Università del Salento
Dipartimento di Matematica
"Ennio de Giorgi"

Michele Carriero

Lucia De Luca

Dipartimento di Matematica "E. De Giorgi"
Università del Salento, Lecce

Introduzione al
CALCOLO DELLE VARIAZIONI

Quaderno 1/2010

Università del Salento - Coordinamento SIBA

QUADERNI DI MATEMATICA

Una pubblicazione a cura del

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
"ENNIO DE GIORGI"
UNIVERSITÀ DL SALENTO

I Quaderni del Dipartimento di Matematica dell'Università del Salento documentano gli aspetti di rilievo dell'attività di ricerca e didattica del Dipartimento. Nei Quaderni sono pubblicati articoli di carattere matematico che siano:

(1) lavori di rassegna e monografie su argomenti di ricerca;
(2) testi di seminari di interesse generale, tenuti da docenti o ricercatori del Dipartimento o esterni;
(3) lavori di specifico interesse didattico.

La pubblicazione dei lavori è soggetta all'approvazione del Comitato di Redazione, che decide tenendo conto del parere di un referee, nominato di volta in volta sulla base delle competenze specifiche.

Quaderno 1/2010: ISBN 978-88-8305-074-9

Il volume è pubblicato anche in versione elettronica
http://siba-ese.unisalento.it
eISBN: 978-88-8305-075-6.

Introduzione al
CALCOLO DELLE VARIAZIONI

Michele Carriero

Lucia De Luca

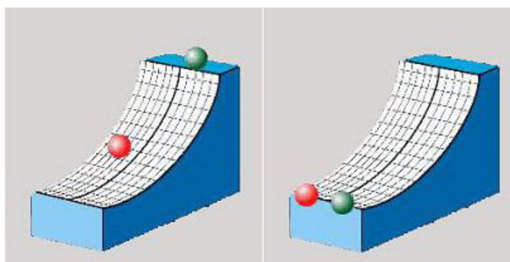
Dipartimento di Matematica “E. De Giorgi”

Università del Salento

Lecce

In sintesi, credo che il Calcolo delle Variazioni sia un settore molto vasto e variegato [...]; esso costituisce un'ottima "palestra" per capire quali sono le radici etiche e culturali del metodo scientifico.

Ennio De Giorgi[1].



La tautocrona.

(fine XVII sec., Christian Huygens: **la tautocrona (curva isocrona) è la cicloide**)

1

Sul Calcolo delle Variazioni

In ricordo di Leonida Tonelli

(Pisa, 12 marzo 1996), pp.215-222,

in Ennio De Giorgi, *Anche la scienza ha bisogno di sognare*, a cura di F. Bassani, A. Marino, C. Sbordone; Edizioni Plus, Università di Pisa (2001).

Prefazione

Questo Quaderno riproduce una versione ampliata delle lezioni tenute in anni recenti da M. Carriero in Corsi sul Calcolo delle Variazioni, nell'ambito del Dottorato di Ricerca in Matematica presso il Dipartimento di Matematica "E. De Giorgi" dell'Università del Salento.
L'intento principale è quello di introdurre gli studenti al Calcolo delle Variazioni attraverso una trattazione-guida che renda più accessibile lo studio e l'approfondimento successivo su testi avanzati esistenti in letteratura.
La presentazione riflette lo stile delle lezioni volte a presentare le idee, sforzandosi di semplificare il più possibile le principali tecniche delle dimostrazioni.
Non vi è la pretesa di aver esposto l'argomento in modo esaustivo né originale, la trattazione essendo largamente ispirata ai testi [**11**], [**16**], [**17**], [**30**], [**34**], [**37**], [**51**], con alcune differenze miranti, tra l'altro, ad evidenziare casi modello significativi che pure motivano la presente pubblicazione.
Il primo autore ringrazia gli studenti per l'interesse dimostrato con la partecipazione attiva, anche attraverso Seminari di approfondimento su specifici argomenti.
Il secondo autore è uno dei partecipanti al Corso tenuto nell'a.a. 2008-2009.
M.Carriero desidera, infine, ringraziare il dr. Antonio Farina per la battitura in Latex di alcuni degli argomenti qui presentati e per la realizzazione di alcune figure.

Michele Carriero
Lucia De Luca

Lecce, ottobre 2009

Gli autori ringraziano i due Referees per gli utili commenti.

Dedicato alla memoria di mio padre
M. Carriero

Indice

Introduzione

Il Calcolo delle Variazioni è l'ambito in cui la nozione di minimo (massimo) per forme di energia trova un linguaggio preciso e una formulazione via *principi variazionali.*
In questo Quaderno discutiamo dell'esistenza e della differenziabilità (regolarità) dei punti di minimo di alcuni funzionali integrali del Calcolo delle Variazioni. In particolare ci occupiamo di funzionali del tipo:

$$\mathcal{F}[u] := \int_{\Omega} F(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \tag{0.1}$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, con frontiera lipschitziana;
$u : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, è una funzione vettoriale in Ω,
$u(x) = \left(u^1(x), u^2(x), \ldots, u^N(x)\right)$ e il simbolo ∇u indica la matrice Jacobiana di u, ossia la matrice $N \times n$ $\left(D_\alpha u^i\right)_{\substack{i=1,2,\ldots,N \\ \alpha=1,2,\ldots,n}}$ ove $D_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$.

La funzione integranda in (0.1), $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$, è detta Lagrangiana e il funzionale (0.1) si dice *regolare* se $F(x, u, p)$ è *convessa* in $p = \left(p^i_\alpha\right)_{\substack{i=1,\ldots,N \\ \alpha=1,\ldots,n}}$.
La u (sufficientemente regolare) si dice *funzione ammissibile* e l'insieme $\mathcal{A}$ di tali funzioni (con prescritte condizioni di Dirichlet o altre condizioni) prende il nome di *classe delle funzioni ammissibili o in competizione.*
Un integrale del tipo (0.1) rappresenta spesso un'energia e talvolta ha altri significati fisici (tempo, resistenza, azione, ...) o significati geometrici (lunghezza, area, ...). L'interesse verso questi tipi di funzionali è giustificato dalle moltissime applicazioni in altri campi della Matematica, in molte aree della Fisica, Economia, Biologia, in Elasticità non lineare e Disegno ottimo... [**16**].

Esempi di funzionali del tipo (0.1) (con $N = 1$) sono:

- l'integrale di Dirichlet

$$D[u] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2\, dx$$

- l'integrale dell'area (in forma non parametrica)

$$A\,[u] = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}\, dx.$$

Vi è una significativa differenza tra questi due funzionali, perché in $D[\cdot]$ la Lagrangiana $F(p) = \frac{1}{2}\,|p|^2$ ha una crescita di ordine due per $|p| \to +\infty$, mentre la Lagrangiana $F(p) = \sqrt{1 + |p|^2}$ in $A[\cdot]$ ha una crescita del primo ordine.
Qusto comporta lo studio del problema di minimo per $D[\cdot]$ in uno spazio di Sobolev riflessivo, e per $A[\cdot]$ nello spazio BV delle funzioni a variazione limitata.
Il primo problema che vogliamo trattare è quello dell'esistenza per il minimo in spazi di Sobolev riflessivi $W^{1,m}(\Omega)$ $(m > 1)$ per funzionali del tipo (0.1), il cui modello è l'integrale di Dirichlet $D[\cdot]$ [2].
Successivamente analizziamo la regolarità delle soluzioni deboli.
I problemi XIX e XX di D. Hilbert [41].
Nel 1900 David Hilbert propose, nel corso del Congresso Internazionale di Matematica svoltosi a Parigi, i seguenti due problemi dedicati al Calcolo delle Variazioni (Hilbert considerava il caso $n = 2$ e $N = 1$):

Il 20^0 problema (esistenza): "*Has not every regular variation problem a solution, provided certain assumptions regarding the given boundary conditions are satisfied, and provided also if need be that the notion of a solution shall be suitably extended?*"
Ossia "I problemi regolari del Calcolo delle Variazioni hanno sempre una soluzione, [...], quando si estenda, se necessario, la nozione di soluzione?"

Il 19^0 problema (regolarità): "*Are the solutions of regular problems in the Calculus of Variations always necessarily analytic?*"
Ossia "Le soluzioni dei problemi regolari del Calcolo delle Variazioni sono sempre necessariamente delle funzioni analitiche?".

Qui presentiamo alcuni dei metodi che sono stati studiati per affrontare i due suddetti problemi.
Un primo approccio a questi problemi è presentato nel cap. 2, nell'ambito dei cosiddetti *Metodi classici (indiretti) nel Calcolo delle Variazioni* che si basano sulla dimostrazione di condizioni necessarie di estremalità (equazioni di Eulero variazione prima e variazione seconda, teorema 2.1.1 (caso unidimensionale) e teorema 2.2.1 (caso multidimensionale)) per funzionali di tipo integrale (0.1).

[2]Altri importanti problemi (cfr. [**10**]), come quello delle superfici minime, richiedono lo studio di spazi più generali e non sono qui trattati.

Questi metodi assumono però una forte regolarità del funzionale e dei punti estremali (di cui è supposta l'esistenza), regolarità che in generale può non essere verificata (osservazione 2.2.10).
Nel paragrafo 2.3 presentiamo due problemi variazionali classici (la brachistocrona e la disuguaglianza isoperimetrica in dimensione due) anche allo scopo di introdurre i *Metodi diretti nel Calcolo delle Variazioni*, a cui sono dedicati i capp. 3, 4, 5, 6.
Una strategia ragionevole è quella di considerare separatamente il problema di *esistenza dei minimi* e quello della loro *regolarità*.
L'approccio diretto al problema dell'esistenza è stato sviluppato a partire dal XX secolo da D. Hilbert ed H. Lebesgue in relazione alla dimostrazione del Principio di Dirichlet e si basa sostanzialmente sul teorema di Weierstrass-Fréchet (teorema 3.1.1).
Si tratta di trovare delle successioni minimizzanti compatte (dalle quali sia quindi possibile estrarre sottosuccessioni convergenti) e sfruttare poi la sequenziale semicontinuità inferiore del funzionale, per concludere che i punti limite sono di minimo.
E' importante osservare che la semicontinuità inferiore del funzionale è favorita da una convergenza forte, mentre per la compattezza è preferibile una convergenza debole: in sintesi, semicontinuità inferiore e compattezza sono proprietà topologicamente in competizione tra loro, per cui è essenziale bilanciare le due richieste.
I metodi utilizzati da D. Hilbert e da H. Lebesgue sono stati generalizzati da L. Tonelli (teoremi 3.2.1 e 3.2.3) e da C. Morrey in spazi di Sobolev (teoremi 3.3.1 e 3.3.2).
Le ipotesi di coercività, riflessività e convessità nel teorema di esistenza 3.2.3 sono ottimali, come mostrano gli esempi 3.2.6, 3.2.7 e 3.2.8.
Nel cap. 4 studiamo risultati di sequenziale semicontinuità inferiore per funzionali regolari di una classe più generale, precisamente per funzionali del tipo $\mathcal{F}[u,v] := \int_\Omega F(x, u(x), v(x))\,dx$, nella topologia $L^1_{\text{forte}}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right) \times L^1_{\text{debole}}\left(\Omega, \mathbb{R}^\nu\right)$ con la Lagrangiana di Carathéodory (definizione 4.1.1).
Questi funzionali si presentano in problemi di controllo ottimo, e naturalmente i funzionali del tipo $\mathcal{F}[u] := \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\,dx$ si ottengono per $v(x) = \nabla u(x)$ (teorema 4.3.4, corollario 4.3.6 e teorema 4.5.1).
Nel cap. 5 proviamo che nel caso vettoriale la convessità della Lagrangiana $F(x,u,v)$ rispetto a v è anche necessaria per la sequenziale semicontinuità inferiore di $\mathcal{F}[u,v]$ (teorema 5.1.1), mentre è necessaria per la sequenziale semicontinuità inferiore di $\mathcal{F}[u]$ solo se $n = 1$ con $N \geq 1$ o $N = 1$ con $n \geq 1$.
Nel caso generale $n > 1$ e $N > 1$, per $\mathcal{F}[\cdot]$ è verificata una condizione strettamente più debole della convessità: la quasi-convessità (nel senso di C. Morrey, teoremi 5.1.4, 5.1.5).
La quasi-convessità di una Lagrangiana F (definizione 5.1.6) è espressa da

una condizione in generale difficile da verificare, pertanto studiamo anche Lagrangiane policonvesse (definizione 5.1.13) e convesse di rango uno (definizione 5.1.18), concetti rispettivamente più forte e più debole della quasi-convessità.
Le relazioni tra questi concetti, più deboli della convessità, si possono così sintetizzare:

$$\begin{array}{lcl} F \text{ convessa} & \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} & F \text{ policonvessa} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} F \text{ quasi-convessa} \\ & & \\ & \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} & F \text{ convessa di rango uno.} \end{array}$$

Tutti questi concetti risultano equivalenti tra loro se $n = 1$ oppure $N = 1$.
Nel paragrafo 5.2 presentiamo diversi risultati relativi a condizioni sufficienti per la sequenziale debole semicontinuità inferiore in ipotesi di quasi-convessità per la Lagrangiana (teoremi 5.2.1, 5.2.3 e 5.2.4). Il caso specifico di particolari funzionali con Lagrangiana policonvessa è approfondito nel cap. 6 (teoremi 6.2.2 e 6.2.3), con una applicazione all'elasticità non lineare per corpi incomprimibili (con vincolo sul gradiente) (teorema 6.2.4).
A questi risultati premettiamo il concetto di Lagrangiana nulla (definizione 6.1.1) e il risultato relativo alle debole continuità dei determinanti (teorema 6.2.1).
Il cap. 7, infine, è dedicato alla regolarità (interna) delle soluzioni deboli di problemi di minimo negli spazi di Sobolev $W^{1,m}(\Omega)$ $(m > 1)$.
Partendo da un risultato unidimensionale di regolarità parziale dovuto a L. Tonelli (teorema 7.2.1), trattiamo del fenomeno di Lavrentieff e ne analizziamo un esempio dovuto a B. Manià (teorema 7.2.3).
Successivamente esaminiamo lo studio della regolarità dei minimi deboli nel caso modello (particolare, ma comunque significativo e utile ad identificare le componenti fondamentali della dimostrazione) di funzionali quadratici, più generali dell'integrale di Dirichlet.
Un primo passo verso la regolarità è ottenuto via il metodo dei quozienti differenziali (di L. Nirenberg, teorema 7.3.4), conseguendo per l'estremale una prima maggiore regolarità negli spazi di Sobolev (teorema 7.3.5).
Pietra miliare per conseguire la regolarità (teorema 7.5.15) è il teorema di regolarità hölderiana di E. De Giorgi-J. Nash-J. Moser (teorema 7.5.6), concernente la regolarità delle soluzioni di equazioni lineari ellittiche del secondo ordine in forma di divergenza, a coefficienti limitati e misurabili.
Questo profondo risultato consente di iniziare un procedimento di bootstrap, via il classico teorema di Schauder (teorema 7.5.1), che conduce all'analiticità dell'estremale se F è analitica.
Del teorema 7.5.6 diamo due dimostrazioni: la prima (1957) dovuta a E. De Giorgi, basata su un fine metodo iterativo e la successiva (1961) dovuta a J. Moser, basata su una disuguagliaza di tipo Harnack (teorema 7.5.13) per soluzioni deboli e positive di equazioni lineari ellittiche a coefficienti limitati e misurabili in forma di divergenza.

Della regolarità (interna) per il caso particolare dell'integrale di Dirichlet (teorema 7.4.1) presentiamo due altre dimostrazioni classiche, basate essenzialmente una sulla peculiare proprietà di invarianza per rotazioni dell'operatore di Laplace, e l'altra sulla proprietà del valor medio per funzioni armoniche.
L'estensione del teorema di E. De Giorgi-J. Nash-J. Moser al caso vettoriale non ha in generale risposta affermativa: è di E. De Giorgi (1968) il primo esempio di estremale discontinua per un problema variazionale vettoriale di tipo ellittico (teorema 7.8.1).
Quindi il XIX problema di Hilbert nel caso vettoriale (eccetto che in dimensione $n = 2$) non ha in generale risposta affermativa. Molti e interessanti sono tuttavia i risultati di *regolarità parziale* conseguiti a partire dal 1968 per estremali vettoriali.
La presentazione di un risultato di regolarità parziale in un caso semplice (teorema 7.9.1) conclude l'esposizione, rinviando per approfondimenti su quest'ultimo tema a [**33**], [**34**].
Punto di partenza dell'esposizione sono i Preliminari presentati nel cap. 1 (relativi a: teoria della misura, analisi funzionale e convessa, spazi di Lebesgue $L^m(\Omega)$ e di Sobolev $W^{k,m}(\Omega)$, convergenze deboli, funzioni armoniche); essi hanno non solo lo scopo di rendere l'esposizione, per quanto possibile, autosufficiente, ma anche quello di dare al lettore l'opportunità di poter seguire lo sviluppo di idee e di tecniche attraverso l'analisi dei progressi conseguiti nel tempo nell'ambito del Calcolo delle Variazioni, collegando risultati moderni a quelli più propriamente classici.

Avvertenza.
Abbiamo indicato talvolta con c una generica costante che può cambiare anche nel corso della stessa formula.
Quando abbiamo voluto evidenziare la dipendenza di una costante c da alcuni parametri .,.,.,. abbiamo scritto $c(.,.,.,.)$.

CAPITOLO 1

Preliminari

In questo capitolo, allo scopo di fissare la notazione e rendere l'esposizione autosufficiente, presentiamo alcuni dei risultati basilari della misura e integrale di Lebesgue, della misura di Hausdorff, degli spazi di Lebesgue e di Sobolev (in particolare dei risultati sulla convergenza debole in questi spazi), delle funzioni convesse e delle principali proprietà delle funzioni armoniche.

1.1. Alcuni risultati relativi alla misura e all'integrale di Lebesgue. Misura e dimensione di Hausdorff.

Definizione 1.1.1. Una famiglia $\mathcal{M}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ si chiama σ-algebra se

(i) $\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{M}$,
(ii) $E \in \mathcal{M} \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus E \in \mathcal{M}$,
(iii) se $\{E_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$, allora $\displaystyle\bigcup_{h\in\mathbb{N}} E_h \in \mathcal{M}$ e $\displaystyle\bigcap_{h\in\mathbb{N}} E_h \in \mathcal{M}$.

Il seguente teorema indica l'esistenza im $\mathbb{R}^n$ di una σ-algebra $\mathcal{M}$ e di una misura su $\mathcal{M}$.

Teorema 1.1.2. *In $\mathbb{R}^n$ esiste una σ-algebra $\mathcal{M}$ e una misura*

$$|\cdot| : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$$

con le seguenti proprietà:

(i) *ogni sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, e quindi ogni sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^n$, appartiene a $\mathcal{M}$;*
(ii) *se $\Omega \in \mathcal{M}$ e ha misura nulla, allora ogni sottoinsieme di Ω appartiene a $\mathcal{M}$ e ha misura nulla;*

(iii) *se* $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \ a_i < x_i < b_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, n\}$, *allora*
$|\Omega| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$;

(iv) *se* $\{\Omega_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ *e gli insiemi* Ω_h *sono a due a due disgiunti, allora*

$$\left|\bigcup_{h\in\mathbb{N}} \Omega_h\right| = \sum_{h\in\mathbb{N}} |\Omega_h| \quad \text{(σ-additività o additività numerabile).}$$

Osservazione 1.1.3. Gli insiemi appartenenti alla σ-algebra $\mathcal{M}$ si chiamano insiemi misurabili secondo Lebesgue e la misura $|\cdot|$ si chiama misura di Lebesgue n-dimensionale.

Vale la seguente caratterizzazione degli insiemi misurabili:

$$\Omega \in \mathcal{M} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, A \text{ aperto, } \exists\, K \text{ compatto, } K \subset \Omega \subset A \text{ e } |A \setminus K| < \varepsilon.$$

Osservazione 1.1.4. Si dice che una proprietà vale *quasi ovunque* (q.o.) in $\Omega \in \mathcal{M}$ se è verificata in tutti i punti di Ω tranne che in un sottoinsieme avente misura di Lebesgue nulla.

Definizione 1.1.5. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ misurabile. Una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice misurabile se $u^{-1}(C)$ è misurabile per ogni sottoinsieme chiuso $C \subset \mathbb{R}$.

Osservazione 1.1.6. Valgono le seguenti proprietà:

(i) se u è una funzione continua, allora è misurabile;
(ii) somma e prodotto di funzioni misurabili sono misurabili;
(iii) massimo limite, minimo limite e limiti puntuali di successioni di funzioni misurabili sono misurabili.

Definizione 1.1.7. Una funzione misurabile $s : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice *funzione semplice* se assume un numero finito di valori $a_1, a_2, \ldots, a_k$.
Se s è una funzione semplice che assume i valori $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sugli insiemi misurabili e a due a due disgiunti $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ contenuti in Ω, possiamo scrivere

$$s = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{\Omega_i}.$$

Teorema 1.1.8. *Se* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *è una funzione misurabile allora esiste una successione* $\{s_h\}$ *di funzioni semplici convergente ad* u *in ogni punto di* Ω. *Inoltre, se* u *è non negativa, si può scegliere* $\{s_h\}$ *monotona crescente in* Ω.

Introduciamo ora la definizione di integrale di Lebesgue per una funzione misurabile

$$u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

con Ω insieme misurabile.
Per una funzione semplice s si definisce

$$\int_\Omega s(x)\,dx := \sum_{i=1}^k a_i\,|\Omega_i|$$

con la convenzione che se $\alpha_i = 0$ e $|\Omega_i| = +\infty$, allora $\alpha_i\,|\Omega_i| = 0$.
Per $u \geq 0$ misurabile, definiamo

$$\int_\Omega u(x)\,dx := \sup \int_\Omega s(x)\,dx$$

dove l'estremo superiore è calcolato al variare di s tra tutte le funzioni semplici minori o uguali a u su Ω.
In generale, per una funzione misurabile u, osservato che

$$u = u^+ - u^-$$

dove $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \max\{-u, 0\}$ sono rispettivamente la parte positiva e negativa di u, si definisce

$$\int_\Omega u(x)\,dx := \int_\Omega u^+(x)\,dx - \int_\Omega u^-(x)\,dx$$

con la condizione che almeno uno dei due integrali sia finito.
La funzione u è detta *sommabile* in Ω se entrambi gli integrali sono finiti.
Si dice invece che u è *integrabile* in Ω se u ha un integrale (che può essere anche uguale a $+\infty$ o $-\infty$).
Segue dalla definizione che una funzione misurabile u è sommabile se e solo se $|u|$ lo è.

Teorema 1.1.9 (Beppo Levi o della convergenza monotona).
Sia $\{u_h\}$ una successione di funzioni misurabili, tali che

$$0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \ldots u_h \leq u_{h+1} \leq \ldots.$$

Allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{h\to+\infty} u_h\,dx = \lim_{h\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u_h\,dx.$$

Teorema 1.1.10 (Lemma di Fatou).
Sia $\{u_h\}$ una successione di funzioni non negative e sommabili. Allora [1]

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{h\to+\infty} u_h\,dx \leq \liminf_{h\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u_h\,dx.$$

[1] $\liminf_{h\to\infty} v_h := \sup_{\nu\in\mathbb{N}} \left(\inf_{h\geq\nu} v_h\right)$,
$\limsup_{h\to\infty} v_h := \inf_{\nu\in\mathbb{N}} \left(\sup_{h\geq\nu} v_h\right)$.

Teorema 1.1.11 (Lebesgue o della convergenza dominata).
Sia $\{u_h\}$ una successione di funzioni integrabili con

$$u_h \to u \qquad q.o.,$$

e supponiamo inoltre che esista una funzione g sommabile tale che per ogni $h \in \mathbb{N}$

$$|u_h| \leq g \qquad q.o..$$

Allora

$$\lim_{h\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u_h \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} u \, dx.$$

Teorema 1.1.12 (Fubini).
Siano

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \ -\infty \leq a_i < x_i < b_i \leq +\infty, \ \ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

e

$$E_2 = \left\{y \in \mathbb{R}^N : \ -\infty \leq c_j < y_j < d_j \leq +\infty, \ \ j = 1, 2, \ldots, N\right\}.$$

Sia u sommabile su $E = E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^{n+N}$. Allora

(i) *per quasi ogni $x \in E_1$, la funzione $u(x, \cdot)$ è sommabile in E_2;*
(ii) *la funzione*

$$v(x) = \int_{E_2} u(x, y) \, dy$$

è sommabile in E_1 e risulta

$$\int_E u\,(x, y)\ dx\, dy = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} u\,(x, y)\ dy \right) dx.$$

Il teorema fondamentale del calcolo integrale si estende all'integrale di Lebesgue nella forma seguente.

Teorema 1.1.13 (di differenziazione di Lebesgue).
Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ localmente sommabile ($u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$).
Allora per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$ [2]

$$\exists \lim_{\rho\to 0^+} \frac{1}{\omega_n \rho^n} \int_{B_\rho(x)} u(y) \, dy = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{1}{|B_\rho(x)|} \int_{B_\rho(x)} u(y) \, dy = u(x),$$

dove ω_n è la misura di Lebesgue della palla unitaria n-dimensionale (tali x si chiamano punti di Lebesgue di u).
In particolare, se u è sommabile in $\mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x u(t) \, dt = u(x) \qquad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}.$$

---

[2]Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso.
$u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} u \in L^1(K)$ per ogni compatto $K \subset \Omega$;
$B_\rho(x)$ indica la palla di centro $x \in \mathbb{R}^n$ e raggio ρ.

Teorema 1.1.14 (Severini, 1910-Egorov, 1911).
Sia $\{u_h\}$ *una successione di funzioni* $u_h : \Omega \to \mathbb{R}$ *misurabili, dove* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *è misurabile con* $|\Omega| < \infty$*, tale che* $u_h \longrightarrow u$ *q.o. in* Ω*. Allora*

(i) *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $K_\varepsilon \subset \Omega$ *compatto tale che* $|\Omega \setminus K_\varepsilon| < \varepsilon$*,*
(ii) $u_h \rightrightarrows u$ *in* K_ε [3],

((i)+(ii) $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\{u_h\}$ *converge a* u *quasi-uniformemente).*

Dim. Dall'ipotesi segue che la funzione u è misurabile. Definiamo per ogni m, $h \in \mathbb{N}$ fissati, l'insieme

$$\Omega_h^m := \bigcap_{i \geq h} \left\{ x \in \Omega : \, |u_i(x) - u(x)| < \frac{1}{m} \right\}$$

e sia $\Omega^m := \bigcup_h \Omega_h^m$. Dalla definizione degli insiemi Ω_h^m risulta per m fissato $\Omega_1^m \subset \Omega_2^m \subset \ldots \subset \Omega_h^m \subset \ldots$.
Allora per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $h \in \mathbb{N}$ esiste $h_0(m) \in \mathbb{N}$ tale che
$\left| \Omega^m \setminus \Omega^m_{h_0(m)} \right| < \dfrac{\varepsilon}{2^{m+1}}$.

Posto $A_\varepsilon := \bigcap_m \Omega^m_{h_0(m)}$, valutiamo la misura di $\Omega \backslash A_\varepsilon$. Per questo osserviamo preliminarmente che $|\Omega \setminus \Omega^m| = 0$ per ogni m (in virtù della convergenza q.o. in Ω della successione $\{u_h\}$ a u). Ne deriva che

$$\left| \Omega \setminus \Omega^m_{h_0} \right| = \left| \Omega^m \setminus \Omega^m_{h_0} \right| < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} |\Omega \setminus A_\varepsilon| &= \left| \Omega \setminus \bigcap_m \Omega^m_{h_0(m)} \right| = \left| \bigcup_m \left(\Omega \setminus \Omega^m_{h_0(m)} \right) \right| \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left| \Omega \setminus \Omega^m_{h_0(m)} \right| < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Poiché A_ε è misurabile, esiste un compatto $K_\varepsilon \subset A_\varepsilon$ tale che $|A_\varepsilon \setminus K_\varepsilon| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ne segue (i). Se $x \in K_\varepsilon$, per ogni $m \in \mathbb{N}$ abbiamo $|u_i(x) - u(x)| < 1/m$ per $i > h_0(m)$ da cui segue (ii). □

Teorema 1.1.15 (Lusin, 1912).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aperto misurabile con* $|\Omega| < \infty$ *e sia* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione misurabile. Allora*

[3] D'ora in avanti con la notazione $v_h \rightrightarrows v$ indicheremo la convergenza uniforme di v_h a v.

(i) *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $K_\varepsilon \subset \Omega$ *compatto tale che* $|\Omega \setminus K_\varepsilon| < \varepsilon$,
(ii) u *è continua in* K_ε,

((i)+(ii) $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ u *quasi-continua).*

Dim. Per ogni intero positivo h consideriamo una famiglia numerabile di boreliani disgiunti $\left\{B_h^j\right\}_j \subset \mathbb{R}$ tali che $\mathbb{R} = \bigcup_j B_h^j$ e $\operatorname{diam} B_h^j < 1/h$.

Definiamo $\Omega_h^j := u^{-1}\left(B_h^j\right) \cap \Omega$.
Allora, per ogni h, j, Ω_h^j sono misurabili e $\Omega = \bigcup_j \Omega_h^j$ per ogni $h \in \mathbb{N}$.

Sia $\varepsilon > 0$; per la proprietà di regolarità della misura di Lebesgue, fissati h, j interi positivi, esiste un compatto $K_h^j \subset \Omega_h^j$ tale che $\left|\Omega_h^j \setminus K_h^j\right| < \dfrac{\varepsilon}{2^{h+j}}$.
Pertanto

$$\begin{aligned}\left|\Omega \setminus \bigcup_j K_h^j\right| &= \left|\bigcup_j \Omega_h^j \setminus \bigcup_j K_h^j\right| \\ &\leq \left|\bigcup_j \left(\Omega_h^j \setminus K_h^j\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2^h}.\end{aligned}$$

Poiché $\lim\limits_{m\to\infty} \left|\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{m} K_h^j\right| = \left|\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_h^j\right|$, esiste un intero $m_0(h)$ tale che

$$\left|\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{m_0(h)} K_h^j\right| < \frac{\varepsilon}{2^h}.$$

Posto $K_h := \bigcup_{j=1}^{m_0(h)} K_h^j$, abbiamo che K_h è compatto.
Per ogni h, j fissiamo $b_h^j \in B_h^j$ e definiamo la funzione $u_h : K_h \to \mathbb{R}$, ponendo $u_h(x) = b_h^j$ se $x \in K_h^j$ $(j \leq m_0(h))$.
Poiché $K_h^1, \ldots, K_h^{m_0(h)}$ sono compatti e disgiunti, le u_h sono funzioni continue.
Posto $K_\varepsilon := \bigcap_h K_h$, abbiamo che K_ε è compatto e

$$|\Omega \setminus K_\varepsilon| \leq \sum_{h=1}^{\infty} |\Omega \setminus K_h| < \varepsilon.$$

Inoltre, poiché $|u(x) - u_h(x)| < 1/h$ per ogni $x \in K_h$, risulta che $u_h \rightrightarrows u$ su K_ε e, in quanto limite uniforme di funzioni continue, $u_{|_{K_\varepsilon}}$ è continua. $\square$

Il seguente teorema generalizza il precedente teorema di Lusin

TEOREMA 1.1.16 (SCORZA DRAGONI, 1948 [**66**]).
Siano $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile, con $|\Sigma| < +\infty$, $S \subset \mathbb{R}^s$ e $g(x,y)$ una funzione reale definita in $\Sigma \times S$, misurabile in x per ogni $y \in S$, e uniformemente continua in S per q.o. $x \in \Sigma$ [4].
Allora, per ogni $\delta > 0$ esiste un compatto $K_\delta \subset \Sigma$, tale che

(i) $|\Sigma \setminus K_\delta| < \delta$
(ii) *la restrizione di $g(x,y)$ a $K_\delta \times S$ è continua.*

DIM. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \Sigma$, poniamo

$$w_h(x) := \sup\left\{|g(x,y') - g(x,y'')|;\ y', y'' \in S,\ |y' - y''| < \frac{1}{h}\right\}.$$

Essendo per ipotesi $g(x,\cdot)$ uniformemente continua in S per q.o. $x \in \Sigma$, abbiamo

$$w_h(x) \xrightarrow[h\to+\infty]{} 0 \qquad \text{per q.o. } x \in \Sigma.$$

Per il teorema di Severini-Egorov 1.1.14, in corrispondenza di un arbitrario $\delta > 0$ esiste un compatto $K_{1,\delta} \subset \Sigma$, con $|\Sigma \setminus K_{1,\delta}| < \frac{\delta}{2}$, tale che $w_h \rightrightarrows 0$ in $K_{1,\delta}$. Ciò vuol dire, in altri termini, che, al variare di $x \in K_{1,\delta}$, $g(x,\cdot)$ è una famiglia di funzioni equicontinue in S.
Sia ora $\widetilde{S} = \{\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, \widetilde{y}_j, \ldots\}$ un insieme numerabile e denso in S e sia $\{\delta_j\}$ una successione di numeri positivi, con $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \delta_j < \frac{\delta}{2}$.
Per il teorema di Lusin 1.1.15, in corrispondenza di ogni $\widetilde{y}_j$ esiste un compatto $\widetilde{K}_j \subset \Sigma$ tale che $\left|\Sigma \setminus \widetilde{K}_j\right| < \delta_j$ e $g(\cdot, \widetilde{y}_j)$ è continua in $\widetilde{K}_j$.

Poniamo $K_{2,\delta} := \displaystyle\bigcap_{j=1}^{+\infty} \widetilde{K}_j$; in $K_{2,\delta}$ tutte le funzioni $g(\cdot, \widetilde{y}_j)$ sono continue e

$$\begin{aligned} |\Sigma \setminus K_{2,\delta}| &= \left|\Sigma \setminus \bigcap_{j=1}^{+\infty} \widetilde{K}_j\right| = \left|\bigcup_{j=1}^{+\infty} \left(\Sigma \setminus \widetilde{K}_j\right)\right| \le \sum_{j=1}^{+\infty} \left|\Sigma \setminus \widetilde{K}_j\right| \\ &< \sum_{j=1}^{+\infty} \delta_j < \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Posto $K_\delta := K_{1,\delta} \cap K_{2,\delta}$ risulta $|\Sigma \setminus K_\delta| < \delta$. Sia ora $(\{x_h\}, \{y_h\})$ una successione in $K_\delta \times S$ tale che $x_h \to x \in K_\delta$ e $y_h \to y \in S$. Abbiamo:

$$|g(x_h, y_h) - g(x,y)| \le |g(x_h, y_h) - g(x_h, y)| + |g(x_h, y) - g(x,y)|. \tag{1.2}$$

[4] anche, $g : \Sigma \times S \to \mathbb{R}$ funzione di Carathéodory (cfr. definizione 4.1.1)

Il primo termine a destra di (1.2) tende a zero, per $h \to +\infty$, dato che le funzioni $g(x,\cdot)$ sono equicontinue per $x \in K_\delta \subset K_{1,\delta}$. Quanto al secondo termine, abbiamo

$$\begin{aligned} |g(x_h,y) - g(x,y)| \le |g(x,\widetilde{y}) - g(x,y)| &+ |g(x_h,\widetilde{y}) - g(x,\widetilde{y})| \\ &+ |g(x_h,\widetilde{y}) - g(x_h,y)|, \end{aligned} \tag{1.3}$$

dove $\widetilde{y} \in \widetilde{S}$ è scelto in modo che per ogni $x \in K_\delta$ risulti

$$|g(x,\widetilde{y}) - g(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(ciò è possibile per la equicontinuità delle funzioni $g(x,\cdot)$ al variare di $x \in K_\delta \subset K_{1,\delta}$).
In questo modo il primo e il terzo termine nel secondo membro di (1.3) risultano entrambi minori di $\frac{\varepsilon}{2}$, mentre il secondo termine tende a zero per $h \to +\infty$ (essendo $g(\cdot,\widetilde{y})$ continua in $K_\delta \subset K_{2,\delta}$). Ne segue

$$\limsup_{h\to+\infty} |g(x_h,y_h) - g(x,y)| < \varepsilon \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

e dunque la tesi. □

La misura di Lebesgue non permette di distinguere tra loro insiemi di misura nulla né di assegnare a questi una dimensione. Per questo scopo sono state introdotte numerose misure. Quella di Hausdorff si è rivelata molto utile nello studio delle equazioni alle derivate parziali.

Misura di Hausdorff k-dimensionale (1918).
Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ e siano k intero positivo con $0 < k \le n$ e $\delta > 0$; poniamo

$$\mathcal{H}^k_\delta(E) := \omega_k 2^{-k} \inf\left\{ \sum_{j=1}^{+\infty} (\mathrm{diam} E_j)^k \,;\; E \subset \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j,\; \mathrm{diam} E_j < \delta \right\},$$

dove ω_k è la misura di Lebesgue della palla unitaria k-dimensionale.
Se δ decresce l'estremo inferiore è fatto su una famiglia più piccola di ricoprimento di E, sicché $\mathcal{H}^k_\delta(E)$ cresce (i.e. $0 < \delta' < \delta \Rightarrow \mathcal{H}^k_{\delta'}(E) \ge \mathcal{H}^k_\delta(E)$, quindi $\mathcal{H}^k_\delta(E)$ è monotona non crescente rispetto a δ).
Allora

$$\exists \lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}^k_\delta(E) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^k_\delta(E) := \mathcal{H}^k(E)\,;$$

$\mathcal{H}^k(E)$ è la *misura di Hausdorff k-dimensionale di E.*
Si pone $\mathcal{H}^0(E) :=$ cardinalità di E.

La definizione di misura di Hausdorff si estende a ogni k numero reale positivo (la definizione di ω_k è estesa tramite la funzione gamma di Eulero

$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} s^{t-1} e^{-s}\, ds \quad (t > 0)\ :\ \omega_k := \pi^{k/2} / \Gamma\left(k/2 + 1\right))$.

Proprietà delle misure di Hausdorff.

(i) Se $E \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile, si ha $\mathcal{H}^n(E) = \mathcal{L}^n(E)$ (dove $\mathcal{L}^n(E)$ è la misura di Lebesgue n-dimensionale di E);

(ii)
$$0 < \mathcal{H}^k(E) < +\infty \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{H}^m(E) = 0 & \forall m > k \\ \\ \mathcal{H}^m(E) = +\infty & \forall m < k; \end{cases}$$

(iii) $\mathcal{H}^k(E + x) = \mathcal{H}^k(E) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ (invarianza per traslazioni);

(iv) $\mathcal{H}^k(\lambda E) = \lambda^k \mathcal{H}^k(E) \quad \forall \lambda > 0$ ($\mathcal{H}^k$ è omogenea di grado k) dove $\lambda E = \{\lambda x;\ x \in E\}$.

Alla luce della proprietà (ii) ha senso porre la seguente definizione di *dimensione di Hausdorff dell'insieme E*

$$\mathcal{H} - \dim(E) := \inf\left\{k \geq 0;\ \mathcal{H}^k(E) = 0\right\}.$$

Teorema 1.1.17 (della divergenza in $\mathbb{R}^n$, Gauss-Green).
Sia $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ compatto con frontiera lipschitziana; sia $u \in C^1\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n\right)$ [5]*, allora*

$$\int_\Omega div\, u(x)\, d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\partial\Omega} u(\xi) \cdot \nu(\xi)\, d\mathcal{H}^{n-1}(\xi),$$

dove $\nu(\xi)$ è il versore normale esterno applicato a $\xi \in \partial\Omega$ (ove definito). Se $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$:

$$\int_\Omega u_{x_i}(x)\, d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\partial\Omega} u(\xi)\nu_i(\xi)\, d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

5

$$u \in C^k\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m\right) \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad u \in C^k\left(\Omega; \mathbb{R}^m\right) \text{ e } \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^N,\ |\boldsymbol{\alpha}| \leq k \text{ e } \forall \xi \in \partial\Omega \text{ esiste } \lim_{\substack{x \to \xi \\ x \in \Omega}} D^{\boldsymbol{\alpha}} u(x) = D^{\boldsymbol{\alpha}} u(\xi).$$

Ricordiamo che

$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^N$ con α_i numeri naturali $(i = 1, \ldots, n)$;

$|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \qquad D^{\boldsymbol{\alpha}} u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{(\partial x_1)^{\alpha_1} (\partial x_2)^{\alpha_2} \cdots (\partial x_n)^{\alpha_n}}$;

$\boldsymbol{\alpha}! = (\alpha_1!)\,(\alpha_2!) \ldots (\alpha_n!)$;

se $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$: $\qquad x^{\boldsymbol{\alpha}} = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots x_n^{\alpha_n}$.

Teorema 1.1.18 (integrazione per parti).
Sia $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ *compatto con frontiera lipschitziana; se* $u, v \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$*, allora*

$$\int_\Omega u_{x_i}(x)v(x)\,d\mathcal{L}^n(x) = -\int_\Omega u(x)v_{x_i}(x)\,d\mathcal{L}^n(x) + \int_{\partial\Omega} u(\xi)v(\xi)\nu_i(\xi)\,d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) \qquad (i = 1, \ldots, n)\,.$$

1.2. Spazi di Lebesgue L^m.

Definizione 1.2.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e sia $1 \leq m \leq \infty$.
Una funzione misurabile $u : \Omega \to \mathbb{R}$ appartiene a $L^m(\Omega)$ se

$$\|u\|_{L^m(\Omega)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_\Omega |u(x)|^m \, dx\right)^{\frac{1}{m}} & \text{se } 1 \leq m < \infty \\ \inf\{\alpha : \, |u(x)| \leq \alpha \text{ q.o. in } \Omega\} & \text{se } m = \infty. \end{cases}$$

è finito.

Teorema 1.2.2 (Disuguaglianza di Chebyshev).
Sia $u \in L^m(\Omega)$ $(1 \leq m < \infty)$*; posto* $U_t = \{x \in \Omega; \, |u(x)| > t\}$*, si ha* $|U_t| \leq t^{-m} \|u\|^m_{L^m(\Omega)}$.

Dim. L'insieme U_t è misurabile e risulta

$$\int_\Omega |u(x)|^m \, dx \geq \int_{U_t} |u(x)|^m \, dx \geq t^m \, |U_t| \,, \quad \text{da cui la tesi.}$$

□

Nel seguente teorema elenchiamo le più importanti proprietà degli spazi $L^m(\Omega)$ che useremo in seguito.

Teorema 1.2.3. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aperto e sia* $1 \leq m \leq \infty$*. Valgono:*

(i) $\|\cdot\|_{L^m(\Omega)}$ *è una norma e* $L^m(\Omega)$ *munito di questa norma è uno spazio di Banach. Lo spazio* $L^2(\Omega)$ *è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare dato da*

$$(u|v) = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx.$$

(ii) (immersione continua)
Se $|\Omega| < \infty$ e se $m, q \in \mathbb{N}$ con $1 \leq m < q \leq \infty$, risulta:

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^m(\Omega) \quad \text{e} \quad \|u\|_{L^m(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{m}-\frac{1}{q}} \|u\|_{L^q(\Omega)} \quad \forall u \in L^q(\Omega).$$

(iii) (INTERPOLAZIONE)
Se $u \in L^m(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ *con* $1 \leq m < q \leq \infty$, *allora:*

$$u \in L^r(\Omega) \quad \forall r \in \mathbb{R} \text{ tale che } m \leq r \leq q$$

e inoltre:

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^m(\Omega)} \cdot \|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)} \text{ dove } \theta \in [0,1] \text{ e } \frac{1}{r} = \frac{\theta}{m} + \frac{1-\theta}{q}.$$

(iv) (TEOREMA DI RIESZ) [6]
Lo spazio duale di $L^m(\Omega)$, *indicato con* $(L^m(\Omega))'$ *può essere identificato con* $L^{m'}(\Omega)$, *dove* $\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1$, *per* $1 \leq m < \infty$.

Questo significa che: se $\Phi \in (L^m(\Omega))'$ *per* $1 \leq m < \infty$ *esiste un'unica* $u \in L^{m'}(\Omega)$ *tale che*

$$(\Phi|f) = \Phi(f) = \int_\Omega u(x)f(x)\,dx, \quad \forall f \in L^m(\Omega)$$

e inoltre

$$\|u\|_{L^{m'}(\Omega)} = \|\Phi\|_{(L^m(\Omega))'}.$$

Questo risultato è falso per $m = \infty$ *(cioè se* $m' = 1$*).*

(v) $L^m(\Omega)$ *è separabile per* $1 \leq m < \infty$ *e riflessivo per* $1 < m < \infty$.

(vi) *Le funzioni di classe* $C_0^\infty(\Omega)$ *sono dense in* $L^m(\Omega)$. *Più precisamente:* $\forall u \in L^m(\Omega)$

$$\exists \{u_h\} \subset C_0^\infty(\Omega) \text{ tale che } \lim_{h\to\infty} \|u_h - u\|_{L^m(\Omega)} = 0.$$

Questo risultato è falso per $m = \infty$.

OSSERVAZIONE 1.2.4. Utilizzando i precedenti risultati sulla dualità abbiamo:

$$(L^m(\Omega))' = L^{m'}(\Omega) \quad \text{se } 1 < m < \infty,$$

$$\left(L^2(\Omega)\right)' = L^2(\Omega), \quad \left(L^1(\Omega)\right)' = L^\infty(\Omega), \quad L^1(\Omega) \subsetneqq (L^\infty(\Omega))'.$$

Riassumendo

---

[6] Sia $\left(X, |\cdot|_X\right)$ un spazio di Banach.
Lo spazio duale topologico di X, indicato con X', è definito da

$$X' := \left\{ l : X \to \mathbb{R};\ l \text{ lineare e } \|l\|_{X'} := \sup_{x\neq 0} \frac{|l(x)|}{|x|_X} < +\infty \right\}.$$

Lo spazio X si dice *riflessivo* se $\left(X'\right)' = X$.
Lo spazio X si dice *separabile* se X contiene un sottoinsieme numerabile denso.

Spazio di Lebesgue	Riflessivo	Separabile	Spazio Duale
$L^m(\Omega)$ $1 < m < \infty$	SI	SI	$L^{m'}(\Omega)$
$L^1(\Omega)$	NO	SI	$L^\infty(\Omega)$
$L^\infty(\Omega)$	NO	NO	contiene strettamente $L^1(\Omega)$

Introduciamo ora i concetti di CONVERGENZA FORTE E DEBOLE NEGLI SPAZI $L^m(\Omega)$.

DEFINIZIONE 1.2.5. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e sia $1 \leq m \leq \infty$.

(i) La successione $\{u_h\}$ converge fortemente a u in $L^m(\Omega)$ se $u_h, u \in L^m(\Omega)$ e se
$$\lim_{h\to\infty} \|u_h - u\|_{L^m(\Omega)} = 0.$$
In questo caso scriviamo: $u_h \to u$ in $L^m(\Omega)$.

(ii) Se $1 \leq m < \infty$, la successione $\{u_h\}$ converge debolmente a u in $L^m(\Omega)$ se $u_h, u \in L^m(\Omega)$ e se
$$\lim_{h\to\infty} \int_\Omega [u_h(x) - u(x)]\, w(x)\, dx = 0,\ \forall w \in L^{m'}(\Omega).$$
In questo caso scriviamo: $u_h \rightharpoonup u$ in $L^m(\Omega)$.

(iii) Se $m = \infty$, la successione $\{u_h\}$ converge debolmente* a u in $L^\infty(\Omega)$ se $u_h, u \in L^\infty(\Omega)$ e se
$$\lim_{h\to\infty} \int_\Omega [u_h(x) - u(x)]\, w(x)\, dx = 0,\ \forall w \in L^1(\Omega).$$
In questo caso scriviamo: $u_h \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in $L^\infty(\Omega)$.

OSSERVAZIONE 1.2.6.

a. Parliamo di convergenza debole* in $L^\infty(\Omega)$ e non di convergenza debole poiché $L^1(\Omega) \subsetneqq (L^\infty(\Omega))'$, sebbene la convergenza debole in $L^m(\Omega)$ e la convergenza debole* in $L^\infty(\Omega)$ abbiano la stessa forma.
b. Il limite (debole o forte) è unico.
c. E' ovvio che
$$u_h \to u \text{ in } L^m(\Omega) \Rightarrow \begin{cases} u_h \rightharpoonup u \,\text{in}\, L^m(\Omega) & \text{se } 1 \leq m < \infty \\ \\ u_h \overset{*}{\rightharpoonup} u \,\text{in}\, L^\infty(\Omega) & \text{se } m = \infty. \end{cases}$$

TEOREMA 1.2.7. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato. Valgono:*

(i) *Se $u_h \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in $L^\infty(\Omega)$, allora $u_h \rightharpoonup u$ in $L^m(\Omega)$ $1 \leq m < \infty$.*
(ii) *Se $u_h \to u$ in $L^m(\Omega)$, allora $\|u_h\|_{L^m(\Omega)} \to \|u\|_{L^m(\Omega)}$, $1 \leq m \leq \infty$.*

(iii) *Se* $1 \leq m < \infty$ *e se* $u_h \rightharpoonup u$ *in* $L^m(\Omega)$*, allora esiste una costante* $c > 0$ *tale che* $\|u_h\|_{L^m(\Omega)} \leq c$ *ed inoltre* $\|u\|_{L^m(\Omega)} \leq \liminf_{h\to\infty} \|u_h\|_{L^m(\Omega)}$.

Questo risultato vale anche se $m = \infty$ *e se* $u_h \overset{*}{\rightharpoonup} u$ *in* $L^\infty(\Omega)$.

(iv) (COMPATTEZZA DEBOLE IN SPAZI DI LEBESGUE RIFLESSIVI) *Se* $1 < m < \infty$ *e se* $\{u_h\} \subset L^m(\Omega)$ *è limitata (cioè esiste una costante* $c > 0$ *tale che* $\|u_h\|_{L^m(\Omega)} \leq c$*), allora esistono un'estratta* $\{u_{h_j}\}$ *ed una funzione* $u \in L^m(\Omega)$ *tali che* $u_{h_j} \rightharpoonup u$ *in* $L^m(\Omega)$.

