definitiva

$$\sup_{\Omega'} u \leq c \inf_{\Omega'} u.$$

$\square$

Una disuguaglianza di tipo Harnack per soluzioni deboli e positive di equazioni in forma di divergenza, ellittiche e omogenee sarà discussa nel cap. 7.