Introduzione

Il Calcolo delle Variazioni è l'ambito in cui la nozione di minimo (massimo) per forme di energia trova un linguaggio preciso e una formulazione via *principi variazionali.*
In questo Quaderno discutiamo dell'esistenza e della differenziabilità (regolarità) dei punti di minimo di alcuni funzionali integrali del Calcolo delle Variazioni. In particolare ci occupiamo di funzionali del tipo:

$$\mathcal{F}\,[u] := \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \tag{0.1}$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, con frontiera lipschitziana;
$u : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, è una funzione vettoriale in Ω,
$u(x) = \left(u^1(x), u^2(x), \ldots, u^N(x)\right)$ e il simbolo ∇u indica la matrice Jacobiana di u, ossia la matrice $N \times n$ $\left(D_\alpha u^i\right)_{\substack{i=1,2,\ldots,N \\ \alpha=1,2,\ldots,n}}$ ove $D_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$.

La funzione integranda in (0.1), $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$, è detta Lagrangiana e il funzionale (0.1) si dice *regolare* se $F(x, u, p)$ è *convessa* in $p = \left(p^i_\alpha\right)_{\substack{i=1,\ldots,N \\ \alpha=1,\ldots,n}}$.
La u (sufficientemente regolare) si dice *funzione ammissibile* e l'insieme $\mathcal{A}$ di tali funzioni (con prescritte condizioni di Dirichlet o altre condizioni) prende il nome di *classe delle funzioni ammissibili o in competizione.*
Un integrale del tipo (0.1) rappresenta spesso un'energia e talvolta ha altri significati fisici (tempo, resistenza, azione, ...) o significati geometrici (lunghezza, area, ...). L'interesse verso questi tipi di funzionali è giustificato dalle moltissime applicazioni in altri campi della Matematica, in molte aree della Fisica, Economia, Biologia, in Elasticità non lineare e Disegno ottimo... [**16**].

Esempi di funzionali del tipo (0.1) (con $N = 1$) sono:

- l'integrale di Dirichlet

$$D\,[u] = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \; dx$$

- l'integrale dell'area (in forma non parametrica)

$$A[u] = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}\, dx.$$

Vi è una significativa differenza tra questi due funzionali, perché in $D[\cdot]$ la Lagrangiana $F(p) = \frac{1}{2}|p|^2$ ha una crescita di ordine due per $|p| \to +\infty$, mentre la Lagrangiana $F(p) = \sqrt{1+|p|^2}$ in $A[\cdot]$ ha una crescita del primo ordine.
Qusto comporta lo studio del problema di minimo per $D[\cdot]$ in uno spazio di Sobolev riflessivo, e per $A[\cdot]$ nello spazio BV delle funzioni a variazione limitata.
Il primo problema che vogliamo trattare è quello dell'esistenza per il minimo in spazi di Sobolev riflessivi $W^{1,m}(\Omega)$ $(m > 1)$ per funzionali del tipo (0.1), il cui modello è l'integrale di Dirichlet $D[\cdot]$ [2].
Successivamente analizziamo la regolarità delle soluzioni deboli.
I problemi XIX e XX di D. Hilbert [41].
Nel 1900 David Hilbert propose, nel corso del Congresso Internazionale di Matematica svoltosi a Parigi, i seguenti due problemi dedicati al Calcolo delle Variazioni (Hilbert considerava il caso $n = 2$ e $N = 1$):

Il 20^0 problema (esistenza): "*Has not every regular variation problem a solution, provided certain assumptions regarding the given boundary conditions are satisfied, and provided also if need be that the notion of a solution shall be suitably extended?*"
Ossia "I problemi regolari del Calcolo delle Variazioni hanno sempre una soluzione, [. . .], quando si estenda, se necessario, la nozione di soluzione?"

Il 19^0 problema (regolarità): "*Are the solutions of regular problems in the Calculus of Variations always necessarily analytic?*"
Ossia "Le soluzioni dei problemi regolari del Calcolo delle Variazioni sono sempre necessariamente delle funzioni analitiche?".

Qui presentiamo alcuni dei metodi che sono stati studiati per affrontare i due suddetti problemi.
Un primo approccio a questi problemi è presentato nel cap. 2, nell'ambito dei cosiddetti *Metodi classici (indiretti) nel Calcolo delle Variazioni* che si basano sulla dimostrazione di condizioni necessarie di estremalità (equazioni di Eulero variazione prima e variazione seconda, teorema 2.1.1 (caso unidimensionale) e teorema 2.2.1 (caso multidimensionale)) per funzionali di tipo integrale (0.1).