Questo risultato vale anche se $m = \infty$ *(dunque avremo* $u_{h_j} \overset{*}{\rightharpoonup} u$ *in* $L^\infty(\Omega)$*).*

(v) *Se* $1 \leq m \leq \infty$ *e se* $u_h \to u$ *in* $L^m(\Omega)$*, allora esistono un'estratta* $\{u_{h_j}\}$ *ed una funzione* $g \in L^m(\Omega)$ *tali che* $u_{h_j} \to u$ *q.o. e* $|u_{h_j}| \leq g$ *q.o. in* Ω.

OSSERVAZIONE 1.2.8.

a. Confrontando (ii) e (iii) del teorema 1.2.7, osserviamo che la norma è semicontinua inferiormente rispetto alla convergenza debole, mentre la norma è continua rispetto alla convergenza forte.
b. La parte più interessante del teorema 1.2.7 è (iv). Questa dice, infatti, che come in $\mathbb{R}^n$, per il teorema di Bolzano-Weierstrass, da ogni successione limitata se ne può estrarre una convergente, così in $L^m(\Omega)$ vale un risultato analogo a patto di sostituire la convergenza forte con quella debole (il risultato non vale in $L^m(\Omega)$ con la convergenza forte).
c. Il risultato (iv) è falso se $m = 1$ in quanto $L^1(\Omega)$ non è uno spazio riflessivo.

TEOREMA 1.2.9 (LEMMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aperto e sia* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tale che*

$$\int_\Omega u(x)\psi(x)\,dx = 0 \quad \textit{per ogni } \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Allora $u = 0$ *q.o. in* Ω.

DIM. Osservato che Ω è unione numerabile di compatti, la tesi si riduce a provare che fissato un arbitrario compatto $K \subset \Omega$ si ha $u = 0$ q.o. in K. Definiamo

$$v(x) = \begin{cases} \text{segno}\, u(x) & \text{se } x \in K \\ \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus K \end{cases}$$

dove

$$\operatorname{segno} u(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } u(x) > 0 \\ 0 & \text{se } u(x) = 0 \\ -1 & \text{se } u(x) < 0. \end{cases}$$

Abbiamo che $v \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ed ha supporto compatto $K \subset \Omega$. Dall'ipotesi e dal teorema 1.2.3(vi) otteniamo facilmente che vale

$$0 = \int_K u(x)v(x)\,dx = \int_K |u(x)|\,dx$$

e quindi $u = 0$ q.o. in K. □

Corollario 1.2.10. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tale che*

$$\int_\Omega u(x)\psi(x)\,dx = 0 \quad \textit{per ogni } \psi \in C_0^\infty(\Omega) \textit{ con } \int_\Omega \psi(x)\,dx = 0.$$

Allora $u =$costante q.o. in Ω.

Dim. Fissiamo una $v \in C_0^\infty(\Omega)$ con $\int_\Omega v(x)\,dx = 1$ e sia $w \in C_0^\infty(\Omega)$ arbitraria; definiamo

$$\psi(x) := w(x) - \left[\int_\Omega w(y)\,dy\right] v(x).$$

Allora $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\displaystyle\int_\Omega \psi(x)\,dx = 0$, pertanto per l'ipotesi

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega u(x)\psi(x)\,dx \\ &= \int_\Omega u(x)w(x)\,dx - \int_\Omega v(x)u(x)\,dx \cdot \int_\Omega w(y)\,dy \\ &= \int_\Omega u(x)w(x)\,dx - \int_\Omega v(y)u(y)\,dy \cdot \int_\Omega w(x)\,dx \\ &= \int_\Omega \left[u(x) - \int_\Omega v(y)u(y)\,dy\right] w(x)\,dx. \end{aligned}$$

Per il teorema 1.2.9 abbiamo

$$u(x) = \int_\Omega v(y)u(y)\,dy = \text{costante} \qquad \text{per q.o. } x \in \Omega.$$

□

Con $L^m(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$ indichiamo l'insieme delle $u : \Omega \to \mathbb{R}^\nu$, $u = \left(u^1, \dots, u^\nu\right)$ con $u^i \in L^m(\Omega)$ per ogni $i = 1, \dots, \nu$.

1.3. Spazi di Sobolev $W^{1,m}$.

Prima di definire gli spazi di Sobolev, diamo la il concetto di derivata debole. Sia $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, allora $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ è la derivata debole di u rispetto a x_α $(\alpha = 1, \dots, n)$ se e solo se

$$\int_\Omega v(x)\psi(x)\,dx = -\int_\Omega u(x)D_\alpha\psi(x)\,dx \quad \text{per ogni } \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Nel seguito scriveremo (con abuso di notazione) $v = D_\alpha u$.
Per il teorema 1.2.9, se una derivata debole esiste essa è unica (q.o.).

Definizione 1.3.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e sia $1 \leq m \leq \infty$.

(i) Indichiamo con $W^{1,m}(\Omega)$ lo spazio vettoriale delle funzioni $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in L^m(\Omega)$ aventi derivate parziali deboli $D_\alpha u \in L^m(\Omega)$ per ogni $\alpha = 1, \dots, n$. Muniamo questo spazio della seguente norma

$$\|u\|_{W^{1,m}(\Omega)} := \left(\|u\|^m_{L^m(\Omega)} + \|\nabla u\|^m_{L^m(\Omega,\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{m}} \quad \text{se } 1 \leq m < \infty$$

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} := \max\left\{\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)}\right\} \quad \text{se } m = \infty.$$

Se Ω è limitato e convesso $W^{1,\infty}(\Omega) = C^{0,1}(\overline{\Omega}) = \text{Lip}(\overline{\Omega})$ (cfr. nota 7).

(ii) Indichiamo con $W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$ l'insieme delle funzioni $u : \Omega \to \mathbb{R}^\nu$, $u = (u^1, \dots, u^\nu)$, con $u^i \in W^{1,m}(\Omega)$ per ogni $i = 1, \dots, \nu$.

(iii) Se $1 \leq m < \infty$, poniamo $W_0^{1,m}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{1,m}(\Omega)}$. Se Ω è limitato, diciamo -con abuso di linguaggio- che se $u \in W_0^{1,m}(\Omega)$, allora $u \in W^{1,m}(\Omega)$ e $u = 0$ su $\partial\Omega$.

(iv) Scriviamo $u \in u_0 + W_0^{1,m}(\Omega)$ se $u, u_0 \in W^{1,m}(\Omega)$ e $u - u_0 \in W_0^{1,m}(\Omega)$.

(v) Poniamo $W_0^{1,\infty}(\Omega) := W^{1,\infty}(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega)$.

(vi) Se $k \in \mathbb{N}$, indichiamo con $W^{k,m}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni $u : \Omega \to \mathbb{R}$ aventi deriate parziali deboli $D^{\boldsymbol{\alpha}} u \in L^m(\Omega)$ per ogni multi indice $\boldsymbol{\alpha}$ con $|\boldsymbol{\alpha}| = j$, $0 \leq j \leq k$. Muniamo questo spazio della seguente norma

$$\|u\|_{W^{k,m}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{0\leq|\boldsymbol{\alpha}|\leq k} \|D^{\boldsymbol{\alpha}} u\|^m_{L^m(\Omega)}\right)^{\frac{1}{m}} & \text{se } 1 \leq m < \infty \\[2ex] \displaystyle\max_{0\leq|\boldsymbol{\alpha}|\leq k} (\|D^{\boldsymbol{\alpha}} u\|_{L^\infty(\Omega)}) & \text{se } m = \infty. \end{cases}$$

(vii) Se $1 \leq m < \infty$, poniamo $W_0^{k,m}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{k,m}(\Omega)}$ e

$W_0^{k,\infty}(\Omega) := W^{k,\infty}(\Omega) \cap W_0^{k,1}(\Omega)$.

(viii) $W^{1,m}(\Omega)$ è separabile per $1 \leq m < \infty$ e riflessivo per $1 < m < \infty$.

Teorema 1.3.2 (Rademacher).
Sia u localmente lipschitziana in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Allora u è differenziabile q.o. in Ω.

Introduciamo i concetti di convergenza forte e debole in $W^{1,m}(\Omega)$.

Definizione 1.3.3. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e sia $1 \leq m \leq \infty$.

(i) La successione $\{u_h\}$ converge fortemente a u in $W^{1,m}(\Omega)$ se $u_h, u \in W^{1,m}(\Omega)$ e se
$$\lim_{h\to\infty} \|u_h - u\|_{W^{1,m}(\Omega)} = 0.$$
(ii) Se $1 \leq m < \infty$, la successione $\{u_h\}$ converge debolmente a u in $W^{1,m}(\Omega)$ se $u_h, u \in W^{1,m}(\Omega)$ e se
$$u_h \rightharpoonup u \text{ in } L^m(\Omega) \text{ e } \nabla u_h \rightharpoonup \nabla u \text{ in } L^m(\Omega, \mathbb{R}^n).$$
(iii) Se $m = \infty$, la successione $\{u_h\}$ converge debolmente* a u in $W^{1,\infty}(\Omega)$ se $u_h, u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e se
$$u_h \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ in } L^\infty(\Omega) \text{ e } \nabla u_h \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla u \text{ in } L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

In $W_{\mathrm{loc}}^{1,m}(\Omega)$ le precedenti definizioni di convergenza si intendono verificate in ogni compatto $K \subset \Omega$.
E' evidente che l'estensione di una $u \in W^{1,m}(\Omega)$ a tutto $\mathbb{R}^n$ ponendo $u = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, non garantisce che essa sia in $W^{1,m}(\mathbb{R}^n)$. Questo perché l'estensione banale a tutto $\mathbb{R}^n$ può creare discontinuità su $\partial\Omega$ tali che la funzione estesa non abbia derivate parziali prime deboli in $L^m(\mathbb{R}^n)$.
Una corretta estensione di $u \in W^{1,m}(\Omega)$ che "preservi le derivate deboli attraverso $\partial\Omega$" è data dal seguente teorema

Teorema 1.3.4 (di estensione, Calderón).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con frontiera lipschitziana. Sia $1 \leq m \leq \infty$ e sia $V \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato tale che $\Omega \subset\subset V$. Allora esiste un operatore $\mathcal{E}$ lineare e continuo:
$$\mathcal{E} : W^{1,m}(\Omega) \to W^{1,m}(\mathbb{R}^n)$$
tale che $\forall u \in W^{1,m}(\Omega)$ risulta

(i) $\mathcal{E}u = u$ *q.o. in* Ω
(ii) $\mathcal{E}u$ *ha supporto contenuto in* V
(iii) $\|\mathcal{E}u\|_{W^{1,m}(\mathbb{R}^n)} \leq c\,\|u\|_{W^{1,m}(\Omega)}$, $c = c(m, \Omega, V) > 0$.

Teorema 1.3.5 (immersioni continue per $W^{1,m}(\Omega)$).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con frontiera lipschitziana. Valgono:

(i) Immersione continua di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg

Se $1 \le m < n$*:* $\quad W^{1,m}(\Omega) \hookrightarrow L^{m^*}(\Omega), \quad m^* = \dfrac{nm}{n-m}$

$\|u\|_{L^{m^*}(\Omega)} \le c\,\|u\|_{W^{1,m}(\Omega)}\ \forall u \in W^{1,m}(\Omega)$

con $c = c(m,n,\Omega) > 0$.

(ii) Caso limite

Se $m = n$*:* $\quad W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, +\infty[$

$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le c\,\|u\|_{W^{1,n}(\Omega)}\ \forall u \in W^{1,n}(\Omega)$

con $c > 0$.

(iii) Immersione continua di Morrey [7]

Se $m > n$*:* $\quad W^{1,m}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}), \quad \gamma = 1 - \dfrac{n}{m}$

$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \le c\,\|u\|_{W^{1,m}(\Omega)}\ \forall u \in W^{1,m}(\Omega)$

con $c = c(m,n,\Omega) > 0$*, essendo*

$\max_{\overline{\Omega}} |u| \le c\,\|u\|_{W^{1,m}(\Omega)}$,

$|u(x) - u(y)| \le c\,|x-y|^{1-\frac{n}{m}}\,\|\nabla u\|_{L^m(\Omega,\mathbb{R}^n)}$ *per ogni* $x, y \in \Omega$.

Osservazione 1.3.6. Se $1 \le m < n$ risulta:

$$W^{1,m}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \le q \le m^*.$$

L'immersione in (i) del teorema 1.3.5 è tuttavia la migliore, poiché $L^{m^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ per ogni $1 \le q \le m^*$.

Proposizione 1.3.7 (Diseguaglianza di Poincaré in $W_0^{1,m}(\Omega)$, $1 \le m < \infty$). *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aperto limitato. Allora:*

$\exists\, c = c(n,m,\Omega) > 0$ *tale che* $\|u\|_{L^m(\Omega)} \le c\,\|\nabla u\|_{L^m(\Omega,\mathbb{R}^n)}\quad \forall u \in W_0^{1,m}(\Omega)$.

---

[7] Sia $0 < \sigma \le 1$. Una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è hölderiana con esponente σ (lipschitziana se $\sigma = 1$) se la seminorma, detta coefficiente di Hölder di u,

$$[u]_{\sigma,\Omega} := \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\sigma} < +\infty.$$

$[u]_{\sigma,\Omega}$ non è una norma perché è zero per ogni funzione costante.
Scriveremo $u \in C^{0,\sigma}\left(\overline{\Omega}\right)$ per indicare che u è limitata ed hölderiana in Ω.
Lo spazio $C^{0,\sigma}\left(\overline{\Omega}\right)$ è di Banach munito della norma

$$\|u\|_{C^{0,\sigma}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + [u]_{\sigma,\Omega}$$

(per dimostrarlo usare il teorema di Ascoli-Arzelà 1.3.13).
Sia $k \in \mathbb{N}$,

$u \in C^{k,\sigma}\left(\overline{\Omega}\right) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ u e le sue derivate fino all'ordine k sono continue e limitate in $\overline{\Omega}$, e $D^\alpha u \in C^{0,\sigma}\left(\overline{\Omega}\right)$ per ogni α con $|\alpha| = k$.

Proposizione 1.3.8 (Disuguaglianza di Poincaré in $W^{1,m}(\Omega)$, $1 \le m < \infty$). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con frontiera lipschitziana. Allora:* $\exists\, c = c(n, m, \Omega) > 0$ *tale che*

$$\int_\Omega \left| u(x) - \fint_\Omega u(y)\, dy \right|^m dx \le c \int_\Omega |\nabla u|^m \, dx \;\; \forall u \in W^{1,m}(\Omega) \quad [8].$$

Inoltre, se $m < n$ si ha

$$\left\| u - \fint_\Omega u \right\|_{L^{m^*}(\Omega)} \le c(n, m, \Omega) \, \|\nabla u\|_{L^m(\Omega, \mathbb{R}^n)} \qquad \forall u \in W^{1,m}(\Omega).$$

La proposizione successiva fornisce una disuguaglianza del tipo Poincaré-Sobolev per le funzioni di $W^{1,m}(\Omega)$ (non necessariamente nulle su $\partial\Omega$), purché si annullino su un insieme di misura positiva.

Proposizione 1.3.9. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con frontiera lipschitziana. Se $m < n$, per ogni $u \in W^{1,m}(\Omega)$ che si annulla su un insieme A di misura positiva, risulta*

$$\|u\|_{L^{m^*}(\Omega)} \le c \left(\frac{|\Omega|}{|A|} \right)^{\frac{1}{m^*}} \cdot \|\nabla u\|_{L^m(\Omega, \mathbb{R}^n)}.$$

Corollario 1.3.10. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto con $|\Omega| < +\infty$; siano $m, r \ge 1$ e $t = \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} \ge 0$. Allora esiste $c = c(n, r)$ tale che*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \le c \, \|\nabla u\|_{L^m(\Omega, \mathbb{R}^n)} \, |\Omega|^t \quad \text{per ogni } u \in W_0^{1,m}(\Omega).$$

Dim. Poniamo

$$s = \begin{cases} 1 & \text{se } rn \le r + n \\ \frac{rn}{r+n} & \text{se } rn > r + n \end{cases}$$

Allora

$$1 \le s \le m, \qquad s < n \qquad \text{e} \qquad s^* \ge r.$$

Dal teorema di immersione di Lebesgue 1.2.3(ii) e dal teorema di immersione di Sobolev 1.3.5 otteniamo:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^r(\Omega)} &\le \|u\|_{L^{s^*}(\Omega)} \cdot |\Omega|^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s^*}} = \|u\|_{L^{s^*}(\Omega)} \, |\Omega|^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s} + \frac{1}{n}} \\ &\le c \, \|\nabla u\|_{L^m(\Omega, \mathbb{R}^n)} \, \|\Omega|^{\frac{1}{r} - \frac{1}{m} + \frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

□

Affrontiamo il problema della "compattezza" in spazi funzionali che useremo in seguito. Un primo teorema di compattezza è dovuto a G. Ascoli (1884) e C. Arzelà (1894/95).

[8] $\displaystyle\fint_\Omega v(x)\, dx := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega v(x)\, dx =$ media integrale di v su Ω.

Premettiamo le seguenti definizioni:

Sia $u_h : \Omega \to \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{N}$ una successione di funzioni.

Definizione 1.3.11.
$\{u_h\}$ equilimitata in $\Omega \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists M > 0$ tale che $\sup_{x\in\Omega} |u_h(x)| \le M \ \ \forall h \in \mathbb{N}$.

Definizione 1.3.12.
$\{u_h\}$ equicontinua in $\Omega \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ tale che $|x - y| < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow \ |u_h(x) - u_h(y)| < \varepsilon$
$\forall x,\, y \in \Omega, \forall h \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.3.13 (Ascoli-Arzelà).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato e sia $\{u_h\}$ una successione di funzioni $u_h : \Omega \to \mathbb{R}$, equilimitata ed equicontinua.
Allora esiste una sottosuccessione $\left\{u_{h_j}\right\}$ di $\{u_h\}$ e una funzione continua u, tale che

(i) $u_{h_j}(x) \to u(x)$ *per ogni* $x \in \Omega$*;*
(ii) $u_{h_j} \rightrightarrows u$ *sui compatti contenuti in* Ω*.*

Dim.

(i) Indichiamo con $\mathcal{R}_\Omega$ l'insieme dei punti di Ω aventi coordinate razionali. $\mathcal{R}_\Omega$ è numerabile e denso in Ω.
Sia $x_1 \in \mathcal{R}_\Omega$. Poiché la successione di numeri reali $\{u_h(x_1)\}$ è limitata, per il teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione $\{u_{h1}(x_1)\}$ convergente a un numero reale $u(x_1)$.
Consideriamo ora la successione $\{u_{h1}\}$, estratta di $\{u_h\}$; sia $x_2 \in \mathcal{R}_\Omega$. Poiché la successione di numeri reali $\{u_{h1}(x_2)\}$ è limitata, per il teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione $\{u_{h2}(x_2)\} \to u(x_2)$.
Proseguendo il procedimento di estrazione successiva, costruiamo infinite successioni -la j-esima delle quali è denotata con $\{u_{hj}\}$- tali che
   - ogni successione è estratta della precedente;
   - per ogni j fissato, la successione di numeri reali $\{u_{hj}(x_j)\}$ converge a un numero reale $u(x_j)$;
   - per ogni j fissato, $u_{hj}(x_m) \to u(x_m)$ per ogni $m = 1, \ldots, j-1$.

   Consideriamo quindi la successione "diagonale" $\{u_{jj}\}$ avente al j-esimo posto la j-esima funzione della j-esima successione.

$$\begin{array}{cccccc}
u_{11}(x_1) & \searrow & u_{21}(x_1) & & u_{31}(x_1) & \cdots & u_{j1}(x_1) & \cdots \\
u_{12}(x_2) & & u_{22}(x_2) & \searrow & u_{32}(x_2) & \cdots & u_{j2}(x_2) & \cdots \\
u_{13}(x_3) & & u_{23}(x_3) & & u_{33}(x_3) & \cdots & u_{j3}(x_3) & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \searrow & \vdots & \\
u_{1j}(x_j) & & u_{2j}(x_j) & & u_{3j}(x_j) & \cdots & u_{jj}(x_j) & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \searrow
\end{array}$$

Osserviamo che $\{u_{jj}\}$ è un'estratta della successione iniziale e $\{u_{jj}(x)\}$ converge per ogni $x \in \mathcal{R}_\Omega$.
Sia ora $x \in \Omega \setminus \mathcal{R}_\Omega$. Poiché $\mathcal{R}_\Omega$ è denso in Ω, per ogni $0 < \varepsilon < 1$ esiste $x_\varepsilon \in \mathcal{R}_\Omega$ tale che $|x - x_\varepsilon| < \varepsilon$. Pertanto, dalla disuguaglianza triangolare e dall'ipotesi di equicontinuità, segue:

$$\begin{aligned}
|u_{jj}(x) - u_{kk}(x)| &\leq |u_{jj}(x) - u_{jj}(x_\varepsilon)| + |u_{jj}(x_\varepsilon) - u_{kk}(x_\varepsilon)| \\
&\quad + |u_{kk}(x_\varepsilon) - u_{kk}(x)| \\
&< 2\varepsilon + |u_{jj}(x_\varepsilon) - u_{kk}(x_\varepsilon)|\,.
\end{aligned}$$

Poiché $x_\varepsilon \in \mathcal{R}_\Omega$ e $\{u_{jj}(x_\varepsilon)\}$ è convergente, esiste $\nu(x_\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande tale che $|u_{jj}(x_\varepsilon) - u_{kk}(x_\varepsilon)| < \varepsilon$ per ogni $j, k > \nu(x_\varepsilon)$.
Perciò, per ogni tale j e k abbiamo:

$$|u_{jj}(x) - u_{kk}(x)| < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Questo implica che, per ogni $x \in \Omega \setminus \mathcal{R}_\Omega$, $\{u_{jj}(x)\}$ è una successione (di numeri reali) di Cauchy, quindi convergente.
In definitiva esiste una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $u_{jj}(x) \to u(x)$ per ogni $x \in \Omega$.
Inoltre, da $|u(x) - u(y)| = \lim_{j\to\infty} |u_{jj}(x) - u_{jj}(y)|$, per ogni x, $y \in \Omega$, e dall'equicontinuità della successione $\{u_{jj}\}$ segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$|x - y| < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; |u(x) - u(y)| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x,\, y \in \Omega.$$

(ii) Dimostriamo ora che la successione $\{u_{jj}\}$ converge uniformemente in ogni compatto K di Ω.
Sia $K \subset \Omega$ compatto e fissiamo $\varepsilon > 0$. Ovviamente $K \subset \bigcup_{x\in\Omega} B_\varepsilon(x)$ e, per compattezza, esistono $x_1, \ldots, x_k \in \Omega$ tali che $K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_\varepsilon(x_i)$.
Selezioniamo un $\nu(k) \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande tale che $|u_{jj}(x_i) - u(x_i)| < \varepsilon$ per ogni $j > \nu(k)$, per ogni $i = 1, \ldots, k$. Poiché per ogni $x \in K$ esiste una palla $B_\varepsilon(x_i)$ che lo contiene, dall'ipotesi di

equicontinuità, abbiamo:

$$\begin{aligned}|u_{jj}(x)-u(x)| &\leq |u_{jj}(x)-u_{jj}(x_i)|+\left|u_{jj}(x_i)-u_(x_i)\right| \\ &\quad +|u(x_i)-u(x)| \\ &< \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon.\end{aligned}$$

□

Più in generale sussiste il seguente risultato.

TEOREMA 1.3.14 (COMPATTEZZA IN $C^0(X,Y)$ [9]).
Sia X uno spazio topologico separabile e sia (Y,d) uno spazio metrico completo. Sia $U \subset C^0(X,Y)$ con $U \neq \emptyset$ tale che

(i) *U è equicontinuo in X;*
(ii) *per ogni $x \in X$ la chiusura dell'insieme $\{u(x);\ u \in U\}$ è un sottoinsieme compatto di Y.*

Allora ogni successione $\{u_h\} \subset U$ ammette un'estratta convergente -puntualmente in X ed uniformemente sui compatti di X- ad una funzione $u \in C^0(X,Y)$.

Ai risultati di immersione compatta per $W^{1,m}(\Omega)$ premettiamo

DEFINIZIONE 1.3.15. Siano X e Y due spazi di Banach. Diciamo che X è immerso con compattezza in Y (e scriviamo $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$) se

(i) $X \hookrightarrow Y$ ossia $\exists c > 0$ tale che $\|x\|_Y \leq c\,\|x\|_X$ $\forall x \in X$
(ii) ogni successione limitata in X ammette un'estratta convergente in Y.

TEOREMA 1.3.16 (IMMERSIONI COMPATTE PER $W^{1,m}(\Omega)$, RELLICH, 1930-KONDRACHOV, 1945).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con frontiera lipschitziana. Valgono

(i) *Se $1 \leq m < n$: $W^{1,m}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, m^*[$.*
(ii) *Se $m = n$: $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$.*
(iii) *Se $m > n$: $W^{1,m}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$.*

DIM.

[9] $v \in C^0(X,Y) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} v : X \to Y$ continua.
Per ogni $x \in X$,
l'insieme U è equicontinuo in x $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists V(x)$, intorno di x, tale che $\quad \mathrm{d}(u(t),u(x)) < \varepsilon\ \ \forall t \in V(x)$ e $\forall u \in U$.

(i) Sia $1 \leq q < m^*$.

1. Intanto, per l'immersione continua di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg 1.3.5(i), $W^{1,m}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, ossia $\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c\,\|u\|_{W^{1,m}(\Omega)}$.
2. Rimane allora da provare che se $\{u_h\}$ è una successione limitata di $W^{1,m}(\Omega)$ esiste un'estratta $\left\{u_{h_j}\right\}$ di Cauchy in $L^q(\Omega)$. Per il teorema di estensione 1.3.4 possiamo supporre $\Omega = \mathbb{R}^n$ e u_h a supporto compatto in $V \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato. Possiamo inoltre supporre
$$\sup_{h\in\mathbb{N}} \|u_h\|_{W^{1,m}(V)} < +\infty. \tag{1.4}$$
3. Studiamo dapprima le funzioni regolarizzate
$$u_h^\varepsilon := \rho_\varepsilon * u_h \quad (\varepsilon > 0,\ h \in \mathbb{N})$$
dove ρ_ε è l'usuale mollificatore definito da
$$\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (\mathrm{supp}\rho_\varepsilon \subset \overline{B_\varepsilon(0)}),$$
$$\rho(x) = \begin{cases} ce^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$
e c è una costante tale che $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx = 1$. Possiamo supporre anche che le u_h^ε abbiano supporto contenuto in V.
4. Proviamo che
$$u_h^\varepsilon \to u_h \quad \text{in } L^q(V) \quad \text{per } \varepsilon \to 0^+ \tag{1.5}$$
uniformemente in h.
Consideriamo inizialmente il caso $q = 1$. Osserviamo preliminarmente che se $u_h \in C^1(V)$, allora
$$\begin{aligned} u_h^\varepsilon(x) - u_h(x) &= \int_{B_1(0)} \rho(y)\left[u_h(x-\varepsilon y) - u_h(x)\right]\,dy \\ &= \int_{B_1(0)} \rho(y) \int_0^1 \frac{d}{dt} u_h(x-\varepsilon ty)\,dt\,dy \\ &= -\varepsilon \int_{B_1(0)} \rho(y) \int_0^1 Du_h(x-\varepsilon ty)\cdot y\,dt\,dy. \end{aligned}$$
Pertanto
$$\begin{aligned} &\int_V \left|u_h^\varepsilon(x) - u_h(x)\right|\,dx \\ \leq\ & \varepsilon \int_{B_1(0)} \rho(y) \int_0^1 \int_V \left|Du_h(x-\varepsilon ty)\right|\,dx\,dt\,dy \\ \leq\ & \varepsilon \int_V \left|Du_h(z)\right|\,dz. \end{aligned}$$

Per densità tale stima vale anche se $u_h \in W^{1,m}(V)$. Essendo V limitato, per il teorema di immersione continua negli spazi di Lebesgue 1.2.3(ii), abbiamo

$$\|u_h^\varepsilon - u_h\|_{L^1(V)} \leq \varepsilon \|Du_h\|_{L^1(V,\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon c \|Du_h\|_{L^m(V,\mathbb{R}^n)} .$$

Dall'ipotesi (1.4) segue

$$u_h^\varepsilon \to u_h \quad \text{in } L^1(V) \text{ per } \varepsilon \to 0^+ \tag{1.6}$$

uniformemente in h.

Per estendere il risultato ad un arbitrario $1 \leq q < m^*$, utilizzando la diseguaglianza di interpolazione 1.2.3(iii), otteniamo

$$\|u_h^\varepsilon - u_h\|_{L^q(V)} \leq \|u_h^\varepsilon - u_h\|_{L^1(V)}^\theta \cdot \|u_h^\varepsilon - u_h\|_{L^{m^*}(V)}^{1-\theta}$$

dove $\dfrac{1}{q} = \theta + \dfrac{1-\theta}{m^*}$, $0 < \theta < 1$.

Di conseguenza, dalla diseguaglianza di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg 1.3.5(i) e da (1.4),

$$\|u_h^\varepsilon - u_h\|_{L^q(V)} \leq c \|u_h^\varepsilon - u_h\|_{L^1(V)}^\theta$$

con la costante c che non dipende da ε; quindi l'asserto (1.5) segue da (1.6).

5. Proviamo ora che per ogni $\varepsilon > 0$ (fissato) la successione $\{u_h^\varepsilon\}$ è equilimitata ed uniformemente equicontinua.
   Infatti, se $x \in \mathbb{R}^n$, allora

$$\begin{aligned} |u_h^\varepsilon(x)| &\leq \int_{B_\varepsilon(x)} \rho_\varepsilon(x-y)\,|u_h(y)|\,dy \leq \|\rho_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \cdot \|u_h\|_{L^1(V)} \\ &\leq \frac{c}{\varepsilon^n} < +\infty \end{aligned}$$

   per ogni $h \in \mathbb{N}$. Analogamente

$$|Du_h^\varepsilon(x)| \leq \|D\rho_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \cdot \|u_h\|_{L^1(V)} \leq \frac{c}{\varepsilon^{n+1}} < +\infty$$

   per ogni $h \in \mathbb{N}$. Pertanto $\{u_h^\varepsilon\}$ è equicontinua perché equilipschitziana.
6. Fissiamo ora $\delta > 0$. Proviamo che esiste $\{u_{h_j}\}$ estratta da $\{u_h\}$ tale che

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{h_j} - u_{h_k}\|_{L^q(V)} \leq \delta. \tag{1.7}$$

   Infatti per (1.5) scegliamo $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo tale che

$$\|u_h^\varepsilon - u_h\|_{L^q(V)} \leq \frac{\delta}{2} \quad \text{per ogni } h \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

   Osservato che per il punto 2 le $\{u_h\}$, e quindi le $\{u_h^\varepsilon\}$, hanno supporto nel fissato aperto limitato V e che per il punto 5 $\{u_h^\varepsilon\}$ è uniformemente equicontinua, per il criterio di compattezza di Ascoli-Arzelà 1.3.13, esiste $\left\{u_{h_j}^\varepsilon\right\}$ convergente uniformemente su V.

In particolare

$$\limsup_{j,k\to\infty} \left\| u^{\varepsilon}_{h_j} - u^{\varepsilon}_{h_k} \right\|_{L^q(V)} = 0. \tag{1.9}$$

Ma allora (1.8) e (1.9) implicano

$$\limsup_{j,k\to\infty} \left\| u_{h_j} - u_{h_k} \right\|_{L^q(V)} \le \delta$$

cioè la (1.7).

7. Infine, usando la (1.7) con $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ e con un procedimento diagonale, otteniamo un'estratta $\{u_{h_l}\}$ che soddisfa:

$$\limsup_{l,k\to\infty} \| u_{h_l} - u_{h_k} \|_{L^q(V)} = 0.$$

(ii) Poiché $m^* > m$ e $m^* \to +\infty$ per $m \to n$, si ha

$$W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$$

per ogni $q \in [1, +\infty[$.

(iii) segue dall'immersione di Morrey 1.3.5(iii) e dal criterio di compattezza di Ascoli-Arzelà 1.3.13.

□

Osservazione 1.3.17. Poiché $m^* > m$ abbiamo in particolare

$$W^{1,m}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^m(\Omega)$$

per ogni $1 \le m \le +\infty$.
Non è inutile osservare che

$$W^{1,m}_0(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^m(\Omega)$$

anche se non si assume che la frontiera di Ω sia lipschitziana.

Osservazione 1.3.18. Per $q = m^*$ non si ha necessariamente l'immersione compatta (per questo motivo m^* è chiamato *esponente critico di Sobolev*). Basta a tal proposito considerare il seguente controesempio.
Sia $n \ge 3$ e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato. Consideriamo la successione di palle aperte $B_{r_i}(a_i)$ a due a due disgiunte con $B_{r_i}(a_i) \subset \Omega$ e $0 < r_i \le 1$. Sia $\rho \in C^\infty_0(B_1(0))$.
Poniamo, per ogni i, $\rho_i(x) = r_i^{1-\frac{n}{2}} \rho\left(\frac{x - a_i}{r_i}\right)$, funzione ottenuta traslando e dilatando ρ.
Evidentemente $\rho_i \in C^\infty_0(B_{r_i}(a_i))$ per ogni i e

$$\begin{aligned} \|\rho_i\|_{L^m(\Omega)} &= r_i^{1-\frac{n}{2}+\frac{n}{m}} A^0_m, \\ \|D\rho_i\|_{L^m(\Omega,\mathbb{R}^n)} &= r_i^{-\frac{n}{2}+\frac{n}{m}} A^1_m, \end{aligned}$$

dove

$$A_m^0 = \|\rho\|_{L^m(B_1(0))},$$
$$A_m^1 = \|D\rho\|_{L^m(B_1(0),\mathbb{R}^n)}.$$

Se consideriamo $m = 2$, si ha

$$\|\rho_i\|_{W^{1,2}(\Omega)} = r_i^{1-\frac{n}{2}+\frac{n}{2}} A_2^0 + r_i^{-\frac{n}{2}+\frac{n}{2}} A_2^1 \le A_2^0 + A_2^1 < +\infty.$$

Quindi $\{\rho_i\}$ è lmitata in $W^{1,2}(\Omega)$.
D'altra parte per $m = 2^*$, si ha

$$\|\rho_i\|_{L^{2^*}(\Omega)} = r_i^{1-\frac{n}{2}+\frac{n}{2^*}} A_{2^*}^0 = A_{2^*}^0$$

da cui segue, poiché le funzioni ρ_i hanno supporti disgiunti, che

$$\|\rho_i - \rho_j\|_{L^{2^*}(\Omega)} = \left[\|\rho_i\|_{L^{2^*}(B_{r_i}(a_i))}^{2^*} + \|\rho_j\|_{L^{2^*}(B_{r_j}(a_j))}^{2^*}\right]^{\frac{1}{2^*}} = 2^{\frac{1}{2^*}} A_{2^*}^0 > 0.$$

Pertanto la successione $\{\rho_i\}$ non può avere un'estratta convergente in $L^{2^*}(\Omega)$.

Osservazione 1.3.19. Una semplice estensione del teorema 1.3.16 mostra che per $W^{k,m}(\Omega)$ (k intero positivo $k \ge 1$) vale l'immersione compatta

$$W^{k,m}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{per } km < n,\ 1 \le q < \frac{nm}{n-km}.$$

Il corollario successivo afferma che se una successione converge debolmente in $W^{1,m}(\Omega)$, essa converge fortemente in $L^m(\Omega)$.

Corollario 1.3.20. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con frontiera lipschitziana e sia $1 \le m \le \infty$.*

(i) *Se $1 \le m < \infty$:*

$$u_h \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,m}(\Omega) \ \Rightarrow\ u_h \to u \text{ in } L^m(\Omega).$$

(ii) *Se $m = \infty$:*

$$u_h \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ in } W^{1,\infty}(\Omega) \ \Rightarrow\ u_h \to u \text{ in } L^\infty(\Omega).$$

Dim. Proviamo la (i).
La successione $\{u_h\}$ è limitata in $W^{1,m}(\Omega)$ e quindi, per il teorema 1.3.16, da ogni sua sottosuccessione possiamo estrarre una sottosuccessione convergente in $L^q(\Omega)$ $(q < m^*)$ a una funzione v.
Poiché d'altra parte $u_h \rightharpoonup u$ in $L^m(\Omega)$, si ha $v = u$, e di conseguenza tutta la successione converge a u fortemente in $L^q(\Omega)$ $(q < m^*)$ e quindi in $L^m(\Omega)$.
La (ii) si prova in modo analogo. □

1.4. Funzioni assolutamente continue.

Definizione 1.4.1. Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$;
$u \in AC(I)$ (u Assolutamente Continua in I, nel senso di Vitali) $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta_\varepsilon > 0$ tale che $\sum_{i=1}^{k} |u(b_i) - u(a_i)| < \varepsilon$ per ogni k intero positivo e per ogni famiglia di k-sottointervalli disgiunti $[a_i, b_i] \subset I$ tali che la somma delle loro ampiezze sia minore di δ.

Vale il seguente teorema:

Teorema 1.4.2. *Se I è un intervallo aperto di $\mathbb{R}$, allora $AC(I) = W^{1,1}(I)$ e più precisamente:*

- (i) *ogni $u \in AC(I)$ ha derivata classica u' q.o. (Teorema di Lebesgue (1904)) che appartiene a $L^1(I)$ e, considerata come elemento di $L^1(I)$, u' è la derivata debole di u;*
- (ii) *ogni $u \in W^{1,1}(I)$, a meno di modifiche su un insieme di misura nulla, è una funzione assolutamente continua;*
- (iii) *$u \in AC(I) \Leftrightarrow u$ è q.o. derivabile in senso classico, $u' \in L^1(I)$ e vale il teorema fondamentale del calcolo integrale*
$$u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t)\, dt \qquad \forall x, y \in I.$$

1.5. Funzioni convesse.

Definizione 1.5.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso. Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è convessa se
per ogni $x, y \in \Omega$ e per ogni $0 \le t \le 1$, vale:
$$f\,(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y). \tag{1.10}$$

Teorema 1.5.2 (Iperpiani di supporto).
Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ convessa. Allora per ogni $x \in \Omega$ esiste $r \in \mathbb{R}^n$ tale che
$$f(y) \ge f(x) + r \cdot (y - x) \qquad \text{per ogni } y \in \Omega. \tag{1.11}$$

Osservazione 1.5.3.

- (i) L'applicazione $y \mapsto f(x) + r \cdot (y - x)$ determina l'*iperpiano di supprto* di f in x. La disuguaglianza (1.11) implica che il grafico di f si trova "al di sopra" dell'iperpiano di supporto.

Se f è convessa in Ω, allora f è localmente lipschitziana in Ω.
Se f è differenziabile in x, risulta $r = D\,f(x)$.

(ii) Se $f \in C^2(\Omega)$, allora f è convessa se e solo se $D^2 f \geq 0$.
Se $f \in C^2(\Omega)$, f è uniformemente convessa se $D^2 f \geq \theta I$ con la costante $\theta > 0$, cioè

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} f_{x_\alpha x_\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \geq \theta\,|\xi|^2 \quad (x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n)\,.$$

Teorema 1.5.4 (Disuguaglianza di Jensen).
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato. Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sommabile. Vale:

$$f\left(\fint_\Omega u(x)\,dx\right) \leq \fint_\Omega f(u(x))\,dx. \tag{1.12}$$

Dim. Poiché f è convessa, per ogni $p \in \mathbb{R}$ esiste $r \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(q) \geq f(p) + r(q-p) \qquad \text{per ogni } q \in \mathbb{R}.$$

Siano $p = \fint_\Omega u(x)\,dx$, $q = u(x)$, allora:

$$f(u(x)) \geq f\left(\fint_\Omega u(x)\,dx\right) + r\left(u(x) - \fint_\Omega u(x)\,dx\right).$$

Integrando su Ω si ha la tesi. □

1.6. Compattezza debole in spazi riflessivi e teorema di Mazur.

Abbiamo già ricordato che gli spazi di Lebesgue $L^m(\Omega)$ e di Sobolev $W^{k,m}(\Omega)$ sono spazi di Banach riflessivi per $1 < m < \infty$.
Il teorema 1.2.7(iv) è contenuto nel seguente teorema generale:

Teorema 1.6.1 (compattezza debole in spazi riflessivi).
Sia X uno spazio di Banach riflessivo e sia $\{u_h\} \subset X$ limitata. Allora esistono un'estratta $\{u_{h_j}\}$ ed $u \in X$ tale che $u_{h_j} \rightharpoonup u$ in X [10].

Definizione 1.6.2. Sia X uno spazio topologico. Una funzione $\mathcal{G} : X \to \mathbb{R}$ si dice semicontinua inferiormente (nel seguito *s.c.i.*) se per ogni $t \in \mathbb{R}$ il sottolivello

$$\mathcal{G}_t = \{u \in X : \mathcal{G}[u] \leq t\}$$

è chiuso.

[10] $v_h \rightharpoonup v$ in X $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\langle w, v_h\rangle_{X',X} \to \langle w, v\rangle_{X',X}$ per ogni $w \in X'$
(dove X' è lo spazio duale topologico di X e $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X',X}$ denota la dualità tra Xe X', cioè $\langle w, v\rangle_{X',X}$ indica il valore di $w \in X'$ in $v \in X$).

Se X verifica il primo assioma di numerabilità, nozioni topologiche ammettono generalmente delle caratterizzazioni sequenziali. Diamo la definizione di semicontinuità inferiore in termini di successioni (sequenziale).

Definizione 1.6.3. Sia X uno spazio topologico verificante il primo assioma di numerabilità. Una funzione $\mathcal{G} : X \to \mathbb{R}$ si dice semicontinua inferiormente per successioni o sequenzialmente semicontinua inferiormente (nel seguito *seq. s.c.i.*) in $u \in X$ se per ogni successione $\{u_h\}$ convergente ad u vale la seguente disuguaglianza

$$\mathcal{G}[u] \leq \liminf_{h\to\infty} \mathcal{G}[u_h].$$

Diremo che $\mathcal{G}$ è seq. s.c.i. in X se $\mathcal{G}$ è seq. s.c.i. in ogni $u \in X$.

Lemma 1.6.4. *Sia X uno spazio metrico. Le condizioni seguenti sono equivalenti:*

(i) *$\mathcal{G}$ è seq. s.c.i. in X;*
(ii) *per ogni $t \in \mathbb{R}$ il sottolivello $\mathcal{G}_t = \{u \in X : \mathcal{G}[u] \leq t\}$ è chiuso.*

Osservazione 1.6.5. Sia $\{\mathcal{G}_\alpha : \alpha \in I\}$ una famiglia di funzioni s.c.i. in X, dove I è un insieme arbitrario di indici, non necessariamente numerabile. Allora il funzionale definito da

$$\mathcal{G}[u] = \sup_{\alpha\in I} \mathcal{G}_\alpha[u]$$

è s.c.i. in X.

Dim. Per brevità diamo la dimostrazione nel caso sequenziale.
Fissati $u \in X$ e $u_h \to u$, si ha

$$\mathcal{G}_\alpha[u] \leq \liminf_{h\to\infty} \mathcal{G}_\alpha[u_h] \leq \liminf_{h\to\infty} \mathcal{G}[u_h].$$

Prendendo l'estremo superiore per $\alpha \in I$ risulta

$$\mathcal{G}[u] \leq \liminf_{h\to\infty} \mathcal{G}[u_h].$$

□

In particolare, l'estremo superiore di una famiglia di funzioni continue è s.c.i..

Teorema 1.6.6 (Mazur).
Sia X uno spazio di Banach e sia $C \subset X$. Allora:

(i) *C debolmente chiuso $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ C fortemente chiuso;*
(ii) *C fortemente chiuso e convesso $\Rightarrow$ C debolmente chiuso.*

Corollario 1.6.7. *Siano X uno spazio di Banach e $\mathcal{G} : X \to \mathbb{R}$ convesso. Allora*

$$\mathcal{G} \text{ debolmente s.c.i.} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{G} \text{ fortemente s.c.i..}$$

1.7. Proprietà elementari delle funzioni armoniche.

Qui riportiamo alcune proprietà elementari delle funzioni armoniche, limitandoci a quelle che sono usate nei successivi capitoli 3 e 7.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto.

Definizione 1.7.1. Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

$$u \text{ armonica in } \Omega \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad u \in C^2(\Omega) \ \text{ e } \ \Delta u = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = 0 \text{ in } \Omega.$$

(equazione di Laplace)

Proposizione 1.7.2 (Funzioni armoniche che dipendono dalla distanza da un punto fissato (soluzioni radiali dell'equazione di Laplace)).
Fissiamo $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ e sia

$$0 < r = \left|x - x^0\right| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_i^0\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

la distanza euclidea di $x \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{x^0\right\}$ da x^0; sia

$$u\left(\left|x - x^0\right|\right) = \varphi(r)$$

e imponiamo che sia armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \left\{x^0\right\}$. Poiché

$$\partial_j u = \varphi'(r) \cdot \partial_j r = \varphi'(r) \cdot \frac{x_j - x_j^0}{r}$$

$$\partial_{jj} u = \varphi''(r) \cdot \frac{\left(x_j - x_j^0\right)^2}{r^2} + \varphi'(r) \cdot \frac{r^2 - \left(x_j - x_j^0\right)^2}{r^3}$$

(dove $\varphi'(r) = \dfrac{d\varphi}{dr}(r)$ e $\varphi''(r) = \dfrac{d^2\varphi}{dr^2}(r)$) si ha

$$0 = \Delta u = \varphi''(r) + \frac{n-1}{r} \cdot \varphi'(r) = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr}\left(r^{n-1} \cdot \varphi'(r)\right)$$

(i.e. il Δ quando agisce su una funzione radiale $\varphi = \varphi(r)$ si trasforma nell'operatore $\dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{n-1}{r} \cdot \dfrac{d}{dr}$ o equivalentemente nell'operatore

$\frac{1}{r^{n-1}} \cdot \frac{d}{dr}\left(r^{n-1} \cdot \frac{d}{dr}\right)$*).*
Allora, poiché $r \in]0, +\infty[$,

$$r^{n-1} \cdot \varphi'(r) = c.$$

Ne segue che

$$\varphi(r) = \begin{cases} a \log r + b & se\ n = 2 \\ ar^{2-n} + b & se\ n \geq 3 \end{cases}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, *sono funzioni armoniche in* $R^n \setminus \{x^0\}$.

Teorema 1.7.3 (Uguaglianza del valor medio per funzioni armoniche).
Sia u armonica in Ω*; allora:*

$$\forall \overline{B_R}(y) \subset \Omega \qquad si\ ha: \qquad u(y) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(y)} u(\xi)\, d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) \tag{1.13}$$

o (equivalentemente)

$$u(y) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(y)} u(x)\, dx$$

(i.e. u verifica la proprietà del valor medio).

Dim. Sia $\rho \in]0, R]$ e consideriamo $B_\rho(y)$. Osservato che $u \in C^2\left(\overline{B_\rho}(y)\right)$ e che u è armonica in $B_\rho(y)$, dall'identità

$$\int_{\partial B_\rho(y)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)\, d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) = \int_{B_\rho(y)} \Delta u(x)\, dx = 0$$

otteniamo che

$$0 = \int_{\partial B_\rho(y)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)\, d\mathcal{H}^{n-1}(\xi),$$

e quindi, posto $\omega = \frac{\xi - y}{\rho}$, dove $\rho = |\xi - y|$, abbiamo

$$d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) = d\mathcal{H}^{n-1}(y + \rho\omega) = \rho^{n-1} d\mathcal{H}^{n-1}(\omega),$$

pertanto

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{|\omega|=1} \frac{du}{d\rho}(y + \rho\omega)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y + \rho\omega) \\ &= \rho^{n-1} \frac{d}{d\rho} \int_{|\omega|=1} u(y + \rho\omega)\, d\mathcal{H}^{n-1}(\omega) \\ &= \rho^{n-1} \frac{d}{d\rho}\left[\rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho(y)} u(\xi)\, d\mathcal{H}^{n-1}(\xi)\right]. \end{aligned}$$

Ne segue che la funzione $\Phi(\rho) := \rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho(y)} u(\xi)\ d\mathcal{H}^{n-1}(\xi)$ è costante in $]\,0, R]$, quindi

$$\rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho(y)} u(\xi)\ d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) = R^{1-n} \int_{\partial B_R(y)} u(\xi)\ d\mathcal{H}^{n-1}(\xi)$$

e, passando al limite per $\rho \to 0^+$, otteniamo la tesi.
D'altra parte, da

$$\rho^{n-1} u(y) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_\rho(y)} u(\xi)\ d\mathcal{H}^{n-1}(\xi),$$

integrando rispetto a ρ tra 0 e R abbiamo

$$u(y) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(y)} u(x)\, dx.$$

□

Definizione 1.7.4. Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

$\underset{\text{(superarmonica)}}{u \text{ subarmonica in } \Omega} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} u \in C^0(\Omega)$ e $\forall \overline{B_R}(y) \subset \Omega$:

$$u(y) \underset{(\geq)}{\leq} \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(y)} u(\xi)\, d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) \text{ oppure}$$
$$u(y) \underset{(\geq)}{\leq} \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(y)} u(x)\, dx.$$

(i.e. u verifica una disuguaglianza del valor medio).

Osservazione 1.7.5.

$$u \in C^2(\Omega) \text{ e } \Delta u \geq 0 \text{ in } \Omega \quad \Rightarrow \quad u \text{ subarmonica in } \Omega.$$

Nel seguito indicheremo con $\sigma(\Omega)$ la classe delle funzioni subarmoniche in Ω.

Osservazione 1.7.6.

$$u \in C^2(\Omega) \text{ e } \Delta u \leq 0 \text{ in } \Omega \quad \Rightarrow \quad u \text{ superarmonica in } \Omega.$$

Osservazione 1.7.7.

$$u \text{ subarmonica in } \Omega \quad \Rightarrow \quad -u \text{ superarmonica in } \Omega.$$

Nel seguito proveremo che se $u \in C^0(\Omega)$ e verifica la proprietà del valor medio, allora u è armonica in Ω. Pertanto si ha

$$u \text{ armonica in } \Omega \quad \Rightarrow \quad u \text{ subarmonica e superarmonica in } \Omega.$$

Teorema 1.7.8 (Principio del massimo forte per funzioni subarmoniche).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto connesso e sia $u \in \sigma(\Omega)$. Se

$$\exists \quad y \in \Omega \qquad \textit{tale che} \qquad u(y) = \sup_{\Omega} u,$$

allora u è costante in Ω.

Dim. Poniamo $M := u(y) = \sup_\Omega u$ e $\Omega_M := \{x \in \Omega \ ; \ u(x) = M\}$, osserviamo che, essendo $\Omega_M \neq \emptyset$ ($y \in \Omega_M$ per ipotesi) e che, essendo $\Omega_M = u^{-1}(\{M\})$, Ω_M è chiuso relativamente ad Ω.
D'altra parte, preso $z \in \Omega_M$ (i.e. $u(z) = M$), per la disuguaglianza del valor medio applicata alla funzione subarmonica $u - M$, abbiamo, per $\overline{B_R}(z) \subset \Omega$,

$$0 = u(z) - M \leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(z)} [u(x) - M] \, dx \leq 0$$

cioè $u(x) - M = 0$ per ogni $x \in B_R(z)$, per cui $B_R(z) \subset \Omega_M$. Allora Ω_M è anche aperto relativamente ad Ω, che è connesso, pertanto $\Omega_M = \Omega$, cioè $u(x) = M$ in Ω. □

Teorema 1.7.9 (Principio del minimo forte per funzioni superarmoniche).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e sia u superarmonica in Ω. Se

$$\exists \quad y \in \Omega \qquad \textit{tale che} \qquad u(y) = \inf_{\Omega} u,$$

allora u è costante in Ω.

Dim. Per l'osservazione 1.7.7 la funzione $-u$ è subarmonica in Ω e, da $u(y) = \inf_\Omega u$, abbiamo

$$-u(y) = -\inf_{\Omega} u = \sup_{\Omega} (-u) .$$

Applicando il teorema 1.7.8 a $-u$ otteniamo la tesi. □

Teorema 1.7.10 (Principio del massimo debole per funzioni subarmoniche).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato e sia $u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ subarmonica in Ω. Allora

$$\sup_{\overline{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

Teorema 1.7.11 (Principio del minimo debole per funzioni superarmoniche).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato e sia $u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ superarmonica in Ω. Allora

$$\inf_{\overline{\Omega}} u = \inf_{\partial\Omega} u.$$

Teorema 1.7.12 (del massimo (per il) modulo).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato e sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ armonica in Ω. Allora

(i) $\inf_{\partial\Omega} u \le u(x) \le \sup_{\partial\Omega} u \; \forall x \in \overline{\Omega}$,

(ii) $\sup_{\overline{\Omega}} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|$.

Dim. (i) è evidente per i teoremi 1.7.10 e 1.7.11.
Per provare (ii) è sufficiente osservare che $|u| = \max\{u, -u\}$, oppure che, essendo u armonica (regolare) allora $|u|$ è subarmonica (regolare). $\square$

Problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato; assegnate $f \in C^0(\Omega)$ e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, risolvere il Problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson significa determinare, se esiste, una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ tale che

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \qquad\qquad\qquad \text{(equazione di Poisson)} \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega \qquad\qquad\quad \text{(condizione al contorno, di Dirichlet)} \end{cases}$$

Teorema 1.7.13 (unicità).
Se esiste una $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ soluzione del Problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson, essa è unica.

Dim. Se $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ sono soluzioni dello stesso problema, la funzione $w = u_1 - u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ e verifica

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Allora, essendo

$$0 = \inf_{\partial\Omega} w \le w(x) \le \sup_{\partial\Omega} w = 0 \qquad \forall x \in \overline{\Omega},$$

abbiamo che $w \equiv 0$ in $\overline{\Omega}$, da cui $u_1 = u_2$ (oppure, dal teorema del massimo modulo $\max_{\overline{\Omega}} |w| = \max_{\partial\Omega} |w| = 0 \Rightarrow w = 0$). $\square$

Teorema 1.7.14 (esistenza, unicità e dipendenza continua della soluzione dal dato φ per il Problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace in $B_R(0)$).
Assegnata $\varphi \in C^0(\partial B_R(0))$, la funzione definita in $B_R(0)$ da:

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R^n} \int_{\partial B_R(0)} \frac{\varphi(\xi)}{|\xi - x|^n}\, d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) \qquad \forall x \in B_R(0)$$

è armonica in $B_R(0)$; inoltre, per ogni $\xi_0 \in \partial B_R(0)$

$$\exists \qquad \lim_{\substack{x \to \xi_0 \\ x \in B_R(0)}} u(x) = \varphi(\xi_0).$$

Pertanto

$$u \in C^2(B_R(0)) \cap C^0\left(\overline{B_R}(0)\right) \qquad e \qquad u = \varphi \ \ su\ \ \partial B_R(0).$$

Infine, per il teorema del massimo modulo:

$$\sup_{\overline{B_R}(0)} |u| = \sup_{\partial B_R(0)} |\varphi|.$$

"Caratterizzazione" delle funzioni armoniche.
Nel teorema 1.7.3 abbiamo provato che ogni funzione armonica soddisfa l'uguaglianza del valor medio.
Viceversa, vale il seguente teorema

Teorema 1.7.15. *Se $u \in C^0(\Omega)$ e verifica la proprietà del valor medio, allora u è armonica in Ω.*

Dim. E' sufficiente provare che u è armonica in ogni $B_R(y)$ tale che $\overline{B_R}(y) \subset \Omega$.
Fissata $\overline{B_R}(y) \subset \Omega$, osserviamo che $u \in C^0(\partial B_R(y))$, pertanto il problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B_R(y) \\ v = u & \text{su } \partial B_R(y) \end{cases}$$

ha, per il teorema 1.7.14, un'unica soluzione $v \in C^2(B_R(y)) \cap C^0\left(\overline{B_R}(y)\right)$.
Consideriamo

$$w := v - u \in C^0\left(\overline{B_R}(y)\right)$$

e osserviamo che w (e quindi anche $-w$) verifica la proprietà del valor medio (per la linearità dell'integrale, in quanto v verifica (1.13) perché armonica e u la verifica per ipotesi), pertanto, per il principio del massimo debole 1.7.10

$$\sup_{\overline{B_R}(y)} |w| = \sup_{\partial B_R(y)} |w| = 0;$$

ne segue che $w = 0$, cioè $u \equiv v$ in $\overline{B_R}(y)$, quindi u è armonica regolare in $B_R(y)$. $\square$

Teorema 1.7.16. *Una funzione armonica ha derivate di qualsiasi ordine, e queste sono funzioni armoniche.*

Teorema 1.7.17. *Sia $\{u_h\}$ una successione di funzioni armoniche in Ω tale che $u_h \rightrightarrows u$ in Ω.*
Allora u è armonica in Ω.

Dim. In quanto limite uniforme di funzioni continue, u è continua.
Inoltre,

$$\forall h \in \mathbb{N} \text{ e } \forall \overline{B_R}(y) \subset \Omega : \quad u_h(y) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(y)} u_h(x)\, dx$$

e,passando al limite per $h \to +\infty$, otteniamo

$$u(y) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(y)} u(x)\, dx.$$

Per il teorema 1.7.15, abbiamo la tesi. □

Proviamo ora le stime interne per le derivate di una funzione armonica.

Lemma 1.7.18. *Sia $u \in C^2(\Omega)$ una funzione armonica e limitata in Ω e sia $\sup_\Omega |u| \le M$. Allora*

$$\forall x^0 \in \Omega, \forall \overline{B_R}(x^0) \subset \Omega \quad \textit{e per} \quad i = 1, 2, \dots, n :$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^0) \right| \le \frac{n}{R} M. \tag{1.14}$$

Dim. $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ (in quanto derivata di u armonica) è armonica in Ω per ogni $i = 1, \dots, n$ e, pertanto, soddisfa la proprietà di uguaglianza del valor medio.
Applicando il teorema della divergenza 1.1.17:

$$\forall x^0 \in \Omega, \forall B_R(x^0) \subset \Omega \quad \text{e per} \quad i = 1, 2, \dots, n :$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x^0) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_R(x^0)} u(\xi) \frac{\xi_i - x_i^0}{|\xi - x^0|}\, d\mathcal{H}^{n-1}(\xi); \tag{1.15}$$

ne segue:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^0) \right| \le \frac{n}{R} M.$$

□

Tale stima è un caso particolare del seguente

Lemma 1.7.19. *Sia $u \in C^2(\Omega)$ armonica e limitata in Ω e sia $\sup_\Omega |u| \leq M$. Allora*

$$\forall x^0 \in \Omega, \quad \forall B_R(x^0) \subset \Omega \quad e \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \quad \textit{multi indice}:$$

$$\left|D^{\boldsymbol{\alpha}} u(x^0)\right| \leq \left(\frac{ne}{R}\right)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \frac{|\boldsymbol{\alpha}|!}{e} M. \tag{1.16}$$

Dim. Proviamo il teorema per induzione su $|\boldsymbol{\alpha}|$. Per $|\boldsymbol{\alpha}| = 1$, abbiamo (1.14).
Sia (1.16) vera per $\boldsymbol{\alpha}$ multi indice di lunghezza $|\boldsymbol{\alpha}|$ e proviamo che essa vale per i multi indici $\boldsymbol{\beta}$ di lunghezza $|\boldsymbol{\beta}| = |\boldsymbol{\alpha}| + 1$. Per tale $\boldsymbol{\beta}$ abbiamo che

$$D^{\boldsymbol{\beta}} u = \frac{\partial}{\partial x_i} D^{\boldsymbol{\alpha}} u \quad \text{per un } \; i \in \{1, \ldots, n\}\,.$$

Poiché $D^{\boldsymbol{\beta}} u$ è armonica in Ω (in quanto derivata di u armonica), fissato $\tau \in (0,1)$, $D^{\boldsymbol{\beta}} u$ è armonica nella palla $B_{\tau R}(x^0)$; quindi, dalla proprietà di uguaglianza del valor medio e dal teorema della divergenza 1.1.17, otteniamo:

$$D^{\boldsymbol{\beta}} u(x^0) = \frac{1}{\omega_n \tau^n R^n} \int_{\partial B_{\tau R}(x^0)} D^{\boldsymbol{\alpha}} u(\xi) \frac{\xi_i - x_i^0}{|\xi - x^0|}\, d\mathcal{H}^{n-1}(\xi).$$

Per (1.16) applicata alla palla aperta di centro $\xi \in \partial B_{\tau R}(x^0)$ e raggio $(1-\tau)R$

$$|D^{\boldsymbol{\alpha}} u(\xi)| \leq \left(\frac{ne}{(1-\tau)R}\right)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \frac{|\boldsymbol{\alpha}|!}{e} M.$$

Quindi

$$\left|D^{\boldsymbol{\beta}} u(x^0)\right| \leq \left(\frac{ne}{R}\right)^{|\boldsymbol{\alpha}|+1} \frac{1}{(1-\tau)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\tau} \frac{|\boldsymbol{\alpha}|!}{e^2} M.$$

Scelto

$$\tau = \frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|+1} = \frac{1}{|\boldsymbol{\beta}|}$$

abbiamo:

$$(1-\tau)^{-|\boldsymbol{\alpha}|} = \left(1 - \frac{1}{|\boldsymbol{\beta}|}\right)^{-|\boldsymbol{\beta}|+1} < e,$$

da cui la tesi. □

1.8. Disuguaglianza di Harnack per funzioni armoniche positive.

Proviamo infine la disuguaglianza di Harnack per funzioni armoniche positive.
Questa disuguaglianza esprime una notevole proprietà delle funzioni armoniche e positive in Ω, precisamente il fatto che il rapporto tra il loro

estremo superiore e il loro estremo inferiore, calcolati in un arbitrario compatto e connesso Ω' contenuto in Ω, è limitato superiormente da una costante che dipende dalla dimensione dello spazio euclideo, da Ω e da Ω'.
Proviamo dapprima la disuguaglianza di Harnack nal caso particolare in cui Ω è una palla di $\mathbb{R}^n$.

LEMMA 1.8.1. *Siano $y \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ e u una funzione armonica e positiva in $B_{4R}(y)$.*
Allora

$$\sup_{B_R(y)} u \leq 3^n \inf_{B_R(y)} u. \tag{1.17}$$

DIM. Comunque si scelgano due punti $x^1, x^2 \in B_R(y) \subseteq B_{4R}(y)$ applicando il teorema del valor medio 1.7.3 si ottiene

$$u(x^1) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x^1)} u(x)\,dx \leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_{2R}(y)} u(x)\,dx$$

(poiché $u \geq 0$ e $B_R\left(x^1\right) \subset B_{2R}\left(y\right)$), da cui

$$\sup_{B_R(y)} u \leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_{2R}(y)} u(x)\,dx.$$

Analogamente

$$u(x^2) = \frac{1}{\omega_n 3^n R^n} \int_{B_{3R}(x^2)} u(x)\,dx \geq \frac{1}{\omega_n 3^n R^n} \int_{B_{2R}(y)} u(x)\,dx$$

(poiché $u \geq 0$ e $B_{2R}\left(y\right) \subset B_{3R}\left(x^2\right)$), da cui

$$\inf_{B_R(y)} u \geq \frac{1}{\omega_n 3^n R^n} \int_{B_{2R}(y)} u(x)\,dx.$$

In definitiva

$$\frac{1}{3^n} \sup_{B_R(y)} u \leq \frac{1}{\omega_n 3^n R^n} \int_{B_{2R}(y)} u(x)\,dx \leq \inf_{B_R(y)} u$$

e quindi

$$\sup_{B_R(y)} u \leq 3^n \inf_{B_R(y)} u.$$

□

TEOREMA 1.8.2 (DISUGUAGLIANZA DI HARNACK PER FUNZIONI ARMONICHE POSITIVE; 1887, nel caso $n = 2$).
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso e u una funzione armonica in Ω, u positiva. Allora per ogni Ω' connesso, $\Omega' \subset\subset \Omega$[11], esiste una costante $c = c\left(n, \Omega, \Omega'\right)$ tale che

$$\sup_{\Omega'} u \leq c \inf_{\Omega'} u. \tag{1.18}$$

[11] $\Omega' \subset\subset \Omega \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ la chiusura $\overline{\Omega}'$ è compatta e contenuta in Ω.

Dim. Il compatto e connesso $\overline{\Omega}'$ può essere ricoperto con un numero finito di palle $B_R\left(\omega^i\right) \subset \Omega$, $i = 1, \ldots, m$, con centri in Ω' (sia $R < 1/4 \,\mathrm{dist}\ (\Omega', \partial\Omega)$).
Siano $x^1, x^2 \in \Omega'$: senza ledere la generalità, $x^1 \in B_R\left(\omega^k\right)$ e $x^2 \in B_R\left(\omega^{k+j}\right)$ per qualche $j \geq 1$, e le palle siano numerate in modo che risulti
$B_R\left(\omega^l\right) \cap B_R\left(\omega^{l+1}\right) \neq \emptyset$ per $l = k, \ldots, k + j - 1$.
Applichiamo la stima (1.17) alle palle $B_R\left(\omega^k\right), B_R\left(\omega^{k+1}\right), \ldots, B_R\left(\omega^{k+j}\right)$, e, posto $c_1 := 3^n$, otteniamo

$$\begin{aligned}
u(x^1) &\leq \sup_{B_R(\omega^k)} u \leq c_1 \inf_{B_R(\omega^k)} u \\
&\leq c_1 \sup_{B_R(\omega^{k+1})} u \qquad \text{(poiché } B_R\left(\omega^k\right) \cap B_R\left(\omega^{k+1}\right) \neq \emptyset\text{)} \\
&\leq c_1^2 \inf_{B_R(\omega^{k+1})} u \leq \ldots \\
&\leq c_1^{j+1} \inf_{B_R(\omega^{k+j})} u \leq c_1^{m+1} u\left(x^2\right) \qquad \text{(poiché } j \leq m\text{)}.
\end{aligned}$$

Essendo x^1 e x^2 arbitrari, posto $c := c_1^{m+1}$, abbiamo in definitiva

$$\sup_{\Omega'} u \leq c \inf_{\Omega'} u.$$

□

Una disuguaglianza di tipo Harnack per soluzioni deboli e positive di equazioni in forma di divergenza, ellittiche e omogenee sarà discussa nel cap. 7.

CAPITOLO 2

Metodi classici (indiretti) nel Calcolo delle Variazioni: variazione prima e variazione seconda

I *metodi classici (indiretti) nel Calcolo delle Variazioni* (riconducibili a prima del 1900) si basano sulla dimostrazione di condizioni necessarie di estremalità per funzionali di tipo integrale.

2.1. Metodi classici nel Calcolo delle Variazioni: caso unidimensionale.

Nel 1744, Eulero dedusse la prima condizione necessaria che deve essere soddisfatta da una funzione che minimizza un funzionale integrale.
Nel caso unidimensionale abbiamo i seguenti risultati.

TEOREMA 2.1.1. *Sia $F = F(x, u, p) \in C^1([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$; consideriamo*

$$\mathcal{F}[u] := \int_a^b F(x, u(x), u'(x))\, dx$$

e

$$\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)} = \left\{ u \in C^1([a, b]); u(a) = \alpha, u(b) = \beta \right\}.$$

Valgono:

(i) *(*VARIAZIONE PRIMA*)*
Se u è minimo per $\mathcal{F}$ in $\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)}$:
$\forall v \in C^1([a, b]), \quad v(a) = v(b) = 0$

$$\int_a^b [F_p(x, u(x), u'(x))v'(x) + F_u(x, u(x), u'(x))v(x)]\, dx = 0. \tag{2.19}$$

(Equazione di Eulero in forma debole)

(ii) *Se $F \in C^2([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e u è minimo per $\mathcal{F}$ in $\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)} \cap C^2([a, b])$:*

$$-\frac{d}{dx} F_p(x, u(x), u'(x)) + F_u(x, u(x), u'(x)) = 0 \tag{2.20}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} F_{pp}(x,u(x),u'(x))u''(x) \quad &+ \quad F_{pu}(x,u(x),u'(x))u'(x) \\ &+ \quad F_{px}(x,u(x),u'(x)) \\ &- \quad F_u(x,u(x),u'(x)) = 0 \quad \forall x \in (a,b). \end{aligned}$$

(Equazione di Eulero in forma forte)

(ii') *Se* $F \in C^2([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ *e* u *è minimo per* $\mathcal{F}$ *in* $\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)} \cap C^2([a,b])$*:* $\forall x \in (a,b)$

$$\frac{d}{dx}[F(x,u(x),u'(x)) - u'(x)F_p(x,u(x),u'(x))] = F_x(x,u(x),u'(x)). \quad (2.21)$$

Viceversa:

(iii) *Se* $\overline{u}$ *soddisfa (2.20) e se* $(u,p) \mapsto F(x,u,p)$ *è convessa per ogni* $x \in [a,b]$*, allora* $\overline{u}$ *è minimo di* $\mathcal{F}$ *in* $\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)} \cap C^2\,[a,b]$*.*

(iv) *Se, inoltre, la funzione* $(u,p) \mapsto F(x,u,p)$ *è strettamente convessa per ogni* $x \in [a,b]$*, allora il minimo di* $\mathcal{F}$ *in* $\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)} \cap C^2([a,b])$*, se esiste, è unico.*

(v) (Variazione seconda)
Se $F \in C^2([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ *e* $u \in \mathcal{A}_{(\alpha,\beta)}$ *è minimo di* $\mathcal{F}$*:*
$\forall v \in C_0^1([a,b])$

$$\begin{aligned} \int_a^b [F_{pp}(x,u(x),u'(x))v'^2(x) \quad &+ \quad 2F_{up}(x,u(x),u'(x))v(x)v'(x) \\ &+ \quad F_{uu}(x,u(x),u'(x))v^2(x)]\,dx \geq 0 \end{aligned}$$

Dim.

(i) Poiché u è minimo per $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}[u] \leq \mathcal{F}[u+tv] \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \forall v \in C^1([a,b]), v(a) = v(b) = 0.$$

Poniamo $\phi(t) := \mathcal{F}[u+tv]$. Allora $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ e $\phi(0) \leq \phi(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Pertanto

$$\phi'(0) = \frac{d}{dt}\mathcal{F}[u+tv]_{|t=0} = 0, \quad \text{e quindi}$$

$$\int_a^b [F_p(x,u(x),u'(x))v'(x) + F_u(x,u(x),u'(x))v(x)]\,dx = 0.$$

(ii) Integrando per parti la (2.19):
$\forall v \in C^1([a,b]), v(a) = v(b) = 0$ risulta

$$\int_a^b [-\frac{d}{dx}F_p(x,u(x),u'(x))v(x) + F_u(x,u(x),u'(x))v(x)]\,dx = 0$$

e quindi (per il lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni 1.2.9) otteniamo la (2.20).

(ii') Osserviamo dapprima che per ogni $u \in C^2([a,b])$ si ha

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}[F(x,u(x),u'(x)) - u'(x)F_p(x,u(x),u'(x))] \\ = \; & F_p(x,u(x),u'(x))u''(x) + F_u(x,u(x),u'(x))u'(x) + F_x(x,u(x),u'(x)) \\ - \; & u''(x)F_p(x,u(x),u'(x)) - u'(x)\frac{d}{dx}F_p(x,u(x),u'(x)) \\ = \; & F_x(x,u(x),u'(x)) + u'(x)[F_u(x,u(x),u'(x)) - \frac{d}{dx}F_p(x,u(x),u'(x))]. \end{aligned}$$

Per (2.20) si ha la tesi.

(iii) Essendo $(u,p) \mapsto F(x,u,p)$ convessa per ogni $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} F(x,u(x),u'(x)) \geq F(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x)) \; & + \; F_u(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))(u(x)-\overline{u}(x)) \\ & + \; F_p(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))(u'(x)-\overline{u}'(x)) \end{aligned}$$

per ogni $u \in \mathcal{A}_{(\alpha,\beta)} \cap C^2([a,b])$. Integrando:

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x,u(x),u'(x))\,dx \; & \geq \; \int_a^b F(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x)\,dx) \\ & + \; \int_a^b F_u(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))(u(x)-\overline{u}(x))\,dx \\ & + \; \int_a^b F_p(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))(u'(x)-\overline{u}'(x))\,dx \end{aligned}$$

cioè, integrando per parti il terzo integrale e tenuto presente che $u(a) - \overline{u}(a) = 0 = u(b) - \overline{u}(b)$,

$$\mathcal{F}[u] \geq \mathcal{F}[\overline{u}] + \int_a^b [F_u(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x) - \frac{d}{dx}F_p(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x)](u(x)-\overline{u}(x))\,dx.$$

Usando la (2.20) otteniamo

$$\mathcal{F}[u] \geq \mathcal{F}[\overline{u}] \quad \text{per ogni } u \in \mathcal{A}_{(\alpha,\beta)} \cap C^2([a,b]).$$

(iv) Siano $u, v \in \mathcal{A}_{(\alpha,\beta)} \cap C^2\,([a,b])$ minimi di $\mathcal{F}[\cdot]$; la funzione $w := \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \in \mathcal{A}_{(\alpha,\beta)} \cap C^2\,([a,b])$.
Per la convessità di $(u,p) \mapsto F(x,u,p)$ abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}F(x,u(x),u'(x)) \; & + \; \frac{1}{2}F(x,v(x),v'(x)) \geq \\ & F(x,\frac{1}{2}u(x)+\frac{1}{2}v(x),\frac{1}{2}u'(x)+\frac{1}{2}v'(x)) \\ & = F(x,w(x),w'(x)) \end{aligned}$$

e quindi, posto μ il valore del minimo di $\mathcal{F}$ in $\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)} \cap C^2([a,b])$:

$$\mu = \frac{1}{2}\mathcal{F}[u] + \frac{1}{2}\mathcal{F}[v] \geq \mathcal{F}[w] \geq \mu.$$

Pertanto
$$\int_a^b [\frac{1}{2}F(x,u(x),u'(x)) + \frac{1}{2}F(x,v(x),v'(x)) - F(x,w(x),w'(x))]\,dx = 0.$$
Per l'ipotesi di stretta convessità, l'integrando è positivo a meno che $u = v$ e $u' = v'$; quindi $u = v$.

(v) Poiché u è minimo per $\mathcal{F}$ risulta, con la notazione introdotta in (i): $\phi''(0) \geq 0$ e con facili calcoli segue la tesi.

$\square$

Osservazione 2.1.2. (2.21) è detta equazione di DuBois-Reymond (o seconda forma dell'equazione di Eulero), utile quando F non dipende esplicitamente da x.

Osservazione 2.1.3. Se $F \in C^3([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e u è minimo di $\mathcal{F}$ in $\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)} \cap C^2([a,b])$, osservato che $\forall v \in C_0^1([a,b])$ risulta $2vv' = (v^2)'$ e $v(a) = v(b) = 0$, da 2.1.1(v) abbiamo
$$\int_a^b \Big[F_{pp}(x,u(x),u'(x))v'^2(x) + \Big(F_{uu}(x,u(x),u'(x)) - \frac{d}{dx}F_{up}(x,u(x),u'(x))\Big)v^2(x)\Big]\,dx \geq 0.$$

2.2. Metodi classici nel Calcolo delle Variazioni: caso multidimensionale.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con frontiera lipschitziana.

Teorema 2.2.1 (Variazione prima).
Siano $F = F(x,u,p)$ una funzione di classe $C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN})$, $\varphi \in C^1\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N\right)$ assegnata e indichiamo con
$$\mathcal{A}_\varphi = \left\{u \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right);\ u = \varphi \text{ su } \partial\Omega\right\}$$
la classe delle funzioni ammissibili. Valgono:

(i) *Se u è minimo per $\mathcal{F}$ in $\mathcal{A}_\varphi$, allora:*
$$\int_\Omega \left[F_{p_\alpha^i}(x,u,\nabla u)\, D_\alpha v^i + F_{u^i}(x,u,\nabla u)\, v^i\right] dx = 0 \tag{2.22}$$
per ogni $v \in C_0^\infty\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$[1]*, ($\alpha = 1,\ldots,n$, $i = 1,\ldots,N$ e $p_\alpha^i = D_\alpha u^i$).*

[1] D'ora in poi useremo la convenzione che indici ripetuti sono sommati e i simboli di sommatoria omessi.

(ii) *Se* $F \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN})$ *e* u *è minimo per* $\mathcal{F}$ *in* $\mathcal{A}_\varphi \cap C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$*:*

$$-D_\alpha\, F_{p^i_\alpha}\,(x,u,\nabla u) + F_{u^i}\,(x,u,\nabla u) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \tag{2.23}$$

($i = 1, \ldots, N$), o, equivalentemente,

$$F_{p^i_\alpha p^j_\beta}\,(x,u,\nabla u)\; D_\alpha\, D_\beta u^j + F_{p^i_\alpha u^j}\,(x,u,\nabla u)\; D_\alpha\, u^j$$
$$+F_{p^i_\alpha x_\alpha}\,(x,u,\nabla u) - F_{u^i}\,(x,u,\nabla u) = 0 \tag{2.24}$$

in Ω *($i = 1, \ldots, N$).*

Dim.

(i) Siano $t \in \mathbb{R}$ e $v \in C_0^\infty\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$. Consideriamo la funzione $u + tv$. Tale funzione appartiene ancora ad $\mathcal{A}_\varphi$ (per questo motivo tv prende il nome di variazione ammissibile). Poiché u è minimo per $\mathcal{F}$ deve essere:

$$\frac{d}{dt}\,\mathcal{F}\,[u + tv]_{|t=0} = 0.$$

Essendo

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega F\,(x, u + tv, \nabla u + t\nabla v)\, dx$$

$$= \int_\Omega \left[F_{p^i_\alpha}\,(x, u + tv, \nabla u + t\nabla v)\, D_\alpha v^i + F_{u^i}\,(x, u + tv, \nabla u + t\nabla v)\, v^i\right]\, dx,$$

abbiamo, per $t = 0$,

$$\int_\Omega \left[F_{p^i_\alpha}\,(x,u,\nabla u)\, D_\alpha v^i + F_{u^i}\,(x,u,\nabla u)\, v^i\right]\, dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$$

(ii) Integrando per parti la (2.22), otteniamo:

$$\int_\Omega \left[-D_\alpha F_{p^i_\alpha}\,(x,u,\nabla u) + F_{u^i}\,(x,u,\nabla u)\right] v^i\, dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$$

da cui (2.23) per il lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni 1.2.9.

□

Osservazione 2.2.2. L' equazione (2.22) prende il nome di equazione di Eulero (formulazione debole) di $\mathcal{F}$ in u. Il membro a sinistra di (2.22) prende il nome di *Variazione prima* di $\mathcal{F}$ in u.
La (2.23) è l'equazione di Eulero, formulazione forte, di $\mathcal{F}$ in u. Le soluzioni di (2.23) sono chiamate *estremali* (termine introdotto da Kneser).

Osservazione 2.2.3. (2.24) costituisce un sistema di N equazioni alle derivate parziali del secondo ordine in forma di divergenza, quasi lineare perché è lineare rispetto alle derivate seconde e non lineare rispetto alle derivate prime e di ordine zero.

Esempio 2.2.4. *L'equazione di Eulero per l'integrale di Dirichlet, dove* $F(x, u, p) = \frac{1}{2}|p|^2$*, risulta*

$$\Delta u = 0 \qquad \text{in } \Omega \qquad \textit{(equazione di Laplace)},$$

mentre l'equazione di Eulero per l'integrale dell'area, dove $F(x, u, p) = \left(1 + |p|^2\right)^{\frac{1}{2}}$*, è*

$$D_\alpha \left(\frac{u_{x_\alpha}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0 \quad \textit{(equazione delle superfici di area minima).}$$

Ne segue, poiché il primo membro di questa espressione è proporzionale alla curvatura media della superficie $\{(x, u(x)) \,,\ x \in \Omega\}$*, che le superfici di area minima hanno curvatura media nulla.*

Osservazione 2.2.5. Nel dedurre l'equazione di Eulero per il funzionale $\mathcal{F}$ abbiamo considerato il problema di Dirichlet, cioè abbiamo scelto come funzioni ammissibili le funzioni $u \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right)$ con valore prescritto φ su $\partial\Omega$.

Assumiamo ora che u minimizzi il funzionale $\mathcal{F}$ tra tutte le funzioni $v \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right)$. Allora tutte le funzioni $v \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right)$ sono variazioni ammissibili; pertanto otteniamo le condizioni naturali:

$$\nu_\alpha F_{p^i_\alpha}\left(x, u, \nabla u\right) = 0 \qquad \text{su } \partial\Omega \quad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

dove $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ indica il versore normale (per convenzione esterno) a $\partial\Omega$.

Infatti, sia $v \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right)$, allora

$$\int_\Omega \left[F_{p^i_\alpha}\left(x, u, \nabla u\right) D_\alpha v^i + F_{u^i}\left(x, u, \nabla u\right) v^i\right] dx = 0.$$

Integrando per parti (teorema 1.1.18):

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left[-D_\alpha F_{p^i_\alpha}\left(x, u, \nabla u\right) \right. &+ \left. F_{u^i}\left(x, u, \nabla u\right)\right] v^i \, dx \\ &+ \int_{\partial\Omega} \nu_\alpha F_{p^i_\alpha}\left(x, u, \nabla u\right) v^i \, d\mathcal{H}^{n-1} = 0. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Poiché (2.25) vale anche per ogni $v \in C^\infty_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$, deduciamo che anche (2.22) vale e pertanto

$$\int_{\partial\Omega} \nu_\alpha F_{p^i_\alpha}\left(x, u, \nabla u\right) v^i \, d\mathcal{H}^{n-1} = 0 \qquad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N).$$

Dall'arbitrarietà di v seguono le condizioni naturali.

Esempio 2.2.6. *Se u minimizza l'integrale di Dirichlet senza condizioni al contorno, allora u è soluzione del problema di Neumann omogeneo*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ \dfrac{du}{d\nu} = \nu_\alpha D_\alpha u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Osservazione 2.2.7. Consideriamo il problema

$$\min_{u \in \mathcal{K}} \mathcal{F}[u]$$

dove $\mathcal{K}$ è il sottoinsieme <u>convesso</u> di $C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right)$ definito da

$$\mathcal{K} = \left\{u \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right);\ u = \varphi \text{ su } \partial\Omega \text{ e } u^i \geq h^i \text{ in } \overline{\Omega},\ \ i = 1, \dots, N\right\}.$$

Naturalmente assumiamo $h^i \leq \varphi^i$ su $\partial\Omega$ affinché sia $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Tale problema è noto come *problema con ostacolo unilaterale.*

Se u è un minimo di $\mathcal{F}$, allora vale la seguente *disequazione variazionale*

$$\int_\Omega \left[F_{p^i_\alpha}(x, u, \nabla u) D_\alpha \left(v^i - u^i\right) + F_{u^i}(x, u, \nabla u)\left(v^i - u^i\right)\right] dx \geq 0$$

per ogni $v \in \mathcal{K}$.

Infatti, poiché $\mathcal{K}$ è convesso, per ogni $v \in \mathcal{K}$ e per ogni $t \in [0,1]$ abbiamo

$$tv + (1-t)u = u + t(v-u) \in \mathcal{K}$$

e quindi

$$\mathcal{F}[u] \leq \mathcal{F}[u + t(v-u)] \qquad \forall t \in [0,1];$$

essendo, in questo caso,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}\left[u + t(v-u)\right]_{|t=0} \geq 0$$

ne segue facilmente l'asserto.

Teorema 2.2.8 (Variazione seconda).
Sia $F \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n\times N})$ e sia u minimo per $\mathcal{F}$ in $\mathcal{A}_\varphi$. Allora:
se $N = 1$, risulta

$$F_{p_\alpha p_\beta}(x, u(x), \nabla u(x))\, \xi_\alpha\, \xi_\beta \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ \forall x \in \Omega; \tag{2.26}$$

se $N > 1$, risulta

$$F_{p^i_\alpha p^j_\beta}(x, u(x), \nabla u(x))\, \xi_\alpha\, \xi_\beta \eta^i \eta^j \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ \forall \eta \in \mathbb{R}^N,\ \forall x \in \Omega \tag{2.27}$$

Dim. Per ogni $v \in C_0^\infty\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$ risulta

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{F}[u + tv]_{|t=0} \geq 0.$$

Nel caso scalare $N = 1$ abbiamo

$$\frac{d}{dt}\,\mathcal{F}[u{+}tv] = \int_\Omega \left[F_{p_\alpha}\left(x, u+tv, \nabla u + t\nabla v\right) D_\alpha v + F_u\left(x, u+tv, \nabla u + t\nabla v\right) v\right]\, dx,$$

e

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\mathcal{F}[u{+}tv] = \int_\Omega \big[F_{p_\alpha p_\beta}\left(x, u+tv, \nabla u + t\nabla v\right) D_\alpha v D_\beta v$$
$$+2F_{p_\alpha u}\left(x, u+tv, \nabla u + t\nabla v\right) D_\alpha v\, v + F_{uu}\left(x, u+tv, \nabla u + t\nabla v\right) v^2\big]\, dx.$$

Pertanto

$$0 \leq \frac{d^2}{dt^2}\,\mathcal{F}[u+tv]_{|t=0} \tag{2.28}$$

$$= \int_\Omega \left[F_{p_\alpha p_\beta}\left(x, u, \nabla u\right) D_\alpha v D_\beta v + 2F_{p_\alpha u}\left(x, u, \nabla u\right) D_\alpha v\, v + F_{uu}\left(x, u, \nabla u\right) v^2\right]\, dx$$

per ogni $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Deduciamo da questa la (2.26). Osserviamo dapprima che, per il teorema di Rademacher 1.3.2, la (2.28) è valida anche per ogni funzione lipschitziana v nulla su $\partial\Omega$. Fissiamo ora $\xi \in \mathbb{R}^n$ e definiamo una siffatta funzione ponendo (per ogni $\varepsilon > 0$)

$$v(x) := \varepsilon\rho\left(\frac{x\cdot\xi}{\varepsilon}\right)\zeta(x) \qquad \forall x \in \Omega \tag{2.29}$$

dove $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$, $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione periodica così definita

$$\rho(t) = \begin{cases} t & \text{se } 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ 1-t & \text{se } \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$\rho(t+1) = \rho(t)$ per ogni t numero reale; osserviamo che

$$|\rho'(t)| = 1 \ \text{ q.o. in } \mathbb{R}, \tag{2.30}$$

Risulta

$$D_\alpha v = \rho'\left(\frac{x\cdot\xi}{\varepsilon}\right)\xi_\alpha\,\zeta(x) + O(\varepsilon),$$

pertanto, sostituendo la (2.29) in (2.28), otteniamo

$$0 \leq \int_\Omega F_{p_\alpha p_\beta}\left(x, u, \nabla u\right)\,\left(\rho'\right)^2\,\xi_\alpha\,\xi_\beta\,\zeta^2(x)\,dx + O(\varepsilon).$$

Da cui, per $\varepsilon \to 0^+$, tenuto conto della (2.30), segue:

$$0 \leq \int_\Omega F_{p_\alpha p_\beta}\left(x, u, \nabla u\right)\,\xi_\alpha\,\xi_\beta\,\zeta^2(x)\,dx,$$

per ogni $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$, e quindi

$$F_{p_\alpha p_\beta}\left(x, u(x), \nabla u(x)\right)\,\xi_\alpha\,\xi_\beta \geq 0 \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^n \ \text{ e } \forall x \in \Omega.$$

Per il caso vettoriale $N > 1$, rimandiamo alla dimostrazione della proposizione 5.1.19 (a partire dalla (5.49) alla (5.51)). $\square$

OSSERVAZIONE 2.2.9. La disequazione in (2.26) è detta condizione di Legendre (L). Tale condizione è equivalente alla convessità di $F(x,u,p)$ rispetto a p ed alla condizione di ellitticità dell'equazione di Eulero.

La disequazione in (2.27) è chiamata condizione di Legendre-Hadamard (L-H).

OSSERVAZIONE 2.2.10. *Il problema* $\min \mathcal{F}[u]$ *non ha necessariamente soluzione di classe* C^1.
Infatti, sia $F(p) = (p^2-1)^2$ e consideriamo il problema

$$\min_{u\in\mathcal{A}_{(0,0)}} \mathcal{F}[u] := \min \int_0^1 F(u'(x))\,dx.$$

Posto $\mu := \inf\limits_{u\in\mathcal{A}_{(0,0)}} \mathcal{F}[u]$, proviamo che $\mu = 0$.
Consideriamo la successione ($h \geq 2$)

$$u_h(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2}-\frac{1}{h}\right] \\ -2h^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^3 - 4h\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - x + 1 & \text{se } x \in \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{h}, \frac{1}{2}\right] \\ 1-x & \text{se } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Osserviamo che $u_h \in \mathcal{A}_{(0,0)}$ e si ha:

$$0 \leq \mathcal{F}[u_h] = \int_0^1 \left[(u_h'(x))^2 - 1\right]^2\,dx = \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{h}}^{\frac{1}{2}} \left[(u_h'(x))^2 - 1\right]^2\,dx \leq \frac{4}{h} \overset{h\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ciò implica che $\mu = 0$.
La funzione $u \equiv 0 \in \mathcal{A}_{(0,0)}$, è soluzione dell'equazione di Eulero $\dfrac{d}{dx}\left[u'((u')^2-1)\right] = 0$, tuttavia essa non è minimo per $\mathcal{F}$ poiché $\mu = 0$ e $\mathcal{F}[0] = 1$.
Inoltre, se esistesse $u \in \mathcal{A}_{(0,0)}$ minimo di $\mathcal{F}$, avremmo $\mathcal{F}[u] = 0$ e questo implicherebbe che $|u'| = 1$ q.o., condizione che nessuna funzione $u \in \mathcal{A}_{(0,0)}$ può soddisfare (in quanto per la continuità della derivata avremmo $u' = 1$ ovunque o $u' = -1$ ovunque e questo è incompatibile con le condizioni ai limiti).
Infine, osserviamo, che se, invece della classe ammissibile $\mathcal{A}_{(0,0)}$, consideriamo la classe più ampia di funzioni ammissibili

$$\widetilde{\mathcal{A}}_{(0,0)} = \left\{u \in C^1[a,b] \text{ a tratti }; u(0) = u(1) = 0\right\}$$

il problema di minimo per $\mathcal{F}$ in $\widetilde{\mathcal{A}}_{(0,0)}$ ha come soluzione la *spezzata*

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1-x & \text{se } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

2.3. Due problemi variazionali classici: la brachistocrona e la disuguaglianza isoperimetrica in dimensione $n = 2$.

La brachistocrona(dal greco *brachistos*(il più breve)+*chronos*(tempo)).

La data di nascita del Calcolo delle Variazioni è fissata tradizionalmente al 1696, quando Johan Bernoulli propose sugli *Acta Eruditorum Lipsiae* il problema della brachistocrona (cioè di tempo minimo).

Problema nuovo alla cui soluzione sono invitati i Matematici.

Dati in un piano verticale due punti A e B, trovare il profilo AMB tale che un mobile M, che discende su di esso per gravità a partire da A, giunga in B nel minimo tempo possibile.

La soluzione fu data tra gli altri (Leibniz, Jackob Bernoulli, l'Hospital, Newton) dallo stesso J. Bernoulli nel 1697.
Se in un sistema di coordinate cartesiane, con gravità che agisce nella direzione negativa dell'asse y, $A = \left(x^1, y^1\right)$ indica il punto iniziale e $B = \left(x^2, y^2\right)$ quello finale, con $x^1 < x^2$, $y^2 < y^1$ e se $u : \left[x^1, x^2\right] \to \mathbb{R}$ è una funzione della generica curva che li connette tale che $u\left(x^1\right) = y^1$ e $u\left(x^2\right) = y^2$ e $u(x) < y^1$ per $x^1 < x \leq x^2$, nel punto A la velocità è nulla e l'energia è tutta potenziale, mentre in un punto di ascissa x avremo una velocità v che dovrà verificare la legge di conservazione dell'energia totale

$$mgy_1 = \frac{1}{2}mv^2(x) + mgu(x)$$

dove m è la massa del punto materiale e g è la costante di gravità.
Troviamo quindi

$$v(x) = \sqrt{2g\left(y^1 - u(x)\right)}$$

da cui ricaviamo che per percorrere lungo la curva data uno spazio ds si impiega un tempo

$$dt = \frac{ds}{v} = \sqrt{\frac{1 + |u'(x)|^2}{2g\left(y^1 - u(x)\right)}}dx$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla relazione tra ascissa curvilinea e ascissa cartesiana

$$ds = \sqrt{1 + |u'(x)|^2}dx.$$

Il tempo di percorrenza lungo la curva $u(x)$ sarà dato dall'integrale

$$\mathcal{F}[u] := \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x^1}^{x^2} \sqrt{\frac{1 + |u'(x)|^2}{y^1 - u(x)}}\, dx$$

e il problema di minimo diviene

$$\min_{u\in\mathcal{A}} \mathcal{F}[u] \qquad \text{dove } \mathcal{A} := \left\{u \in C^1\left(\left[x^1, x^2\right]\right);\ u\left(x^1\right) = y^1,\ u\left(x^2\right) = y^2\right\}.$$

L'equazione di DuBois-Reymond (2.21) è

$$\frac{u'^2}{\left(1+u'^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(y^1-u\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\left(1+u'^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(y^1-u\right)^{\frac{1}{2}}} = c.$$

e questa, dopo alcuni calcoli, si riduce a

$$c^2\left(1+u'^2(x)\right)\left(y^1-u(x)\right) = 1.$$

Conviene esprimere la sua soluzione in forma parametrica;
poiché è evidente che $u \le y^1$, possiamo scrivere $u(t) = y^1 - k\left(1-\cos t\right)$ dove k denota un'opportuna costante positiva. L'equazione precedente diventa allora

$$c^2\left(1+\frac{k^2\sin^2 t}{\dot{x}^2(t)}\right)k\left(1-\cos t\right) = 1$$

e con la scelta $kc^2 = \dfrac{1}{2}$, otteniamo

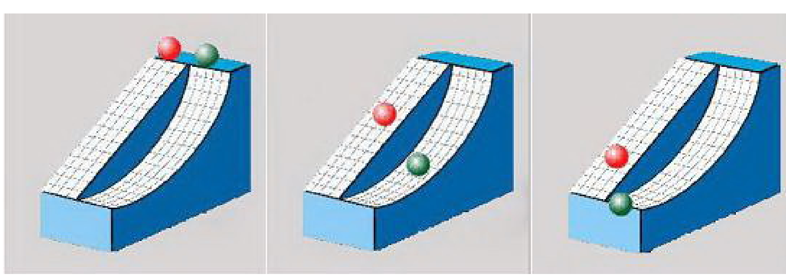
$$\dot{x}(t) = k\left(1-\cos t\right).$$

Pertanto la soluzione risulta essere una **cicloide**, che in forma parametrica è data da

$$\begin{cases} x(t) &= x^1 + k\left(t-\sin t\right) \\ u(t) &= y^1 - k\left(1-\cos t\right), \qquad t \in [0,T], \end{cases}$$

dove le costanti k e T sono determinate dalle condizioni

$$\begin{aligned} x\left(T\right) &= x^2 \\ u\left(T\right) &= y^2. \end{aligned}$$



La brachistocrona.

(1697, Johan Bernoulli: **la brachistocrona è la cicloide**.)

La disuguaglianza isoperimetrica in dimensione $n = 2$.

Tra tutte le curve semplici chiuse del piano di assegnata lunghezza L, la circonferenza di lunghezza L racchiude l'area massima.

Questa proprietà è espressa sinteticamente nella *disuguaglianza isoperimetrica.*

$$L^2 \geq 4\pi A, \tag{2.31}$$

dove A è l'area racchiusa da una curva semplice chiusa C di lunghezza L; l'uguaglianza in (2.31) vale se e solo se C è la circonferenza di lunghezza L.

Osservazione 2.3.1. Probabilmente questo problema (*problema isoperimetrico*) è uno dei più antichi in matematica. Possiamo riscrivere (2.31) come problema di minimo. Parametrizziamo la curva semplice chiusa C ($n = 1$, $N = 2$)

$$C = \{(u(x), v(x)) : \ \ x \in [a, b]\}$$

e poniamo

$$L := L[u, v] = \int_a^b \sqrt{[u'(x)]^2 + [v'(x)]^2}\, dx$$

e

$$A := A[u, v] = \int_a^b u(x)v'(x)\, dx.$$

Allora il problema posto ha la seguente equivalente formulazione variazionale (duale): $\displaystyle\min_{\substack{u,v\in W^{1,1}((a,b))\\ u(a)=u(b),\, v(a)=v(b)}} \{L[u, v] : \ \ A[u, v] = 1\} = 2\sqrt{\pi}.$

Qui diamo una dimostrazione classica (dovuta a Hurwitz [**17**], [**63**]) di (2.31).

Posto $\mathcal{A} := \left\{u \in W^{1,2}\left((-1, 1)\right) : \ u(-1) = u(1), \ \ \int_{-1}^1 u(x)\, dx = 0\right\}$, premettiamo due lemmi.

Lemma 2.3.2 (Disuguaglianza di Wirtinger).
Vale la disuguaglianza

$$\int_{-1}^1 [u'(x)]^2\ dx \geq \pi^2 \int_{-1}^1 [u(x)]^2\ dx \quad \forall u \in \mathcal{A}. \tag{2.32}$$

Inoltre l'uguaglianza vale se e solo se

$$u(x) = a\cos(\pi x) + b\sin(\pi x) \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Dim. E' sufficiente provare la (2.32) per $u \in \mathcal{A} \cap C^2\left([-1, 1]\right)$. Questa restrizione può essere successivamente rimossa usando un argomento di densità.

Sia $u(x) = \sum_{\nu=1}^{+\infty} [a_\nu \cos(\nu\pi x) + b_\nu \sin(\nu\pi x)]$.

Osserviamo che il termine $\dfrac{a_0}{2} = 0$ poiché $\displaystyle\int_{-1}^{1} u(x)\, dx = 0$.

Risulta

$$u'(x) = \pi \sum_{\nu=1}^{+\infty} [-\nu a_\nu \sin(\nu\pi x) + \nu b_\nu \cos(\nu\pi x)]\,.$$

Per la formula di Parseval otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} [u(x)]^2\, dx &= \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left(a_\nu^2 + b_\nu^2\right),\\ \int_{-1}^{1} [u'(x)]^2\, dx &= \pi^2 \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left(a_\nu^2 + b_\nu^2\right) \nu^2\end{aligned}$$

da cui segue la disuguaglianza (2.32).

L'uguaglianza in (2.32) vale se e solo se $a_\nu = b_\nu = 0$ per ogni $\nu \geq 2$.

Di conseguenza l'uguaglianza in (2.32) vale se e solo se

$$u(x) = a\cos(\pi x) + b\sin(\pi x), \qquad \text{per ogni } a, b \in \mathbb{R}.$$

□

LEMMA 2.3.3. *Per ogni* $(u,v) \in W^{1,2}\left((-1,1),\mathbb{R}^2\right)$ *con* $u(-1) = u(1)$ *e* $v(-1) = v(1)$, *vale la disuguaglianza*

$$\int_{-1}^{1} \left\{[u'(x)]^2 + [v'(x)]^2\right\} dx \geq 2\pi \int_{-1}^{1} u(x)v'(x)\, dx. \tag{2.33}$$

Inoltre l'uguaglianza vale se e solo se

$$[u(x) - r_1]^2 + [v(x) - r_2]^2 = r_3^2 \qquad \textit{per ogni } x \in [-1,1] \tag{2.34}$$

dove $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ *sono costanti.*

DIM. La disuguaglianza (2.33) rimane valida se, posto $r_1 := \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} u(x)\, dx$ e $r_2 := \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} v(x)\, dx$, sostituiamo u con $u - r_1$ e v con $v - r_2$; pertanto, possiamo assumere che

$$\int_{-1}^{1} u(x)\, dx = \int_{-1}^{1} v(x)\, dx = 0,$$

e quindi in defintiva che $u, v \in \mathcal{A}$. Proviamo la (2.33) nella forma equivalente

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1} \left\{[u'(x)]^2 + [v'(x)]^2 - 2\pi u(x)v'(x)\right\} dx\\ = \quad &\int_{-1}^{1} [v'(x) - \pi u(x)]^2\, dx + \int_{-1}^{1} \left\{[u'(x)]^2 - [\pi u(x)]^2\right\} dx \geq 0.\end{aligned}$$

La tesi è provata osservato che il primo termine a destra dell'uguaglianza è ovviamente non negativo, e il secondo termine è non negativo per il lemma 2.3.2 applicato a $u \in \mathcal{A}$.
Per provare il caso dell'uguaglianza, osserviamo che questa vale se e solo se $v'(x) = \pi u(x)$ e $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left\{[u'(x)]^2 - [\pi u(x)]^2\right\} dx = 0$, che implica per il lemma 2.3.2

$$\begin{aligned} u(x) &= a\cos(\pi x) + b\sin(\pi x) \qquad \text{e} \\ v(x) &= a\sin(\pi x) - b\cos(\pi x). \end{aligned}$$

Poiché possiamo sostituire u con $u - r_1$ e v con $v - r_2$, abbiamo (2.34) con $r_3 = \sqrt{a^2 + b^2}$. □

Proviamo ora la disuguaglianza isoperimetrica.