---

[2] Altri importanti problemi (cfr. [**10**]), come quello delle superfici minime, richiedono lo studio di spazi più generali e non sono qui trattati.

Questi metodi assumono però una forte regolarità del funzionale e dei punti estremali (di cui è supposta l'esistenza), regolarità che in generale può non essere verificata (osservazione 2.2.10).
Nel paragrafo 2.3 presentiamo due problemi variazionali classici (la brachistocrona e la disuguaglianza isoperimetrica in dimensione due) anche allo scopo di introdurre i *Metodi diretti nel Calcolo delle Variazioni*, a cui sono dedicati i capp. 3, 4, 5, 6.
Una strategia ragionevole è quella di considerare separatamente il problema di *esistenza dei minimi* e quello della loro *regolarità*.
L'approccio diretto al problema dell'esistenza è stato sviluppato a partire dal XX secolo da D. Hilbert ed H. Lebesgue in relazione alla dimostrazione del Principio di Dirichlet e si basa sostanzialmente sul teorema di Weierstrass-Fréchet (teorema 3.1.1).
Si tratta di trovare delle successioni minimizzanti compatte (dalle quali sia quindi possibile estrarre sottosuccessioni convergenti) e sfruttare poi la sequenziale semicontinuità inferiore del funzionale, per concludere che i punti limite sono di minimo.
E' importante osservare che la semicontinuità inferiore del funzionale è favorita da una convergenza forte, mentre per la compattezza è preferibile una convergenza debole: in sintesi, semicontinuità inferiore e compattezza sono proprietà topologicamente in competizione tra loro, per cui è essenziale bilanciare le due richieste.
I metodi utilizzati da D. Hilbert e da H. Lebesgue sono stati generalizzati da L. Tonelli (teoremi 3.2.1 e 3.2.3) e da C. Morrey in spazi di Sobolev (teoremi 3.3.1 e 3.3.2).
Le ipotesi di coercività, riflessività e convessità nel teorema di esistenza 3.2.3 sono ottimali, come mostrano gli esempi 3.2.6, 3.2.7 e 3.2.8.
Nel cap. 4 studiamo risultati di sequenziale semicontinuità inferiore per funzionali regolari di una classe più generale, precisamente per funzionali del tipo $\mathcal{F}[u,v] := \int_\Omega F(x,u(x),v(x))\,dx$, nella topologia $L^1_{\text{forte}}\left(\Omega,\mathbb{R}^N\right) \times L^1_{\text{debole}}\left(\Omega,\mathbb{R}^\nu\right)$ con la Lagrangiana di Carathéodory (definizione 4.1.1).
Questi funzionali si presentano in problemi di controllo ottimo, e naturalmente i funzionali del tipo $\mathcal{F}[u] := \int_\Omega F(x,u(x),\nabla u(x))\,dx$ si ottengono per $v(x) = \nabla u(x)$ (teorema 4.3.4, corollario 4.3.6 e teorema 4.5.1).
Nel cap. 5 proviamo che nel caso vettoriale la convessità della Lagrangiana $F(x,u,v)$ rispetto a v è anche necessaria per la sequenziale semicontinuità inferiore di $\mathcal{F}[u,v]$ (teorema 5.1.1), mentre è necessaria per la sequenziale semicontinuità inferiore di $\mathcal{F}[u]$ solo se $n=1$ con $N \geq 1$ o $N=1$ con $n \geq 1$.
Nel caso generale $n>1$ e $N>1$, per $\mathcal{F}[\cdot]$ è verificata una condizione strettamente più debole della convessità: la quasi-convessità (nel senso di C. Morrey, teoremi 5.1.4, 5.1.5).
La quasi-convessità di una Lagrangiana F (definizione 5.1.6) è espressa da

una condizione in generale difficile da verificare, pertanto studiamo anche Lagrangiane policonvesse (definizione 5.1.13) e convesse di rango uno (definizione 5.1.18), concetti rispettivamente più forte e più debole della quasi-convessità.
Le relazioni tra questi concetti, più deboli della convessità, si possono così sintetizzare:

$$\begin{array}{lcl} F \text{ convessa} & \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} & F \text{ policonvessa} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} F \text{ quasi-convessa} \\ & \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} & F \text{ convessa di rango uno.} \end{array}$$

Tutti questi concetti risultano equivalenti tra loro se $n = 1$ oppure $N = 1$.
Nel paragrafo 5.2 presentiamo diversi risultati relativi a condizioni sufficienti per la sequenziale debole semicontinuità inferiore in ipotesi di quasi-convessità per la Lagrangiana (teoremi 5.2.1, 5.2.3 e 5.2.4). Il caso specifico di particolari funzionali con Lagrangiana policonvessa è approfondito nel cap. 6 (teoremi 6.2.2 e 6.2.3), con una applicazione all'elasticità non lineare per corpi incomprimibili (con vincolo sul gradiente) (teorema 6.2.4).
A questi risultati premettiamo il concetto di Lagrangiana nulla (definizione 6.1.1) e il risultato relativo alle debole continuità dei determinanti (teorema 6.2.1).
Il cap. 7, infine, è dedicato alla regolarità (interna) delle soluzioni deboli di problemi di minimo negli spazi di Sobolev $W^{1,m}(\Omega)$ $(m > 1)$.
Partendo da un risultato unidimensionale di regolarità parziale dovuto a L. Tonelli (teorema 7.2.1), trattiamo del fenomeno di Lavrentieff e ne analizziamo un esempio dovuto a B. Manià (teorema 7.2.3).
Successivamente esaminiamo lo studio della regolarità dei minimi deboli nel caso modello (particolare, ma comunque significativo e utile ad identificare le componenti fondamentali della dimostrazione) di funzionali quadratici, più generali dell'integrale di Dirichlet.
Un primo passo verso la regolarità è ottenuto via il metodo dei quozienti differenziali (di L. Nirenberg, teorema 7.3.4), conseguendo per l'estremale una prima maggiore regolarità negli spazi di Sobolev (teorema 7.3.5).
Pietra miliare per conseguire la regolarità (teorema 7.5.15) è il teorema di regolarità hölderiana di E. De Giorgi-J. Nash-J. Moser (teorema 7.5.6), concernente la regolarità delle soluzioni di equazioni lineari ellittiche del secondo ordine in forma di divergenza, a coefficienti limitati e misurabili.
Questo profondo risultato consente di iniziare un procedimento di bootstrap, via il classico teorema di Schauder (teorema 7.5.1), che conduce all'analiticità dell'estremale se F è analitica.
Del teorema 7.5.6 diamo due dimostrazioni: la prima (1957) dovuta a E. De Giorgi, basata su un fine metodo iterativo e la successiva (1961) dovuta a J. Moser, basata su una disuguagliaza di tipo Harnack (teorema 7.5.13) per soluzioni deboli e positive di equazioni lineari ellittiche a coefficienti limitati e misurabili in forma di divergenza.

Della regolarità (interna) per il caso particolare dell'integrale di Dirichlet (teorema 7.4.1) presentiamo due altre dimostrazioni classiche, basate essenzialmente una sulla peculiare proprietà di invarianza per rotazioni dell'operatore di Laplace, e l'altra sulla proprietà del valor medio per funzioni armoniche.
L'estensione del teorema di E. De Giorgi-J. Nash-J. Moser al caso vettoriale non ha in generale risposta affermativa: è di E. De Giorgi (1968) il primo esempio di estremale discontinua per un problema variazionale vettoriale di tipo ellittico (teorema 7.8.1).
Quindi il XIX problema di Hilbert nel caso vettoriale (eccetto che in dimensione $n = 2$) non ha in generale risposta affermativa. Molti e interessanti sono tuttavia i risultati di *regolarità parziale* conseguiti a partire dal 1968 per estremali vettoriali.
La presentazione di un risultato di regolarità parziale in un caso semplice (teorema 7.9.1) conclude l'esposizione, rinviando per approfondimenti su quest'ultimo tema a [**33**], [**34**].
Punto di partenza dell'esposizione sono i Preliminari presentati nel cap. 1 (relativi a: teoria della misura, analisi funzionale e convessa, spazi di Lebesgue $L^m(\Omega)$ e di Sobolev $W^{k,m}(\Omega)$, convergenze deboli, funzioni armoniche); essi hanno non solo lo scopo di rendere l'esposizione, per quanto possibile, autosufficiente, ma anche quello di dare al lettore l'opportunità di poter seguire lo sviluppo di idee e di tecniche attraverso l'analisi dei progressi conseguiti nel tempo nell'ambito del Calcolo delle Variazioni, collegando risultati moderni a quelli più propriamente classici.

Avvertenza.
Abbiamo indicato talvolta con c una generica costante che può cambiare anche nel corso della stessa formula.
Quando abbiamo voluto evidenziare la dipendenza di una costante c da alcuni parametri .,.,.,. abbiamo scritto $c(.,.,.,.)$.