Teorema 2.3.4 (Disuguaglianza isoperimetrica).
Posto per ogni $(u, v) \in W^{1,1}\left((a, b), \mathbb{R}^2\right)$ *con* $u(a) = u(b)$ *e* $v(a) = v(b)$

$$\begin{aligned} L := L[u, v] &= \int_a^b \sqrt{[u'(x)]^2 + [v'(x)]^2}\, dx, \\ A := A[u, v] &= \int_a^b u(x)v'(x)\, dx, \end{aligned}$$

vale la (2.31) $\qquad L^2 \geq 4\pi A$
per ogni $(u, v) \in W^{1,1}\left((a, b), \mathbb{R}^2\right)$ *con* $u(a) = u(b)$ *e* $v(a) = v(b)$.

Inoltre, tra tutte le $(u, v) \in C^1\left([a, b], \mathbb{R}^2\right)$ *con* $u(a) = u(b)$ *e* $v(a) = v(b)$, *l'uguaglianza vale se e solo se*

$$[u(x) - r_1]^2 + [v(x) - r_2]^2 = r_3^2 \qquad \textit{per ogni } x \in [a, b],$$

dove $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ *sono costanti.*

Dim. Proviamo la tesi sotto le ulteriori restrizioni:
$(u, v) \in C^1\left([a, b], \mathbb{R}^2\right)$, $u(a) = u(b)$, $v(a) = v(b)$
(questa restrizione può essere rimossa successivamente con un argomento di densità)
e supponiamo inoltre che [2]

$$[u'(x)]^2 + [v'(x)]^2 > 0 \qquad \text{per ogni } x \in [a, b].$$

[2]Per brevità rinviamo a [**17**] per l'eliminazione di questa restrizione.

Allo scopo di eliminare la radice quadrata in $L[u,v]$, riparametrizziamo la curva con un multiplo della sua lunghezza d'arco, precisamente sia

$$\begin{cases} y & = \theta(x) = -1 + \dfrac{2}{L[u,v]} \displaystyle\int_a^x \sqrt{[u'(t)]^2 + [v'(t)]^2}\, dt \\ \\ \varphi(y) & = u\left(\theta^{-1}(y)\right) \ \text{ e } \ \psi(y) = v\left(\theta^{-1}(y)\right). \end{cases}$$

Risulta che: $(\varphi,\psi) \in C^1\left([-1,1],\mathbb{R}^2\right)$, $\varphi(-1) = \varphi(1)$, $\psi(-1) = \psi(1)$ e $\sqrt{[\varphi'(y)]^2 + [\psi'(y)]^2} = \dfrac{L[u,v]}{2}$ per ogni $y \in [-1,1]$

(quindi $\sqrt{[\varphi'(y)]^2 + [\psi'(y)]^2}$ è costante per ogni $y \in [-1,1]$).

Allora abbiamo

$$\begin{aligned} L[u,v] &= \int_{-1}^1 \sqrt{[\varphi'(y)]^2 + [\psi'(y)]^2}\, dy = \left(2\int_{-1}^1 \left\{[\varphi'(y)]^2 + [\psi'(y)]^2\right\} dy\right)^{\frac{1}{2}} \\ A[u,v] &= \int_{-1}^1 \varphi(y)\psi'(y)\, dy. \end{aligned}$$

Per il lemma 2.3.3 sappiamo che

$$\int_{-1}^1 \left\{[\varphi']^2 + [\psi']^2\right\} dx \geq 2\pi \int_{-1}^1 \varphi\psi'\, dx$$

per ogni $(\varphi,\psi) \in W^{1,2}\left((-1,1),\mathbb{R}^2\right)$ con $\varphi(-1) = \varphi(1)$ e $\psi(-1) = \psi(1)$, da cui segue $(L[u,v])^2 - 4\pi A[u,v] \geq 0$ per ogni $(u,v) \in C^1\left([a,b],\mathbb{R}^2\right)$ con $u(a) = u(b)$ e $v(a) = v(b)$.

L'unicità nel caso dell'uguaglianza segue dal lemma 2.3.3. □

Osservazione 2.3.5. In particolare, abbiamo provato implicitamente che *la disuguaglianza isoperimetrica* (2.31) *è equivalente alla disuguaglianza di Wirtinger* (2.32), grazie alle implicazioni

lemma 2.3.2 ⇒ lemma 2.3.3 ⇒ teorema 2.3.4 ⇒ lemma 2.3.2.

Osservazione 2.3.6. Il procedimento descritto nei due precedenti problemi variazionali è stato il seguente:
se esiste una soluzione del problema variazionale, *allora* essa ha la proprietà . . . ,
prescindendo dalla effettiva prova della esistenza.
In generale, il provare che un problema variazionale ha soluzione, e il descriverne le proprietà sono passi differenti e possono richiedere differenti argomentazioni[3].

[3] Dall'Introduzione in [**14**]:
"A new era in the history of mathematics opened when Gauss proved the fundamental theorem of algebra. Abandoning the futile attempts of his predecessors to solve algebraic equations of higher degree by root extraction, he took a step of general significance by proving merely the existence of the roots in question. For the first time it was clearly understood that the primary task in a mathematical problem is to prove the existence

Nei capitoli successivi di questo Quaderno esponiamo i *metodi diretti nel Calcolo delle Variazioni* il cui primo obiettivo è appunto lo studio dell'esistenza per problemi variazionali relativi a funzionali integrali.

---

of a solution. To find procedures by which the solution can be explicitly obtained is a further question, distinct from that of existence. Since the beginning of the last century this distinction has played a clarifying role contributing greatly to progress in all fields of mathematics.
Among the existence proofs which dominated the mathematical thinking of this period, the most celebrated and consequential were those based on extremum problems of the calculus of variations and suggested by actual or imagined physical experiments."

CAPITOLO 3

Metodi diretti nel Calcolo delle Variazioni

Nel caso di una sola variabile ($n = 1$, $N = 1$) si può risolvere un problema di minimo tramite l'equazione differenziale (2.23), mentre nel caso di più variabili ($n \geq 2$, $N = 1$) la soluzione esplicita della corrispondente equazione (2.23) è molto più difficile da determinare, e anzi tale soluzione si può trovare solo in casi estremamente rari.

Da qui l'idea di Riemann di rovesciare il punto di vista e di dimostrare l'esistenza di una soluzione di (2.23) minimizzando il corrispondente funzionale (0.1).
Volendo risolvere l'equazione di Laplace $\Delta u = 0$, Riemann dice:

"L'insieme delle funzioni u forma un dominio connesso che contiene la sua frontiera [...]. Per ogni funzione u (l'integrale di Dirichlet) $D[u]$ prende un valore finito che varia in maniera continua con u. Di conseguenza, per una funzione u l'integrale $D[u]$ prende il suo valore minimo."
Questa funzione che minimizza $D[u]$ sarà la soluzione dell'equazione di Laplace $\Delta u = 0$.

La versione di Riemann del Principio di Dirichlet può essere così formulata:

Esiste un'unica funzione che minimizza l'integrale di Dirichlet $D[u] = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx$, *tra tutte le funzioni di classe* $C^1(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ *che assumono assegnato valore* φ *continuo sulla frontiera* $\partial\Omega$*; inoltre, tale funzione è armonica in* Ω.

Ma tale Principio necessitava di una legittimazione: infatti questa versione del Principio di Dirichlet fu criticata in quanto, pur essendo l'integrale di Dirichlet inferiormente limitato sulle funzioni ammissibili, non ne consegue

che l'estremo inferiore sia *assunto* nella classe delle fuzioni ammissibili.
Un primo esempio di integrale unidimensionale del tipo (0.1) per il quale non esiste alcuna funzione minimizzante fu dato da Weierstrass nel 1869; un altro esempio di valori continui assegnati sulla circonferenza unitaria tali che $D[v] = +\infty$ per ogni v ammissibile avente quei valori sulla frontiera, fu dato da Hadamard.

Prima obiezione (generale) al Principio di Dirichlet.
Il problema proposto consiste nel cercare il minimo del funzionale

$$\mathcal{F}[v] := \int_{-1}^{1} x^2 \left|v'(x)\right|^2 \, dx$$

nella classe delle funzioni $v \in C^1([-1,1])$ che soddisfano le condizioni agli estremi $v(-1) = -1$ e $v(1) = 1$.
Osserviamo che su ognuna di queste funzioni ammissibili v si ha $\mathcal{F}[v] > 0$, in quanto, in caso contrario, si avrebbe $v'(x) = 0$ in $[-1,1]$ e, di conseguenza, v sarebbe costante in $[-1,1]$, in contrasto con le condizioni agli estremi. Dunque, se esistesse una soluzione v_0 del problema, si avrebbe $\mathcal{F}[v_0] > 0$. Ma, se consideriamo le funzioni ammissibili

$$v_h(x) = \frac{\arctan(hx)}{\arctan(h)}, \quad h \in \mathbb{N},$$

per le quali

$$\mathcal{F}[v_h] = \int_{-1}^{1} x^2 \left|v_h'(x)\right|^2 \, dx = \frac{1}{h \arctan^2(h)} \left(\arctan(h) - \frac{h}{1+h^2} \right)$$

si ottiene $\mathcal{F}[v_h] \to 0$. Ne segue che per h sufficientemente grande vale la disuguaglianza $\mathcal{F}[v_h] < \mathcal{F}[v_0]$, e ciò contraddice il fatto che v_0 è minimo per $\mathcal{F}$.

Seconda obiezione (specifica) al Principio di Dirichlet.
E' noto che ogni funzione armonica nel cerchio unitario è data in coordinate polari (r,ϑ) dalla serie convergente $(r < 1)$

$$v(r,\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} r^\nu \left(a_\nu \cos(\nu\vartheta) + b_\nu \sin(\nu\vartheta)\right) \qquad (a_\nu, b_\nu \text{ costanti}),$$

e che l'integrale di Dirichlet è

$$D[v] = \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \left(a_\nu^2 + b_\nu^2\right).$$

L'obiezione specifica di Hadamard consiste nel fatto che:
esistono funzioni continue $\varphi(\vartheta)$ per le quali la serie $\frac{\pi}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \left(a_\nu^2 + b_\nu^2\right)$ diverge, anche se è noto che il relativo problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace è risolubile (cfr. teorema 1.7.14) per ogni dato continuo assegnato

sulla circonferenza unitaria.
Ad esempio, se consideriamo la funzione continua di $\vartheta \in [0, 2\pi]$ (definita dallo sviluppo di Fourier totalmente convergente)

$$\varphi\left(\vartheta\right) = \sum_{\mu=1}^{+\infty} \frac{\cos(\mu^4 \vartheta)}{\mu^2},$$

allora la funzione di r e ϑ

$$v\left(r, \vartheta\right) = \sum_{\mu=1}^{+\infty} r^{\mu^4} \frac{\cos(\mu^4 \vartheta)}{\mu^2} \quad \text{(serie uniformemente convergente)}$$

è armonica regolare sul cerchio unitario e ha traccia $\varphi\left(\vartheta\right)$ sulla circonferenza unitaria.
Tuttavia $D[v] = \dfrac{\pi}{2} \displaystyle\sum_{\mu=1}^{+\infty} \mu^4 \left(\frac{1}{\mu^2}\right)^2$ diverge[1], essendo, in questo caso, $b_\nu \equiv 0$ e

$$a_\nu = \begin{cases} \frac{1}{\mu^2} & \text{se } \nu = \mu^4 \\ 0 & \text{se } \nu \neq \mu^4 \end{cases} .$$

Osservazione 3.0.7. La soluzione del Principio di Dirichlet non può essere quindi determinata per tutti i dati φ continui sulla frontiera. Per una corretta formulazione del Principio di Dirichlet assumeremo che esista almeno una funzione ammissibile che abbia integrale di Dirichlet finito (questo potendosi interpretare come una richiesta di "energia finita").

Nascono così i *metodi diretti* nel Calcolo delle Variazioni, consistenti nel *dimostrare l'esistenza del minimo del funzionale* (0.1) *senza passare attraverso la sua equazione di Eulero, ma deducendola direttamente dalle proprietà del funzionale* (0.1).

[1]Altro esempio: sia $\varphi\left(\vartheta\right) = \sum_{\mu=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\mu! \vartheta\right)}{\mu^2}$; risulta $v\left(r, \vartheta\right) = \sum_{\mu=1}^{+\infty} r^{\mu!} \frac{\sin\left(\mu! \vartheta\right)}{\mu^2}$ e

$$D[v] = \frac{\pi}{2} \sum_{\mu=1}^{+\infty} \mu! \left(\frac{1}{\mu^2}\right)^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{\mu=1}^{+\infty} \mu! \frac{1}{\mu^4} = +\infty,$$

essendo, in questo caso, $a_\nu \equiv 0$ e

$$b_\nu = \begin{cases} \frac{1}{\mu^2} & \text{se } \nu = \mu! \\ 0 & \text{se } \nu \neq \mu! \end{cases} .$$

Evidentemente, problemi di esistenza per equazioni differenziali possono altresì essere affrontati con metodi variazionali, qualora l'equazione in questione coincide con l'equazione di Eulero di un dato funzionale; in quest'ordine di idee, un problema è quello di determinare appunto il funzionale.

Nella seconda metà dell'Ottocento si tenta di rendere rigoroso il ragionamento di Riemann (Principio di Dirichlet) con C. Arzelà (1897) [**3**] prima, successivamente con D. Hilbert (1900) [**42**] [**43**], J. Hadamard(1906) [**39**] e H. Lebesgue (1907) [**49**]; una ricerca questa che avrà successo solo attorno al 1940.

Ai primi del Novecento anche Leonida Tonelli studia problemi di questo tipo. Egli riesce a dimostrare che la semicontinuità inferiore è una condizione sufficiente per l'esistenza del minimo del funzionale (0.1) nel caso unidimensionale, ma non riesce in generale a 'estendere' questi risultati al caso $n \geq 2$.
La principale difficoltà proveniva essenzialmente dalla mancanza di opportuni spazi funzionali in cui ambientare i problemi di minimo, difficoltà che era ancora più forte nel caso di integrali in due o più dimensioni.

3.1. Teorema di Weierstrass-Fréchet.

Prima di passare ad esporre alcuni risultati di Tonelli, diamo un teorema che è una generalizzazione di quello classico di Weierstrass e su cui si basa il metodo diretto nel Calcolo delle Variazioni.

Teorema 3.1.1 (Weierstrass-Fréchet).
Siano X uno spazio topologico e $\mathcal{G} : X \to \mathbb{R}$ un funzionale. Supponiamo che

- (i) *$\mathcal{G}$ sia limitato inferiormente;*
- (ii) *$\mathcal{G}$ sia seq. s.c.i. (cioè, per ogni successione $\{u_h\}$ convergente a u in X risulta $\mathcal{G}[u] \leq \liminf_{h\to+\infty} \mathcal{G}[u_h]$);*
- (iii) *X sia sequenzialmente compatto (cioè da ogni successione $\{u_h\} \subset X$ si può estrarre una sottosuccessione convergente in X).*

Allora $\exists \min_{u\in X} \mathcal{G}[u]$.

Dim. Per (i) possiamo considerare una successione $\{u_h\}$ minimizzante, ossia tale che:
$$\{u_h\} \subset X \quad \text{e} \quad \lim_{h\to+\infty} \mathcal{G}[u_h] = \inf_{u\in X} \mathcal{G}[u].$$

Per (iii) esiste un'estratta $\{u_{h_j}\}$ convergente in X ad un elemento u_0. Per (ii) abbiamo

$$\mathcal{G}[u_0] \leq \liminf_{j\to+\infty} \mathcal{G}[u_{h_j}] = \lim_{h\to+\infty} \mathcal{G}[u_h] = \inf_{u\in X} \mathcal{G}[u].$$

Ne segue la tesi. □

Generalmente X non è dotato a priori di una topologia. Pertanto il problema di minimo $\min\limits_{u\in X} \mathcal{G}[u]$ può essere visto come il problema di introdurre una topologia su X per cui X è sequenzialmente compatto e $\mathcal{G}$ è seq. s.c.i..
Osserviamo, però, che per garantire che $\mathcal{G}$ sia seq. s.c.i. occorre in generale una topologia "ricca", mentre per la sequenziale compattezza di X occorre che la topologia non sia troppo "ricca".
La scelta della topologia deve essere tale da soddisfare questi due requisiti contrastanti.
Sarà allora opportuno avere dei risultati di semicontinuità inferiore nella topologia più debole possibile.
In linea di principio, tuttavia, la bontà della scelta della topologia su X può essere valutata solo a posteriori.

3.2. Semicontinuità inferiore e teorema di esistenza per problemi variazionali unidimensionali ($n = 1$): risultati di Tonelli.

Teorema 3.2.1 (semicontinuità inferiore, Tonelli).
Sia $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto limitato e sia $F : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una Lagrangiana soddisfacente le seguenti condizioni

(i) *$F(x, u, p)$ e $F_p(x, u, p)$ sono continue in (x, u, p);*
(ii) *$F(x, u, p) \geq 0$ per ogni (x, u, p);*
(iii) *$p \mapsto F(x, u, p)$ è convessa per ogni (x, u).*

Allora il funzionale

$$\mathcal{F}[u] = \int_I F(x, u(x), u'(x))\, dx$$

è seq. deb. s.c.i. in $W^{1,m}(I)$ per ogni $m \geq 1$, cioè: se $\{u_h\}$ converge debolmente in $W^{1,m}(I)$ a u, allora

$$\mathcal{F}[u] \leq \liminf_{h\to+\infty} \mathcal{F}[u_h]. \tag{3.35}$$

Dim. Osserviamo innanzitutto che per l'ipotesi (ii) il funzionale integrale $\mathcal{F}$ è ben definito (con il possibile valore $+\infty$) per ogni $u \in W^{1,m}(I)$, $m \geq 1$ (cfr. lemma 4.1.2). Osserviamo inoltre che è sufficiente considerare il caso

$m = 1$, poiché, se $m > 1$ e $u_h \rightharpoonup u$ in $W^{1,m}(I)$, allora $u_h \rightharpoonup u$ in $W^{1,1}(I)$. Sia allora $\{u_h\}$ una successione convergente debolmente a u in $W^{1,1}(I)$ (quindi anche limitata in $W^{1,1}(I)$). Per il corollario 1.3.20 al teorema di Rellich-Kondrachov possiamo assumere, a meno di successioni estratte, che $u_h \to u$ in $L^1(I)$ e anche $u_h \to u$ q.o. in I. Supponiamo che $\mathcal{F}[u] < +\infty$. Fissato $\varepsilon > 0$, per il teorema di Severini-Egorov 1.1.14, esiste un compatto $K_\varepsilon \subset I$ tale che $|I \setminus K_\varepsilon| < \varepsilon$ e $u_h \rightrightarrows u$ in K_ε e, per il teorema di Lusin 1.1.15, u e u' sono continue in K_ε; [2] per il teorema di assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue per funzioni sommabili:

$$\int_{K_\varepsilon} F(x,u,u')\,dx \geq \int_I F(x,u,u')\,dx + O(\varepsilon)$$

(se $\mathcal{F}[u] = +\infty$, possiamo assumere che $\displaystyle\int_{K_\varepsilon} F(x,u,u')\,dx > \frac{1}{\varepsilon}$).
Poiché per l'ipotesi (iii) F è convessa in p, abbiamo (cfr. osservazione 1.5.3)

$$\begin{aligned}
\int_{K_\varepsilon} F(x,u_h,u_h')\,dx \quad &\geq \quad \int_{K_\varepsilon} F(x,u_h,u')\,dx + \int_{K_\varepsilon} F_p(x,u_h,u')\,(u_h'-u')\,dx \\
&= \quad \int_{K_\varepsilon} F(x,u_h,u')\,dx + \int_{K_\varepsilon} \underbrace{F_p(x,u,u')}_{\text{limitata}}\,\underbrace{(u_h'-u')}_{\to 0}\,dx \\
&\quad + \int_{K_\varepsilon} \underbrace{[F_p(x,u_h,u') - F_p(x,u,u')]}_{\to 0}\,\underbrace{(u_h'-u')}_{\text{equilimtata}}\,dx.
\end{aligned}$$

Il primo integrale a secondo membro per $h \to +\infty$ tende a $\displaystyle\int_{K_\varepsilon} F(x,u,u')\,dx$ in virtù della continuità di F e del fatto che $u_h \rightrightarrows u$ in K_ε. Dall'ipotesi (i), poiché u e u' sono continue su K_ε, risulta che $F_p(x,u,u')$ è limitata su K_ε, pertanto il secondo integrale

$$\int_{K_\varepsilon} F_p(x,u,u')\,(u_h'-u')\,dx \to 0 \qquad \text{per } h \to +\infty.$$

Poiché $\{u_h' - u'\}$ è equilimitata in norma $L^1(I)$ (in quanto $u_h \rightharpoonup u$ in $W^{1,1}(I)$ e quindi anche in $W^{1,1}(K_\varepsilon)$) e $F_p(x,u_h,u') - F_p(x,u,u')$ converge uniformemente a zero su K_ε per $h \to +\infty$ abbiamo che anche il terzo integrale

$$\int_{K_\varepsilon} [F_p(x,u_h,u') - F_p(x,u,u')]\,(u_h'-u')\,dx \to 0 \qquad \text{per } h \to +\infty.$$

In definitiva:

$$\liminf_{h\to+\infty} \int_{K_\varepsilon} F(x,u_h,u_h')\,dx \geq \int_{K_\varepsilon} F(x,u,u')\,dx \geq \int_I F(x,u,u')\,dx + O(\varepsilon).$$

[2] Fissato $\varepsilon > 0$, per il teorema di Severini-Egorov $u_h \rightrightarrows u$ in E_ε compatto con $|I \setminus E_\varepsilon| < \varepsilon$. Possiamo assumere $E_\varepsilon \subset E_{\varepsilon'}$ per $0 < \varepsilon < \varepsilon'$. Per il teorema di Lusin u e u' sono continue in L_ε compatto con $|I \setminus L_\varepsilon| < \varepsilon$. Allora basterà prendere $K_\varepsilon := E_\varepsilon \cap L_\varepsilon$.

Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ e tenendo presente l'ipotesi (ii) segue la tesi. $\square$

Osservazione 3.2.2. L'ipotesi (i) del teorema 3.2.1 può essere indebolita richiedendo che

(i') $F(x, u, p)$ sia una funzione di Carathéodory, cioè F misurabile in x per ogni (u, p), F continua in (u, p) per q.o. x (De Giorgi 1968 [**23**])),

o anche, più in generale, che

(i") $F(x, u, p)$ sia misurabile in x per ogni (u, p), e F sia s.c.i. in (u, p) per q.o. x (Ioffe 1977 [**45**]).

Ulteriori generalizzazioni che indeboliscono l'ipotesi di semicontinuità inferiore rispetto ad u sono dovute a De Giorgi-Buttazzo-Dal Maso (1983) (per funzionali autonomi) e Ambrosio (1987) (per funzionali non autonomi).

Conseguenza immediata del teorema 3.2.1 e della compattezza debole in spazi riflessivi è il seguente risultato

Teorema 3.2.3 (esistenza per il problema ai limiti, Tonelli). *Sia $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto limitato e sia $F : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una Lagrangiana soddisfacente le seguenti condizioni*

(i) *$F(x, u, p)$ e $F_p(x, u, p)$ sono continue in (x, u, p);*
(ii) *$F(x, u, p) \geq c\,|p|^m \quad (c > 0,\ m > 1)$ per ogni (x, u, p) (cioè $F(x, u, p)$ ha crescita superlineare);*
(iii) *$p \mapsto F(x, u, p)$ è convessa per ogni (x, u).*

Allora esiste il minimo di

$$\mathcal{F}[u] = \int_I F(x, u(x), u'(x))\, dx$$

nella classe

$$\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)} = \left\{u \in W^{1,m}(I),\ \ u(a) = \alpha,\ \ u(b) = \beta\right\}$$

dove α e β sono numeri reali assegnati.

Dim. Per l'potesi (ii) il funzionale $\mathcal{F}$ è limitato inferiormente. Sia $\{u_h\}$ una successione minimizzante per $\mathcal{F}$ in $\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)}$, cioè

$$\lim_{h\to+\infty} \mathcal{F}[u_h] = \inf_{u\in\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)}} \mathcal{F}[u] < +\infty.$$

Allora per l'ipotesi (ii)

$$c\int_I |u_h'(x)|^m\,dx \le \mathcal{F}[u_h] \le \qquad \text{costante (indipendente da } h)$$

$$(\mathcal{F}[u_h] \le \inf_{u\in\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)}} \mathcal{F}[u] + \frac{1}{h}).$$

Quindi la successione $\{u_h'\}$ è equilimitata in $L^m(I)$. D'altra parte, essendo le u_h assolutamente continue, vale (cfr. teorema 1.4.2)

$$u_h(x) = u_h(a) + \int_a^x u_h'(t)\,dt = u_h(b) - \int_x^b u_h'(t)\,dt$$

da cui

$$u_h(x) = \frac{1}{2}\left[u_h(a) + u_h(b)\right] + \frac{1}{2}\int_a^b u_h'(t)\, segno(x-t)\,dt$$

e quindi

$$|u_h(x)| \le \frac{1}{2}|\alpha+\beta| + \frac{1}{2}\int_a^b |u_h'(t)|\,dt \le \left(\int_a^b |u_h'(t)|^m\ dt\right)^{\frac{1}{m}} \cdot (b-a)^{1-\frac{1}{m}}.$$

Pertanto la successione $\{u_h\}$ è equilimitata in $C^0(I)$. La successione $\{u_h\}$ è anche equicontinua, anzi equihölderiana con esponente $1-\dfrac{1}{m}$, come risulta da

$$|u_h(x) - u_h(y)| \le \left|\int_y^x |u_h'(t)|\,dt\right| \le ||u_h'||_{L^m(I)}|x-y|^{1-\frac{1}{m}}\ \forall x,y\in I.$$

Per il teorema di Ascoli-Arzelà 1.3.13 esiste un'estratta $\{u_{h_j}\}$ tale che $u_{h_j} \rightrightarrows u_0$. In conclusione

$$\left\|u_{h_j}\right\|_{W^{1,m}(I)} \le \text{costante indipendente da } j.$$

Poiché per $m>1$ $W^{1,m}(I)$ è riflessivo, esiste un'estratta (che indichiamo ancora con $\{u_{h_j}\}$) convergente debolmente a u_0 in $W^{1,m}(I)$. Inoltre $u_0 \in \mathcal{A}_{(\alpha,\beta)}$ (perché la successione $\{u_{h_j}\}$ converge uniformemente a u_0). Per il teorema 3.2.1 di semicontinuità di Tonelli abbiamo

$$\mathcal{F}[u_0] \le \liminf_{j\to+\infty} \mathcal{F}[u_{h_j}] = \lim_{h\to+\infty} \mathcal{F}[u_h] = \inf_{u\in\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)}} \mathcal{F}[u],$$

per cui

$$\mathcal{F}[u_0] = \min_{u\in\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)}} \mathcal{F}[u].$$

□

Osservazione 3.2.4. I teoremi 3.2.1 e 3.2.3 si estendono senza difficoltà al caso di Lagrangiane $F: I\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ $(N\ge 1)$.

Osservazione 3.2.5. Illustriamo con alcuni esempi il fatto che le condizioni di coercività (ii), di riflessività $(m>1)$ e di convessità (iii) nel teorema 3.2.3 sono ottimali.

Esempio 3.2.6 (Weierstrass, $I = (0,1)$ (cfr. anche obiezione al Principio di Dirichlet all'inizio di questo capitolo)).
Sia $F(x,p) = xp^2$. Indichiamo con

$$0 \le \mu := \inf \left\{ \mathcal{F}[u] := \int_0^1 x\,[u'(x)]^2\, dx;\ u \in W^{1,2}((0,1)),\ u(0)=1,\ u(1)=0 \right\}.$$

Il problema

$$\min_{u \in \mathcal{A}_{(1,0)}} \int_0^1 x\,(u'(x))^2\, dx$$

con

$$\mathcal{A}_{(1,0)} = \left\{ u \in W^{1,2}((0,1)); \quad u(0)=1, \ \ u(1)=0 \right\}$$

non ha soluzione.

Dim. Proviamo che $\mu = 0$. Consideriamo, per ogni $h \in \mathbb{N}$ $h \ge 2$ la successione

$$u_h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \left[0, \dfrac{1}{h}\right) \\ -\dfrac{\log x}{\log h} & \text{se } x \in \left(\dfrac{1}{h}\ , 1\right] \end{cases}$$

Risulta $u_h \in W^{1,\infty}((0,1))$, $u_h(0) = 1$, $u_h(1) = 0$ e

$$\mathcal{F}[u_h] = \int_{\frac{1}{h}}^1 x\,[u_h'(x)]^2\, dx = \frac{1}{\log h} \to 0 \qquad \text{per } h \to +\infty,$$

sicché $\mu = 0$. Se esistesse un minimo $\overline{u} \in \mathcal{A}_{(1,0)}$, allora dovrebbe risultare $\mathcal{F}(\overline{u}) = 0$, cioè $\overline{u}' = 0$ q.o. in $(0,1)$, e, poiché gli elementi di $\mathcal{A}_{(1,0)}$ sono continui, avremmo $\overline{u} = \text{cost}$ in $[0,1]$, incompatibile con le condizioni ai limiti. $\square$

Osserviamo che le ipotesi (i) e (iii) del teorema di esistenza 3.2.3 sono verificate, mentre non è verificata la (ii), perché la Lagrangiana $F(x,p) = xp^2$ si annulla per $x = 0$.
L'esempio che segue mostra l'importanza della riflessività dello spazio.

Esempio 3.2.7 (curve minimali, $m = 1$).
Dal punto di vista geometrico, il problema che presentiamo consiste nel cercare la curva di lunghezza minima tra quelle che congiungono il centro di una circonferenza unitaria con un punto della circonferenza stessa. Le soluzioni sono ovviamente i raggi, ma questi non rientrano nella classe delle funzioni ammissibili che è ristretta alle curve esprimibili (in coordinate polari) nella forma $\rho = u(\theta)$. La lunghezza di una curva siffatta è espressa dall'integrale

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{[u(\theta)]^2 + [u'(\theta)]^2}\, d\theta.$$

Nell'esempio conserviamo la notazione $\mathcal{F}[u] := \displaystyle\int_0^1 F(x, u(x), u'(x))\, dx$.

Sia $F(x,u,p) := \sqrt{u^2+p^2}$. *Allora il funzionale associato*

$$\mathcal{F}[u] := \int_0^1 \sqrt{[u(x)]^2 + [u'(x)]^2}\, dx$$

è convesso e coercivo ($\mathcal{F}[u] \geq \int_0^1 |u'|\ dx$ *e* $\mathcal{F}[u] \geq \int_0^1 |u|\ dx$ *quindi* $\mathcal{F}[u] \geq \frac{1}{2}\|u\|_{W^{1,1}((0,1))}$*) sullo* <u>*spazio*</u> *di Banach* <u>*non riflessivo*</u> $W^{1,1}((0,1))$.
Il problema di minimo

$$\min_{u \in \mathcal{A}_{(0,1)}} \mathcal{F}[u]$$

dove

$$\mathcal{A}_{(0,1)} = \left\{ u \in W^{1,1}\left((0,1)\right);\ \ u(0)=0,\ \ u(1)=1 \right\}$$

non ha soluzione.

Dim. Indicato con

$$\mu := \inf_{u \in \mathcal{A}_{(0,1)}} \mathcal{F}[u],$$

proviamo che $\mu = 1$.
Osserviamo dapprima che $\mu \geq 1$, infatti

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u] = \int_0^1 \sqrt{[u(x)]^2 + [u'(x)]^2}\, dx \quad &\geq \quad \int_0^1 |u'(x)|\ dx \\ &\geq \quad \int_0^1 u'(x)\, dx = u(1) - u(0) = 1.\end{aligned}$$

Se consideriamo la successione ($h \in \mathbb{N}$)

$$u_h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \left[0, 1-\dfrac{1}{h}\right] \\ \\ 1 + h(x-1) & \text{se } x \in \left(1-\dfrac{1}{h}, 1\right] \end{cases}$$

abbiamo $u_h \in W^{1,1}((0,1))$, $u_h(0)=0$, $u_h(1)=1$ e

$$1 \leq \mathcal{F}[u_h] = \int_{1-\frac{1}{h}}^1 \sqrt{[1+h(x-1)]^2 + h^2}\, dx \leq \frac{1}{h}\sqrt{1+h^2} \to 1.$$

per $h \to +\infty$, sicché $\mu = 1$.

Se esistesse una soluzione $\overline{u}$ del problema di minimo dovrebbe aversi

$$1 = \mathcal{F}[\overline{u}] = \int_0^1 \sqrt{[\overline{u}(x)]^2 + [\overline{u}'(x)]^2}\, dx > \int_0^1 |\overline{u}'(x)|\, dx \geq \int_0^1 \overline{u}'(x)\, dx = 1.$$

quindi $\overline{u} = 0$ q.o. in $(0,1)$. Poiché gli elementi di $\mathcal{A}_{(0,1)}$ sono continui si ha $\overline{u} \equiv 0$ in $[0,1]$ e ciò è incompatibile con le condizioni ai limiti. $\square$

L'ipotesi (iii) del teorema 3.2.3 non può essere eliminata.

Esempio 3.2.8 (Bolza).
Sia $F(x,u,p) := (1-p^2)^2 + u^2$. Indichiamo con

$$0 \le \mu := \inf \left\{ \int_0^1 \left\{ \left[1 - [u'(x)]^2\right]^2 + [u(x)]^2 \right\} dx;\ u \in W^{1,4}((0,1)),\ u(0) = u(1) = 0 \right\}.$$

La Lagrangiana F è chiaramente <u>*non convessa*</u> *rispetto a p. Il problema*

$$\min_{u \in \mathcal{A}_{(0,0)}} \int_0^1 \left\{ \left[1 - [u'(x)]^2\right]^2 + [u(x)]^2 \right\} dx$$

con

$$\mathcal{A}_{(0,0)} = \left\{ u \in W^{1,4}((0,1));\ u(0) = u(1) = 0 \right\} = W_0^{1,4}((0,1))$$

non ha soluzione.

Dim. Proviamo innanzitutto che $\mu = 0$. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ e
$0 \le k \le h-1$, definiamo

$$u_h(x) = \begin{cases} x - \dfrac{k}{h} & \text{se } x \in \left[\dfrac{2k}{2h}, \dfrac{2k+1}{2h}\right] \\[2ex] -x + \dfrac{k+1}{h} & \text{se } x \in \left(\dfrac{2k+1}{2h}, \dfrac{2k+2}{2h}\right]. \end{cases}$$

Risulta $u_h \in W^{1,\infty}(0,1)$ e

$$\begin{aligned} &0 \le u_h(x) \le \frac{1}{2h} \quad \text{per ogni } x \in (0,1), \\ &|u_h'(x)| = 1 \quad \text{q.o. in } (0,1), \\ &u_h(0) = u_h(1) = 0. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$0 \le \mu \le \int_0^1 \left\{ \left[1 - [u_h'(x)]^2\right]^2 + [u_h(x)]^2 \right\} dx \le \frac{1}{4h^2}$$

e quindi, per $h \to +\infty$, risulta $\mu = 0$.

Tuttavia, non esiste alcuna funzione $\overline{u} \in W^{1,4}((0,1))$ per cui $\overline{u}(0) = \overline{u}(1) = 0$ e tale che

$$\int_0^1 \left\{ \left[1 - [u'(x)]^2\right]^2 + [u(x)]^2 \right\} dx = 0.$$

Se una tale $\overline{u}$ esistesse, avremmo $\overline{u}'(x) = \pm 1$ e $\overline{u} = 0$ per q.o. $x \in (0,1)$; poiché gli elementi di $W_0^{1,4}((0,1))$ sono continui avremmo $\overline{u} = 0$ e quindi $\overline{u}' = 0$ in $[0,1]$,che è incompatibile con $\overline{u}'(x) = \pm 1$.
Pertanto il problema di Bolza non ha soluzione in $W_0^{1,4}((0,1))$. $\square$

3.3. Estensione dei teoremi di Tonelli a integrali multipli ($n \geq 2$) del Calcolo delle Variazioni in spazi di Sobolev.

La ragione profonda per la limitazione del metodo di Tonelli fu evidenziata nel 1938, con i lavori di Sobolev e Morrey, lavori relativi agli spazi di Sobolev e alle loro proprietà di immersione. In alcuni casi, e.g. quelli in cui il metodo di Tonelli funziona, la regolarità delle soluzioni deboli è automatica (cfr. teorema 1.3.5(iii)); in generale rimane però il difficile problema della *regolarizzazione* (cfr. cap. 7).

Passiamo ora a trattare il caso multidimensionale.

Teorema 3.3.1 (semicontinuità inferiore, Morrey [**58**]).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n > 1$) aperto limitato e sia $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$ ($N \geq 1$) una Lagrangiana tale che

(i) *$F(x, u, p)$ e $F_p(x, u, p)$ sono continue in (x, u, p);*
(ii) *$F(x, u, p) \geq 0$ per ogni (x, u, p);*
(iii) *$p \mapsto F(x, u, p)$ è convessa per ogni (x, u).*

Allora il funzionale

$$\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

è seq. deb. s.c.i. in $W^{1,m}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ per ogni $m \geq 1$ (cioè, se $\{u_h\}$ converge debolmente in $W^{1,m}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ a u, allora

$$\mathcal{F}[u] \leq \liminf_{h\to+\infty} \mathcal{F}[u_h]).$$

Dim. E' sufficiente considerare il caso $m = 1$.
Sia $\Omega' \subset\subset \Omega$ con $\partial\Omega'$ lipschitziana.
Sia $\{u_h\}$ una successione convergente debolmente in $W^{1,1}(\Omega', \mathbb{R}^N)$ e quindi anche limitata in $W^{1,1}(\Omega', \mathbb{R}^N)$. Per il corollario 1.3.20 al teorema di Rellich-Kondrachov, $u_h \to u$ in $L^1(\Omega', \mathbb{R}^N)$ e, per il teorema 1.2.7(v), a meno di estratte, $u_h \to u$ q.o. in Ω'.
Fissato $\varepsilon > 0$, esiste un compatto $K_\varepsilon \subset \Omega'$ tale che $|\Omega' \setminus K_\varepsilon| < \varepsilon$ e $u_h \rightrightarrows u$ in K_ε (per il teorema di Severini-Egorov 1.1.14); u e ∇u sono continue in K_ε (per il teorema di Lusin 1.1.15) (cfr. nota 2 in 3.2); inoltre, per il teorema di assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue (supposto $\int_{\Omega'} F(x, u, \nabla u)\, dx < \infty$), abbiamo

$$\int_{K_\varepsilon} F(x, u, \nabla u)\, dx \geq \int_{\Omega'} F(x, u, \nabla u)\, dx + O(\varepsilon).$$

Per l'ipotesi (iii) di convessità di F in p, abbiamo

$$\begin{aligned}
&\int_{K_\varepsilon} F(x,u_h,\nabla u_h)\,dx \\
&\geq \int_{K_\varepsilon} F(x,u_h,\nabla u)\,dx + \int_{K_\varepsilon} F_{p^i_\alpha}(x,u_h,\nabla u)\,(D_\alpha u^i_h - D_\alpha u^i)\,dx \\
&= \int_{K_\varepsilon} F(x,u_h,\nabla u)\,dx + \int_{K_\varepsilon} \underbrace{F_{p^i_\alpha}(x,u,\nabla u)}_{\text{limitata}}\,\underbrace{(D_\alpha u^i_h - D_\alpha u^i)}_{\to 0}\,dx \\
&+ \int_{K_\varepsilon} \underbrace{\left[F_{p^i_\alpha}(x,u_h,\nabla u) - F_{p^i_\alpha}(x,u,\nabla u)\right]}_{\to 0}\,\underbrace{(D_\alpha u^i_h - D_\alpha u^i)}_{\text{equilimitata}}\,dx.
\end{aligned}$$

Il primo integrale a secondo membro per $h \to +\infty$ tende a $\int_{K_\varepsilon} F(x,u,\nabla u)\,dx$ in virtù della continuità di F e del fatto che $u_h \rightrightarrows u$ in K_ε.
Dall'ipotesi (i), poiché u e ∇u sono continue su K_ε, risulta $F_{p^i_\alpha}(x,u,\nabla u)$ limitata su K_ε, pertanto il secondo integrale

$$\int_{K_\varepsilon} F_{p^i_\alpha}(x,u,\nabla u)\,(D_\alpha u^i_h - D_\alpha u^i)\,dx \to 0 \qquad \text{per } h \to +\infty.$$

Poiché $\left\{D_\alpha u^i_h - D_\alpha u^i\right\}$ è equilimitata in norma $L^1(\Omega')$ e, per la continuità di F_p,
$F_{p^i_\alpha}(x,u_h,\nabla u) - F_{p^i_\alpha}(x,u,\nabla u)$ converge uniformemente a zero su K_ε per $h \to +\infty$, abbiamo che anche il terzo integrale

$$\int_{K_\varepsilon} \left[F_{p^i_\alpha}(x,u_h,\nabla u) - F_{p^i_\alpha}(x,u,\nabla u)\right]\,(D_\alpha u^i_h - D_\alpha u^i)\,dx \to 0 \qquad \text{per } h \to +\infty.$$

In definitiva:

$$\liminf_{h\to+\infty} \int_{K_\varepsilon} F(x,u_h,\nabla u_h)\,dx \geq \int_{K_\varepsilon} F(x,u,\nabla u)\,dx \geq \int_{\Omega'} F(x,u,\nabla u)\,dx + O(\varepsilon).$$

Poiché $F \geq 0$, essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, risulta:

$$\liminf_{h\to+\infty} \int_{\Omega} F(x,u_h,\nabla u_h)\,dx \geq \int_{\Omega'} F(x,u,\nabla u)\,dx.$$

Passando all'estremo superiore al variare di $\Omega' \subset\subset \Omega$ segue la tesi. □

Teorema 3.3.2 (esistenza per il problema di Dirichlet, Morrey).

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ aperto limitato e sia $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$ $(N \geq 1)$ una Lagrangiana tale che

(i) *$F(x,u,p)$ e $F_p(x,u,p)$ (cioè $F_{p^i_\alpha}(x,u,p)$, $i = 1,\ldots,N$, $\alpha = 1,\ldots,n$) sono continue in (x,u,p);*
(ii) *$F(x,u,p) \geq c|p|^m$ $(c > 0,\ m > 1)$ per ogni (x,u,p) (cioè, $F(x,u,p)$ ha crescita in p superlineare) ;*
(iii) *$p \mapsto F(x,u,p)$ è convessa per ogni (x,u).*

Sia $\varphi \in W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *con* $\mathcal{F}[\varphi] < +\infty$*. Allora esiste il minimo di*

$$\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

nella classe

$$\mathcal{A}_\varphi = \left\{ u \in W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^N),\ \ u - \varphi \in W_0^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^N) \right\}.$$

Osservazione 3.3.3. Osserviamo che, per quanto riguarda il teorema 3.3.2 di esistenza nel caso di integrali multipli ($n > 1$), vi sono alcune precisazioni da fare riguardo la topologia in $W^{1,m}(\Omega)$ rispetto alla quale si studia la sequenziale compattezza della successione minimizzante.
Nel caso $m > n$ si può dimostrare l'esistenza del minimo del funzionale $\mathcal{F}$ come nel caso della dimensione $n = 1$, in virtù dell'immersione di Morrey (teorema 1.3.5(iii)) e utilizzando quindi il criterio di compattezza di Ascoli-Arzelà.
Nel caso $1 < m \leq n$ il teorema di Ascoli-Arzelà non è più sufficiente; il teorema basilare in questo ambito è il teorema di compattezza di Rellich-Kondrachov 1.3.16.

Dim. [teorema 3.3.2]
Per l'ipotesi (ii) il funzionale $\mathcal{F}$ è limitato inferiormente. Sia $\{u_h\}$ una successione di $\mathcal{A}_\varphi$ minimizzante, cioè

$$\lim_{h \to +\infty} \mathcal{F}[u_h] = \inf_{u \in \mathcal{A}_\varphi} \mathcal{F}[u] < +\infty.$$

Allora, per l'ipotesi (ii):

$$c \, \|\nabla u_h\|^m_{L^m(\Omega, \mathbb{R}^{n \times N})} \leq \mathcal{F}[u_h] \leq \text{costante (indipendente da } h).$$

D'altra parte, poiché $u_h - \varphi \in W_0^{1,m}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$, per la disuguaglianza di Poincaré 1.3.7, abbiamo

$$\begin{aligned}
\|u_h\|_{L^m(\Omega,\mathbb{R}^N)} &\leq \|u_h - \varphi\|_{L^m(\Omega,\mathbb{R}^N)} + \|\varphi\|_{L^m(\Omega,\mathbb{R}^N)} \\
&\leq c\left(\|\nabla (u_h - \varphi)\|_{L^m(\Omega,\mathbb{R}^{n\times N})} + \|\varphi\|_{L^m(\Omega,\mathbb{R}^N)} \right) \\
&\leq \text{costante indipendente da } h.
\end{aligned}$$

In conclusione

$$||u_h||_{W^{1,m}(\Omega,\mathbb{R}^N)} \leq \text{costante indipendente da } h.$$

Poiché per $m > 1$ $W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ è riflessivo, esiste una successione estratta $\{u_{h_j}\}$ convergente debolmente a u_0 in $W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Inoltre, poiché $\mathcal{A}_\varphi$ è convesso e $W_0^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ è un sottospazio chiuso di $W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, per il teorema di Mazur 1.6.6 $u_0 \in \mathcal{A}_\varphi$. Per il teorema 3.3.1 di semicontinuità inferiore abbiamo

$$\mathcal{F}[u_0] \leq \liminf_{j \to +\infty} \mathcal{F}[u_{h_j}] = \lim_{h \to +\infty} \mathcal{F}[u_h] = \inf_{u \in \mathcal{A}_\varphi} \mathcal{F}[u],$$

sicché u_0 è minimo per $\mathcal{F}$. □

Osservazione 3.3.4. Caso modello: Come immediata applicazione del teorema precedente abbiamo la dimostrazione del **Principio di Dirichlet** $(N = 1)$ **in $\boldsymbol{W^{1,2}(\Omega)}$**: *il problema*

$$\min_{u\in\mathcal{A}_\varphi} D[u] \left(= \min_{u\in\mathcal{A}_\varphi} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx\right)$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è aperto limitato, $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ è una funzione assegnata (evidentemente $D[\varphi] < +\infty$), ha un'unica (teorema 4.5.4 successivo) soluzione di classe $W^{1,2}(\Omega)$ in $\mathcal{A}_\varphi$.
Proveremo la regolarità interna della soluzione (debole) del Principio di Dirichlet in 7.4 (teoremi 7.4.1 e 7.4.5).

CAPITOLO 4

Semicontinuità forte-debole su spazi prodotto

In questo capitolo dimostriamo risultati di semicontinuità per funzionali del tipo $\mathcal{F}[u,v] := \int_\Omega F(x,u(x),v(x))\,dx$ con $F:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^\nu\to\mathbb{R}$, (cfr. teoremi 4.3.4 e 4.4.1) particolarmente utili per dimostrare teoremi di esistenza in *teoria del controllo ottimale*: in tale contesto $\mathcal{F}[u,v]$ rappresenta il <u>costo totale da minimizzare</u> e si interpreta $\underline{u}$ come <u>stato del sistema</u> e $\underline{v}$ come la <u>funzione di controllo</u>, usualmente legate da una equazione differenziale.
Nei problemi classici del Calcolo delle Variazioni è $v = \nabla u : \Omega \to \mathbb{R}^\nu$ con $\nu = n\times N$.

4.1. Risultati di De Giorgi e di Ioffe.

L'ipotesi (i) del teorema 3.3.1 di Morrey può essere indebolita. A tal fine premettiamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 4.1.1. Diciamo che una funzione $g:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ è di Carathéodory se:

(i) $g(x,y)$ è misurabile in x per ogni $y\in\mathbb{R}^k$;
(ii) $g(x,y)$ è continua in y per q.o. $x\in\Omega$.

Il lemma che segue garantisce che i funzionali (integrali) variazionali che considereremo nel seguito sono ben definiti sugli spazi di Sobolev.

LEMMA 4.1.2.
Sia $g:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory. Allora, per ogni funzione misurabile $w:\Omega\to\mathbb{R}^k$, la funzione composta

$$x \longmapsto g(x,w(x))$$

è misurabile in Ω.

Dim. Poiché w è misurabile esiste una successione di funzioni semplici s_j

$$s_j(x) = \sum_{i=1}^{l_j} \lambda_i \chi_{A_i}(x)$$

dove λ_i $(i = 1, \dots, l_j)$ sono numeri reali e χ_{A_i} sono le funzioni caratteristiche di $A_1, A_2, \cdots, A_{l_j}$ insiemi misurabili e disgiunti con $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{l_j} A_i = \Omega$, tale che $\displaystyle\lim_{j\to+\infty} s_j(x) = w(x)$ q.o. in Ω.

Osservato che per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$\{x \in \Omega : \; g(x, s_j(x)) > a\} = \bigcup_{i=1}^{l_j} \{x \in A_i : \; g(x, \lambda_i) > a\}$$

è misurabile (essendo g misurabile in x), deduciamo che $g(x, s_j(x))$ è misurabile.

Poiché g è continua rispetto alla seconda variabile risulta

$$\lim_{j\to+\infty} g(x, s_j(x)) = g(x, w(x))$$

per q.o. $x \in \Omega$. Ne segue che $g(x, w(x))$ è misurabile (cfr. osservazione 1.1.6(iii)). □

4.2. Funzionali convessi e sequenziale debole semicontinuità inferiore.

Allo scopo di pervenire alla s.c.i. forte-debole in spazi prodotto (teorema 4.3.4) proviamo preliminarmente due proposizioni e facciamo delle considerazioni conseguenti (osservazione (4.2.3)).

Proposizione 4.2.1. *Sia $F : \Omega \times \mathbb{R}^k \to [0, +\infty]$ una Lagrangiana tale che*

(i) *$F(x, y)$ è di Carathéodory.*

Sia $\{y_h\}$ una successione tale che $y_h \to y$ in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$.
Allora

$$\int_\Omega F(x, y(x))\, dx \le \liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega F(x, y_h(x))\, dx.$$

(cioè, $\displaystyle\int_\Omega F(x, y(x))\, dx$ è seq. fortemente s.c.i. in $L^1\left(\Omega, \mathbb{R}^k\right)$).

Dim. L'integrale $\displaystyle\int_\Omega F(x, y(x))\, dx$ è ben definito per il lemma 4.1.2. Sia $\{y_{h_j}\}$ una successione estratta da $\{y_h\}$ tale che

$$\lim_{j\to+\infty} \int_\Omega F(x, y_{h_j}(x))\, dx = \liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega F(x, y_h(x))\, dx. \tag{4.36}$$

Poiché, ovviamente, $y_{h_j} \to y$ in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ risulta, a meno di estratte, $y_{h_j}(x) \to y(x)$ per q.o. $x \in \Omega$.
Per la continuità di $F(x, \cdot)$ si ha:

$$\lim_{j\to+\infty} F(x, y_{h_j}(x)) = F(x, y(x)) \quad \text{per q.o. } x \in \Omega. \tag{4.37}$$

Allora, per il lemma di Fatou (teorema 1.1.10), risulta:

$$\int_\Omega \liminf_{j\to+\infty} F(x, y_{h_j}(x))\, dx \le \liminf_{j\to+\infty} \int_\Omega F(x, y_{h_j}(x))\, dx$$

e quindi, da (4.37) e (4.36) segue

$$\int_\Omega F(x, y(x))\, dx \le \liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega F(x, y_h(x))\, dx.$$

□

Proposizione 4.2.2. *Sia $F : \Omega \times \mathbb{R}^k \to [0, +\infty]$ una Lagrangiana tale che*

(i) *$F(x, y)$ è di Carathéodory;*
(ii) *$y \mapsto F(x, y)$ è convessa per q.o. $x \in \Omega$.*

Sia $\{y_h\}$ una successione tale che $y_h \rightharpoonup y$ in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$.
Allora

$$\int_\Omega F(x, y(x))\, dx \le \liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega F(x, y_h(x))\, dx.$$

(cioè, $\displaystyle\int_\Omega F(x, y(x))\, dx$ è seq. deb. s.c.i. in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$).

Dim. Basta applicare il corollario 1.6.7 tenendo conto della proposizione 4.2.1. □

Osservazione 4.2.3. Nella precedente proposizione 4.2.2 si vede il ruolo svolto dalla convessità nel passaggio dalla topologia forte, proposizione 4.2.1, alla topologia debole.
Peraltro la convessità di $F(x, \cdot)$ si traduce, nel caso del funzionale

$$\mathcal{F}[u, v] = \int_\Omega F(x, u(x), v(x))\, dx,$$

nella convessità di $F(x, u, v)$ nella coppia (u, v), che è ancora un'ipotesi troppo forte nelle applicazioni, per cui il risultato precedente è significativo nel caso in cui $F = F(x, v)$, cioè la Lagrangiana è indipendente da u.

D'altra parte, per il corollario 1.3.20 del teorema di compattezza di Rellich-Kondrachov 1.3.16, la convergenza debole delle derivate implica la convergenza forte delle funzioni. Nel caso $v = \nabla u$, questo suggerisce che mentre da un lato, dovendo limitarci alla convergenza debole delle derivate, la convessità della Lagrangiana $F(x, u, v)$ rispetto alla variabile v sia in qualche modo essenziale per la semicontinuità, dall'altro si possa usare la convergenza forte per le funzioni, e dunque limitarsi a supporre la sola continuità rispetto alla variabile u.

4.3. Teorema di semicontinuità di De Giorgi.

Iniziamo con un primo risultato in cui la Lagrangiana F è assunta molto regolare.

Proposizione 4.3.1. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ aperto limitato, $M \subseteq \mathbb{R}^N$ chiuso $(N \geq 1)$ e sia $F : \Omega \times M \times \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$ $(\nu \geq 1)$ una Lagrangiana tale che*

(i) *$F(x, u, v)$ e $F_v(x, u, v)$ (cioè $F_{v^i}(x, u, v)$, $i = 1, \dots, \nu$) sono continue in $\Omega \times M \times \mathbb{R}^\nu$;*
(ii) *$F(x, u, v) \geq 0$;*
(iii) *$v \mapsto F(x, u, v)$ è convessa in $\mathbb{R}^\nu$ per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $u \in M$.*

Allora il funzionale $\mathcal{F}[u, v]$ è per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$ seq. s.c.i. nello spazio prodotto $L^1_{forte}(\Omega', M) \times L^1_{debole}(\Omega', \mathbb{R}^\nu)$.

Dim. Sia $\{u_h\}$ una successione di $L^1(\Omega, M)$ [1], $u_h \to u$ in $L^1(\Omega, M)$, e $\{v_h\}$ una successione di $L^1(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$, $v_h \rightharpoonup v$ in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$. Sia $\Omega' \subset\subset \Omega$. Per i teoremi di Severini-Egorov 1.1.14, di Lusin 1.1.15 e dell'assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $K_\varepsilon \subset \Omega'$ con $|\Omega' \setminus K_\varepsilon| < \varepsilon$ tale che $u_h \rightrightarrows u$ in K_ε, u e v sono continue in K_ε e

$$\int_{K_\varepsilon} F(x, u, v)\, dx \geq \int_{\Omega'} F(x, u, v)\, dx + O(\varepsilon).$$

[1] $u \in L^1(\Omega, M)$ significa che $u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e $u(x) \in M$ per q.o. $x \in \Omega$.

Per l'ipotesi (iii) di convessità di F in v, abbiamo

$$\begin{aligned}\int_{K_\varepsilon} F(x,u_h,v_h)\,dx &\geq \int_{K_\varepsilon} F(x,u_h,v)\,dx + \int_{K_\varepsilon} F_{v^i}(x,u_h,v)\,(v_h^i - v^i)\,dx \\ &= \int_{K_\varepsilon} F(x,u_h,v)\,dx + \int_{K_\varepsilon} \underbrace{F_{v^i}(x,u,v)}_{\text{limitata}}\,(v_h^i - v^i)\,dx \\ &+ \int_{K_\varepsilon} \underbrace{[F_{v^i}(x,u_h,v) - F_{v^i}(x,u,v)]}_{\to 0}\,(v_h^i - v^i)\,dx.\end{aligned}$$

Se si passa al limite per $h \to +\infty$, il primo integrale a secondo membro tende a $\int_{K_\varepsilon} F(x,u,v)\,dx$ in virtù della continuità di $F(x,\cdot,v)$ e del fatto che $u_h \rightrightarrows u$ in K_ε.
Dall'ipotesi (i), poiché u e v sono continue su K_ε, risulta $F_{v^i}(x,u,v)$ limitata su K_ε, pertanto il secondo integrale

$$\int_{K_\varepsilon} F_{v^i}(x,u,v)\,(v_h^i - v^i)\,dx \to 0 \qquad \text{per } h \to +\infty.$$

Poiché le funzioni $(v_h^i - v^i)$ sono equilimitate in norma $L^1(\Omega')$ e $F_{v^i}(x,u_h,v) - F_{v^i}(x,u,v)$ converge uniformemente a zero su K_ε per $h \to +\infty$, abbiamo che anche il terzo integrale

$$\int_{K_\varepsilon} [F_{v^i}(x,u_h,v) - F_{v^i}(x,u,v)]\,(v_h^i - v^i)\,dx \to 0 \qquad \text{per } h \to +\infty.$$

In definitiva abbiamo

$$\liminf_{h\to+\infty} \int_{K_\varepsilon} F(x,u_h,v_h)\,dx \geq \int_{K_\varepsilon} F(x,u,v)\,dx \geq \int_{\Omega'} F(x,u,v)\,dx + O(\varepsilon).$$

Poiché $F \geq 0$ ed essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, abbiamo

$$\liminf_{h\to+\infty} \int_{\Omega} F(x,u_h,v_h)\,dx \geq \int_{\Omega'} F(x,u,v)\,dx;$$

prendendo l'estremo superiore al variare di $\Omega' \subset\subset \Omega$, otteniamo la tesi. $\square$

Per indebolire l'ipotesi (i) di continuità per F e F_v richiesta nella proposizione 4.3.1, premettiamo i seguenti lemmi.

LEMMA 4.3.2. *Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ aperto, con $|\Sigma| < +\infty$, e sia $\{v_h\}$ una successione convergente debolmente in $L^m(\Sigma)$ $(m > 1)$ a una funzione v. Posto, per $L > 0$,*

$$v^L := \begin{cases} v & \textit{se } |v| \leq L \\ 0 & \textit{altrimenti,} \end{cases},$$

si ha che per ogni intero L esistono una sottosuccessione $\{v_{h_j}\}$ e una funzione z^L tale che $v_{h_j}^L \rightharpoonup z^L$ in $L^2(\Sigma)$. Inoltre, per $L \to +\infty$, la successione $\{z^L\}$ tende a v in $L^1(\Sigma)$.

Dim. La successione $\{v_h^L\}$ è limitata, quindi lo è, in particolare, in $L^2(\Sigma)$, perché $|v_h^L| \leq L$ e $|\Sigma| < +\infty$; allora da essa possiamo estrarre una sottosuccessione (che indichiamo per brevità con $\{v_h^L\}$) debolmente convergente ad una funzione $z^L \in L^2(\Sigma)$. Questo è possibile perché $L^2(\Sigma)$ è uno spazio di Hilbert, quindi riflessivo.
Sia ora $\varphi \in L^\infty(\Sigma)$ e poniamo $\Sigma_{h,L} := \{x \in \Sigma : |v_h(x)| > L\}$. Abbiamo:

$$\int_\Sigma \left(v_h - v_h^L\right) \varphi \, dx = \int_{\Sigma_{h,L}} v_h \varphi \, dx \leq \sup_\Sigma |\varphi| \int_{\Sigma_{h,L}} |v_h| \, dx. \tag{4.38}$$

Per la disuguaglianza di Chebyshev 1.2.2 abbiamo:
$|\Sigma_{h,L}| \leq \left(\frac{\|v_h\|_{L^m(\Sigma)}}{L}\right)^m \leq cL^{-m}$, essendo $\|v_h\|_{L^m(\Sigma)}^m \leq c$ (indipendente da h) poiché v_h converge debolmente in $L^m(\Sigma)$. Applicando la disuguaglianza di Hölder otteniamo

$$\int_{\Sigma_{h,L}} |v_h| \, dx \leq |\Sigma_{h,L}|^{1-\frac{1}{m}} \|v_h\|_{L^m(\Sigma)} .$$

In conclusione possiamo asserire che, fissato $\varepsilon > 0$, l'integrale $\displaystyle\int_{\Sigma_{h,L}} |v_h| \, dx$ può essere reso minore di ε prendendo L sufficientemente grande ma indipendente da h. A questo punto in (4.38) passiamo al limite per $h \to +\infty$ e, tenendo conto che $v_h \to v$ e che $v_h^L \to z^L$, otteniamo

$$\int_\Sigma \left(v - z^L\right) \varphi \, dx \leq \varepsilon \sup |\varphi|$$

per ogni $\varphi \in L^\infty(\Sigma)$ e per $L > L(\varepsilon)$.
Scelta ora $\varphi = H\left(v - z^L\right)$ dove H è la funzione di Heaviside, risulta:

$$\int_\Sigma \left|v - z^L\right| dx \leq \varepsilon \qquad \forall L > L(\varepsilon).$$

Pertanto $z^L \to v$ in $L^1(\Sigma)$. □

Lemma 4.3.3. *Siano $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto, $M \subset \mathbb{R}^N$ chiuso e sia $F : K \times M \times \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$ una Lagrangiana tale che*

(i) *$F(x, u, v)$ è continua in $K \times M \times \mathbb{R}^\nu$;*
(ii) *$F(x, u, v) \geq 0$;*
(iii) *$v \mapsto F(x, u, v)$ è convessa in $\mathbb{R}^\nu$ per ogni $(x, u) \in K \times M$.*

Se $u_h \rightrightarrows u$ in K e $v_h \rightharpoonup v$ in $L^m(K, \mathbb{R}^\nu)$, con $m > 1$, risulta

$$\int_K F(x, u, v) \, dx \leq \liminf_{h \to +\infty} \int_K F(x, u_h, v_h) \, dx.$$

Dim. Possiamo supporre, passando eventualmente ad una sottosuccessione, che la successione degli integrali $\displaystyle\int_K F(x,u_h,v_h)\,dx$ abbia limite.
Sia $\sup\limits_h \|u_h\|_{L^\infty(K,M)} \le R$ e sia $M_R = M \cap \overline{B}_R$. Dalla proposizione 4.2.2 e dal lemma 4.3.2 deduciamo

$$\int_K F(x,u,v)\,dx \le \liminf_{L\to+\infty} \int_K F(x,u,z^L)\,dx \tag{4.39}$$

e

$$\int_K F(x,u,z^L)\,dx \le \liminf_{h\to+\infty} \int_K F(x,u,v_h^L)\,dx. \tag{4.40}$$

D'altra parte, poiché $F \ge 0$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_K F(x,u,v_h^L)\,dx &= \int_K F(x,u_h,v_h^L)\,dx + \int_K \left[F(x,u,v_h^L) - F(x,u_h,v_h^L)\right]\,dx \\
&= \int_{K\setminus K_{h,L}} F(x,u_h,v_h)\,dx + \int_{K_{h,L}} F(x,u_h,0)\,dx \\
&\quad + \int_K \left[F(x,u,v_h^L) - F(x,u_h,v_h^L)\right]\,dx \\
&\le \int_K F(x,u_h,v_h)\,dx + \int_{K_{h,L}} F(x,u_h,0)\,dx \\
&\quad + \int_K \left[F(x,u,v_h^L) - F(x,u_h,v_h^L)\right]\,dx
\end{aligned} \tag{4.41}$$

dove $K_{h,L} := \{x \in K : \ |v_h(x)| > L\}$.
Per $h \to +\infty$ il terzo integrale nell'ultimo membro di (4.41) tende a zero poiché F è uniformemente continua sul compatto $K \times M_R \times \overline{B}_L^\nu$ e $u_h \rightrightarrows u$ in K.
Per il secondo integrale sempre nell'ultimo membro di (4.41) abbiamo la maggiorazione indipendente da h:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{K_{h,L}} F(x,u_h,0)\,dx &\le \sup_{K\times M_R} F(x,u,0)\cdot |K_{h,L}| \\
&\le \sup_{K\times M_R} F(x,u,0)\cdot \left(\frac{\sup\limits_h \|v_h\|_{L^m(K,\mathbb{R}^\nu)}}{L}\right)^m,
\end{aligned} \tag{4.42}$$

per la disuguaglianza di Chebyshev 1.2.2. In definitiva, da (4.40), (4.41) e (4.42), otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_K F(x,u,z^L)\,dx &\le \liminf_{h\to+\infty} \int_K F(x,u_h,v_h)\,dx \\
&\quad + \sup_{K\times M_R} F(x,u,0)\cdot \left(\frac{\sup\limits_h \|v_h\|_{L^m(K,\mathbb{R}^\nu)}}{L}\right)^m,
\end{aligned}$$

da cui la tesi per $L \to +\infty$, tenuto conto di (4.39). $\square$

A questo punto passiamo a dimostrare il teorema principale di questo capitolo.

TEOREMA 4.3.4 (SEMICONTINUITÀ INFERIORE, DE GIORGI, 1968 [**23**]). *Siano* $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 1)$ *aperto limitato,* $M \subseteq \mathbb{R}^N$ *chiuso* $(N \geq 1)$ *e sia* $F : \Omega \times M \times \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$ $(\nu \geq 1)$ *una Lagrangiana tale che*

(i) $F(x, u, v)$ *è di Carathéodory (cioè misurabile in* x *per ogni* $(u, v) \in M \times \mathbb{R}^\nu$ *e continua in* (u, v) *per q.o.* $x \in \Omega$*);*
(ii) $F(x, u, v) \geq 0$*;*
(iii) $v \mapsto F(x, u, v)$ *è convessa in* $\mathbb{R}^\nu$ *per q.o.* $x \in \Omega$ *e per ogni* $u \in M$*.*

Allora il funzionale

$$\mathcal{F}[u, v] = \int_\Omega F(x, u(x), v(x))\, dx$$

è seq. s.c.i. nello spazio prodotto $L^1(\Omega, M) \times L^1(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$ *dove* $L^1(\Omega, M)$ *è dotato della topologia forte e* $L^1(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$ *è dotato della topologia debole.*
(i.e. se $\{u_h\}$, $u \in L^1(\Omega, M)$ *e* $u_h \to u$ *in* $L^1_{loc}(\Omega, M)$ *e se* $\{v_h\}$, $v \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$ *e* $v_h \rightharpoonup v$ *in* $L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$*, allora*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[u, v] &= \int_\Omega F(x, u(x), v(x))\, dx \\
&\leq \liminf_{h \to +\infty} \int_\Omega F(x, u_h(x), v_h(x))\, dx = \liminf_{h \to \infty} \mathcal{F}[u_h, v_h]).
\end{aligned}$$

DIM. Siano $\{u_h\}$ una successione di $L^1(\Omega, M)$, $u_h \to u$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, M)$, e $\{v_h\}$ una successione di $L^1(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$, $v_h \rightharpoonup v$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$. Possiamo supporre (a meno di estratte) che esista

$$\lim_{h \to +\infty} \int_\Omega F(x, u_h, v_h)\, dx =: \lambda$$

e che $u_h \to u$ q.o. in Ω.

Sia $\Omega' \subset\subset \Omega$. Per l'assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $\Sigma \subset \Omega'$ e $|\Sigma| < \delta_\varepsilon$ allora risulta [2] $\displaystyle\int_\Sigma F(x, u, v)\, dx < \varepsilon$.

[2]Se $\displaystyle\int_{\Omega'} F(x, u, v)\, dx = +\infty$, $\displaystyle\int_{\Omega' \setminus \Sigma} F(x, u, v)\, dx > \frac{1}{\varepsilon}$.

Dai teoremi di Lusin 1.1.15 e di Severini-Egorov 1.1.14 e dal teorema di Scorza Dragoni 1.1.16 abbiamo che esistono un compatto $K_\varepsilon \subset \Omega'$ e un numero reale $R > 0$, tali che $|\Omega' \setminus K_\varepsilon| < \delta_\varepsilon$ e

a. $u_h, u \in C^0(K_\varepsilon, M)$, $\sup_{K_\varepsilon} |u| \le R$, $\sup_{K_\varepsilon} |u_h| \le R$;
b. $u_h \rightrightarrows u$ in K_ε;
c. $F(x, u, v)$ ha restrizione continua in $K_\varepsilon \times M \times \mathbb{R}^\nu$.

Dal lemma 4.3.3 otteniamo

$$\int_{K_\varepsilon} F(x,u,v)\,dx \le \liminf_{h\to+\infty} \int_{K_\varepsilon} F(x,u_h,v_h)\,dx \le \lambda$$

e quindi [3]

$$\int_{\Omega'} F(x,u,v)\,dx < \lambda + \varepsilon$$

(infatti, poiché $|\Omega' \setminus K_\varepsilon| < \delta_\varepsilon$, risulta $\int_{\Omega'\setminus K_\varepsilon} F(x,u,v)\,dx < \varepsilon$ e quindi

$$\int_{\Omega'} F(x,u,v)\,dx = \int_{\Omega'\setminus K_\varepsilon} F(x,u,v)\,dx + \int_{K_\varepsilon} F(x,u,v)\,dx < \varepsilon + \lambda \quad).$$

Ciò implica, poiché $\varepsilon > 0$ è arbitrario, che $\displaystyle\int_{\Omega'} F(x,u,v)\,dx \le \lambda$ per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$, e dunque la tesi. □

Osservazione 4.3.5. Nel teorema 4.3.4 possiamo indebolire ulteriormente l'ipotesi (i) richiedendo:

(i') $x \mapsto F(x,u,v)$ è misurabile per ogni (u,v) e
$u \mapsto F(x,u,v)$ è continua per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $v \in \mathbb{R}^\nu$,

in quanto con l'ipotesi (iii) di convessità in v, deduciamo che $(u,v) \mapsto F(x,u,v)$ è continua per q.o. $x \in \Omega$ [4].

In particolare dal teorema 4.3.4 segue il seguente risultato di debole semicontinuità inferiore per il funzionale $\mathcal{F}[u] = \displaystyle\int_\Omega F(x,u(x),\nabla u(x))\,dx$.

[3]Se $\displaystyle\int_{\Omega'} F(x,u,v)\,dx = +\infty$ risulta $\dfrac{1}{\varepsilon} < \displaystyle\int_{K_\varepsilon} F(x,u,v)\,dx \le \lambda$ e dunque $\lambda = +\infty$.

[4]Lemma. Sia $f(u,v)$ continua rispetto ad $u \in \mathbb{R}^N$ per ogni $v \in \mathbb{R}^\nu$ e convessa rispetto a $v \in \mathbb{R}^\nu$ per ogni $u \in \mathbb{R}^N$. Allora f è continua in v uniformemente rispetto ad u e quindi è continua globalmente in $(u,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^\nu$.

Corollario 4.3.6 (semicontinuità inferiore).
Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *(*$n \geq 1$*) aperto limitato e* $M \subseteq \mathbb{R}^N$ *(*$N \geq 1$*) chiuso e sia* $F : \Omega \times M \times \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$ *una Lagrangiana tale che*

(i) $F(x, u, p)$ *è di Carathéodory;*
(ii) $F(x, u, p) \geq 0$*;*
(iii) $p \mapsto F(x, u, p)$ *è convessa in* $\mathbb{R}^{n\times N}$ *per q.o.* $x \in \Omega$ *e per ogni* $u \in M$*.*

Allora il funzionale

$$\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

è seq. deb. s.c.i. in $W^{1,1}_{loc}(\Omega, M)$*.*

Dim. Sia $\Omega' \subset\subset \Omega$ con $\partial\Omega'$ lipschitziana e sia $u_h \rightharpoonup u$ in $W^{1,1}(\Omega', M)$. Allora, per il corollario 1.3.20 del teorema di Rellich-Kondrachov, $u_h \to u$ in $L^1(\Omega', M)$. Scegliendo $v_h = \nabla u_h$ nel teorema 4.3.4, otteniamo la tesi. □

Osservazione 4.3.7. Se l'aperto Ω non è limitato, il teorema 4.3.4 e il corollario 4.3.6 continuano a sussistere, osservato che

$$\begin{aligned}
\liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega F(x, u_h, v_h)\, dx &\geq \liminf_{h\to+\infty} \int_{\Omega\cap B_R} F(x, u_h, v_h)\, dx \\
&\geq \int_{\Omega\cap B_R} F(x, u, v)\, dx
\end{aligned}$$

e passando poi al limite per $R \to +\infty$.

Osservazione 4.3.8. Usando la disuguaglianza di Hölder e l'osservazione 4.3.7 segue che nel teorema 4.3.4 alla topologia
$L^1_{\text{loc}}(\Omega, M)_{\text{forte}} \times L^1_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^\nu)_{\text{debole}}$ si può sostituire quella di
$L^t_{\text{loc}}(\Omega, M)_{\text{forte}} \times L^m_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^\nu)_{\text{debole}}$ con $t \geq 1$ ed $m > 1$ e supporre, al posto della condizione (ii) $F(x, u, v) \geq 0$, la condizione più generale

$$F(x, u, v) \geq -c\left(|v|^r + |u|^t\right) - h(x)$$

con $h \in L^1(\Omega)$, $c > 0$ ed $1 \leq r < m$.

4.4. Teorema di semicontinuità di Ioffe.

Generalizzazione del precedente teorema 4.3.4 è il seguente risultato che per brevità riportiamo senza dimostrazione (cfr. [**45**]).

Teorema 4.4.1 (semicontinuità inferiore, Ioffe, 1977 [**5**] [**6**]).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *(*$n \geq 1$*) aperto e sia*
$F : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$ *(*$N, \nu \geq 1$*) una Lagrangiana tale che*

(i) *$F(x,u,v)$ è $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^\nu)$-misurabile* [5] *e per $\mathcal{L}^n$ q.o. $x\in\Omega$ $\quad (u,v)\mapsto F(x,u,v)$ è s.c.i. in $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^\nu$ (cioè F è una funzione normale);*

(ii) *$F(x,u,v)\geq 0$;*

(iii) *$v\mapsto F(x,u,v)$ è convessa in $\mathbb{R}^\nu$ per $\mathcal{L}^n$ q.o. $x\in\Omega$ e per ogni $u\in\mathbb{R}^N$.*

Allora il funzionale

$$\mathcal{F}[u,v]=\int_\Omega F(x,u(x),v(x))\,dx$$

è seq. s.c.i. nello spazio prodotto $L^1(\Omega,\mathbb{R}^N)\times L^1(\Omega,\mathbb{R}^\nu)$ dove $L^1(\Omega,R^N)$ è dotato della topologia forte e $L^1(\Omega,\mathbb{R}^\nu)$ è dotato della topologia debole (i.e. se $\{u_h\}$, $u\in L^1(\Omega,\mathbb{R}^N)$, $u_h\to u$ in $L^1_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ e se $\{v_h\}$, $v\in L^1(\Omega,\mathbb{R}^\nu)$, $v_h\rightharpoonup v$ in $L^1_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^\nu)$, allora

$$\int_\Omega F(x,u(x),v(x))\,dx\leq\liminf_{h\to+\infty}\int_\Omega F(x,u_h(x),v_h(x))\,dx \quad).$$

In [**45**] è anche provato che la semicontinuità di $(u,v)\mapsto F(x,u,v)$ e la convessità di $v\mapsto F(x,u,v)$ sono necessarie per la s.c.i..

Esempio 4.4.2 (Ioffe, 1977). *Il teorema di semicontinuità inferiore 4.3.4 esteso come espresso nell'osservazione 4.3.8, non sussiste per $r=m$, nemmeno in dimensione uno.*

Per dimostrare ciò, consideriamo il funzionale

$$\mathcal{F}[u,v]=\int_0^1\left(\left|\frac{u}{x}\right|^{m'}\cdot\frac{1}{m'}+\frac{u}{x}\,v\right)\,dx,$$

e le successioni

$$u_h(x)=\begin{cases} x\,h^{1/m'} & \text{se } 0<x<\dfrac{1}{h}\\ \\ 0 & \text{se } \dfrac{1}{h}\leq x<1,\end{cases}$$

$$v_h(x)=\begin{cases} -h^{1/m} & \text{se } 0<x<\dfrac{1}{h}\\ \\ 0 & \text{se } \dfrac{1}{h}\leq x<1.,\end{cases}$$

$\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{m'}=1\right)$.

Risulta $F(x,u,v)\ \geq\ -\dfrac{|v|^m}{m}$ (in quanto per la disuguaglianza di Young

[5] $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ indica la σ-algebra dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ misurabili secondo Lebesgue; $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ indica la σ-algebra dei sottoinsiemi di Borel di $\mathbb{R}^k$.

$|v| \left|\frac{u}{x}\right| \leq \frac{|v|^m}{m} + \left|\frac{u}{x}\right|^{m'} \cdot \frac{1}{m'}$), e inoltre $u_h \rightrightarrows 0$, e $v_h \rightharpoonup 0$ in $L^m((0,1))$.
D'altra parte $\mathcal{F}[0,0] = 0$, mentre $\mathcal{F}[u_h, v_h] = -\frac{1}{m}$.

4.5. Teorema di esistenza e unicità dei minimi per problemi variazionali.

Vediamo come il corollario 4.3.6 di semicontinuità inferiore per il funzionale $\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(x,u,\nabla u)\,dx$ con Lagrangiana $F : \Omega \times M \times R^{n\times N} \to \mathbb{R}$ può essere utilizzato per dimostrare l'esistenza di minimi per $\mathcal{F}[\cdot]$.
Per il teorema di Weierstrass-Fréchet 3.1.1 sarà sufficiente provare che esiste una successione minimizzante che converge nella topologia debole di $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, M)$. Lo spazio $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ non è riflessivo e quindi in generale poco adatto allo scopo; tuttavia, poiché una successione che converge debolmente in $W^{1,m}_{\mathrm{loc}}(\Omega, M)$ $(m > 1)$ è anche debolmente convergente in $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, M)$, sarà sufficiente trovare una successione minimizzante che converge debolmente in $W^{1,m}_{loc}(\Omega)$ per qualche $m > 1$. Poiché quest'ultimo è uno spazio riflessivo, basterà trovare una successione minimizzante limitata in $W^{1,m}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ per qualche $m > 1$.
Sussiste il seguente risultato (più generale del teorema 3.3.2).

Teorema 4.5.1 (esistenza per il problema di Dirichlet).
Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ aperto limitato, $M \subseteq \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ chiuso e sia $F : \Omega \times M \times \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$ una Lagrangiana tale che il funzionale $\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(x,u,\nabla u)\,dx$ sia seq. deb. s.c.i. in $W^{1,m}_{loc}(\Omega, M)$, $m > 1$ [6].
Sia inoltre $F(x,u,p) \geq c|p|^m$ $(c = costante > 0, m > 1)$ per ogni (x,u,p) (cioè $F(x,u,p)$ ha crescita superlineare per $|p| \to +\infty$).
Allora esiste il minimo di

$$\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\,dx$$

nella classe

$$\mathcal{A}_\varphi = \left\{ u \in W^{1,m}(\Omega, M),\ \ u - \varphi \in W^{1,m}_0(\Omega, M) \right\}$$

assegnata $\varphi \in W^{1,m}(\Omega, M)$ con $\mathcal{F}[\varphi] < +\infty$.

Dim. La dimostrazione è analoga a quella del teorema 3.3.2. □

[6]Per questo è sufficiente che la Lagrangiana soddisfi le condizioni (i), (ii) e (iii) del corollario 4.3.6

In generale si può richiedere di trovare il minimo del funzionale $\mathcal{F}[\cdot]$ tra tutte le funzioni che verificano opportune condizioni (non necessariamente di tipo Dirichlet), o, se si vuole, che appartengono ad un sottoinsieme $\mathcal{A}$ (in generale non sequenzialmente compatto) dello spazio $W^{1,m}(\Omega, M)$. $\mathcal{A}$ dovrà essere chiuso nella topologia debole di $W^{1,m}(\Omega, M)$ se si vuole che il limite di una successione di funzioni di $\mathcal{A}$ appartenga ad $\mathcal{A}$, o in altre parole che il limite verifichi le condizioni richieste.

Il metodo diretto nel Calcolo delle Variazioni è basato sul seguente teorema.

Teorema 4.5.2 (esistenza).
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *(*$n \geq 1$*) aperto,* $M \subseteq \mathbb{R}^N$ *(*$N \geq 1$*) chiuso e sia* $\mathcal{F}[u] = \displaystyle\int_\Omega F(x, u, \nabla u)\, dx$ *un funzionale seq. deb. s.c.i. in* $W^{1,m}_{loc}(\Omega, M)$*,* $m > 1$*. Sia* $\mathcal{A}$ *un sottoinsieme debolmente chiuso di* $W^{1,m}(\Omega, M)$*, e supponiamo che*

$$\lim_{\substack{\|u\|_{W^{1,m}(\Omega,M)} \to +\infty \\ u \in \mathcal{A}}} \mathcal{F}[u] = +\infty$$

(cioè $\mathcal{F}[\cdot]$ *sia* *coercivo* *in* $\mathcal{A}$*).*
Allora $\mathcal{F}[\cdot]$ *ammette minimo in* $\mathcal{A}$*.*

Osservazione 4.5.3. In sintesi, da quanto visto emerge che la *convessità* è usata per dimostrare la *debole semicontinuità inferiore*, mentre la *coercività* garantisce la *compattezza*.
Possiamo schematizzare con le implicazioni

(convessità + forte s.c.i.)

$\Downarrow$

DEB. S.C.I. + COERCIVITÀ $\Rightarrow$ ESISTENZA DEI MINIMI.

$\Downarrow$

(compattezza)

In generale possono esistere più minimi, pertanto per assicurare l'unicità richiediamo ulteriori ipotesi.
Sussiste il seguente risultato:

Teorema 4.5.4 (unicità dei minimi).
Sia $F : \Omega \times \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$ *una Lagrangiana tale che* $F = F(x, p) \in C^2\left(\Omega \times \mathbb{R}^{n\times N}\right)$ *(*F *non dipendente da* u*); supponiamo inoltre che* $p \mapsto F(x, p)$ *sia uniformemente convessa per ogni* $x \in \Omega$*. Allora se esiste un minimo* $u \in \mathcal{A}_\varphi$ *di* $\mathcal{F}[u] = \displaystyle\int_\Omega F(x, \nabla u(x))\, dx$ *esso è unico.*

Dim. Siano $u, \widetilde{u}$ entrambi minimi di $\mathcal{F}[\cdot]$ in $\mathcal{A}_\varphi$. Allora $v := \dfrac{u+\widetilde{u}}{2} \in \mathcal{A}_\varphi$.
Per l'ipotesi di uniforme convessità esiste $\theta > 0$ tale che

$$F_{p_\alpha\, p_\beta}(x,p)\, \xi_\alpha\, \xi_\beta \geq \theta |\xi|^2 \quad (p, \xi \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega),$$

pertanto

$$F(x,p) \geq F(x,q) + F_p(x,q) \cdot (p-q) + \frac{\theta}{2}\, |p-q|^2 \quad (p, q \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega).$$

Posto $q = \dfrac{\nabla u + \nabla \widetilde{u}}{2}$, $p = \nabla u$, e integrando su Ω abbiamo

$$\mathcal{F}[u] \geq \mathcal{F}[v] + \int_\Omega F_p\left(x, \frac{\nabla u + \nabla \widetilde{u}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\nabla u - \nabla \widetilde{u}}{2}\right)\, dx + \frac{\theta}{8} \int_\Omega |\nabla u - \nabla \widetilde{u}|^2\, dx.$$

Analogamente, posto $q = \dfrac{\nabla u + \nabla \widetilde{u}}{2}$, $p = \nabla \widetilde{u}$, otteniamo

$$\mathcal{F}[\widetilde{u}] \geq \mathcal{F}[v] + \int_\Omega F_p\left(x, \frac{\nabla u + \nabla \widetilde{u}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\nabla \widetilde{u} - \nabla u}{2}\right)\, dx + \frac{\theta}{8} \int_\Omega |\nabla u - \nabla \widetilde{u}|^2\, dx.$$

Sommando e dividendo per 2, deduciamo che

$$\frac{\mathcal{F}[u] + \mathcal{F}[\widetilde{u}]}{2} \geq \mathcal{F}[v] + \frac{\theta}{8} \int_\Omega |\nabla u - \nabla \widetilde{u}|^2\, dx.$$

Poiché $\mathcal{F}[u] = \mathcal{F}[\widetilde{u}] = \min\limits_{w \in \mathcal{A}_\varphi} \mathcal{F}[w] \leq \mathcal{F}[v]$, deduciamo che $\nabla u = \nabla \widetilde{u}$ q.o. in Ω. Per la disuguaglianza di Poincaré 1.3.7, segue che $u = \widetilde{u}$ q.o. in Ω. $\square$

4.6. Un risultato di esistenza nella teoria del controllo ottimo.

I Problemi di controllo ottimo (cfr. ad esempio [**50**]) sono problemi di minimo che descrivono il comportamento di sistemi che possono essere modificati dall'azione di un operatore; pertanto è presente una coppia di variabili (u, v): una, la *variabile di stato* u descrive lo stato del sistema e non può essere modificata dall'azione diretta dell'operatore, invece l'altra, la *variabile di controllo* v, è sotto il controllo diretto dell'operatore che, per raggiungere un fissato obiettivo, può scegliere la strategia tra quelle ammissibili, operando sulla variabile di controllo attraverso una *equazione di stato*.
Lo scopo è perseguito attraverso un problema di minimo di un *funzionale costo* che dipende da (u, v).
Diamo qui un esempio di applicazione del teorema di s.c.i. 4.3.4 in teoria dei controlli.

Esempio 4.6.1. *Sia (il funzionale di costo totale)*

$$\mathcal{F}[u,v] := \int_\Omega |v(x)|^2\, dx + \int_\Omega g\,(u(x) - U(x))\, dx,$$

dove Ω *è un aperto limitato di* $\mathbb{R}^n$ *con frontiera lipschitziana,* U *rappresenta uno "stato obiettivo" e* $g \geq 0$ *è continua.*
Supponiamo che per mezzo della funzione di controllo v*, il conseguente* stato u *sia governato dall'*equazione di stato

$$\begin{cases} \Delta u = v & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

L'integrale $\int_\Omega |v(x)|^2\, dx$ *può interpretarsi come il costo del controllo* v*, mentre l'integrale* $\int_\Omega g\left(u(x) - U(x)\right) dx$ *rappresenta il prezzo da pagare se non si raggiunge lo stato obiettivo* U*.*
Consideriamo allora il problema

$$\min_{(u,v)\in W^{2,2}(\Omega)\times L^2(\Omega)} \left\{\mathcal{F}[u,v]\,;\ \Delta u = v \ \text{ in } \Omega,\ u = 0 \ \text{su } \partial\Omega\right\}.$$

Per il teorema 4.3.4 il funzionale $\mathcal{F}$ *è s.c.i. per la convergenza debole in* v *e forte in* u *in* $L^2(\Omega)$*.*
Sia $\{v_h\}$ *una successione minimizzante di controlli e sia* $\{u_h\}$ *la corrispondente successione degli stati.*
Dalla teoria delle equazioni ellittiche (cfr. [**37**] *cap. 10)* $\{u_h\} \subset W^{2,2}(\Omega)$ *e*

$$\|u_h\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq c\,\|v_h\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{per ogni } h \in \mathbb{N}.$$

Dalla limitatezza di $\{v_h\}$ *in* $L^2(\Omega)$ *segue la limitatezza in* $W^{2,2}(\Omega)$ *di* $\{u_h\}$*, pertanto (passando eventualmente ad una sottosuccessione) possiamo supporre che* $u_h \to u^0$ *e* $v_h \rightharpoonup v^0$ *in* $L^2(\Omega)$*. Per il teorema 4.3.4* (u^0, v^0) *è la coppia minimizzante e* v^0 *è il controllo ottimale.*

CAPITOLO 5

Caso vettoriale. Funzioni quasi-convesse, policonvesse, convesse di rango uno e loro relazioni

Il teorema 4.3.4 e il corollario 4.3.6 sono relativi anche al caso vettoriale (cioè le funzioni ammissibili sono definite in un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}^N$, con $n \geq 1$, $N \geq 1$). Possiamo schematizzare la relazione tra convessità e sequenziale semicontinuità inferiore nel seguente modo:

sia $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$ una Lagrangiana,
$F(x, u, v)$ convessa in v

$\overset{\text{teor. 4.3.4}}{\Longrightarrow} \mathcal{F}[u, v] = \displaystyle\int_\Omega F(x, u(x), v(x))\, dx$ seq. s.c.i. in
$L^1_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^N)_{\text{forte}} \times L^1_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^\nu)_{\text{debole}} \overset{?}{\Rightarrow} F(x, u, v)$ convessa in v;

sia $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n \times N} \to \mathbb{R}$ una Lagrangiana,
$F(x, u, p)$ convessa in $p := \nabla u$

$\overset{\text{cor. 4.3.6}}{\Longrightarrow} \mathcal{F}[u] = \displaystyle\int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$ seq. deb. s.c.i. in $W^{1,m}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$,
$m \geq 1 \overset{?}{\Longrightarrow} F(x, u, p)$ convessa in p.

La convessità di $F(x, u, v)$ rispetto a v è anche necessaria per la semicontinuità inferiore di $\mathcal{F}[u, v]$ (vedi successivo teorema 5.1.1), mentre è necessaria per la semicontinuità inferiore di $\mathcal{F}[u]$ solo se $n = 1$ con $N \geq 1$ o $N = 1$ con $n \geq 1$. Nel caso generale $n > 1$ e $N > 1$ è verificata per $\mathcal{F}[u]$ la condizione naturale (strettamente più debole rispetto alla convessità) di "quasi-convessità" (nel senso di Morrey, 1952).

Quindi nel caso $n = 1$ o $N = 1$ il corollario 4.3.6 è ottimale, nel senso che l'ipotesi di convessità della Lagrangiana $F(x, u, p)$ rispetto a p è anche necessaria per la semicontinuità inferiore del funzionale
$\mathcal{F}[u] = \displaystyle\int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$ rispetto alla convergenza debole in

$W^{1,m}_{\text{loc}}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, $m \geq 1$; nel caso $n > 1$ con $N > 1$ esistono funzionali integrali, di notevole interesse nella teoria della elasticità non-lineare (cfr. cap. 6), che sono s.c.i. senza che la Lagrangiana sia convessa rispetto alla matrice $p = \left(p^i_\alpha\right)_{\substack{i=1,\cdots,N\\ \alpha=1,\cdots,n}}$.

5.1. Condizioni necessarie per la semicontinuità inferiore dei funzionali

$$\mathcal{F}[u,v] := \int_\Omega F(x,u(x),v(x))\,dx \quad \textbf{e}$$
$$\mathcal{F}[u] := \int_\Omega F(x,u(x),\nabla u(x))\,dx.$$

Cominciamo col dimostrare che la convessità di $F(x,u,v)$ rispetto a v è necessaria per la semicontinuità inferiore di $\mathcal{F}[u,v]$.

Teorema 5.1.1. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $F(x,u,v)$ una funzione di Carathéodory in $\Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^\nu$ con $F(\cdot,u,v)$ localmente sommabile in Ω per ogni (u,v). Se per ogni $u \in \mathbb{R}^N$ il funzionale*

$$\mathcal{F}_u[v] = \int_\Omega F(x,u,v(x))\,dx$$

è s.c.i. nella topologia debole di $L^\infty_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^\nu)$ rispetto alla variabile v, allora $F(x,u,\cdot)$ è convessa per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $u \in \mathbb{R}^N$.*

Dim. Sia $x_0 \in \Omega$ e sia $Y \subset \Omega$ un cubo con centro in x_0. Per ogni $\lambda \in [0,1]$ si può trovare una successione χ_{E_h}, di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili $E_h \subset Y$, tale che

$$\chi_{E_h} \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda\chi_Y.$$

Siano $a,b \in \mathbb{R}^\nu$, $u \in \mathbb{R}^N$ e poniamo

$$v_h := \begin{cases} a\chi_{E_h} + b(1-\chi_{E_h}) & \text{in } Y \\ 0 & \text{in } \Omega \setminus Y \end{cases}$$

e

$$v := \begin{cases} a\lambda + b(1-\lambda) & \text{in } Y \\ 0 & \text{in } \Omega \setminus Y. \end{cases}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_u[v_h] - \mathcal{F}_u[v] &= \int_Y [F(x,u,a\chi_{E_h} + b(1-\chi_{E_h})) - F(x,u,a\lambda + b(1-\lambda))]\,dx \\
&= \int_Y \chi_{E_h}\, F(x,u,a)\,dx + \int_Y (1-\chi_{E_h})\ F(x,u,b)\,dx \\
&\quad - \int_Y F(x,u,a\lambda + b(1-\lambda))\,dx.
\end{aligned}$$

Nell'ultima uguaglianza abbiamo tenuto conto del fatto che le χ_{E_h} sono funzioni caratteristiche.

Quindi, tenuto conto dell'ipotesi di semicontinuità inferiore per $\mathcal{F}_u[\cdot]$ rispetto alla convergenza debole* di $L^\infty_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$, per $h \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \liminf_{h\to+\infty} \mathcal{F}_u[v_h] - \mathcal{F}_u[v] \\
&= \lambda \int_Y F(x,u,a)\,dx + (1-\lambda)\int_Y F(x,u,b)\,dx \\
&\quad - \int_Y F(x,u,a\lambda + b(1-\lambda))\,dx.
\end{aligned}$$

Allora, dividendo per $|Y|$, risulta

$$\begin{aligned}
0 \leq \frac{\lambda}{|Y|}\int_Y F(x,u,a)\,dx \quad &+ \quad \frac{(1-\lambda)}{|Y|}\int_Y F(x,u,b)\,dx \\
&- \quad \frac{1}{|Y|}\int_Y F(x,u,a\lambda + b(1-\lambda))\,dx,
\end{aligned}$$

e facendo tendere a zero il lato di Y, otteniamo (poiché $F(\cdot,u,v)$ è localmente sommabile in Ω)

$$0 \leq \lambda F(x_0,u,a) + (1-\lambda)F(x_0,u,b) - F(x_0,u,a\lambda + b(1-\lambda))$$

per quasi ogni $x_0 \in \Omega$ (x_0 punto di Lebesgue di $F(\cdot,u,v)$), ossia

$$F(x_0,u,a\lambda + b(1-\lambda)) \leq \lambda F(x_0,u,a) + (1-\lambda)F(x_0,u,b) \tag{5.43}$$

per q.o. $x_0 \in \Omega$ e per ogni $u \in \mathbb{R}^N$, che esprime la convessità di $F(x,u,\cdot)$.

A priori l'insieme (sottoinsieme di Ω) di misura nulla per il quale (5.43) non sussiste può dipendere da $\lambda \in [0,1]$, $u \in \mathbb{R}^N$, a e $b \in \mathbb{R}^\nu$.

Possiamo però trovare degli insiemi numerabili densi $J \subset [0,1]$, $E \subset \mathbb{R}^N$, $A \subset \mathbb{R}^\nu$ e un insieme $\Omega' \subset \Omega$ con $|\Omega'| = 0$ tali che la (5.43) valga per ogni $\lambda \in J$, $u \in E$, per ogni a, $b \in A$ e per ogni $x \in \Omega \setminus \Omega'$.

Possiamo inoltre supporre $F(x,\cdot,\cdot)$ continua per ogni $x \in \Omega\setminus\Omega'$ (per ipotesi $F(x,u,v)$ è una Lagrangiana di Carathéodory).

Possiamo ora approssimare ogni $\lambda \in [0,1]$, $u \in \mathbb{R}^N$, a e $b \in \mathbb{R}^\nu$ con successioni $\lambda_h \in J$, $u_h \in E$, a_h e $b_h \in A$. Scrivendo la (5.43) per questi ultimi, e passando al limite per $h \to +\infty$ otteniamo la tesi. $\square$

Osservazione 5.1.2. Osserviamo che la convergenza nella topologia debole* di $L^\infty_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$ implica la convergenza nella topologia debole di $L^1_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$. Ne segue che il teorema 5.1.1, insieme al teorema 4.3.4, forniscono una condizione necessaria e sufficiente per la semicontinuità inferiore di funzionali del tipo

$$\mathcal{F}[u,v] = \int_\Omega F(x, u(x), v(x))\, dx.$$

Osservazione 5.1.3. Nel teorema 5.1.1 le funzioni $u(x)(\equiv u)$ e $v(x)$ sono completamente indipendenti tra loro. Per i funzionali del tipo

$$\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

risulta invece $v(x) = \nabla u(x)$. Se lasciamo inalterata la convergenza nella topologia debole* di $L^\infty_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^{n\times N})$ per le funzioni $v_h(x) = \nabla u_h(x)$, si avrà $||\nabla u_h||_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^{n\times N})} \leq c$, e di conseguenza non sarà restrittivo supporre che la successione $\{u_h\}$ converga uniformemente, dato che qualsiasi altra convergenza più debole si ridurrebbe a questa per il teorema di Ascoli-Arzelà. In definitiva possiamo supporre che il funzionale $\mathcal{F}[u]$ sia s.c.i. rispetto a successioni convergenti nella topologia debole* di
$W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N) = Lip(\Omega, \mathbb{R}^N) = C^{0,1}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$.
D'altra parte il legame $v_h(x) = \nabla u_h(x)$ restringe la scelta delle possibili $v_h \rightharpoonup v$ (contrariamente a quanto visto nel teorema 5.1.1), e quindi la convessità in v, necessaria per $\mathcal{F}[u,v]$, potrebbe non esserlo più per il funzionale $\mathcal{F}[u]$.

Osserviamo che, se Ω è limitato,

$$u_h \xrightarrow{*} u \text{ in } W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N) \Longrightarrow u_h \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ per ogni } m \geq 1.$$

Una condizione necessaria per la semicontinuità inferiore di $\mathcal{F}[u]$ è data dal seguente teorema (in cui preliminarmente la Lagrangiana F dipende solo da ∇u)

Teorema 5.1.4. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato e $F : \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$ una Lagrangiana continua, e supponiamo che il funzionale*

$$\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(\nabla u(x))\, dx$$

sia seq. s.c.i. nella topologia debole di $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Allora per ogni funzione $\varphi \in C^1_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ (anche $\varphi \in W^{1,\infty}_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$, per la continuità di F)*

e per ogni $p_0 \in \mathbb{R}^{n\times N}$ si ha

$$|\Omega| F(p_0) \le \int_\Omega F(p_0 + \nabla\varphi(x))\, dx. \tag{5.44}$$

In particolare, se $n = 1$ ed $N \ge 1$, oppure $N = 1$ ed $n \ge 1$ la Lagrangiana $F(p)$ è convessa in p.

Dim. Sia Y un cubo n-dimensionale che contiene Ω, e che a meno di cambiamento di variabili possiamo supporre essere il cubo unitario $[0,1]^n$. Sia $\varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$; estendiamo la φ prima assegnandole il valore 0 in $Y \setminus \Omega$, e poi estendendola periodicamente in $\mathbb{R}^n$ con periodo uguale a uno in ogni variabile

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \varphi(\{x_1\}, \cdots, \{x_n\})$$

dove con $\{a\}$ è indicata la parte frazionaria di a.

Per ogni $h \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ poniamo

$$\begin{aligned} \varphi_h(x) &= \frac{1}{h}\varphi(hx) \\ u_h(x) &= p_0 x + \varphi_h(x), \qquad \text{con } p_0 \in \mathbb{R}^{n\times N}. \end{aligned}$$

Evidentemente $u_h \xrightarrow{*} p_0 x$ in $W^{1,\infty}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$ (poiché da $|\varphi_h(x)| \le \frac{1}{h}\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^N)}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ segue $\varphi_h \rightrightarrows 0$, e $\|\nabla\varphi_h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n\times N})} = \|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n\times N})}$ per ogni $h \in \mathbb{N}$), e dunque per l'ipotesi di sequenziale semicontinuità inferiore rispetto alla debole*-convergenza in $W^{1,\infty}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$, abbiamo:

$$|Y|\, F(p_0) = \int_Y F(p_0)\, dx \le \liminf_{h\to+\infty} \int_Y F(p_0 + \nabla\varphi_h(x))\, dx. \tag{5.45}$$

Osservato che $\nabla\varphi_h(x) = \nabla\varphi(hx)$, dopo il cambio di variabili $y = hx$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_Y F(p_0 + \nabla\varphi_h(x))\, dx &= h^{-n} \int_{hY=[0,h]^n} F(p_0 + \nabla\varphi(y))\, dy \\ &= \int_Y F(p_0 + \nabla\varphi(x))\, dx \end{aligned} \tag{5.46}$$

(perché essendo φ periodica di periodo 1, l'integrale su hY è uguale ad h^n volte l'integrale su Y).
Da (5.46) e da (5.45) segue la tesi, tenuto conto che il supporto di φ è contenuto in Ω.
Per completare la dimostrazione del teorema consideriamo il caso $n = 1$ ed $N \ge 1$.

Sia allora $\Omega = (0,1)$ e $p_0 = \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2$ con $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^N$ e $\lambda \in (0,1)$. Sia $u \in W^{1,\infty}\big((0,1),\mathbb{R}^N\big) = Lip\big((0,1),\mathbb{R}^N\big)$ tale che

$$u'(x) = \begin{cases} p_1 & \text{se } x \in [0,\lambda] \\ p_2 & \text{se } x \in [\lambda,1]. \end{cases}$$

Ovviamente

$$\begin{aligned} u(1) &= u(0) + \int_0^1 u'(x)\,dx \\ &= u(0) + \int_0^\lambda p_1\,dx + \int_\lambda^1 p_2\,dx \\ &= u(0) + p_0. \end{aligned}$$

Perciò, se definiamo $\varphi(x) := u(x) - u(0) - p_0 x$, abbiamo $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ e quindi $\varphi \in W_0^{1,\infty}\big((0,1),\mathbb{R}^N\big)$.

Ne segue per la (5.44)

$$\begin{aligned} F(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) = F(p_0) &\leq \int_0^1 F(u'(x))\,dx \\ &= \int_0^\lambda F(p_1)\,dx + \int_\lambda^1 F(p_2)\,dx \\ &= \lambda F(p_1) + (1-\lambda)F(p_2). \end{aligned}$$

Un argomento simile vale se $N = 1$ ed $n \geq 1$. □

Più in generale vale il seguente teorema:

Teorema 5.1.5 (Morrey, 1952).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato, e sia $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$ una Lagrangiana continua, e supponiamo che il funzionale

$$\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\,dx$$

sia seq. s.c.i. nella topologia debole di $W^{1,\infty}\big(\Omega,\mathbb{R}^N\big)$. Allora per ogni funzione $\varphi \in C_0^1(\Omega,\mathbb{R}^N)$ (anche $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^N)$) e per ogni $x_0 \in \Omega$, $u_0 \in \mathbb{R}^N$ e $p_0 \in \mathbb{R}^{n\times N}$ si ha*

$$|\Omega| F(x_0, u_0, p_0) \leq \int_\Omega F(x_0, u_0, p_0 + \nabla\varphi(x))\,dx.$$

In particolare, se $n = 1$ ed $N \geq 1$, oppure $N = 1$ ed $n \geq 1$ la Lagrangiana $F(x,u,p)$ è convessa in p per ogni fissato $x_0 \in \Omega$ e $u_0 \in \mathbb{R}^N$.

Alla luce del teorema precedente diamo la seguente definizione.

Definizione 5.1.6. Una funzione $F(x, u, p)$ continua e verificante la condizione

$$|\Omega| F(x_0, u_0, p_0) \leq \int_\Omega F(x_0, u_0, p_0 + \nabla\varphi(x))\, dx \tag{5.47}$$

per ogni $(x_0, u_0, p_0) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n\times N}$ e per ogni $\varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ (anche $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, per la continuità di F) si dice quasi-convessa (nel senso di Morrey).

Osservazione 5.1.7. Notiamo che x e u svolgono il ruolo di parametri nella (5.47); pertanto talvolta ometteremo di indicare esplicitamente la dipendenza da x e u e useremo per F quasi-convessa la notazione $F = F(p)$.

Carattere variazionale della nozione di quasi-convessità.
Sia $u(x) = p_0 x + \varphi(x)$ con $\varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, allora la (5.47) diviene

$$\int_\Omega F(\nabla u(x))\, dx \geq \int_\Omega F(p_0)\, dx$$

per ogni $p_0 \in \mathbb{R}^{n\times N}$, $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ con $u_{|\partial\Omega} = p_0 x$.
Questo significa che

$$F \text{ quasi-convessa} \quad \Leftrightarrow \quad \min\left\{\int_\Omega F(\nabla u(x))\, dx;\ u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N),\ u_{|\partial\Omega} = p_0 x\right\}$$
$$\text{è assunto in } u_0(x) = p_0 x \ \ \forall p_0 \in \mathbb{R}^{n\times N}.$$

□

Osservazione 5.1.8. Tramite dilatazioni dell'insieme, si riconosce che la definizione di quasi-convessità non dipende da Ω.

Osservazione 5.1.9. La quasi-convessità è strettamente più debole della convessità.

Sussiste infatti la seguente

Proposizione 5.1.10. *Sia* $F = F(x, u, p) : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$. *Allora*

$F(x, u, p)$ *convessa in* $p \ \Rightarrow\ F(x, u, p)$ *quasi-convessa*

$F(x, u, p)$ *convessa in* $p \ \not\Leftarrow\ n > 1$ *e* $N > 1$, $F(x, u, p)$ *quasi-convessa.*

Dim. Usando la disuguaglianza di Jensen 1.5.4:

$$\begin{aligned} F(x_0, u_0, p_0) &= F\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega (x_0, u_0, p_0 + \nabla\varphi(x))\, dx\right) \\ &\leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega F(x_0, u_0, p_0 + \nabla\varphi(x))\, dx \end{aligned}$$

per ogni $x_0 \in \Omega$, $u_0 \in \mathbb{R}^N$, $p_0 \in \mathbb{R}^{n\times N}$ e $\varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, dove la prima uguaglianza è ottenuta integrando per parti e sfruttando il fatto che φ è nulla sulla frontiera di Ω. $\square$

Proviamo ora che la quasi-convessità è strettamente più debole della convessità.

Esempio 5.1.11. *Sia* $n = N = 2$ *e sia* $F(p) = \det p = p_1^1 p_2^2 - p_2^1 p_1^2$ *dove*

$$p = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_2^1 \\ p_1^2 & p_2^2 \end{pmatrix}.$$

Allora $F(p)$ *non è convessa, ma è quasi-convessa in* p.

Infatti, siano

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

allora

$$\lambda F(p) + (1-\lambda)F(q) = 0 \quad \forall \lambda \in]0,1[,$$

mentre

$$F(\lambda p + (1-\lambda)q) = \lambda(1-\lambda) > 0.$$

Pertanto $F(p)$ non è convessa.
Proviamo ora che $F(p)$ è *quasi-convessa.*
Infatti, per ogni $u = (u^1, u^2) \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ ($\partial\Omega$ lipschitziana), essendo

$$\nabla u = \begin{pmatrix} u^1_{x_1} & u^1_{x_2} \\ u^2_{x_1} & u^2_{x_2} \end{pmatrix},$$

abbiamo l'identità

$$F(\nabla u) = \det \nabla u = u^1_{x_1}\, u^2_{x_2} - u^1_{x_2}\, u^2_{x_1} = (u^1\, u^2_{x_2})_{x_1} - (u^1\, u^2_{x_1})_{x_2}$$

(cioè il determinante della matrice gradiente può sciversi come una divergenza; in generale cfr. (6.59)).

Allora, per il teorema della divergenza 1.1.17, otteniamo:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \det \nabla u(x)\, dx &= \int_\Omega \left[u^1_{x_1}(x)\, u^2_{x_2}(x) - u^1_{x_2}(x)\, u^2_{x_1}(x)\right]\, dx \\
&= \int_\Omega \left[\left(u^1(x)\, u^2_{x_2}(x)\right)_{x_1} - \left(u^1(x)\, u^2_{x_1}(x)\right)_{x_2}\right]\, dx \\
&= \int_{\partial\Omega} \left(u^1(\xi)\, u^2_{x_2}(\xi),\, -u^1(\xi)\, u_{x_1}(\xi)\right) \cdot (\nu_1(\xi), \nu_2(\xi))\, d\mathcal{H}^1(\xi) \\
&= \int_{\partial\Omega} u^1(\xi)\left(u^2_{x_2}(\xi)\nu_1(\xi) - u^2_{x_1}(\xi)\nu_2(\xi)\right)\, d\mathcal{H}^1(\xi) \\
&= \int_{\partial\Omega} u^1(\xi)\left(u^2_{x_1}(\xi), u^2_{x_2}(\xi)\right) \cdot (-\nu_2(\xi), \nu_1(\xi))\, d\mathcal{H}^1(\xi) \\
&= \int_{\partial\Omega} u^1(\xi)\nabla u^2(\xi) \cdot \tau(\xi)\, d\mathcal{H}^1(\xi) \\
&= \int_{\partial\Omega} u^1(\xi)\, \frac{\partial u^2}{\partial \tau}(\xi)\, d\mathcal{H}^1(\xi)
\end{aligned}$$

dove $\tau(\xi) = (-\nu_2(\xi), \nu_1(\xi))$ è il versore tangente alla frontiera di Ω (orientato in maniera opportuna). Dunque il valore di $\displaystyle\int_\Omega \det \nabla u(x)\, dx$ dipende solo dai valori di u su $\partial\Omega$. Se scegliamo $u(x) = p_0 x + \varphi(x)$ con $p_0 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ e $\varphi \in C^2_0(\Omega, \mathbb{R}^2)$, abbiamo

$$\int_\Omega \det(p_0 + \nabla\varphi(x))\, dx = \int_\Omega \det p_0\, dx = |\Omega| \det p_0.$$

Questa uguaglianza può essere estesa per continuità ad ogni $\varphi \in C^1_0(\Omega, \mathbb{R}^2)$, e dunque $F(p)$ è quasi-convessa. $\square$

Osservazione 5.1.12. In generale, se $n = N$, la Lagrangiana $F(p) = \det p$ non è convessa ma è quasi-convessa, in quanto il <u>valore del funzionale</u> $\mathcal{F}[u] = \int_\Omega \det \nabla u(x)\ dx$ <u>dipende solo dai valori al bordo di u</u>. Lo stesso risultato (senza che sia necessariamente $n = N$) vale se si sostituisce il determinante con un qualsiasi minore della matrice ∇u. Lagrangiane di questo tipo si dicono "Lagrangiane nulle"(cfr. cap. 6).

La quasi-convessità di una funzione è espressa con una condizione che non è puntuale come nel caso delle funzioni convesse, ma è di tipo integrale, pertanto in generale difficile da verificare perché coinvolge una stima su tutto lo spazio $W^{1,\infty}_0\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$.
Una sottoclasse particolarmente interessante di funzioni quasi-convesse è costituita dalle funzioni policonvesse, intermedia tra le funzioni convesse e le quasi-convesse.

Definizione 5.1.13 (Morrey, 1966; Ball, 1977 [**5**] [**6**]).
Sia $p \in \mathbb{R}^{n\times N}$ e indichiamo con $M(p)$ l'insieme dei minori (cioè i determinanti di tutte le sottomatrici quadrate di p) della matrice $p = \left(p^i_\alpha\right)_{\substack{i=1,\cdots,N\\ \alpha=1,\cdots,n}}$.
Se $L(M(p))$ è una funzione convessa di $M(p)$, la funzione $F(p) = L(M(p))$ si dice <u>policonvessa</u>.

Esempio 5.1.14. *Se $n = N = 2$ e $p = \begin{pmatrix} p^1_1 & p^1_2 \\ p^2_1 & p^2_2 \end{pmatrix}$, le funzioni policonvesse sono tutte e sole quelle del tipo*
$F(p) = L(p^1_1, p^1_2, p^2_1, p^2_2, \det p)$ con L funzione convessa.

Osservazione 5.1.15. La convessità di $F(x, u, p)$ in $p \in \mathbb{R}^{n\times N}$ implica la policonvessità di $F(x, u, p)$ rispetto a p (si possono considerare le singole componenti del gradiente, $p = \nabla u = \left(\dfrac{\partial u^i}{\partial x_\alpha}\right)_{\substack{i=1,\cdots,N\\ \alpha=1,\cdots,n}}$, come minori di rango uno).

Per provare che esistono funzioni policonvesse che non sono convesse, basta pensare nel caso $n = N$ al determinante di p, ovvero ad un minore della matrice $p \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Proposizione 5.1.16. *Una funzione $F(p)$ policonvessa è quasi-convessa in p.*

Dim. Sia $F(p) = L(M(p))$ con L convessa. Posto $u(x) = p_0 x$ con $p_0 \in \mathbb{R}^{n\times N}$, per ogni $\varphi \in C^1_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ abbiamo, per la disuguaglianza di Jensen 1.5.4,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega L(M(p_0 + \nabla\varphi(x)))\,dx \\ = \quad & \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega L(M(\nabla u(x) + \nabla\varphi(x)))\,dx \\ \geq \quad & L\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega M(\nabla u(x) + \nabla\varphi(x))\,dx\right) \\ \overset{\text{oss. } 5.1.12}{=} \quad & L\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega M(\nabla u(x))\,dx\right) = L(M(p_0)), \end{aligned} \tag{5.48}$$

da cui segue la tesi. □

Osservazione 5.1.17. Per un esempio di funzione quasi-convessa che non è policonvessa rinviamo a [**69**].

Un'ultima e più debole forma di convessità è la cosiddetta convessità di rango uno.

Definizione 5.1.18. Una funzione $F(x, u, p)$ definita in $\Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n\times N}$ si dice <u>convessa</u> <u>di rango uno</u> se per ogni $(x_0, u_0, p_0) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n\times N}$ la funzione

$$g(\xi, \eta) = F(x_0, u_0, p_0 + \xi \otimes \eta) \quad {}^1$$

è <u>convessa separatamente</u> in $\xi \in \mathbb{R}^n$ ed $\eta \in \mathbb{R}^N$.

Proposizione 5.1.19. *Una funzione $F(x, u, p)$ quasi-convessa rispetto a p è convessa di rango uno.*

Dim. Possiamo supporre $F = F(p)$ e che (inizialmente) $F \in C^2(\mathbb{R}^{n\times N})$. Poiché F è quasi-convessa rispetto a p, le funzioni lineari minimizzano il funzionale $\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(\nabla u(x))\, dx$, pertanto prese $u(x) = p_0 x$, $p_0 \in \mathbb{R}^{n\times N}$, funzione lineare e $\varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, la funzione

$$G(t) = \mathcal{F}[u + t\varphi] = \int_\Omega F(\nabla u(x) + t\nabla\varphi(x))\, dx = \int_\Omega F(p_0 + t\nabla\varphi(x))\, dx$$

ha un minimo per $t = 0$. Abbiamo allora $G'(0) = 0$ e $G''(0) \geq 0$ e dunque

$$\int_\Omega F_{p_\alpha^k\, p_\beta^j}(p_0) D_\alpha\varphi^k D_\beta\varphi^j\, dx \geq 0 \qquad \forall\varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N). \tag{5.49}$$

Se ora (permettiamo alla φ di assumere valori complessi) $\varphi(x) = \lambda(x) + i\mu(x)$, otteniamo

$$\begin{aligned} F_{p_\alpha^k\, p_\beta^j}(p_0)\, D_\alpha\varphi^k \overline{D_\beta\varphi^j} \quad &= \quad F_{p_\alpha^k\, p_\beta^j}(p_0) \left[D_\alpha\lambda^k D_\beta\lambda^j + D_\alpha\mu^k D_\beta\mu^j\right] \\ &\quad + F_{p_\alpha^k\, p_\beta^j}(p_0) \left\{i\left[D_\alpha\mu^k D_\beta\lambda^j - D_\alpha\lambda^k D_\beta\mu^j\right]\right\} \end{aligned}$$

e dunque per (5.49) risulta

$$\operatorname{Re}\int_\Omega F_{p_\alpha^k\, p_\beta^j}(p_0)\, D_\alpha\varphi^k \overline{D_\beta\varphi^j}\, dx \geq 0. \tag{5.50}$$

Scegliamo ora $\varphi(x) = \eta e^{i\tau\xi\cdot x}\gamma(x)$, dove $\tau > 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in \mathbb{R}^N$ e $\gamma \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Dalla (5.50),poiché

$$\begin{aligned} D_\alpha\varphi^k \overline{D_\beta\varphi^j} \quad &= \quad \left(\eta^k \cdot e^{i\tau\xi\cdot x} \cdot \xi_\alpha\, i\tau\gamma(x) + \eta^k \cdot e^{i\tau\xi\cdot x} D_\alpha\gamma(x)\right) \\ &\quad \times \left(\eta^j \cdot e^{-i\tau\xi\cdot x}\xi_\beta(-i\tau)\gamma(x) + \eta^j e^{-i\tau\xi\cdot x} D_\beta\gamma(x)\right), \end{aligned}$$

otteniamo

$$\int_\Omega F_{p_\alpha^k\, p_\beta^j}(p_0)\, \eta^k\eta^j \left[\tau^2\xi_\alpha\, \xi_\beta\, \gamma^2 + D_\alpha\gamma D_\beta\gamma\right] dx \geq 0.$$

[1] ricordato che una "matrice $p \in \mathbb{R}^{n\times N}$ ha rango 1 se e solo se esistono $\xi \in R^n$, $\eta \in \mathbb{R}^N$ tali che $p = \xi \otimes \eta$", risulta $p_\alpha^i = \xi_\alpha\, \eta^i$ $\left({i=1,\cdots,N \atop \alpha=1,\cdots,n}\right)$.

Dividendo per τ^2 e facendo tendere τ all'infinito abbiamo

$$\int_\Omega F_{p^k_\alpha\, p^j_\beta}(p_0)\, \xi_\alpha\, \xi_\beta\, \eta^k\, \eta^j \gamma^2\, dx \geq 0$$

per ogni $\gamma \in C^\infty_0(\Omega, \mathbb{R})$, e quindi

$$(L-H) \qquad F_{p^k_\alpha\, p^j_\beta}(p_0)\, \xi_\alpha\, \xi_\beta\, \eta^k\, \eta^j \geq 0 \tag{5.51}$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ ed $\eta \in \mathbb{R}^N$.

Quest'ultima disuguaglianza, che prende il nome di CONDIZIONE DI LEGENDRE-HADAMARD (cfr. osservazione 2.2.9), implica la convessità separata di $F \in C^2(\mathbb{R}^{n\times N})$ in $\xi \in \mathbb{R}^n$ ed $\eta \in \mathbb{R}^N$.

Supponiamo ora che $F = F(p) \in C^0(\mathbb{R}^{n\times N})$ (cioè F sia solo continua) e sia (per $\varepsilon > 0$) F_ε la regolarizzata di F, cioè

$$F_\varepsilon(p) := (F * \rho_\varepsilon)(p) = \int_{\mathbb{R}^{n\times N}} F(p-q)\rho_\varepsilon(q)\, dq,$$

dove $\rho_\varepsilon(q) = \varepsilon^{-nN}\, \rho\left(\frac{q}{\varepsilon}\right)$ e $\rho \in C^\infty_0(\mathbb{R}^{n\times N})$.
Siano $p_0 \in \mathbb{R}^{n\times N}$, $\vartheta \in C^1_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$; abbiamo

$$\begin{aligned} \int_\Omega F_\varepsilon(p_0 + \nabla\vartheta(x))\, dx &= \int_{\mathbb{R}^{n\times N}} \rho_\varepsilon(q) \left(\int_\Omega F(p_0 + \nabla\vartheta(x) - q)\, dx \right) dq \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^{n\times N}} \rho_\varepsilon(q) |\Omega| F(p_0 - q)\, dq \\ &= |\Omega| F_\varepsilon(p_0), \end{aligned}$$

ossia

$$\int_\Omega F_\varepsilon(p_0 + \nabla\vartheta(x))\, dx \geq |\Omega| F_\varepsilon(p_0),$$

cioè $F_\varepsilon = F_\varepsilon(p) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n\times N})$ è quasi-convessa rispetto a p al pari di $F \in C^0(\mathbb{R}^{n\times N})$. Per quanto già provato abbiamo allora che F_ε è convessa di rango uno, e passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$ otteniamo che F è convessa di rango uno. □

OSSERVAZIONE 5.1.20. Se $F(p)$ $\left(p = \left(p^i_\alpha\right)_{\substack{i=1,2,\ldots,N \\ \alpha=1,2,\ldots,n}} \right)$ è quasi-convessa, possiamo scrivere $F(p) = F(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ dove $p_\alpha = \begin{pmatrix} p^1_\alpha \\ p^2_\alpha \\ \vdots \\ p^N_\alpha \end{pmatrix}$ è la α-esima colonna di p.

Poiché F è convessa di rango uno, le funzioni $p_\alpha \mapsto F(p_1, \ldots, p_\alpha, \ldots, p_n)$, in quanto convesse, sono localmente lipschitziane rispetto a p_α uniformemente al variare di $p_1, \ldots, p_{\alpha-1}, p_{\alpha+1}, \ldots, p_n$ su insiemi limitati.

Ne concludiamo che *una funzione quasi-convessa in p è localmente lipschitziana in p.*

Osservazione 5.1.21. Sia $F = F(p) \in C^2(\mathbb{R}^{n\times N})$.
La convessità di $F(p)$ è equivalente alla positività della matrice Hessiana (condizione di Legendre)

$$(L) \qquad F_{p^i_\alpha\, p^j_\beta}(p)\, \zeta^i_\alpha\, \zeta^j_\beta \geq 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}^{n\times N},\ \ \forall \zeta \in \mathbb{R}^{n\times N}.$$

La convessità di rango uno è equivalente alla condizione di Legendre-Hadamard

$$(L-H) \qquad F_{p^i_\alpha\, p^j_\beta}(p)\, \xi_\alpha\, \xi_\beta \eta^i\, \eta^j \geq 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}^{n\times N}\ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ \ \forall \eta \in \mathbb{R}^N,$$

(che corrisponde alla scelta di $\zeta \in \mathbb{R}^{n\times N}$, $\zeta = \xi \otimes \eta$ nella (L)).
Chiaramente

$$(L) \Rightarrow (L-H),$$

ma, se $n > 1$ ed $N > 1$, allora

$$(L-H) \not\Rightarrow (L).$$

Infatti sia $n = N = 2$ e definiamo (per $\varepsilon > 0$)

$$A^{ij}_{\alpha\,\beta}\, D_\alpha u^i\, D_\beta u^j := \det(D_\alpha u^i) + \varepsilon\, |\nabla u|^2.$$

Allora

$$(L-H) \Longleftrightarrow A^{ij}_{\alpha\,\beta}\, \xi_\alpha\, \xi_\beta\, \eta^i\, \eta^j = \varepsilon |\xi|^2\, |\eta|^2 \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2,\ \eta \in \mathbb{R}^2$$

(in quanto $\det(\xi_\alpha\, \eta^i) = 0$ per $n = N = 2$); inoltre

$$(L) \Longleftrightarrow A^{ij}_{\alpha\,\beta}\, \zeta^i_\alpha\, \zeta^j_\beta = \det(\zeta^i_\alpha) + \varepsilon |\zeta|^2.$$

Ora per $0 < \varepsilon < 1$ esiste $\zeta \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tale che $\det(\zeta^i_\alpha) + \varepsilon|\zeta|^2 < 0$.
(e.g. , sia $\zeta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; abbiamo $\det \zeta = -1$, $|\zeta|^2 = 2$ per cui

$$\det \zeta + \varepsilon\, |\zeta|^2 = -1 + 2\varepsilon < 0$$

per $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$).

Riassumendo abbiamo la seguente catena di implicazioni:

convessità $\Rightarrow$ policonvessità $\Rightarrow$ quasi-convessità $\Rightarrow$ convessità di rango uno.

Osservazione 5.1.22. In generale, le implicazioni opposte non sussistono, se non in situazioni particolari.
Comunque tutte le definizioni sono equivalenti se $n = 1$ oppure $N = 1$; infatti, in questi casi la convessità di rango uno implica la convessità (dalla stessa definizione 5.1.18), e dunque tutte queste nozioni sono tra loro equivalenti.

Osservazione 5.1.23. Esistono funzioni convesse di rango uno che non sono quasi-convesse [**70**].

Osservazione 5.1.24. Un altro caso nel quale la convessità di rango uno implica la quasi-convessità, è quello in cui la funzione $F(p)$ è quadratica in p, cioè

$$F(p) = A^{kj}_{\alpha\,\beta}\, p^k_\alpha p^j_\beta$$

con $A^{kj}_{\alpha\,\beta} = \text{cost.}$
Infatti, se $F(p) = A^{kj}_{\alpha\,\beta}\, p^k_\alpha p^j_\beta$ è convessa di rango uno, posto $p = \xi \otimes \eta$ con $\xi \in \mathbb{R}^n$ ed $\eta \in \mathbb{R}^N$, risulta (cfr. osservazione 5.1.21) $A^{kj}_{\alpha\,\beta}\, \xi_\alpha \xi_\beta\, \eta^k \eta^j \geq 0$.
Allora abbiamo:

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(p_0 + \nabla\varphi(x))\,dx &= \int_\Omega \left[A^{kj}_{\alpha\,\beta}\,(p_0)^k_\alpha (p_0)^j_\beta + A^{kj}_{\alpha\,\beta}\, D_\alpha\varphi^k(x) D_\beta\varphi^j(x)\right] dx \\ &\geq |\Omega| F(p_0)\end{aligned}$$

per ogni $p_0 \in \mathbb{R}^{n\times N}$, $\varphi \in C^1_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$, dato che per il lemma 5.1.25 successivo risulta

$$\int_\Omega A^{kj}_{\alpha\,\beta}\, D_\alpha\varphi^k(x) D_\beta\varphi^j(x)\,dx \geq 0$$

per ogni $\varphi \in C^1_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Quindi una siffatta $F(p)$ è quasi-convessa. $\square$

Più in generale, se invece della condizione

$$A^{kj}_{\alpha\,\beta}\, \xi_\alpha\, \xi_\beta \eta^k \eta^j \geq 0 \quad \text{per ogni } \xi \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^N$$

abbiamo

$$A^{kj}_{\alpha\,\beta}\, \xi_\alpha\, \xi_\beta \eta^k \eta^j \geq c|\xi|^2\, |\eta|^2 \quad \text{per ogni } \xi \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^N \text{ con } c \geq 0,$$

sussiste il seguente risultato:

Lemma 5.1.25. *Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times N}$ una matrice costante verificante la condizione*

$$A^{kj}_{\alpha\,\beta}\, \xi_\alpha\, \xi_\beta \eta^k \eta^j \geq c|\xi|^2\, |\eta|^2 \quad \textit{per ogni } \xi \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^N \tag{5.52}$$

con $c \geq 0$. Allora per ogni $\varphi \in W^{1,2}_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ risulta

$$\int_\Omega A^{kj}_{\alpha\,\beta} D_\alpha\varphi^k(x)\, D_\beta\varphi^j(x)\,dx \geq \frac{c}{4\pi^2} \int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^2\,dx.$$

Dim. Poiché $W^{1,2}_0(\Omega, \mathbb{R}^N) = \overline{C^1_0(\Omega, \mathbb{R}^N)}^{W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)}$ è sufficiente provare la precedente disuguaglianza per $\varphi \in C^1_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

L'idea è di usare la trasformata di Fourier definita da

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, \varphi(x)\,dx, \text{ per cui } \widehat{D_\alpha\varphi}(\xi) = -2\pi i \xi_\alpha \widehat{\varphi}(\xi).$$

Risulta

$$\begin{aligned}
\int_\Omega D_\alpha\varphi^k\, D_\beta\varphi^j\, dx &= \int_\Omega D_\alpha\varphi^k\, \overline{D_\beta\varphi^j}\, dx \\
&= \int_\Omega \widehat{D_\alpha\varphi^k}\, \overline{\widehat{D_\beta\varphi^j}}\, d\xi \\
&= \int_\Omega (-2\pi i\xi_\alpha)\, \widehat{\varphi^k}\, \overline{(-2\pi i\xi_\beta)}\, \overline{\widehat{\varphi^j}}\, d\xi \\
&= 4\pi^2 \int_\Omega \xi_\alpha\, \xi_\beta\, \widehat{\varphi^k}\, \overline{\widehat{\varphi^j}}\, d\xi,
\end{aligned}$$

da cui, per $\alpha = \beta$ e $k = j$, ricaviamo

$$\int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^2\, dx = 4\pi^2 \int_\Omega |\xi|^2\, |\widehat{\varphi}|^2\, d\xi. \tag{5.53}$$

D'altra parte, se nella (5.52) permettiamo al vettore η di assumere valori complessi, $\eta^k = \rho^k + i\lambda^k$, abbiamo:

$$A^{kj}_{\alpha\,\beta}\, \xi_\alpha\, \xi_\beta \eta^k \overline{\eta^j} = A^{kj}_{\alpha\,\beta}\, \xi_\alpha\, \xi_\beta \left[\rho^k\, \rho^j + \lambda^k\, \lambda^j + i(\rho^j\, \lambda^k - \rho^k\, \lambda^j)\right]$$

e dunque, per (5.52), essendo

$$\begin{aligned}
A^{kj}_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta\rho^k\rho^j \geq c\,|\xi|^2\,|\rho|^2\,, \\
A^{kj}_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta\lambda^k\lambda^j \geq c\,|\xi|^2\,|\rho|^2 \quad \text{e} \\
|\eta|^2 = |\rho|^2 + |\lambda|^2
\end{aligned}$$

deduciamo che

$$\mathrm{Re}\ A^{kj}_{\alpha\,\beta}\, \xi_\alpha\, \xi_\beta \eta^k \overline{\eta^j} \geq c|\xi|^2\, |\eta|^2.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}
\int_\Omega A^{kj}_{\alpha\,\beta}\, D_\alpha\varphi^k\, D_\beta\varphi^j\, dx &= \mathrm{Re} \int_\Omega A^{kj}_{\alpha\,\beta}\, \xi_\alpha\, \xi_\beta\, \widehat{\varphi^k}\, \overline{\widehat{\varphi^j}}\, d\xi \\
&\geq c \int_\Omega |\xi|^2\, |\widehat{\varphi}|^2\, d\xi \\
&\overset{\text{per (5.53)}}{=} \frac{c}{4\pi^2} \int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^2\, dx.
\end{aligned}$$

$\square$

5.2. Condizioni sufficienti per la debole semicontinuità inferiore in ipotesi di quasi-convessità: teoremi di Morrey, Marcellini, Acerbi-Fusco.

E' naturale chiedersi se la quasi-convessità (oltre che condizione necessaria, cfr. teoremi 5.1.4 e 5.1.5) sia anche sufficiente per dimostrare la semicontinuità inferiore in una topologia abbastanza debole da garantire l'esistenza di minimi.

Parte dell'interesse sulla quasi-convessità risiede sui teoremi di debole sequenziale semicontinuità inferiore dovuti a Morrey (1952) [**57**], Marcellini (1985) [**54**], Acerbi-Fusco (1984) [**1**], in ipotesi sempre meno restrittive.

Nei prossimi teoremi supponiamo sempre che Ω sia un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$. Sussistono i seguenti risultati.

Teorema 5.2.1 (Morrey, 1952 [**57**]).
Se $F : \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$ è una Lagrangiana tale che

(i) *F è quasi-convessa in p,*

allora il funzionale $\mathcal{F}[u] = \displaystyle\int_\Omega F(\nabla u(x))\,dx$ è seq. s.c.i. nella topologia debole* di $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Dim. Sia $\{u_h\}$ una successione di $W^{1,\infty}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$ debolmente* convergente ad una funzione u.
Non è restrittivo supporre che F sia positiva. Infatti essendo F localmente limitata (osservazione 5.1.20) esiste una costante c tale che $c \leq F\left(\nabla u_h(x)\right)$ per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni h. Basta allora sostituire F con $\max\{F + c, 0\}$.
L'idea della dimostrazione è di conseguire la tesi nel caso particolare $u(x) = u_{p_0}(x) = p_0 x$ e poi di estendere il risultato al caso generale.

1. Allora, sia dapprima $u(x) = u_{p_0}(x) = p_0 x$ con $p_0 \in \mathbb{R}^{n\times N}$, $x \in \Omega$ e supponiamo anche che le funzioni $\varphi_h(x) = u_h(x) - u_{p_0}(x)$ abbiano supporto compatto in Ω. Dall'ipotesi di quasi-convessità abbiamo
$$\int_\Omega F(p_0 + \nabla\varphi(x))\,dx \geq |\Omega|\,F(p_0) \qquad \forall \varphi \in C_0^1\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$$
e anche, per la continuità di F, per ogni $\varphi \in W_0^{1,\infty}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$.
Quindi
$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u_h] &= \mathcal{F}[u_{p_0} + \varphi_h] = \int_\Omega F(p_0 + \nabla\varphi_h(x))\,dx \\ &\geq |\Omega|\,F(p_0) = \mathcal{F}[u_{p_0}], \end{aligned}$$

da cui segue la tesi.

2. In questo secondo passo supponiamo soltanto che $u(x) = u_{p_0}(x) = p_0 x$ con $p_0 \in \mathbb{R}^{n\times N}$, $x \in \Omega$.
Sia $\Omega' \subset\subset \Omega$ e sia ψ una funzione di taglio, $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \le \psi \le 1$ in Ω, $\psi = 1$ in Ω'.
Definita la successione di funzioni
$$\varphi_h(x) = \psi(x) u_h(x) + (1 - \psi(x))\, u_{p_0}(x),$$
abbiamo, per il passo 1.,
$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[u_{p_0}\right] &\le \mathcal{F}\left[\varphi_h\right] = \int_\Omega F\left(\psi\nabla u_h + (1-\psi)p_0 + (u_h - u_{p_0})\nabla\psi\right)\, dx \\ &\le \mathcal{F}[u_h] + c\left|\Omega \setminus \Omega'\right|,\end{aligned}$$
da cui otteniamo la tesi facendo tendere prima Ω' ad Ω.

3. Sia infine u un'arbitraria funzione in $W^{1,\infty}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$ e sia v una funzione affine a tratti tale che $\|\nabla v - \nabla u\|_{L^1(\Omega,\mathbb{R}^{n\times N})} \le \varepsilon$.
Consideriamo la successione $v_h = u_h - u + v$ che converge a v nella topologia debole* di $W^{1,\infty}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$. Quindi, per quanto già provato nel punto 2. (osservato che il risultato conseguito nei primi due passi per funzioni lineari si estende al caso di funzioni affini a tratti),
$$\mathcal{F}[v] \le \liminf_{h\to\infty} \mathcal{F}[v_h].$$
Poiché F è localmente lipschitziana (osservazione 5.1.20), abbiamo
$$\begin{aligned}\left|\mathcal{F}\left[u_h\right] - \mathcal{F}\left[v_h\right]\right| &\le \int_\Omega \left|F\left(\nabla u_h\right) - F\left(\nabla v_h\right)\right|\, dx \\ &\le c\int_\Omega \left|\nabla u_h - \nabla v_h\right|\, dx \\ &= c\int_\Omega \left|\nabla u - \nabla v\right|\, dx \le \varepsilon c,\end{aligned}$$
da cui segue la tesi. □

Osservazione 5.2.2. I teoremi 5.1.4 e 5.2.1 dimostrano che la debole* sequenziale semicontinuità inferiore in $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ del funzionale
$\mathcal{F}[u] = \displaystyle\int_\Omega F(\nabla u(x))\, dx$ è equivalente alla quasi-convessità di F.

Per assicurare la debole semicontinuità inferiore in $W^{1,m}$ $(1 \le m < \infty)$ sono necessarie aggiuntive condizioni di crescita su F oltre alla quasi-convessità [**7**].
Vale il seguente risultato, che si ottiene con alcune modifiche rispetto alla dimostrazione del teorema 5.2.1.

Teorema 5.2.3 (Marcellini, 1985 [**54**]).
Se $F : \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$ è una Lagrangiana tale che

(i) *F è quasi-convessa in p;*
(ii) $-c\,(1+|p|^r) \le F(p) \le c\,(1+|p|^m)$
per ogni $p \in \mathbb{R}^{n\times N}$ con $c>0$, $1 \le r < m < \infty$;

allora il funzionale $\mathcal{F}[u] = \displaystyle\int_\Omega F(\nabla u(x))\,dx$ è seq. deb. s.c.i. in $W^{1,m}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$.

Il teorema precedente continua a valere anche quando la Lagrangiana F dipende da x e da u. I risultati di Morrey e Marcellini sono stati estesi da Acerbi e Fusco a Lagrangiane discontinue in x. Precisamente, vale il seguente teorema più generale.

Teorema 5.2.4 (Acerbi-Fusco, 1984 [**1**]).
Sia $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$ una Lagrangiana tale che

(i) *$F\,(x,u,p)$ è di Carathéodory;*
(ii) *per ogni $(x,u,p) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n\times N}$*

$$-c\left(|p|^r + |u|^t\right) - h(x) \le F(x,u,p) \le g(x,u)\,(1+|p|^m)$$

con $m>1$, $1 \le r < m$ ($r=1$ se $m^*=1$), $1 \le t < m^* = \dfrac{nm}{n-m}$ se $m<n$, $t \ge 1$ se $m>n$, $c>0$, $h \in L^1(\Omega)$ e $g \ge 0$ di Carathéodory in $\Omega \times \mathbb{R}^N$;
(iii) *$p \mapsto F(x,u,p)$ è quasi-convessa in $\mathbb{R}^{n\times N}$.*

Allora il funzionale $\mathcal{F}[u] = \displaystyle\int_\Omega F(x,u(x),\nabla u(x))\,dx$ è seq. deb. s.c.i. in $W^{1,m}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$.

Una dimostrazione (pur sempre, non semplice) di questo teorema si basa su più risultati preliminari, molti dei quali hanno un interesse in sé e per questo motivo li segnaliamo qui, rinviando per la dimostrazione del teorema 5.2.4 a [**37**] cap. 5 paragrafi 5.3, 5.4 e 5.5.

- Il primo ingrediente è l'*inviluppo quasi convesso di una funzione*: sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e sia $G : \mathbb{R}^{n\times N} \to [\,0,+\infty)$; definiamo

$$\gamma_\Omega(p)) := \inf\left\{ \fint_\Omega G(p+\nabla\varphi(x))\,dx;\ \ \varphi \in W^{1,m}_0\left(\Omega,\mathbb{R}^N\right)\right\}.$$

  γ_Ω è invariante per omotetie e non dipende da Ω; pertanto scriveremo semplicemente $\gamma(p)$ invece di $\gamma_\Omega(p)$. Sotto opportune ipotesi per G, γ è quasi-convessa.

Lemma 5.2.5 ([**37**]).
Sia $\nu\,|p|^m \le G(p) \le c\,(1+|p|^m)$ *(*$\nu>0$*) ed esista* $\omega:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *continua con* $\omega(0)=0$ *tale che*

$$|G(p)-G(q)| \le (1+|p|^m+|q|^m)\,\omega\,(|p-q|)$$

per ogni $p,q\in\mathbb{R}^{n\times N}$*,*
allora γ *è l'inviluppo quasi-convesso di* G*, cioè la massima funzione quasi-convessa che non supera* G*.*

- Il secondo ingrediente è il seguente risultato:

Teorema 5.2.6 (Principio Variazionale di Ekeland [**27**] [**28**] [**29**]).

Sia (V,d) *uno spazio metrico completo. Sia* $\mathcal{G}:V\to[0,+\infty]$ *un funzionale limitato inferiormente, s.c.i. nella topologia indotta dalla metrica* d *che abbia in qualche punto valore finito.*
Se per qualche $v\in V$ *ed* $\eta>0$ *risulta*

$$\mathcal{G}[v] \le \inf_V \mathcal{G} + \eta$$

allora esiste $u\in V$ *tale che*
a. $d(u,v)\le 1$*;*
b. $\mathcal{G}[u]\le\mathcal{G}[v]$*;*
c. $\mathcal{G}[u]\le\mathcal{G}[w]+\eta d(u,w)$ *per ogni* $w\in V$
(cioè, u *è punto (unico) di minimo del funzionale* $w\mapsto\mathcal{G}[w]+\eta d(u,w)$*).*

Osserviamo che, se introduciamo in V la nuova distanza $d_1=\eta^{-\frac12}d$, lo spazio metrico (V,d_1) è completo, e $\mathcal{G}$ è s.c.i..
Allora, dal Principio Variazionale di Ekeland segue che se $\mathcal{G}[v]\le\inf_V\mathcal{G}+\eta$, esiste $u\in V$ (a priori diversa da quella di cui all'enunciato del teorema 5.2.6) tale che
a'. $d(u,v)\le\eta^{\frac12}$;
b'. $\mathcal{G}[u]\le\mathcal{G}[v]$;
c'. $\mathcal{G}[u]\le\mathcal{G}[w]+\eta^{\frac12}d(u,w)$ per ogni $w\in V$.
Ora, se $\{v_h\}\subset V$ è una successione minimizzante per $\mathcal{G}$, cioè se $\eta_h:=\mathcal{G}[v_h]-\inf_V\mathcal{G}\overset{h\to\infty}{\to}0$, la successione corrispondente $\{u_h\}\subset V$ è anch'essa successione minimizzante per $\mathcal{G}$.
Inoltre

$$\mathcal{G}[u_h]\le\mathcal{G}[w]+\eta_h^{\frac12}d(u_h,w)$$

per ogni $w\in V$.

- Ultimo e fondamentale ingrediente è questo risultato di maggiore sommabilità.

Lemma 5.2.7 ([**32**] *e lemma 3.2 in* [**53**]).
Sia $\mathcal{G}:\Omega\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^{n\times N}\to\mathbb{R}$ *una Lagrangiana tale che*
(i) $\mathcal{G}(x,u,p)$ *è di Carathéodory;*

(ii) $|p|^m \leq \mathcal{G}(x,u,p) \leq a_1(x) + a_2 |u|^m + a_3 |p|^m$ *con* $a_1 \in L^t_{loc}(\Omega)$, $t>1$, $m>1$, $a_2, a_3 > 0$.

Sia $u \in W^{1,m}_{loc}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$ *tale che per ogni aperto* $\Omega' \subset\subset \Omega$:

$$\int_{\Omega'} \mathcal{G}\left(x, u(x), \nabla u(x)\right) dx \quad \leq \quad \int_{\Omega'} \mathcal{G}\left(x, v(x), \nabla v(x)\right) dx + \eta \int_{\Omega'} |\nabla v(x) - \nabla u(x)| \, dx$$

per ogni $v \in u + W^{1,m}_0\left(\Omega', \mathbb{R}^N\right)$ *dove* $0 \leq \eta \leq 1$.

Allora esiste $\tau > 0$ *tale che* $u \in W^{1,m+\tau}_{loc}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$.

Osservazione 5.2.8. Il teorema di semicontinuità 5.2.4 è dovuto essenzialmente ad Acerbi e Fusco [**1**] che lo hanno ottenuto in ipotesi leggermente meno generali.
Una prima importante differenza con il caso convesso è la seguente: nel teorema 4.3.6 il funzionale $\mathcal{F}[u] = \displaystyle\int_\Omega F(x,u(x),\nabla u(x))\,dx$ è seq. deb. s.c.i. in $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, M)$; invece il teorema 5.2.4 asserisce che il funzionale $\mathcal{F}[u]$ è seq. deb. s.c.i. in $W^{1,m}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, dove m è l'esponente di crescita in (ii).
Una seconda differenza è che nel teorema 4.3.6 (tenuto conto anche dell'osservazione 4.3.8) otteniamo la sequenziale debole semicontinuità inferiore richiedendo solo un controllo dal basso per la Lagrangiana F. Nel teorema 5.2.4 è richiesto anche un controllo dall'alto.
Il teorema 5.2.4 non sussiste se $r = m$, né se $t = m^*$ [**37**].

Come già visto (cfr. teorema 4.5.2), una volta dimostrata la semicontinuità, l'esistenza di minimi sotto opportune condizioni dipende in gran parte dalla coercività del funzionale in esame. Per l'analisi di risultati di esistenza di minimi nel caso in cui $F(x,u,p)$ è solo quasi-convessa o anche policonvessa (ma non convessa) rinviamo al paragrafo 5.6 in [**37**].
Qui, rinviamo ai teoremi di esistenza 6.2.3 e 6.2.4 del successivo capitolo, relativi al caso di funzionali con Lagrangiana policonvessa.

CAPITOLO 6

Lagrangiane nulle

In questo capitolo studiamo particolari sistemi di equazioni alle derivate parziali non lineari per i quali *ogni* funzione regolare è una soluzione.

6.1. Definizione e proprietà.

DEFINIZIONE 6.1.1. La funzione $F(x, u(x), \nabla u(x))$, $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$, si dice LAGRANGIANA NULLA se il sistema di equazioni di Eulero (2.23)

$$-D_\alpha F_{p^i_\alpha}(x, u(x), \nabla u(x)) + F_{u^i}(x, u(x), \nabla u(x)) = 0 \ \text{ in } \Omega \ \ (i = 1, \dots, N)$$

è soddisfatto da ogni funzione $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

OSSERVAZIONE 6.1.2. L'importanza delle Lagrangiane nulle risiede nel fatto che la corrispondente energia $\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$ dipende solo dalle condizioni al contorno.

TEOREMA 6.1.3 (LAGRANGIANE NULLE E CONDIZIONI AL CONTORNO). *Sia F una Lagrangiana nulla. Siano u e $v \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tali che $u \equiv v$ su $\partial\Omega$. Allora $\mathcal{F}[u] = \mathcal{F}[v]$.*

DIM. Poniamo $G(\tau) := \mathcal{F}[\tau u + (1-\tau)v]$ con $\tau \in [0,1]$ e
$z := \tau u + (1-\tau)v$. Risulta

$$\begin{aligned} G'(\tau) &= \int_\Omega \left[F_{p^i_\alpha}(x, z, \nabla z)(u^i_{x_\alpha} - v^i_{x_\alpha}) + F_{z^i}(x, z, \nabla z)(u^i - v^i) \right] dx \\ &= \int_\Omega \left[-D_\alpha F_{p^i_\alpha}(x, z, \nabla z) + F_{z^i}(x, z, \nabla z) \right] (u^i - v^i)\, dx = 0. \end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza segue dal fatto che z è soluzione del sistema di Eulero, in quanto per ipotesi F è una Lagrangiana nulla.

Osservato che $G'(\tau) = 0$ con $\tau \in [0,1]$ implica $G(\tau) = \text{cost}$ per ogni $\tau \in [0,1]$ e quindi, in particolare, $G(1) = G(0)$, abbiamo

$$\int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\, dx = \int_\Omega F(x, v(x), \nabla v(x))\, dx$$

cioè $\mathcal{F}[u] = \mathcal{F}[v]$. $\square$

Nel caso scalare ($N = 1$) le sole Lagrangiane nulle sono quelle $F(x, u, p)$ lineari nella variabile p.
Nel caso dei sistemi ($N > 1$), tuttavia, ci sono esempi importanti.

Notazione: Sia p una matrice $n \times n$; denotiamo con $\operatorname{cof} p$ la *matrice dei cofattori* di p, il cui elemento $(i, \alpha)-$esimo è $(\operatorname{cof} p)^i_\alpha = (-1)^{i+\alpha} \det(p)^i_\alpha$, dove $\det(p)^i_\alpha$ è il determinante della matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta da p elimando la $i-$esima riga e la $\alpha-$esima colonna.

Il lemma successivo esprime una *proprietà analitica dei cofattori della matrice Jacobiana di una funzione regolare.*

Lemma 6.1.4 (righe a divergenza nulla).
Sia $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di classe $C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Allora

$$D_\alpha (cof\, \nabla u)^i_\alpha = 0 \quad in\ \Omega \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{6.54}$$

Dim.

1. Sia $p \in \mathbb{R}^{n\times n}$; risulta:

$$\det p = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+\alpha}\, p^i_\alpha \det(p)^i_\alpha = \sum_{i=1}^n p^i_\alpha\, (\operatorname{cof} p)^i_\alpha\,,$$

e quindi

$$(\det p)\ \delta_{\alpha\,\beta} = \sum_{i=1}^n p^i_\alpha\, (\operatorname{cof} p)^i_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n). \tag{6.55}$$

Così in particolare

$$\frac{\partial \det p}{\partial p^i_j} = (\operatorname{cof} p)^i_j \quad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{6.56}$$

2. Posto ora $p = \nabla u$ in (6.55), abbiamo

$$(\det \nabla u)\ \delta_{\alpha\,\beta} = \sum_{i=1}^n u^i_{x_\alpha}\, (\operatorname{cof} \nabla u)^i_\beta \ \ (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)\,;$$

differenziamo rispetto a x_β ambo i membri:

$$\begin{aligned}\Big((\det \nabla u)\ \delta_{\alpha\,\beta}\Big)_{x_\beta} &= \sum_{i,j=1}^{n} \Big((\det \nabla u)\ \delta_{\alpha\,\beta}\Big)_{u^i_{x_j}} \cdot u^i_{x_j\,x_\beta} \\ &\overset{\text{per (6.56)}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} (\operatorname{cof} \nabla u)^i_j\, u^i_{x_j\,x_\beta}\, \delta_{\alpha\,\beta}\end{aligned}$$

e

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u^i_{x_\alpha}\,(\operatorname{cof} \nabla u)^i_\beta\right)_{x_\beta} = \sum_{i=1}^{n} u^i_{x_\alpha\,x_\beta}\,(\operatorname{cof} \nabla u)^i_\beta + \sum_{i=1}^{n} u^i_{x_\alpha}\,(\operatorname{cof} \nabla u)^i_{\beta,x_\beta}.$$

Sommando su $\beta = 1, \ldots, n$ abbiamo

$$\sum_{i,j,\beta=1}^{n} \delta_{\alpha\,\beta}\,(\operatorname{cof} \nabla u)^i_j\, u^i_{x_j\,x_\beta} = \sum_{i,\beta=1}^{n} \Big[u^i_{x_\alpha\,x_\beta}\,(\operatorname{cof} \nabla u)^i_\beta + u^i_{x_\alpha}\,(\operatorname{cof} \nabla u)^i_{\beta,x_\beta}\Big]$$

per $\alpha = 1, \ldots, n$. Quindi

$$\sum_{i=1}^{n} u^i_{x_\alpha}\left(\sum_{\beta=1}^{n} (\operatorname{cof} \nabla u)^i_{\beta,x_\beta}\right) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, n). \tag{6.57}$$

3. Se $\det \nabla u(x_0) \neq 0$, deduciamo da (6.57) che

$$\sum_{\beta=1}^{n} (\operatorname{cof} \nabla u)^i_{\beta,x_\beta} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \text{ in } x_0.$$

Se invece $\det \nabla u(x_0) = 0$, sia $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo tale che $\det(\nabla u(x_0) + \varepsilon I) \neq 0$, e applichiamo i passi 1.-3. a $\overline{u} := u + \varepsilon x$; poi per $\varepsilon \to 0^+$ segue la tesi. □

Teorema 6.1.5 (determinanti e Lagrangiane nulle).
La Lagrangiana (funzione determinante) $F(p) = \det p$, con $p \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è una Lagrangiana nulla.

Dim. Proviamo che per ogni $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ si ha
$D_\alpha F_{p^i_\alpha}(\nabla u(x)) = 0$ in Ω $(i = 1, \ldots, n)$.
Poiché $F_{p^i_\alpha}(p) = (\operatorname{cof} p)^i_\alpha$ $(i, \alpha = 1, \ldots, n)$ (cfr. (6.56)), per il lemma 6.1.4 si ha

$$D_\alpha F_{p^i_\alpha}(\nabla u(x)) = D_\alpha\,(\operatorname{cof} \nabla u(x))^i_\alpha = 0 \text{ in } \Omega \ \ (i = 1, \ldots, n)\,.$$

□

6.2. Debole continuità dei determinanti. Applicazione a funzionali policonvessi.

Vi sono interessanti sistemi, sia dal punto di vista matematico sia fisico, che vogliamo ora studiare nell'ambito del Calcolo delle Variazioni, e che hanno come energia una Lagrangiana policonvessa.

Teorema 6.2.1 (debole continuità dei determinanti).
Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con frontiera lipschitziana.

(i) *Se $n < m < \infty$,*
$u_h \rightharpoonup u$ *in* $W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; \det \nabla u_h \rightharpoonup \det \nabla u$ *in* $L^{\frac{m}{n}}(\Omega)$.

(ii) *Se $m = \infty$,*
$u_h \overset{*}{\rightharpoonup} u$ *in* $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; \det \nabla u_h \overset{*}{\rightharpoonup} \det \nabla u$ *in* $L^{\infty}(\Omega)$.

Dim. Ci limitiamo a provare il caso (i), poiché per il caso (ii) la dimostrazione è analoga.

1. Ricordiamo innanzitutto che se $p \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vale
$$\det p = \sum_{\alpha=1}^{n} p^i_\alpha \, (\mathrm{cof}\, p)^i_\alpha \qquad (i = 1, \cdots, n).$$
2. Sia ora $w \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $w = (w^1, w^2, \cdots, w^n)$. Allora
$$\det \nabla w = \sum_{\alpha=1}^{n} w^i_{x_\alpha} \, (\mathrm{cof}\, \nabla w)^i_\alpha \qquad (i = 1, \cdots, n), \tag{6.58}$$
e tenuto conto della (6.54) del lemma 6.1.4, (6.58) diventa
$$\det \nabla w = \sum_{\alpha=1}^{n} D_\alpha \left(w^i \, (\mathrm{cof}\, \nabla w)^i_\alpha \right) \qquad (i = 1, \cdots, n), \tag{6.59}$$
cioè, *il determinante della matrice gradiente può scriversi come una divergenza.*
Allora, da (6.59), se $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$ si ha
$$\int_\Omega \varphi \det \nabla w \, dx = - \sum_{\alpha=1}^{n} \int_\Omega \varphi_{x_\alpha} \, w^i \, (\mathrm{cof}\, \nabla w)^i_\alpha \; dx \;\; (i = 1, \cdots, n). \tag{6.60}$$
3. Abbiamo stabilito l'identità (6.60) per $w \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$; allora, con un procedimento di approssimazione abbiamo anche per ogni $h \in \mathbb{N}$:
$$\int_\Omega \varphi \det \nabla u_h \, dx = - \sum_{\alpha=1}^{n} \int_\Omega \varphi_{x_\alpha} \, u^i_h \, (\mathrm{cof}\, \nabla u_h)^i_\alpha \; dx \;\; (i = 1, \cdots, n). \tag{6.61}$$

Ora poiché $n < m$ e $u_h \rightharpoonup u$ in $W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, la successione $\{u_h\}$, per l'immersione continua di Morrey 1.3.5(iii), risulta essere limitata in $C^{0,1-\frac{n}{m}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Per il criterio di compattezza di Ascoli-Arzelà 1.3.13, deduciamo che $u_h \rightrightarrows u$ in Ω.
Dall'identità (6.61) potremo concludere che

$$\begin{aligned} \lim_{h\to+\infty} \int_\Omega \varphi \det \nabla u_h \, dx &= -\sum_{\alpha=1}^{n} \int_\Omega \varphi_{x_\alpha} \, u^i \, (\operatorname{cof} \nabla u)^i_\alpha \, dx \qquad (6.62) \\ &= \int_\Omega \varphi \det \nabla u \, dx, \end{aligned}$$

se proviamo che

$$\lim_{h\to+\infty} \int_\Omega \psi \, (\operatorname{cof} \nabla u_h)^i_\alpha \, dx = \int_\Omega \psi \, (\operatorname{cof} \nabla u)^i_\alpha \, dx \qquad (6.63)$$

per $i, \alpha = 1, \cdots, n$ e per ogni $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$.
Per questo basta osservare che $(\operatorname{cof} \nabla u_h)^i_\alpha$ è il determinante di una matrice $(n-1) \times (n-1)$, che può essere analizzata come prima potendosi scrivere come somma di determinanti di appropriate sottomatrici $(n-2) \times (n-2)$, per fattori uniformemente convergenti. Possiamo continuare e mostrare così l'ovvio fatto che gli elementi delle matrici ∇u_h convergono debolmente ai corrispondenti elementi della matrice ∇u.
In questo modo è verificata la (6.63), e quindi la validità della (6.62).

4. Infine, poiché $\{u_h\}$ è limitata in $W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $|\det \nabla u_h| \le c\,|\nabla u_h|^n$, ne segue che la successione $\{\det \nabla u_h\}$ è limitata in $L^{\frac{m}{n}}(\Omega)$.
Quindi ogni sottosuccessione ha una sottosuccessione debolmente convergente in $L^{\frac{m}{n}}(\Omega)$, che, per la (6.62), può solo convergere al $\det \nabla u$.

□

Utilizziamo il teorema 6.2.1 per provare un risultato di debole semicontinuità inferiore analogo al teorema 3.3.1, assumendo che la funzione F sia una particolare Lagrangiana policonvessa (cfr. Definizione 5.1.13).
Sia $n = N$.

Teorema 6.2.2 (sequenziale debole semicontinuità inferiore per funzionali policonvessi).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato. Sia $n < m < \infty$. Supponiamo che la Lagrangiana $L : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia tale che, posto $r := \det p$,

(i) *$L(x,u,p,r)$, $L_p(x,u,p,r)$ e $L_r(x,u,p,r)$ sono continue;*
(ii) *L è limitata inferiormente;*
(iii) *per ogni fissato $x \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}^n$ la funzione $(p,r) \mapsto L(x,u,p,r)$ è convessa (cioè $F(x,u,p) = L(x,u,p,r)$ è policonvessa).*

Allora il funzionale

$$\mathcal{F}[u] := \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\, dx = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x), \det \nabla u(x))\, dx$$

è seq. deb. s.c.i. in $W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Dim. Sia $\{u_h\}$ una successione tale che $u_h \rightharpoonup u$ in $W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Allora, per il teorema 6.2.1(i), $\det \nabla u_h \rightharpoonup \det \nabla u$ in $L^{\frac{m}{n}}(\Omega)$.
Possiamo ora argomentare quasi esattamente come nella dimostrazione del teorema 3.3.1.
Infatti sia $\Omega' \subset\subset \Omega$ con $\partial\Omega'$ lipschitziana. Per il teorema di Rellich-Kondrachov 1.3.16 possiamo assumere che, a meno di estratte, $u_h \to u$ in $L^1(\Omega', \mathbb{R}^n)$ e quindi anche $u_h \to u$ q.o. in Ω'.
Fissato $\varepsilon > 0$, esiste un compatto $K_\varepsilon \subset \Omega'$ tale che $|\Omega' - K_\varepsilon| < \varepsilon$ e $u_h \rightrightarrows u$ in K_ε (per il teorema di Severini-Egorov 1.1.14), u e ∇u sono continue in K_ε (per il teorema di Lusin 1.1.15); inoltre, per il teorema di assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue, segue che

$$\int_{K_\varepsilon} L(x, u(x), \nabla u(x), \det \nabla u(x))\, dx \geq \int_{\Omega'} L(x, u(x), \nabla u(x), \det \nabla u(x))\, dx - \varepsilon.$$

Inoltre per (iii)

$$\begin{aligned}
&\int_{K_\varepsilon} L(x, u_h(x), \nabla u_h(x), \det \nabla u_h(x))\, dx \geq \\
&\qquad \int_{K_\varepsilon} L(x, u_h(x), \nabla u(x), \det \nabla u(x))\, dx \\
&\quad + \int_{K_\varepsilon} [L_p\,(x, u_h(x), \nabla u(x), \det \nabla u(x))] \cdot (\nabla u_h(x) - \nabla u(x))\ dx \\
&\quad + \int_{K_\varepsilon} [L_r\,(x, u_h(x), \nabla u(x), \det \nabla u(x))] \cdot (\det \nabla u_h(x) - \det \nabla u(x))\ dx.
\end{aligned}$$

Ragionando come nella dimostrazione del teorema 3.3.1, da $u_h \rightharpoonup u$ in $W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $\det \nabla u_h \rightharpoonup \det \nabla u$ in $L^{\frac{m}{n}}(\Omega)$, deduciamo che il limite per $h \to +\infty$ degli ultimi due termini è zero. Ne segue la tesi. □

Con argomentazioni simili a quelle del teorema 3.3.2 possiamo provare il seguente risultato di esistenza.

Teorema 6.2.3 (Esistenza dei minimi per funzionali policonvessi).
Sia $n < m < \infty$*; supponiamo che* $\mathcal{F}[u] = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x), \det \nabla u(x))\, dx$ *sia seq. deb. s.c.i. in* $W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *e che la Lagrangiana* $F(x, u, p) = L(x, u, p, r)$ *(con* $r = \det p$*) soddisfi la condizione di coercività (ii) del teorema 3.3.2.*

Allora esiste il minimo di

$$\mathcal{F}[u] = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x), \det \nabla u(x))\, dx$$

nella classe

$$\mathcal{A}_\varphi = \Big\{ u \in W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^n), \ \ u - \varphi \in W_0^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^n) \Big\}$$

per ogni $\varphi \in W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *con* $\mathcal{F}[\varphi] < +\infty$.

Applicazione (Elasticità non lineare per corpi incomprimibili).
Sia $n = 3$. Consideriamo un corpo elastico che ha inizialmente la configurazione di riferimento Ω.
Sia $u(x) = (u^1(x_1, x_2, x_3), u^2(x_1, x_2, x_3), u^3(x_1, x_2, x_3))$ lo spostamento di Ω e supponiamo che il corpo elastico sia incomprimibile, cioè

$$\det \nabla u = 1.$$

Consideriamo il problema di minimizzare l'energia elastica

$$\mathcal{F}[u] := \int_\Omega F(x, \nabla u(x))\, dx = \int_\Omega L(x, \nabla u(x), \det \nabla u(x))\, dx$$

nella classe

$$\mathcal{A}_\varphi = \Big\{ u \in W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^3), \ \ u - \varphi \in W_0^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^3), \ \ \det \nabla u = 1 \ q.o. \Big\}$$

per $m > 3$, assegnata $\varphi \in W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Teorema 6.2.4 (Minimi con vincolo sul determinante).
Supponiamo che la Lagrangiana $F(x, p) = L(x, p, r)$ *sia di classe* C^1 *e che per ogni fissato* $x \in \Omega$ *la funzione* $(p, r) \mapsto L(x, p, r)$ *sia convessa. Supponiamo inoltre che* L *soddisfi la condizione di coercività (ii) di 3.3.2. Allora esiste il minimo di* $\mathcal{F}[u] = \displaystyle\int_\Omega L(x, \nabla u(x), \det \nabla u(x))\, dx$ *nella classe* $\mathcal{A}_\varphi$.

Dim. Selezioniamo una successione minimizzante in $\mathcal{A}_\varphi$ con $u_{h_j} \rightharpoonup u$ in $W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Poiché, per il teorema 6.2.2,

$$\mathcal{F}[u] \le \liminf_{j \to +\infty} \mathcal{F}[u_{h_j}],$$

resta solo da provare che $u \in \mathcal{A}_\varphi$.

Per il teorema 6.2.1

$$\det \nabla u_{h_j} \rightharpoonup \det \nabla u \qquad \text{in } L^{\frac{m}{3}}(\Omega);$$

ne deduciamo che $\det \nabla u = 1$ q.o. . $\square$

CAPITOLO 7

Metodi diretti: regolarità interna

Dopo il 1900, il XIX problema di Hilbert veniva affrontato dapprima in dimensione 2, ricorrendo a tecniche proprie dell'Analisi complessa:

- S. Bernstein (1904) ha dimostrato che *ogni soluzione di classe* $C^3(\Omega)$ *dell'equazione di Eulero analitica*
$$-D_\alpha F_{p_\alpha}(x,u,\nabla u) + F_u(x,u,\nabla u) = 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{7.64}$$
($n=2, N=1$*) è analitica in* Ω.

  Successivamente
- L. Lichtenstein (1912) ha migliorato il risultato di Bernstein provando che *ogni soluzione di classe* $C^2(\Omega)$ *dell'equazione di Eulero (7.64) (sempre nel caso* $n=2, N=1$*) è di classe* $C^3(\Omega)$ *(e quindi analitica).*

  Qualche anno più tardi
- E. Hopf (1929) ha provato che *ogni soluzione* $C^{1,\sigma}(\Omega)$ *di (7.64) (*$n=2, N=1$*) è di classe* $C^3(\Omega)$ *(e quindi analitica).*

Questi risultati sono stati estesi al caso generale $n \geq 2$ con il contributo di molti autori (per citarne alcuni: Leray-Schauder (1934), Petrowsky (1939), Caccioppoli (1934, 1950-'51), Stampacchia (1952), Morrey (1958), ...).

Negli anni precedenti la seconda guerra mondiale venivano dimostrati risultati di esistenza, relativi cioè al XX problema di Hilbert. Però i metodi diretti forniscono, come visto nei capitoli precedenti, una soluzione di un problema regolare del Calcolo delle Variazioni (e quindi, come vedremo dopo (cfr. teorema 7.3.1), una soluzione dell'equazione di Eulero, nella formulazione debole,
$$\int_\Omega \left[F_{p_\alpha}(x,u,\nabla u)\, D_\alpha v + F_u(x,u,\nabla u)\, v\right] dx = 0 \qquad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)) \tag{7.65}$$
in uno spazio di Sobolev $W^{1,m}(\Omega)$ per qualche $m > 1$.
A tali soluzioni non si poteva applicare il risultato di regolarità, perché esse in generale non sono nemmeno funzioni continue.

Il processo di esistenza-regolarità mostrava così una lacuna.
Per ottenere la regolarità mancava infatti il passo seguente:

$$u \in W^{1,m}, u \text{ SOLUZIONE} \Longrightarrow u \in C^{1,\sigma}. \tag{7.66}$$

Questo anello mancante è stato ottenuto con due risultati fondamentali, in ipotesi di "*crescita naturale*" dell'integrando (vedi (7.111) successivo).
I risultati sono dovuti a Morrey (1938) per $n = 2$ e $N \geq 1$ (cioè relativamente anche a *sistemi* in *due* variabili), ed a De Giorgi (1957) e Nash (1958) nel caso $n \geq 2$ e $N = 1$ (cioè per *equazioni* in un numero arbitrario di variabili).
Il teorema di hölderianità di De Giorgi-Nash-Moser 7.5.6 è ottenuto per $m = 2$. Questo risultato è stato poi ripreso e rivisto alla fine degli anni '60 da molti autori, estendendolo anche per $m \in (1, +\infty)$: ricordiamo Morrey (1966) [**58**], Stampacchia (1966) [**68**], Ladyzhenskaya-Ural'tseva (1968) [**48**], Moser (1960) [**59**].

7.1. Regolarità: il caso scalare.

Qui affrontiamo la prova dell'implicazione (7.66) nel caso scalare $N = 1$.

7.2. Un risultato unidimensionale di Tonelli e fenomeno di Lavrentieff.

E' di Tonelli (1915) il seguente celebre *teorema di esistenza e regolarità parziale.*

Teorema 7.2.1 (Esistenza e regolarità parziale, Tonelli).
Sia $F : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una Lagrangiana soddisfacente le seguenti condizioni:

(i) $F \in C^2([0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$*;*
(ii) $F_{pp}(x,u,p) > 0$ *per ogni* (x,u,p)*;*
(iii) *esistono* $c_1 > 0$*,* $c_2 > 0$*,* $m > 1$ *tali che*

$$F(x,u,p) \geq c_1 \, |p|^m - c_2 \quad \textit{per ogni } (x,u,p).$$

Allora il problema di minimo

$$\min \left\{ \int_0^1 F\,(x, u(x), u'(x))\; dx;\; u \in W^{1,1}((0,1)),\, u(0) = 0,\, u(1) = 1 \right\} \tag{7.67}$$

ha almeno una soluzione u parzialmente regolare, nel senso che esiste un insieme chiuso $E \subset [0,1]$ con $|E| = 0$ tale che $u \in W^{1,\infty}\,((0,1) \setminus E)$.

Con questo risultato Tonelli stabiliva che, per ottenere l'esistenza di un minimo, una appropriata classe di funzioni ammissibili è un sottoinsieme delle funzioni assolutamente continue.
Tonelli, tuttavia, non era riuscito a provare se il suo risultato era ottimale, cioè non era riuscito a dimostrare se $E = \emptyset$ o a dare un esempio in cui $E \neq \emptyset$. Lo stesso Tonelli, durante una conferenza a Mosca, pose il problema di trovare un esmpio in cui $E \neq \emptyset$.
In questo ambito, nel 1926 Lavrentieff osservò che se $E = \emptyset$, allora sussiste l'uguaglianza

$$\begin{aligned} & \inf\left\{\int_0^1 F\left(x, u(x), u'(x)\right)\, dx;\ u \in W^{1,1}((0,1)),\, u(0)=0,\, u(1)=1\right\} \\ = \quad & \inf\left\{\int_0^1 F\left(x, u(x), u'(x)\right)\, dx;\ u \in W^{1,\infty}((0,1)),\, u(0)=0,\, u(1)=1\right\} \end{aligned}$$

(ciò vuol dire che il problema è "insensibile" alla regolarità richiesta alle funzioni ammissibili), e che quindi per esibire un esempio in cui $E \neq \emptyset$ era sufficiente trovare una Lagrangiana F per cui vale la stretta disuguaglianza

$$\begin{aligned} & \inf\left\{\int_0^1 F(x,u(x),u'(x))\,dx;\ u \in W^{1,1}((0,1))\, u(0)=0,\, u(1)=1\right\} \\ < & \inf\left\{\int_0^1 F(x,u(x),u'(x))\,dx;\ u \in W^{1,\infty}((0,1))\, u(0)=0,\, u(1)=1\right\}. \end{aligned} \tag{7.68}$$

Il termine "*fenomeno di Lavrentieff*" si riferisce al sorprendente risultato dimostrato per la prima volta da M. Lavrentieff nel 1926. Egli dimostra che l'integrale variazionale – seq. deb. s.c.i. nella classe delle funzioni ammissibili $W^{1,1}((0,1))$ – di un problema di Lagrange ai limiti può avere un estremo inferiore in $W^{1,\infty}((0,1))$ strettamente maggiore del minimo su tutta la classe ammissibile. In altri termini per opportune Lagrangiane $F = F(x, u(x), u'(x))$ risulta la (7.68). Quindi nel passaggio da un problema ad una sua formulazione debole è doverosa la verifica che la formulazione debole non alteri il valore minimo del problema nella sua formulazione originale.

Osservazione 7.2.2. E' interessante notare che se si utilizzano i metodi degli elementi finiti (prendendo funzioni affini a tratti, che sono in $W^{1,\infty}((0,1))$) il verificarsi della stretta diseguaglianza (7.68) impedisce il raggiungimento del minimo. Quindi il fenomeno di Lavrentieff costituisce un ostacolo serio per gli schemi numerici di minimizzazione.
Il fenomeno di Lavrentieff mostra in definitiva quanto sia delicata la scelta della classe delle funzioni ammissibili.

Presentiamo ora un esempio (dovuto essenzialmente a B. Manià, 1934 [**52**]) in cui si manifesta il fenomeno di Lavrentieff.

TEOREMA 7.2.3 ([**16**]). *Sia* $F(x,u,p) = \left(x-u^3\right)^2 p^6$ *e sia* $\mathcal{F}[u] := \int_0^1 F(x,u(x),u'(x))\,dx$. *Siano* [1]

$$\mathcal{A}^1 = \left\{u \in W^{1,1}((0,1));\ u(0)=0,\ u(1)=1\right\},$$
$$\mathcal{A}^\infty = \left\{u \in W^{1,\infty}((0,1));\ u(0)=0,\ u(1)=1\right\}$$

allora

$$\inf\left\{\mathcal{F}[u];\ u\in\mathcal{A}^\infty\right\} \geq \frac{7^2\cdot 3^5}{2^{18}\cdot 5^5} = c_0 > 0 = \inf\left\{\mathcal{F}[u];\ u\in\mathcal{A}^1\right\}.$$

Inoltre il minimo di $\mathcal{F}[\cdot]$ *su* $\mathcal{A}^1$ *è dato da* $u(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

Alla dimostrazione del precedente teorema premettiamo il seguente risultato.

LEMMA 7.2.4. *Siano* $0<\alpha<\beta<1$ *e sia*

$$\mathcal{A} = \left\{u \in W^{1,\infty}((\alpha,\beta));\ \frac{1}{4}x^{\frac{1}{3}} \leq u(x) \leq \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}\ \forall x\in[\alpha,\beta],\ u(\alpha)=\frac{1}{4}\alpha^{\frac{1}{3}},\ u(\beta)=\frac{1}{2}\beta^{\frac{1}{3}}\right\}.$$

Se $F(x,u,p) := \left(x-u^3\right)^2 p^6$ *e* $\mathcal{G}[u] := \int_\alpha^\beta F(x,u(x),u'(x))\,dx$, *allora* $\mathcal{G}[u] \geq \frac{c_0}{\beta}$ *per ogni* $u\in\mathcal{A}$, *dove* $c_0 = \frac{7^2\cdot 3^5}{2^{18}\cdot 5^5}$.

DIM. Da $u(x) \leq \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}$ segue che

$$1-\frac{u^3(x)}{x} \geq 1-\frac{1}{x}\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{2}\right)^3 = \frac{7}{2^3} \quad \text{per ogni } x\in[\alpha,\beta].$$

Allora risulta

$$\mathcal{G}[u] = \int_\alpha^\beta x^2\left(1-\frac{u^3(x)}{x}\right)^2 \left(u'(x)\right)^6\,dx \geq \frac{7^2}{2^6}\int_\alpha^\beta x^2\left(u'(x)\right)^6\,dx. \quad (7.69)$$

Sia ora $y = x^{\frac{3}{5}}$, allora $u(x) = \overline{u}(y) = \overline{u}(x^{\frac{3}{5}})$; pertanto

$$u'(x) = \overline{u}'(y)\frac{dy}{dx} = \frac{3}{5}\overline{u}'(y)x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}\overline{u}'(y)y^{-\frac{2}{3}}.$$

Sostituendo in (7.69) abbiamo

$$\mathcal{G}[u] \geq \frac{7^2}{2^6}\int_{\alpha^{\frac{3}{5}}}^{\beta^{\frac{3}{5}}} y^{\frac{10}{3}}\left(\frac{3}{5}\overline{u}'(y)y^{-\frac{2}{3}}\right)^6\cdot\left(\frac{5}{3}y^{\frac{2}{3}}\right)dy = \frac{7^2\cdot 3^5}{2^6\cdot 5^5}\int_{\alpha^{\frac{3}{5}}}^{\beta^{\frac{3}{5}}}\left(\overline{u}'(y)\right)^6\,dy.$$

[1] $\mathcal{A}^1$ è l'insieme delle funzioni u assolutamente continue in $(0,1)$ soddisfacenti $u(0)=0$, $u(1)=1$, mentre $\mathcal{A}^\infty$ è l'insieme delle funzioni Lipschitziane in $(0,1)$ soddisfacenti le stesse condizioni ai limiti.

Applicando la disuguaglianza di Jensen (1.12) all'integrale a destra otteniamo

$$\begin{aligned}\mathcal{G}[u] \quad &\geq \quad \frac{7^2 \cdot 3^5}{2^6 \cdot 5^5} \cdot \frac{\left(\overline{u}(\beta^{\frac{3}{5}}) - \overline{u}(\alpha^{\frac{3}{5}})\right)^6}{\left(\beta^{\frac{3}{5}} - \alpha^{\frac{3}{5}}\right)^5} = \frac{7^2 \cdot 3^5}{2^6 \cdot 5^5} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\beta^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\alpha^{\frac{1}{3}}\right)^6}{\left(\beta^{\frac{3}{5}} - \alpha^{\frac{3}{5}}\right)^5} \\ &= \quad \frac{7^2 \cdot 3^5}{2^{12} \cdot 5^5} \cdot \frac{\beta^2}{\beta^3} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^6}{\left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{3}{5}}\right)^5}. \qquad (7.70)\end{aligned}$$

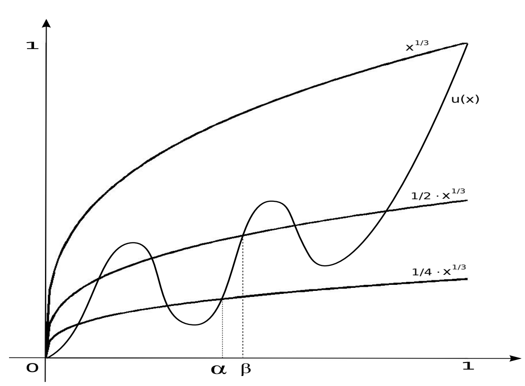
Osserviamo infine che poiché $0 < \alpha < \beta < 1$, abbiamo

$$\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^6 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^6 \quad \text{e} \quad \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{3}{5}}\right)^{-5} \geq 1. \qquad (7.71)$$

Da (7.70) e (7.71) segue la tesi. □

Dim. [teorema 7.2.3] Cominciamo col provare che se $u \in \mathcal{A}^\infty$ allora esistono $0 < \alpha < \beta < 1$ tali che $u \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ come nel lemma 7.2.4), cioè

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4}x^{\frac{1}{3}} \leq u(x) \leq \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{3}} & \text{per ogni } x \in [\alpha, \beta] \\ u(\alpha) = \frac{1}{4}\alpha^{\frac{1}{3}}, \; u(\beta) = \frac{1}{2}\beta^{\frac{1}{3}}. \end{cases} \qquad (7.72)$$



Siano

$$A = \left\{ a \in (0,1);\ u(a) = \frac{1}{4} a^{\frac{1}{3}} \right\}$$
$$B = \left\{ b \in (0,1);\ u(b) = \frac{1}{2} b^{\frac{1}{3}} \right\}.$$

Poiché u è Lipschitziana, $u(0) = 0$ e $u(1) = 1$, necessariamente $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$.
Scegliamo per esempio

$$\alpha = \max \{a;\ a \in A\}$$

e

$$\beta = \min \{b;\ b \in B,\, b > \alpha\}.$$

Chiaramente α e β soddisfano le condizioni (7.72).
Allora, usando il lemma 7.2.4, deduciamo che per $u \in \mathcal{A}^1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u] &= \int_0^1 \left(x - u^3(x)\right)^2 (u'(x))^6 \, dx \geq \int_\alpha^\beta \left(x - u^3(x)\right)^2 (u'(x))^6 \, dx \\ &\geq \frac{c_0}{\beta} > c_0 > 0. \end{aligned}$$

Infine che $u(x) = x^{\frac{1}{3}}$ sia il minimo di $\mathcal{F}[\cdot]$ su $\mathcal{A}^1$ è immediato, poiché $\mathcal{F}[u] \geq 0$ per ogni $u \in \mathcal{A}^1$ e $\mathcal{F}\left[x^{\frac{1}{3}}\right] = 0$. □

Osservazione 7.2.5 ([**11**]). La Lagrangiana $F(x,u,p) := \left(x - u^3\right)^2 p^6$ del teorema 7.2.3 non è genuinamente sopralineare e degenera per $u(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Ma non è questo che determina il fenomeno di Lavrentieff.
Infatti, osserviamo che se $1 < m < \dfrac{3}{2}$ allora $x^{\frac{1}{3}} \in W^{1,m}((0,1))$, pertanto esiste $\eta > 0$ tale che

$$\eta \int_0^1 \left| D\, x^{\frac{1}{3}} \right|^m dx < c_0 \quad (c_0 \text{ è la costante definita nel teorema 7.2.3}).$$

Sia $\mathcal{F}_1[u] := \displaystyle\int_0^1 \left[\left(x - u^3\right)^2 u'^6 + \eta \left|u'\right|^m \right] dx$; allora l'integrando $F_1(x,u,p)$ di $\mathcal{F}_1$ è ora non degenere, convesso in p e soddisfa
$\eta \left|p\right|^m \leq F_1(x,u,p) \leq c_1 \left|p\right|^6 + c_2$.
Ovviamente $\mathcal{F}_1[u] > c_0$ per ogni $u \in \mathcal{A}^\infty$, mentre $\mathcal{F}_1[u_0] < c_0$ per $u_0(x) = x^{\frac{1}{3}}$, cioè vale la relazione

$$\inf \left\{\mathcal{F}_1[u];\ u \in \mathcal{A}^1\right\} < \inf \left\{\mathcal{F}_1[u];\ u \in \mathcal{A}^\infty\right\}.$$

Pertanto, anche in questa circostanza, si presenta il fenomeno di Lavrentieff.

Osservazione 7.2.6. Il fenomeno di Lavrentieff non è raro, si presenta e.g. anche nell'ambito della elasticità non lineare, pertanto conviene inquadrare questo fenomeno in termini generali.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato e siano $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$ una assegnata Lagrangiana e $\mathcal{F} : W^{1,1}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right) \to \mathbb{R}$ il funzionale definito da

$$\mathcal{F}[u] := \int_\Omega F\left(x, u(x), \nabla u(x)\right)\, dx.$$

Sia $\mathcal{A}$ un prescritto (da condizioni di Dirichlet o altre condizioni) sottoinsieme di $W^{1,1}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$.
Per ogni $m \in [1, +\infty]$, definiamo la classe delle funzioni ammissibili

$$\mathcal{A}^m := \mathcal{A} \cap W^{1,m}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right).$$

Evidentemente se m cresce le funzioni in $\mathcal{A}^m$ risultano più regolari.
Considerato il problema

$$\inf_{u\in\mathcal{A}^m} \mathcal{F}[u],$$

l'estremo inferiore è non-decrescente rispetto ad m.
Per molti problemi l'estremo inferiore non è influenzato dal valore di m.
Nel caso in cui

$$\inf_{u\in\mathcal{A}^1} \mathcal{F}[u] < \inf_{u\in\mathcal{A}^\infty} \mathcal{F}[u],$$

cioè se si verifica la dipendenza da m, allora diremo che il problema variazionale presenta il fenomeno di Lavrentieff.
Questo fenomeno in definitiva è ascrivibile alla "sensibilità" dell'estremo inferiore di un problema variazionale rispetto alla regolarità richiesta alle funzioni ammissibili.

7.3. Soluzioni deboli dell'equazione di Eulero e derivate seconde per i minimi.

Per dare un'idea del problema della regolarità (quindi della dimostrazione dell'implicazione (7.66)) supponiamo, per semplicità, che *la Lagrangiana* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dipenda solo da* p *e sia di classe* C^2. Inoltre assumiamo che *il funzionale regolare* $\mathcal{F}[u] := \int_\Omega F(\nabla u(x))\, dx$ *sia quadratico*, cioè tale che per ogni $p \in \mathbb{R}^n$

$$|F(p)| \leq c_0\, |p|^2\,, \tag{7.73}$$

$$|F_p(p)| \leq c_1\, |p|\,, \tag{7.74}$$

$$|F_{pp}(p)| \leq c_2, \tag{7.75}$$

con c_0, c_1, c_2 costanti positive.
In questo caso il teorema 4.5.1 dà il seguente risultato di esistenza per il problema di Dirichlet.
Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ e sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una Lagrangiana tale che il funzionale $\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(\nabla u(x))\, dx$ sia seq. deb. s.c.i. in $W^{1,2}(\Omega)$.
Sia inoltre $F(p) \geq c|p|^2$ (cioè $F(p)$ ha crescita superlineare per $|p| \to +\infty$).

Allora, per ogni $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ con $\mathcal{F}[\varphi] < +\infty$, esiste il minimo di $\mathcal{F}[u]$ nella classe
$$\mathcal{A}_\varphi = \left\{ v \in W^{1,2}(\Omega), \;\; v - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \right\}.$$
In realtà dimostreremo che per ogni minimo $u \in \mathcal{A}_\varphi$ di $\mathcal{F}[\cdot]$ abbiamo

(i) u è una soluzione debole dell'equazione di Eulero
$$D_\alpha F_{p_\alpha}(\nabla u(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{7.76}$$
cioè
$$\int_\Omega F_{p_\alpha}(\nabla u(x))\, D_\alpha v(x)\, dx = 0 \quad \text{per ogni } v \in W_0^{1,2}(\Omega) \tag{7.77}$$
(cfr. teorema 7.3.1 successivo);

inoltre (cfr. teorema 7.3.5 successivo)

(ii) u appartiene allo spazio $W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Teorema 7.3.1 (Soluzione debole dell'equazione di Eulero). *Supponiamo che F verifichi le condizioni di crescita (7.73) e (7.74) e che $u \in \mathcal{A}_\varphi$ soddisfi $\mathcal{F}[u] = \min\limits_{w \in \mathcal{A}_\varphi} \mathcal{F}[w]$; allora u è una soluzione debole dell'equazione di Eulero*
$$D_\alpha F_{p_\alpha}(\nabla u(x)) = 0 \quad \textit{in } \Omega, \tag{7.78}$$
cioè verifica
$$\int_\Omega F_{p_\alpha}(\nabla u(x))\, D_\alpha v(x)\, dx = 0 \quad \textit{per ogni } v \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{7.79}$$

Dim. Procediamo come nella dimostrazione della proposizione 2.2.1 facendo attenzione alla differeziazione sotto il segno di integrale.
Siano $t \in \mathbb{R}$ e $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Consideriamo la funzione $u + tv \in \mathcal{A}_\varphi$.
Per la (7.73) $\mathcal{F}[u + tv] < +\infty$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Sia $t \neq 0$ e consideriamo
$$\frac{\mathcal{F}[u+tv] - \mathcal{F}[u]}{t} = \int_\Omega \frac{F(\nabla u(x) + t\nabla v(x)) - F(\nabla u(x))}{t}\, dx. \tag{7.80}$$
Osserviamo che
$$\lim_{t \to 0} \frac{F(\nabla u(x) + t\nabla v(x)) - F(\nabla u(x))}{t} = F_{p_\alpha}(\nabla u(x)) D_\alpha v(x) \tag{7.81}$$
per q.o. $x \in \Omega$.
Inoltre
$$\begin{aligned} \frac{F(\nabla u(x) + t\nabla v(x)) - F(\nabla u(x))}{t} &= \frac{1}{t} \int_0^t \frac{d}{d\, s} F(\nabla u(x) + s\nabla v(x))\, ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t F_{p_\alpha}(\nabla u(x) + s\nabla v(x))\, D_\alpha v(x)\, ds. \end{aligned}$$

Poiché $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$, la (7.74) e la disuguaglianza $a \cdot b \leq \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$ implicano che

$$\left| \frac{F(\nabla u(x) + t\nabla v(x)) - F(\nabla u(x))}{t} \right| \leq c(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) \in L^1(\Omega)$$

per ogni $t \neq 0$.

Di conseguenza, per il teorema della convergenza dominata 1.1.11 da (7.80) e (7.81) concludiamo che $\dfrac{d}{dt}\mathcal{F}[u+tv]\Big|_{t=0}$ esiste ed è uguale a
$\displaystyle\int_\Omega F_{p_\alpha}(\nabla u(x))\, D_\alpha v(x)\, dx$.
Ma allora, poiché $\mathcal{F}[u+tv]$ ha minimo per $t = 0$, abbiamo
$\dfrac{d}{dt}\mathcal{F}[u+tv]\Big|_{t=0} = 0$, e così u è una soluzione debole di (7.78). □

Osserviamo che il risultato precedente non segue dalla proposizione 2.2.1 poiché non sappiamo che u è regolare, ma soltanto che $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Per questo occorrono le condizioni (7.73) e (7.74) di crescita su F e sulle sue derivate prime.

Osservazione 7.3.2. In generale, l'equazione di Eulero (7.79) può avere altre soluzioni che non corrispondono a minimi di $\mathcal{F}[\cdot]$. Tuttavia:
Se $p \mapsto F(p)$ è convessa allora ogni soluzione debole di (7.78) *è un minimo di $\mathcal{F}[\cdot]$.*

Dim. Sia $u \in \mathcal{A}_\varphi$ una soluzione debole di (7.78) e sia $w \in \mathcal{A}_\varphi$. Allora per la convessità di $p \mapsto F(p)$, abbiamo

$$F(q) \geq F(p) + F_p(p)(q-p) \qquad \forall p, q \in \mathbb{R}^n.$$

Sia $p = \nabla u(x)$ e $q = \nabla w(x)$ e integriamo su Ω, allora

$$\mathcal{F}[w] \geq \mathcal{F}[u] + \int_\Omega F_p(\nabla u(x))(\nabla w(x) - \nabla u(x))\, dx.$$

Per la (7.79) risulta

$$\int_\Omega F_p(\nabla u(x))(\nabla w(x) - \nabla u(x))\, dx = 0,$$

per cui $\mathcal{F}[u] \leq \mathcal{F}[w]$ per ogni $w \in \mathcal{A}_\varphi$. □

Osservazione 7.3.3. Nel caso dell'integrale di Dirichlet, l'equazione di Eulero nella formulazione debole (7.79) è

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx = 0 \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega)\,. \tag{7.82}$$

Introduciamo, ora, il metodo dei quozienti differenziali dovuto a Nirenberg, che utilizzeremo per dimostrare un importante risultato (teorema 7.3.5).
Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione localmente sommabile e sia $\Omega' \subset\subset \Omega$.
Definiamo *rapporto incrementale* (o *quoziente differenziale*) parziale di incremento r rispetto a x_γ

$$D_\gamma^r u(x) := \frac{u(x + r\, e_\gamma) - u(x)}{r} \quad (\gamma = 1, \dots, n)$$

per $x \in \Omega'$, $0 < |r| < \text{dist}\,(\Omega', \partial\Omega)$ con $e_\gamma = (0, \dots, 0, \overset{\overset{\gamma}{\uparrow}}{1}, 0, \dots, 0)$;
poniamo $D^r u = (D_1^r u, \dots, D_n^r u)$.

Sussiste il seguente risultato che caratterizza per $1 < m < \infty$ lo spazio di Sobolev $W^{1,m}(\Omega)$:

Teorema 7.3.4 (Rapporti incrementali e derivate deboli).

(i) *Sia $1 \le m < \infty$ e sia $u \in W^{1,m}(\Omega)$.*
Allora

$$\forall \Omega' \subset\subset \Omega \quad \|D^r u\|_{L^m(\Omega', \mathbb{R}^n)} \le c\, \|\nabla u\|_{L^m(\Omega, \mathbb{R}^n)} \quad (c > 0)$$

per ogni $0 < |r| < \frac{1}{2}$ dist $(\Omega', \partial\Omega)$.

(ii) *Sia $1 < m < \infty$, $u \in L^m(\Omega')$, e supponiamo che esista una costante c tale che $\|D^r u\|_{L^m(\Omega', \mathbb{R}^n)} \le c$ per ogni $0 < |r| < \frac{1}{2}$ dist $(\Omega', \partial\Omega)$.*
Allora $u \in W^{1,m}(\Omega')$ con $\|\nabla u\|_{L^m(\Omega', \mathbb{R}^n)} \le c$.

Osserviamo che (ii) è falsa per $m = 1$.

Dim.

(i) Sia $1 \le m < \infty$ e supponiamo dapprima che u sia di classe $C^1(\Omega)$. Allora per ogni $x \in \Omega'$, $\gamma = 1, \dots, n$ e $0 < |r| < \frac{1}{2}\text{dist}\,(\Omega', \partial\Omega)$, abbiamo

$$u(x + re_\gamma) - u(x) = \int_0^1 D_\gamma u(x + tre_\gamma)\, dt \cdot re_\gamma;$$

sicché

$$|u(x + re_\gamma) - u(x)| \le |r| \int_0^1 |\nabla u(x + tre_\gamma)|\, dt.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}\int_{\Omega'} |D^r u(x)|^m\, dx &\leq c\sum_{\gamma=1}^{n}\int_{\Omega'}\left(\int_0^1 |\nabla u(x+tre_\gamma)|^m\, dt\right) dx\\ &= c\sum_{\gamma=1}^{n}\int_0^1\left(\int_{\Omega'} |\nabla u(x+tre_\gamma)|^m\, dx\right) dt.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_{\Omega'} |D^r u(x)|^m\, dx \leq c\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^m\, dx$$

cioè

$$\|D^r u\|_{L^m(\Omega',\mathbb{R}^n)} \leq c\, \|\nabla u\|_{L^m(\Omega,\mathbb{R}^n)}\, .$$

Questa stima vale per $u \in C^1(\Omega)$, e quindi è valida, per approssimazione, per $u \in W^{1,m}(\Omega)$.

(ii) Supponiamo ora che valga

$$\|D^r u\|_{L^m(\Omega',\mathbb{R}^n)} \leq c \tag{7.83}$$

per ogni $0 < |r| < \frac{1}{2}\text{dist}\,(\Omega', \partial\Omega)$.
Sia $\gamma = 1, \ldots, n$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$; osserviamo che per r sufficientemente piccolo

$$\int_{\Omega'} u(x)\left[\frac{\varphi(x+re_\gamma)-\varphi(x)}{r}\right] dx = -\int_{\Omega'}\left[\frac{u(x)-u(x-re_\gamma)}{r}\right]\varphi(x)\, dx,$$

cioè

$$\int_{\Omega'} u(x)\left(D_\gamma^r\varphi(x)\right)\, dx = -\int_{\Omega'}\left(D_\gamma^{-r}u(x)\right)\varphi(x)\, dx. \tag{7.84}$$

Questa è la *formula "di integrazione per parti" per i rapporti incrementali (quozienti differenziali)*.
L'ipotesi (7.83) implica

$$\sup_r ||D_\gamma^{-r}u||_{L^m(\Omega')} < +\infty;$$

e, pertanto, poiché $1 < m < \infty$, esiste una funzione $v_\gamma \in L^m(\Omega')$ (spazio riflessivo) e una sottosuccessione $r_h \to 0$ tale che

$$D_\gamma^{-r_h}u \rightharpoonup v_\gamma \qquad \text{in } L^m(\Omega'). \tag{7.85}$$

Ma allora

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'} u\, D_\gamma \varphi\, dx &= \int_\Omega u\, D_\gamma \varphi\, dx \\
&= \lim_{r_h \to 0} \int_\Omega u\, D_\gamma^{r_h} \varphi\, dx \\
&\overset{\text{per (7.84)}}{=} -\lim_{r_h \to 0} \int_{\Omega'} D_\gamma^{-r_h} u\, \varphi\, dx \\
&= -\int_{\Omega'} v_\gamma\, \varphi\, dx = -\int_\Omega v_\gamma\, \varphi\, dx.
\end{aligned}$$

Pertanto $v_\gamma = D_\gamma u$ in senso debole ($\gamma = 1, \dots, n$) e così $\nabla u \in L^m(\Omega', \mathbb{R}^n)$. Poiché $u \in L^m(\Omega')$, deduciamo che $u \in W^{1,m}(\Omega')$. Infine osserviamo che

$$\|D_\gamma u\|_{L^m(\Omega', \mathbb{R}^n)} \leq \liminf_{r_h \to 0} \left\|D_\gamma^{-r_h} u\right\|_{L^m(\Omega')} \leq \text{cost.}$$

□

Teorema 7.3.5 (Derivate seconde per i minimi).
Sia $u \in W^{1,2}(\Omega)$ una soluzione debole di (7.78), con F che soddisfa la (7.75) ed uniformemente convessa, cioè

$$\exists \theta > 0: \quad F_{p_\alpha\, p_\beta}(p) \xi_\alpha\, \xi_\beta \geq \theta |\xi|^2, \quad (p, \xi \in \mathbb{R}^n). \tag{7.86}$$

Allora $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$ e fissato $\gamma \in \{1, \dots, n\}$ e un aperto $\Omega' \subset\subset \Omega$, $\widetilde{u} := D_\gamma u$ è una soluzione debole dell'equazione lineare, ellittica del secondo ordine in forma di divergenza

$$D_\alpha (A_{\alpha\,\beta}(x)\, D_\beta \widetilde{u}(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega' \tag{7.87}$$

con

$$A_{\alpha\,\beta} := F_{p_\alpha\, p_\beta}(\nabla u) \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n). \tag{7.88}$$

Dim. Fissiamo un aperto $\Omega' \subset \subset \Omega$ e sia Ω'' un aperto tale che $\Omega' \subset \subset \Omega'' \subset \subset \Omega$. Sia $\zeta \in C^\infty$ una funzione di taglio tale che

$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 & \text{su } \Omega' \\ \zeta \equiv 0 & \text{su } \mathbb{R}^n \setminus \Omega'' \\ 0 \leq \zeta \leq 1 & \text{su } \Omega'' \setminus \Omega'. \end{cases}$$

Sia $|r| > 0$ sufficientemente piccolo, sia $\gamma \in \{1, \dots, n\}$ e sostituiamo $v := D_\gamma^{-r}(\zeta^2\, D_\gamma^r u)$ nell'equazione (7.79).
Usando l'identità

$$\int_\Omega u\, D_\gamma^{-r} v\, dx = -\int_\Omega v\, D_\gamma^r u\, dx,$$

e il fatto che il quoziente differenziale di una derivata è la derivata del quoziente differenziale (i.e. $D^r_\gamma\,(D_\alpha v) = D_\alpha\left(D^r_\gamma v\right)$), deduciamo

$$\int_\Omega D^r_\gamma F_{p_\alpha}(\nabla u(x))\, D_\alpha(\zeta^2\, D^r_\gamma u)\, dx = 0. \tag{7.89}$$

Ora

$$\begin{aligned} & D^r_\gamma F_{p_\alpha}\,(\nabla u(x)) = \frac{F_{p_\alpha}(\nabla u(x + re_\gamma)) - F_{p_\alpha}(\nabla u(x))}{r} \qquad (7.90)\\ = \; & \frac{1}{r}\int_0^1 \frac{d}{d\,s} F_{p_\alpha}(s\nabla u(x + re_\gamma) + (1-s)\nabla u(x))\, ds \\ = \; & \frac{1}{r}\int_0^1 \left[F_{p_\alpha p_\beta}(s\nabla u(x + re_\gamma) + (1-s)\nabla u(x))\right]\, ds \\ & \cdot\left[D_\beta u(x + re_\gamma) - D_\beta u(x)\right] \\ = \; & a^r_{\alpha\,\beta}(x)\, D^r_\gamma D_\beta u(x), \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$a^r_{\alpha\beta}(x) := \int_0^1 \left[F_{p_\alpha p_\beta}(s\nabla u(x + re_\gamma) + (1-s)\nabla u(x))\right]\, ds \tag{7.91}$$

$(\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$.
Sostituendo (7.90) in (7.89), e tenuto conto che
$D_\alpha(\zeta^2\, D^r_\gamma u) = \zeta^2\, D^r_\gamma\, D_\alpha u + 2\zeta\, D_\alpha\zeta\, D^r_\gamma u$, abbiamo

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 \;\; := \;\; & \int_\Omega \zeta^2(x)\, a^r_{\alpha\,\beta}(x)\, D^r_\gamma\,(D_\beta u(x))\, D^r_\gamma\,(D_\alpha u(x))\; dx \qquad (7.92)\\ + \;\; & \int_\Omega 2\zeta(x)\, a^r_{\alpha\beta}(x)\, D_\alpha\zeta(x) D^r_\gamma\,(D_\beta u(x))\, D^r_\gamma u(x)\, dx = 0. \end{aligned}$$

Per l'ipotesi (7.86) di uniforme convessità abbiamo

$$A_1 \geq \theta \int_\Omega \zeta^2(x)\left|D^r_\gamma \nabla u(x)\right|^2\; dx. \tag{7.93}$$

Inoltre per l'ipotesi (7.75) abbiamo, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} |A_2| \;\; \leq \;\; & \mathrm{c}\int_{\Omega''} \zeta(x)\left|D^r_\gamma\nabla u(x)\right| \cdot \left|D^r_\gamma u(x)\right|\; dx \qquad (7.94)\\ \leq \;\; & \varepsilon \int_{\Omega''} \zeta^2(x)\, |D^r_\gamma \nabla u(x)|^2\, dx + \frac{\mathrm{c}}{\varepsilon}\int_{\Omega''} |D^r_\gamma u(x)|^2\, dx. \end{aligned}$$

Sia $\varepsilon = \dfrac{\theta}{4}$; allora da (7.93) e (7.94) abbiamo

$$\begin{aligned} & \theta\int_\Omega \zeta^2(x)\left|D^r_\gamma \nabla u(x)\right|^2\; dx - \frac{\theta}{4}\int_{\Omega''} \zeta^2(x)\left|D^r_\gamma \nabla u(x)\right|^2\; dx \\ & -\frac{4c}{\theta}\int_{\Omega''} |D^r_\gamma u(x)|^2\, dx \leq A_1 + A_2 = 0 \end{aligned}$$

per (7.92), e quindi

$$\int_\Omega \zeta^2(x)\left|D_\gamma^r \nabla u(x)\right|^2 \, dx \le c \int_{\Omega''} \left|D_\gamma^r u(x)\right|^2 \, dx.$$

Poiché $\zeta \equiv 1$ su Ω'

$$\int_{\Omega'} \left|D_\gamma^r \nabla u(x)\right|^2 \, dx \le c \int_{\Omega''} \left|D_\gamma^r u(x)\right|^2 \, dx \le c \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx$$

per $\gamma = 1, \ldots, n$ e per ogni $|r| > 0$ sufficientemente piccolo (l'ultima disuguaglianza è valida per il teorema 7.3.4(i)).
Di conseguenza il teorema 7.3.4(ii) implica $\nabla u \in W^{1,2}(\Omega')$ e quindi $u \in W^{2,2}(\Omega')$ per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$; pertanto $u \in W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.
Sia $w \in C_0^\infty(\Omega)$, fissiamo $\gamma \in \{1, \ldots, n\}$ e poniamo $v = D_\gamma w$ in (7.79). Allora risulta

$$\int_\Omega F_{p_\alpha}(\nabla u(x)) D_\alpha D_\gamma w(x) \, dx = 0.$$

Poiché $u \in W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, possiamo integrare per parti e ottenere

$$\int_\Omega F_{p_\alpha \, p_\beta}(\nabla u(x)) D_\beta(D_\gamma u(x)) D_\alpha w(x) \, dx = 0. \tag{7.95}$$

Poniamo

$$\widetilde{u} := D_\gamma u, \tag{7.96}$$

$$A_{\alpha\,\beta} := F_{p_\alpha \, p_\beta}(\nabla u) \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n), \tag{7.97}$$

e fissiamo un aperto $\Omega' \subset\subset \Omega$.
Allora, per densità, da (7.95), (7.96) e (7.97) otteniamo

$$\int_\Omega A_{\alpha\,\beta}(x)\, D_\beta \widetilde{u}(x)\, D_\alpha w(x) \, dx = 0 \quad \text{per ogni } w \in W_0^{1,2}(\Omega'), \tag{7.98}$$

cioè $\widetilde{u} \in W^{1,2}(\Omega')$ è una soluzione debole dell'equazione <u>lineare</u>, ellittica del secondo ordine in forma di divergenza

$$D_\alpha(A_{\alpha\,\beta}(x)\, D_\beta \widetilde{u}(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega'. \tag{7.99}$$

□

7.4. Caso modello multidimensionale: integrale di Dirichlet e lemma di Caccioppoli-Weyl.

In questa sezione, sospendiamo lo studio della regolarità posto in 7.3 per illustrare il risultato classico relativo alla regolarità interna della soluzione debole del Principio di Dirichlet (cfr. osservazione 3.3.4).

Come già visto nell'osservazione 7.3.3, per l'integale di Dirichlet
$D[u] := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx$, il minimo $u \in \mathcal{A}_\varphi$ soddisfa

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{7.100}$$

Proviamo che $u \in C^\infty(\Omega)$, e u soddisfa

$$\Delta u(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Sussiste il seguente risultato [2]

Teorema 7.4.1 (Lemma di Caccioppoli, 1937 [**12**]- Weyl, 1940 [**74**]).

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ t.c.

$$\int_\Omega u(x)\Delta v(x)\, dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega) \tag{7.101}$$

Allora u è (equivalente ad una funzione) armonica in Ω e $u \in C^\infty(\Omega)$.

Osservazione 7.4.2. Una soluzione della (7.100) soddisfa (7.101).

Dim. [del teorema 7.4.1 nell'ipotesi che $u \in L^1(\Omega)$] Consideriamo la regolarizzata di u di parametro $h \in \mathbb{N}$

$$u_h(x) = h^n \int_\Omega \rho\,(h\,|x-y|)\, u(y)\, dy.$$

Fissata $v \in C_0^\infty(\Omega)$, scegliamo h sufficientemente grande da verificare
dist $(\mathrm{supp} v, \partial\Omega) > \frac{1}{h}$. Risulta:

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_h(x)\Delta v(x)\, dx &= \int_\Omega \left[h^n \int_\Omega \rho\,(h\,|x-y|)\, u(y)\, dy\right] \Delta v(x)\, dx \\ &= \int_\Omega u(y)\Delta v_h(y)\, dy\end{aligned} \tag{7.102}$$

per il teorema di Fubini 1.1.12 ($v_h(y) = h^n \int_\Omega \rho\,(h\,|x-y|)\, v(x)\, dx$).
Applicando l'ipotesi (7.101) a $v_h \in C_0^\infty(\Omega)$ (per la scelta fatta su h):

$$\int_\Omega u_h(x)\Delta v(x)\, dx = 0. \tag{7.103}$$

Allora $u_h \in C^\infty(\Omega_h)$, $\Omega_h := \left\{x \in \Omega | \text{dist}\,(x, \partial\Omega) > \frac{1}{h}\right\}$ e pertanto da (7.103) risulta:

$$\Delta u_h = 0 \ \text{ in } \ \Omega_h.$$

[2] Nel lavoro [**12**] del 1937 è dimostrato per la prima volta (cfr. [**56**] pag. 122) il teorema sull'armonicità delle funzioni ortogonali a tutti i laplaciani.

Inoltre

$$\int_{\Omega_h} |u_h(y)|\ dy \leq \int_{\Omega_h} \left[h^n \int_{\Omega} \rho\left(h\,|x-y|\right) |u(x)|\ dx \right] dy$$
$$\leq \int_{\Omega} |u(x)|\ dx < \infty$$

per il teorema di Fubini 1.1.12, usando

$$h^n \int_{\Omega} \rho\left(h\,|x-y|\right)\ dy = 1$$

e ricordando che $u \in L^1(\Omega)$. Quindi, $\{u_h\}$ è uniformemente limitata in L^1. In quanto armoniche le u_h soddisfano la proprietà di uguaglianza del valor medio. Inoltre, poiché la $\{u_h\}$ è limitata in L^1, da

$$u_h(x^0) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x^0)} u_h(x)\, dx$$

ricaviamo che $u_h(x^0)$ è limitata per R fissato tale che $B_R(x^0) \subset \Omega_h$. Pertanto $\{u_h\}$ è uniformemente limitata in Ω_{h_0} per $h \geq 2h_0$. Inoltre, dalla proprietà del valor medio 1.7.3 segue direttamente che, se $B_R(x'), B_R(x'') \subset \Omega_{h_0}$:

$$|u_h(x') - u_h(x'')| \leq c(R) \int_{\{B_R(x') \setminus B_R(x'')\} \cup \{B_R(x'') \setminus B_R(x')\}} |u_h(x)|\ dx.$$
$$\leq c(R)\,|x' - x''|$$

Pertanto $\{\nabla u_h\}$ è uniformemente limitata in Ω_{h_0}; e, analogamente, tutte le derivate di ogni ordine delle u_h, in quanto funzioni armoniche, sono uniformemente limitate in Ω_{h_0} (basta ripetere lo stesso procedimento usato per le u_h). Pertanto, per $h \to +\infty$, un'estratta di $\{u_h\}$ converge, con le sue derivate, ad una funzione $w \in C^\infty(\Omega)$. E, in quanto limite uniforme di funzioni armoniche, anche w è armonica. Ma $\{u_h\}$ converge a u in $L^1(\Omega)$, perciò $u = w$ q.o., cioè $u \in C^\infty(\Omega)$ ed è armonica in Ω. □

Osservazione 7.4.3. Nella dimostrazione si è usato il fatto che Δ commuta con le regolarizzate, in altri termini che l'operatore di Laplace è invariante per rotazioni (è questa la ragione per cui si sceglie ρ radiale). Proprio per questo, però, la dimostrazione precedente non può essere estesa ad altri problemi variazionali.

Più in generale, si prova che *se u è una distribuzione verificante $\Delta u = 0$ in Ω, allora $u \in C^\infty(\Omega)$* (cfr. [**65**], pag. 216).
Diamo ora una seconda dimostrazione del teorema 7.4.1, basata essenzialmente sulla proprietà del valor medio.

Dim. Sia $x^0 \in \Omega$ e sia $R > 0$ tale che

$$\overline{B_R}\left(x^0\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^n :\ \left|x - x^0\right| \leq R\right\} \subset \Omega.$$

Proviamo che se

$$\overline{u}(x^0) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x^0)} u(\xi)\ d\mathcal{H}^{n-1}(\xi)\,, \tag{7.104}$$

allora $\overline{u}$ è indipendente da R, $\overline{u} \in C^0(\Omega)$ e $\overline{u} = u$ q.o. in Ω.
Ne seguirà che $\overline{u}(x^0) = \dfrac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \displaystyle\int_{\partial B_R(x^0)} \overline{u}(\xi)\ d\mathcal{H}^{n-1}(\xi)$ con $\overline{u} \in C^0(\Omega)$ e quindi, per il teorema 1.7.15, $\Delta\overline{u} = 0$ in Ω e dunque $\overline{u} \in C^\infty(\Omega)$, da cui la tesi.
Scegliamo opportunamente la funzione v in (7.100).
Assumiamo la (7.104) e sia $\varepsilon \in (0, R)$ e $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ con supp$\varphi \subset (\varepsilon, R)$. Definiamo

$$v(x) = \varphi\left(\left|x - x^0\right|\right)$$

e osserviamo che $v \in C_0^\infty\left(B_R\left(x^0\right)\right)$. Allora, posto $r = \left|x - x^0\right|$, si ha (cfr. proposizione 1.7.2)

$$\Delta v = \varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\varphi'(r) = r^{1-n}\frac{d}{dr}\left[r^{n-1}\varphi'(r)\right].$$

Assumiamo $n \geq 2$ (il caso $n = 1$ è semplice).
Poniamo

$$\psi(r) := \frac{d}{dr}\left[r^{n-1}\varphi'(r)\right]. \tag{7.105}$$

Osserviamo che $\psi \in C_0^\infty((\varepsilon, R))$ e

$$\int_\varepsilon^R \psi(r)\ dr = 0 \tag{7.106}$$

1. Sia ψ un'arbitraria funzione di classe $C_0^\infty((\varepsilon, R))$ per cui valga (7.106). Definiamo φ e v come sopra e usiamo questa v in (7.100). Poiché $v \equiv 0$ in $\Omega \setminus B_R\left(x^0\right)$, abbiamo

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega u(x)\Delta v(x)\, dx = \int_{B_R(x^0)} u(x)\Delta v(x)\, dx \\
&= \int_\varepsilon^R \psi(r)\, r^{1-n}\left(\int_{\partial B_r(x^0)} u(\xi)\ d\mathcal{H}^{n-1}(\xi)\right) dr \\
&= \int_\varepsilon^R \psi(r)\, w(r)\ dr
\end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$w(r) = r^{1-n}\int_{\partial B_r(x^0)} u(\xi)\ d\mathcal{H}^{n-1}(\xi)\,.$$

Dal corollario 1.2.10 segue che

$$w(r) = c \qquad\qquad \text{per q.o. } r \in (\varepsilon, R).$$

Poniamo $c = n\omega_n \overline{u}\left(x^0\right)$; per l'arbitrarietà di ε:

$$w(r) = n\omega_n \overline{u}\left(x^0\right) \qquad \text{per q.o. } r \in (0, R). \tag{7.107}$$

2. Osserviamo che (7.107) altro non è che (7.104), con $\overline{u}$ indipendente da R. Integrando ora (7.104):

$$\overline{u}\left(x^0\right) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x^0)} u(x)\, dx. \tag{7.108}$$

Da (7.108) segue che $\overline{u} \in C^0(\Omega)$. Infatti, siano $x', x'' \in \Omega$ e sia R sufficientemente piccolo tale che $\overline{B}_R(x') \cup \overline{B}_R(x'') \subset \Omega$, risulta

$$\begin{aligned} |\overline{u}(x') - \overline{u}(x'')| &= \frac{1}{\omega_n R^n} \left| \int_{B_R(x')} u(x)\, dx - \int_{B_R(x'')} u(x)\, dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{\{B_R(x') \setminus B_R(x'')\} \cup \{B_R(x'') \setminus B_R(x')\}} |u(x)|\, dx. \end{aligned}$$

Poiché $u \in L^1(B_R(x') \cup B_R(x''))$, per l'assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue per funzioni sommabili, $\overline{u}$ è continua.

3. Rimane da provare che $\overline{u} = u$ q.o. in Ω. Questo segue dal teorema di differenziazione di Lebesgue 1.1.13 e dal fatto che $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ (basta far tendere R a 0^+ in (7.108)).

□

Osservazione 7.4.4. E' evidente che del teorema 7.4.1 possiamo dare anche un'altra dimostrazione che usa i rapporti incrementali introdotti da Nirenberg.

Proviamo ora un risultato di maggiore regolarità interna: u è analitica reale.

Teorema 7.4.5. *Sia u armonica e limitata in Ω. Allora u è analitica reale in Ω.*

Dim. Fissato $x^0 \in \Omega$, consideriamo $R > 0$ t.c.

$$(ne^{2n+1} + 1)R < \min\left\{\text{dist }(x^0, \partial\Omega); 1\right\}.$$

Lo sviluppo di Taylor di u di centro x^0 in $B_R(x^0)$ è:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \forall x \in B_R(x^0)$$

$$u(x) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq k} \frac{D^{\boldsymbol{\alpha}} u(x^0)}{\boldsymbol{\alpha}!}(x - x^0)^{\boldsymbol{\alpha}} + \sum_{|\boldsymbol{\beta}| = k+1} \frac{D^{\boldsymbol{\beta}} u(y)}{\boldsymbol{\beta}!}(x - x^0)^{\boldsymbol{\beta}}, \tag{7.109}$$

dove $y \in B_R(x^0)$.

Applicando (1.16) alla palla di centro y e raggio $ne^{2n+1}R$ e la disuguaglianza

$$|\boldsymbol{\beta}|! \leq e^{n|\boldsymbol{\beta}|}\boldsymbol{\beta}! \quad {}^{3}, \tag{7.109}$$

abbiamo:

$$\frac{\left|D^{\boldsymbol{\beta}}u(y)\right|}{\boldsymbol{\beta}!}\left|(x-x^0)^{\boldsymbol{\beta}}\right| \leq e^{n|\boldsymbol{\beta}|}\left(\frac{ne}{ne^{2n+1}R}\right)^{|\boldsymbol{\beta}|}R^{|\boldsymbol{\beta}|}\sup_{\Omega}|u| = e^{-n|\boldsymbol{\beta}|}\sup_{\Omega}|u|\,.$$

Poiché $\sup\limits_{\Omega}|u| \leq M$, abbiamo:

$$\left|\sum_{|\boldsymbol{\beta}|=k+1}\frac{D^{\boldsymbol{\beta}}u(y)}{\boldsymbol{\beta}!}(x-x^0)^{\boldsymbol{\beta}}\right| \leq M\sum_{|\boldsymbol{\beta}|=k+1}e^{-n|\boldsymbol{\beta}|} \leq M\left(|\boldsymbol{\beta}|+1\right)^n e^{-n|\boldsymbol{\beta}|}.$$

Per $|\boldsymbol{\beta}| \to +\infty$, otteniamo la tesi. $\square$

Osservazione 7.4.6. In virtù di questo risultato la soluzione debole $u \in \mathcal{A}_{\varphi}$ del Principio di Dirichlet è analitica in Ω (regolarità interna). Per quanto concerne la condizione al contorno, questa è stata acquisita nella forma implicita $u-\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Sotto opportune ipotesi di regolarità per Ω e φ si ha $u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ e $u=\varphi$ su $\partial\Omega$ (regolarità fino alla frontiera).

---

[3]Sia $\boldsymbol{\beta}$ un multi indice n-dimensionale. Vale:

$$|\boldsymbol{\beta}|! \leq e^{n|\boldsymbol{\beta}|}\boldsymbol{\beta}!.$$

Dim. Siano $x_i \in \mathbb{R}$, per $i=1,\dots,n$ e sia $k \in \mathbb{N}$. Se $\boldsymbol{\beta}$ denota un multi-indice n-dimensionale di lunghezza k, dalla versione di Leibniz della formula di Newton, abbiamo:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^k = \sum_{|\boldsymbol{\beta}|=k}\frac{k!}{\boldsymbol{\beta}!}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\beta_i}.$$

Considerando $x_i=1$, per $i=1,\dots,n$:

$$n^{|\boldsymbol{\beta}|} = \sum_{|\boldsymbol{\beta}|=k}\frac{|\boldsymbol{\beta}|!}{\boldsymbol{\beta}!} \Rightarrow \frac{|\boldsymbol{\beta}|!}{\boldsymbol{\beta}!} \leq \sum_{|\boldsymbol{\beta}|=k}\frac{|\boldsymbol{\beta}|!}{\boldsymbol{\beta}!} = n^{|\boldsymbol{\beta}|} \Rightarrow |\boldsymbol{\beta}|! \leq n^{|\boldsymbol{\beta}|}\boldsymbol{\beta}! \leq e^{n|\boldsymbol{\beta}|}\boldsymbol{\beta}!.$$

$\square$

7.5. Regolarità ellittica: teoremi di Schauder e di De Giorgi-Nash-Moser. Il caso dei funzionali quadratici.

Riprendiamo ora il problema della regolarità, posto in 7.3, per un minimo debole di funzionali più generali (rispetto all'integrale di Dirichlet)

$$\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(\nabla u(x))\, dx \quad \text{con } F = F(p) \text{ quadratica in } p.$$

La maggiore regolarità di un minimo debole di $\mathcal{F}[\cdot]$ è conseguenza della teoria della regolarità delle equazioni lineari ellittiche.
Infatti, fondamentale per la regolarità delle soluzioni deboli dell'equazione di Eulero quasilineare (7.78)

$$D_\alpha F_{p_\alpha}(\nabla u(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega \qquad\qquad (Eq - quasilineare)$$

(dove i coefficienti dipendono dalla soluzione), è lo studio della differenziabilità delle soluzioni deboli dell'equazione lineare

$$D_\alpha\left(A_{\alpha\beta}(x) D_\beta u(x)\right) = 0. \quad \text{in } \Omega \qquad\qquad (Eq - lineare)$$

Vi sono due tipi di risultati di REGOLARITÀ ELLITTICA PER LA (EQ-LINEARE). Il primo (basato su un metodo perturbativo) assume regolarità σ-hölderiana per i coefficienti $A_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}(x)$. Sotto tale ipotesi si confrontano le soluzioni della (Eq-lineare) con le funzioni armoniche. La regolarità delle soluzioni dipende da quanto "vicine" esse sono alle funzioni armoniche.
Sussiste il seguente teorema classico (cfr. [**64**] [**35**] [**34**] [**31**]):

TEOREMA 7.5.1 (IL CASO DEI COEFFICIENTI HÖLDERIANI, SCHAUDER, 1934 [**64**]).
Sia $u \in W^{1,2}(\Omega)$ una soluzione debole dell'equazione differenziale lineare alle derivate parziali del secondo ordine in forma di divergenza

$$D_\alpha(A_{\alpha\beta}(x) D_\beta u(x)) = 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{7.110}$$

(ossia $\int_\Omega A_{\alpha\beta}(x) D_\beta u(x) D_\alpha v(x)\, dx = 0 \ \forall v \in C_0^1(\Omega)$),
dove $(A_{\alpha\beta}(x))_{\alpha,\beta=1,\dots,n}$ è una matrice simmetrica a coefficienti $A_{\alpha\beta}(x) \in C^{k,\sigma}_{loc}(\Omega)$ tale che

$$\lambda|\xi|^2 \le A_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha \xi_\beta \le \Lambda|\xi|^2 \quad \textit{per q.o. } x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \tag{7.111}$$

con Λ, λ costanti positive.
Allora $u \in C^{k+1,\sigma}_{loc}(\Omega)$ $(0 < \sigma < 1)$.

Nel secondo tipo (basato su un metodo iterativo introdotto da De Giorgi) la regolarità relativa alla (Eq-lineare) è dimostrata assumendo i coefficienti $A_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}(x)$ discontinui (misurabili e limitati).
La dimostrazione è basata su uno studio fine, al crescere del valore k , degli

insiemi di sopra-livello della soluzione $u \in W^{1,2}(\Omega)$ di cui si vuole provare la regolarità, e cioè (fissato un punto $x^0 \in \Omega$) sullo studio degli insiemi

$$A(k,r) := B_r\left(x^0\right) \cap \{x \in \Omega : \; u(x) > k\}$$

per ogni livello k.
Osserviamo che:

$$|A(k,r)| = \left|B_r\left(x^0\right)\right| - |\{x \in \Omega : \; u(x) < k\}| \quad \text{per q.o. } k.$$

Proviamo dapprima la LOCALE LIMITATEZZA delle soluzioni di (7.110), punto nodale della successiva dimostrazione della regolarità.

LEMMA 7.5.2 (DISUGUAGLIANZA DI TIPO CACCIOPPOLI).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ aperto limitato e sia $N = 1$. Sia $u \in W^{1,2}(\Omega)$ una soluzione debole *dell'equazione* (7.110) *dove $\left(A_{\alpha\beta}(x)\right)_{\alpha,\beta=1,\dots,n}$ è una matrice simmetrica a coefficienti $A_{\alpha\beta}(x) \in L^\infty(\Omega)$ verificante la condizione (7.111).*
Allora, esiste un costante $c = c(n, \lambda, \Lambda) > 0$ tale che

$$\int_{B_r(x^0)} \left|\nabla (u-k)^+\right|^2 dx \leq \frac{c}{(R-r)^2} \int_{B_R(x^0)} \left|(u-k)^+\right|^2 dx \qquad (7.112)$$

per ogni $k \in \mathbb{R}$, $0 < r < R < +\infty$ e $B_R(x^0) \subset \Omega$, quindi

$$\int_{A(k,r)} |\nabla u(x)|^2 \, dx \leq \frac{c}{(R-r)^2} \int_{A(k,R)} |u(x) - k|^2 \, dx. \qquad (7.113)$$

DIM. Fissato $x^0 \in \Omega$, sia $\eta \in C^\infty(\Omega)$, con

$$\begin{cases} \eta \equiv 1 & \text{in } B_r\left(x^0\right) \\ \eta \equiv 0 & \text{in } \Omega \setminus B_R\left(x^0\right) \\ 0 \leq \eta \leq 1 & \text{in } B_R\left(x^0\right) \setminus B_r\left(x^0\right), \end{cases}$$

$|\nabla \eta| \leq c(R-r)^{-1}$, consideriamo in (7.110) la funzione test $v := w\eta^2$ dove $w := (u-k)^+$.
Osserviamo che

$$\begin{array}{llll} w = u - k, & \nabla w = \nabla u & \text{q.o. in } \{u > k\} & \text{e} \\ w \equiv 0, & \nabla w = 0 & \text{q.o. in } \{u \leq k\}. & \end{array}$$

Allora da (7.110) risulta:

$$\int_\Omega A_{\alpha\beta}\eta^2 D_\beta u D_\alpha w \, dx = -2 \int_\Omega A_{\alpha\beta}\eta w D_\beta u D_\alpha \eta \, dx.$$

Da quest' ultima relazione, dalla limitazione inferiore in (7.111), applicando la disuguaglianza di Young abbiamo, per ogni $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}\lambda \int_\Omega \left[|\nabla w|^2 \eta^2 \right] dx &\leq c \|A_{\alpha\beta}\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega [\eta w |\nabla u| |\nabla \eta|] \, dx \\ &\leq c \|A_{\alpha\beta}\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \left[\varepsilon^2 |\nabla w|^2 \eta^2 + \varepsilon^{-2} w^2 |\nabla \eta|^2 \right] dx.\end{aligned}$$

Scelto opportunamente ε, otteniamo la tesi. □

Teorema 7.5.3 (locale limitatezza).
Se u soddisfa (7.112), allora, fissato $x^0 \in \Omega$, risulta

$$\sup_{B_{R/2}(x^0)} u \leq k_0 + c \left(\frac{1}{R^n} \int_{A(k_0,R)} |u - k_0|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{|A(k_0,R)|}{R^n} \right)^{\frac{1}{2\sigma}} \tag{7.114}$$

dove σ è la soluzione positiva dell'equazione $2\sigma^2 - n(\sigma+1) = 0$,

$$A(k_0,R) := B_R(x^0) \cap \{x \in \Omega : \ u(x) > k_0\}$$

e

$$c = c(n, \lambda, \Lambda) > 0.$$

Dim. Siano $0 < r < R$ e poniamo $\overline{r} = \dfrac{r+R}{2}$.
Fissato $x^0 \in \Omega$, sia $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, tale che

$$\begin{cases} \eta \equiv 1 & \text{in } B_{\overline{r}}(x^0) \\ \eta \equiv 0 & \text{in } \Omega \setminus B_R(x^0) \\ 0 \leq \eta \leq 1 & \text{in } B_R(x^0) \setminus B_{\overline{r}}(x^0) \end{cases}$$

e $|\nabla \eta| \leq c(R-r)^{-1}$; allora, posto $w := (u-k)^+$, per il corollario 1.3.10, abbiamo:

$$\int_{B_{\overline{r}}(x^0)} |\eta w|^2 \, dx \leq c \left(\int_{B_{\overline{r}}(x^0)} |\nabla(\eta w)|^{\frac{2n}{n+2}} \, dx \right)^{\frac{n+2}{n}}, \tag{7.115}$$

mentre per la disuguaglianza di Hölder risulta [4]

$$\left(\int_{B_{\overline{r}}(x^0)} |\nabla(\eta w)|^{\frac{2n}{n+2}} \, dx \right)^{\frac{n+2}{n}} \leq |A(k,R)|^{\frac{2}{n}} \int_{B_{\overline{r}}(x^0)} |\nabla(\eta w)|^2 \, dx \tag{7.117}$$

[4] De Giorgi consegue questa disuguaglianza

$$\int_{A(k,r)} |u(x) - k|^2 \, dx \leq c \, |A(k,r)|^{\frac{2}{n}} \cdot \int_{A(k,r)} |\nabla u(x)|^2 \, dx \tag{7.116}$$

ricorrendo alle sue tecniche introdotte per lo studio della misura $(n-1)$-dimensionale in $\mathbb{R}^n$ (disuguaglianze isoperimetriche) [**19**] [**20**].

inoltre per l'ipotesi

$$\begin{aligned}\int_{B_{\overline{r}}(x^0)} |\nabla(\eta w)|^2\, dx &\leq 2\left[\int_{B_{\overline{r}}(x^0)} |\nabla w|^2 \eta^2\, dx\right.\\ &\quad \left. + \int_{B_{\overline{r}}(x^0)} |w|^2 |\nabla \eta|^2\, dx\right]\\ &\stackrel{(7.112)}{\leq} \frac{c}{(R-r)^2}\int_{B_R(x^0)} |w|^2\, dx.\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{A(k,r)} |u(x)-k|^2\, dx \leq \frac{c\,|A(k,R)|^{\frac{2}{n}}}{(R-r)^2}\int_{A(k,R)} |u(x)-k|^2\, dx \tag{7.118}$$

Proviamo che, fissato k_0, esiste $d>0$ tale che
o $\displaystyle\int_{A(k_0+d,R/2)} |u(x)-k_0|^2\, dx = 0$ o $|A(k_0+d,R/2)| = 0$.
Posto

$$a(h,r) := |A(h,r)|, \tag{7.119}$$

$$u(h,r) := \int_{A(h,r)} |u(x)-h|^2\, dx, \tag{7.120}$$

e osservato che per $h>k$ abbiamo $A(h,r)\subset A(k,r)$, quindi
$a(h,r)\leq a(k,r)$ e $u(h,r)\leq u(k,r)$, dalla (7.118) abbiamo

$$u(h,r)\leq u(k,r)\leq \frac{c}{(R-r)^2}u(k,R)\,[a(k,R)]^{\frac{2}{n}}$$

dove $h>k$; inoltre, da (7.119) e (7.120), essendo

$$a(h,r) = \left|B_r\left(x^0\right)\cap\{u-k>h-k\}\right|,$$

applicando la disuguaglianza di Chebyshev 1.2.2, otteniamo

$$a(h,r)\leq \frac{1}{(h-k)^2}u(k,R),$$

pertanto per $\sigma>0$

$$[u(h,r)]^\sigma a(h,r)\leq \frac{c^\sigma}{(R-r)^{2\sigma}}\frac{1}{(h-k)^2}[u(k,R)]^{\sigma+1}[a(k,R)]^{\frac{2\sigma}{n}}.$$

Posto

$$\Phi(h,r) := [u(h,r)]^\sigma a(h,r), \tag{7.121}$$

e scelto per σ la soluzione positiva dell'equazione $2\sigma^2 - n(\sigma+1) = 0$ risulta [5]

$$\Phi(h,r) \leq \frac{c^\sigma}{(R-r)^{2\sigma}(h-k)^2}\left[\Phi(k,R)\right]^{1+\frac{1}{\sigma}}. \tag{7.122}$$

A questo punto si innesca il *procedimento iterativo*.
Partendo da una coppia (k_0, R), siano ora

$$\begin{aligned}
&r_j := \left(1+2^{-j}\right)R/2 \qquad (\{r_j\} \text{ decrescente}),\\
&k_j := k_0 + d - 2^{-j}d = k_0 + (1-2^{-j})d \qquad (\{k_j\} \text{ crescente})\\
&\Phi_j := \Phi(k_j, r_j),
\end{aligned}$$

dove

$$d^2 := \frac{2^{2(1+\sigma)^2}c^\sigma}{(R/2)^{2\sigma}}\left[\Phi(k_0,R)\right]^{\frac{1}{\sigma}}. \tag{7.123}$$

Allora, applicando (7.122) con $(h,r) = (k_j, r_j)$ e $(k,R) = (k_{j-1}, r_{j-1})$, si ha:

$$\begin{aligned}
\Phi_j &\leq \frac{c^\sigma}{\left[2^{-j-1}R\right]^{2\sigma}\left[2^{-j}d\right]^2}\Phi_{j-1}^{1+\frac{1}{\sigma}}\\
&\overset{\text{per (7.123)}}{=} 2^{\frac{\gamma}{\sigma}(j-1-\sigma)}\left[\Phi(k_0,R)\right]^{-\frac{1}{\sigma}}\Phi_{j-1}^{1+\frac{1}{\sigma}} \qquad \text{dove } \gamma = 2\sigma(\sigma+1).
\end{aligned}$$

Per induzione:

$$\Phi_j \leq 2^{-\gamma j}\Phi(k_0,R). \tag{7.124}$$

Infatti:
se $j=1$ abbiamo immediatamente

$$\Phi_1 \leq 2^{-\gamma}\Phi(k_0,R);$$

Supponiamo la tesi vera per $j-1$, allora

$$\begin{aligned}
\Phi_j &\leq 2^{\frac{\gamma}{\sigma}(j-1-\sigma)}\left[\Phi(k_0,R)\right]^{-\frac{1}{\sigma}}\Phi_{j-1}^{1+\frac{1}{\sigma}}\\
&\leq 2^{\frac{\gamma}{\sigma}(j-1-\sigma)}\left[\Phi(k_0,R)\right]^{-\frac{1}{\sigma}}\left[2^{-\gamma(j-1)}\Phi(k_0,R)\right]^{1+\frac{1}{\sigma}}\\
&= 2^{-\gamma j}\Phi(k_0,R).
\end{aligned}$$

Per $j \to +\infty$ da (7.124) e (7.121) risulta:

$$0 = \Phi_\infty(k_0+d, R/2) = \left[u(k_0+d,R/2)\right]^\sigma a(k_0+d,R/2).$$

Ne segue che o $u(k_0+d,R/2) = 0$ o $a(k_0+d,R/2) = 0$.
Così

$$u(x) \leq k_0 + d \qquad \text{q.o. su } B_{R/2}\left(x^0\right)$$

e quindi

$$\sup_{B_{R/2}(x^0)} u \leq k_0 + d.$$

[5] A pag.45 in [**13**], L. Caffarelli scrive che si crea un "effetto non lineare" che favorisce la convergenza del processo iterativo (citazione da [**67**]).

e da (7.123) otteniamo la tesi. □

OSSERVAZIONE 7.5.4. Ripetendo lo stesso procedimento per la funzione $-u$, che pure verifica la (7.113), si dimostra anche la limitazione dal basso per la u e in definitiva la locale (essenziale) limitatezza di u.

Proviamo ora la REGOLARITÀ HÖLDERIANA delle soluzioni di (7.110). Valutiamo dapprima la misura dell'insieme $A(k,R)$, quando k è vicino al sup della u.

LEMMA 7.5.5. *Supponiamo che u soddisfi* (7.112) *per ogni k e, fissato $x^0 \in \Omega$, poniamo*

$$M(R) := \sup_{B_R(x^0)} u \qquad e \qquad m(R) := \inf_{B_R(x^0)} u.$$

Se $|A(k_0,R)| \leq \frac{1}{2}\left|B_R\left(x^0\right)\right|$ dove $k_0 := \frac{1}{2}[M(2R)+m(2R)]$, allora per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta=\delta(\varepsilon,n,\lambda,\Lambda)>0$ tale che

$$|A(k_\delta,R)| \leq \varepsilon\left|B_{2R}\left(x^0\right)\right|, \quad dove\ k_\delta = M(2R)-\delta[M(2R)-m(2R)].$$

DIM. Per $h>k>k_0$ poniamo

$$v(x) := \begin{cases} h-k & \text{se } u(x) \geq h \\ u(x)-k & \text{se } k<u(x)<h \\ 0 & \text{se } u(x) \leq k. \end{cases}$$

Allora

$$\left|B_R\left(x^0\right) \cap \{v=0\}\right| = |\{u<k\}| \geq |\{u<k_0\}| \geq \frac{1}{2}\left|B_R\left(x^0\right)\right|.$$

Per la disuguaglianza di Poincaré-Sobolev 1.3.9 risulta

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_R(x^0)} [v(x)]^{\frac{n}{n-1}}\,dx\right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq c\int_{B_R(x^0)} |\nabla v(x)|\,dx \\ &= c\int_{A(k,R)\setminus A(h,R)} |\nabla u(x)|\,dx. \end{aligned}$$

Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} \left(\int_{A(h,R)} [v(x)]^{\frac{n}{n-1}}\,dx\right)^{\frac{n-1}{n}} &= (h-k)\,|A(h,R)|^{\frac{n-1}{n}} \\ &\leq \left(\int_{B_R(x^0)} [v(x)]^{\frac{n}{n-1}}\,dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &\overset{\text{(Hölder)}}{\leq} c\,|A(k,R)\setminus A(h,R)|^{\frac{1}{2}}\left(\int_{A(k,R)} |\nabla u(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

da cui, per l'ipotesi (7.112), abbiamo

$$\begin{aligned}(h-k)^2\,|A(h,R)|^{\frac{2n-2}{n}} &\le c\,|A(k,R)\setminus A(h,R)|\int_{A(k,R)\setminus A(h,R)}|\nabla u(x)|^2\,dx\\ &\overset{(7.112)}{\le} c\,|A(k,R)\setminus A(h,R)|\,R^{-2}\int_{A(k,2R)}|u(x)-k|^2\,dx\\ &\le c\,|A(k,R)\setminus A(h,R)|\,R^{n-2}\,[M(2R)-k]^2 .\end{aligned}$$

Scrivendo la relazione precedente per i livelli $h=k_i:=M(2R)-2^{-i}[M(2R)-k_0]$ e $k=k_{i-1}$ $(k_i>k_{i-1})$, e osservato che

$$\begin{aligned}&k_i-k_{i-1}=2^{-i}[M(2R)-k_0]\\ &M(2R)-k_{i-1}=2^{-i+1}[M(2R)-k_0],\end{aligned}$$

otteniamo

$$\left(2^{-i}\right)^2[M(2R)-k_0]^2\,|A(k_i,R)|^{\frac{2n-2}{n}}\le c\,[|A(k_{i-1},R)|-|A(k_i,R)|]\,R^{n-2}\,[M(2R)-k_{i-1}]^2,$$

da cui

$$|A(k_l,R)|^{\frac{2n-2}{n}}\le|A(k_i,R)|^{\frac{2n-2}{n}}\le 4cR^{n-2}\,[|A(k_{i-1},R)|-|A(k_i,R)|]$$

per $i=1,2,\ldots,l$. Sommando su i da 1 a l, otteniamo

$$\begin{aligned}l\,|A(k_l,R)|^{\frac{2n-2}{n}} &\le 4cR^{n-2}\,[|A(k_0,R)|-|A(k_l,R)|]\\ &\le 4cR^{n-2}\,|A(k_0,R)|\\ &\le 4c\left|B_R\left(x^0\right)\right|^{\frac{2n-2}{n}}\le c\left|B_{2R}(x^0)\right|^{\frac{2n-2}{n}};\end{aligned}$$

ne segue che

$$|A(k_l,R)|\le\frac{c}{l^{\frac{n}{2n-2}}}\left|B_{2R}(x^0)\right|.$$

Fissato $\varepsilon>0$, scegliamo l il più piccolo intero positivo maggiore di $\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^{\frac{2-2n}{n}}$ e poniamo $\delta=2^{-l-1}$, allora

$$|A(k_\delta,R)|=|A(k_l,R)|\le\varepsilon\left|B_{2R}\left(x^0\right)\right|$$

dove $k_\delta:=k_l=M(2R)-\delta[M(2R)-m(2R)]$. □

Siamo ora in grado di provare il seguente teorema fondamentale

Teorema 7.5.6 (di regolarità hölderiana, De Giorgi, 1957 [**21**] [**22**] [**25**]). [6]

---

[6]Poco tempo dopo l'articolo di De Giorgi, è pubblicato in [**62**] il seguente Teorema di Nash, 1958.
Ogni soluzione debole, limitata dell' equazione parabolica

$$D_t u(x,t)=D_\alpha\left(A_{\alpha\beta}(x,t)D_\beta u(x,t)\right) \tag{7.125}$$

con coefficienti uniformemente ellittici, è hölderiana in (x,t).

La dimostrazione si basa su tecniche diverse da quelle introdotte da De Giorgi.
Se i coefficienti $A_{\alpha\beta}$ non dipendono dal tempo t, fra le soluzioni dell'equazione (7.125)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ aperto limitato e sia $N = 1$. Sia $u \in W^{1,2}(\Omega)$ una soluzione debole *dell'equazione* (7.110) *dove* $(A_{\alpha\beta}(x))_{\alpha,\beta=1,\ldots,n}$ *è una matrice simmetrica a coefficienti $A_{\alpha\beta}(x) \in L^\infty(\Omega)$ verificante la condizione (7.111).*
Allora $u \in C^{0,\sigma}_{loc}(\Omega)$ $(0 < \sigma = \sigma(n, \lambda, \Lambda) < 1)$.

Dim. Sia $k_0 := \dfrac{1}{2}[M(2R) + m(2R)]$. Possiamo assumere, senza perdita di generalità, che sia

$$|A(k_0, R)| \leq \frac{1}{2}\left|B_R\left(x^0\right)\right|,$$

perché in caso contrario risulterà

$$\left|\left\{x \in B_R\left(x^0\right): \ u(x) < k_0\right\}\right| = \left|B_R\left(x^0\right)\right| - |A(k_0, R)| \leq \frac{1}{2}\left|B_R\left(x^0\right)\right|$$

e basterà scrivere $-u$ al posto di u.
Fissiamo $\varepsilon > 0$ e applichiamo il teorema 7.5.3 con k_δ al posto di k_0, dove k_δ è come nel lemma 7.5.5:

$$\begin{aligned}
\sup_{B_{R/2}(x^0)} u =: M(R/2) &\leq k_\delta + c\left(R^{-n}\int_{A(k_\delta,R)} |u - k_\delta|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{|A(k_\delta,R)|}{R^n}\right)^{\frac{1}{2\sigma}}\\
&\leq k_\delta + c\left[M(2R) - k_\delta\right]\left(\frac{|A(k_\delta,R)|}{R^n}\right)^{\frac{\sigma+1}{2\sigma}}\\
&\leq k_\delta + \frac{1}{2}\left[M(2R) - k_\delta\right]
\end{aligned}$$

scelto $\delta > 0$ sufficientemente piccolo in modo che risulti

$$c\left(\frac{|A(k_\delta,R)|}{R^n}\right)^{\frac{\sigma+1}{2\sigma}} < \frac{1}{2}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
M(R/2) &\leq k_\delta + \frac{1}{2}\left[M(2R) - k_\delta\right] = M(2R) - \frac{\delta}{2}\left[M(2R) - m(2R)\right]\\
&= m(2R) + \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)\left[M(2R) - m(2R)\right].
\end{aligned}$$

Allora, posto $\omega(t) := \operatorname{osc}_{B_t(x^0)} u = \sup\limits_{B_t(x^0)} u - \inf\limits_{B_t(x^0)} u$ (oscillazione di u su $B_t\left(x^0\right)$) e posto $\gamma := 1 - \dfrac{\delta}{2}$, l'oscillazione di u soddisfa

$$\omega(R/2) \leq M(R/2) - m(2R) \leq \gamma\,\omega(2R).$$

---

vi sono in particolare quelle *stazionarie*, $u = u(x)$, che evidentemente risolvono la parte ellittica dell'equazione.
Pertanto dal teorema di Nash segue quello di De Giorgi, limitatamente a quelle soluzioni che sono *a priori* limitate (cfr. [**67**]).

In definitiva:

$$\omega\,(R/2) \le \gamma\,\omega\,(2R) \qquad \text{con } 0 < \gamma < 1. \tag{7.126}$$

(i.e. l'oscillazione di u, che è limitata poiché lo è la funzione u, si riduce di una quantità fissa, $0 < \gamma = \gamma\,(n, \lambda, \Lambda) < 1$, passando da una palla di raggio $2R$ ad una concentrica di raggio $R/2$).
Sia ora $R_j := 2^{1-2j} R \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$.
Da (7.126), per induzione, risulta

$$\omega\,(R_j) \le \gamma^j\,\omega\,(2R)\,.$$

Osserviamo che $\gamma^{-1} = \dfrac{2}{2-\delta} \in (1, 2)$.
Siano ora $x, y \in \Omega$ e sia j tale che $R_{j+1} < |x - y| \le R_j$. Dalla stima precedente otteniamo [7]:

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\le \omega\,(R_j) \le \gamma^j \omega(2R) = 2^{-j|\log_2 \gamma|}\omega(2R) \\ &\le \omega(2R) \left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{|log_2 \gamma|}{2}} |x-y|^{\frac{|log_2 \gamma|}{2}}\,. \end{aligned}$$

Pertanto

$$|u(x) - u(y)| \le c\,|x - y|^{\sigma}\,,$$

con $0 < \sigma := \dfrac{|\log_2 \gamma|}{2} = \dfrac{\log_2 \gamma^{-1}}{2} = -\dfrac{\log \gamma}{2 \log 2} < \dfrac{1}{2}$. □

Osservazione 7.5.7. In sintesi, la dimostrazione del teorema di De Giorgi 7.5.6 si basa su due disuguaglianze in competizione aventi differenti omogeneità:
la disuguaglianza (7.113)

$$\int_{A(k,r)} |\nabla u(x)|^2 \; dx \le \frac{c}{(R-r)^2} \int_{A(k,R)} |u(x) - k|^2 \; dx$$

per ogni k, $0 < r < R$,
e la disuguaglianza (Poincaré-Sobolev) (7.116)

$$\int_{A(k,r)} |u(x) - k|^2 \; dx \le c\,|A\,(k, r)|^{\frac{2}{n}} \cdot \int_{A(k,r)} |\nabla u(x)|^2 \; dx.$$

Da queste due disuguaglianze ricaviamo la (7.118), da cui otteniamo la *disuguaglianza ricorsiva* (7.122).

[7] Infatti:

$$\begin{aligned} 2^{1-2(j+1)} < \frac{|x-y|}{R} < 2^{1-2j} \quad &\Rightarrow \quad 2^{-2j} < \frac{2\,|x-y|}{R} \Rightarrow -2j < \log_2\left(\frac{2\,|x-y|}{R}\right) \\ &\Rightarrow \quad -j < \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2\,|x-y|}{R}\right), \end{aligned}$$

allora

$$2^{-j} < 2^{\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2|x-y|}{R}\right)} = \left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{2}} |x-y|^{\frac{1}{2}}\,.$$

Per dimostrare che u, oltre ad essere localmente (essenzialmente) limitata, è anche localmente hölderiana, De Giorgi prova la **stima di decadimento per l'oscillazione di u** (7.126), da cui, iterando, ricava

$$\operatorname{osc}_{B_\rho(x^0)} u \leq c\rho^\sigma \qquad \text{per ogni } \rho < R \ (0 < \sigma < 1).$$

□

Osservazione 7.5.8. Nel 1961 Moser [**60**] ha esteso a soluzioni deboli e positive di equazioni lineari uniformemente ellittiche a coefficienti limitati in forma di divergenza il classico risultato di Harnack per funzioni armoniche e positive (cfr. teorema 1.8.2).

Definizione 7.5.9. $w \in W^{1,2}(\Omega)$ è una $\underset{\text{(soprasoluzione)}}{\text{sottosoluzione}}$ debole di $D_\alpha\left(A_{\alpha\beta}(x)D_\beta\right)$ se

$$\int_\Omega D_\alpha\left(A_{\alpha\beta}(x)D_\beta w(x)\right)v(x)\,dx \underset{(\leq 0)}{\geq 0} \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega),\ v \geq 0 \text{ q.o. in } \Omega,$$

cioè, se

$$\int_\Omega A_{\alpha\beta}(x)D_\beta w(x)D_\alpha v(x)\,dx \underset{(\geq 0)}{\leq 0} \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega),\ v \geq 0 \text{ q.o. in } \Omega.$$

Lemma 7.5.10. *Sia $w \in W^{1,2}(\Omega)$ una sottosoluzione debole e positiva in $B_{4R}\left(x^0\right) \subset \mathbb{R}^n$ e sia $m > 1$.*
Allora

$$\sup_{B_R(x^0)} w \leq c_1\left(n, \frac{\Lambda}{\lambda}\right)\left(\frac{m}{m-1}\right)^{\frac{2}{m}}\left(\fint_{B_{2R}(x^0)}[w(x)]^m\,dx\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Lemma 7.5.11. *Sia $w \in W^{1,2}(\Omega)$ una soprasoluzione debole e positiva in $B_{4R}\left(x^0\right) \subset \mathbb{R}^n$.*
Per $0 < m < \dfrac{n}{n-2}$, e se $n \geq 3$, allora

$$\left(\fint_{B_{2R}(x^0)}[w(x)]^m\,dx\right)^{\frac{1}{m}} \leq \frac{c_2\left(n, \frac{\Lambda}{\lambda}\right)}{\left(\frac{n}{n-2} - m\right)^2}\inf_{B_R(x^0)} w.$$

Se $n = 2$ la stima precedente vale per ogni $0 < m < \infty$, con $c_2\left(m, n, \dfrac{\Lambda}{\lambda}\right)$ al posto di $\dfrac{c_2\left(n, \frac{\Lambda}{\lambda}\right)}{\left(\frac{n}{n-2} - m\right)^2}$.

Intanto dai due precedenti lemmi deduciamo direttamente il seguente risultato.

Corollario 7.5.12. *Sia $w \in W^{1,2}(\Omega)$ una soluzione debole e positiva di $D_\alpha \left(A_{\alpha\beta}(x) D_\beta w(x)\right) = 0$ in $B_{4R}\left(x^0\right) \subset \mathbb{R}^n$. Allora*

$$\sup_{B_R(x^0)} w \leq c_3 \left(n, \frac{\Lambda}{\lambda}\right) \inf_{B_R(x^0)} w.$$

Osserviamo che la costante $c_3 \left(n, \dfrac{\Lambda}{\lambda}\right)$ non dipende da R.
Per generici aperti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abbiamo infine il seguente risultato.

Teorema 7.5.13 (Disuguaglianza di Moser-Harnack).
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso e $w \in W^{1,2}(\Omega)$ una soluzione debole e positiva di $D_\alpha \left(A_{\alpha\beta}(x) D_\beta w(x)\right) = 0$ $\forall x \in \Omega$. Allora per ogni connesso Ω', $\Omega' \subset\subset \Omega$, esiste una costante $c = c\left(n, \Omega, \Omega', \dfrac{\Lambda}{\lambda}\right) > 0$ tale che

$$\sup_{\Omega'} w \leq c \inf_{\Omega'} w. \tag{7.127}$$

Dim. La dimostrazione è analoga a quella del teorema 1.8.2, utilizzando qui il corollario 7.5.12. □

La disuguaglianza di Moser-Harnack (7.127) è utile per dimostrare la locale hölderianità di una soluzione debole u di $D_\alpha \left(A_{\alpha\beta}(x) D_\beta w(x)\right) = 0$ $\forall x \in \Omega$. Richiamiamo l'enunciato del teorema di De Giorgi-Nash-Moser 7.5.6

Teorema 7.5.14. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ aperto limitato e sia $N = 1$.*
Sia $u \in W^{1,2}(\Omega)$ una soluzione debole *dell'equazione* (7.110) *dove*
$\left(A_{\alpha\beta}(x)\right)_{\alpha,\beta=1,\ldots,n}$ è una matrice simmetrica a coefficienti $A_{\alpha\beta}(x) \in L^\infty(\Omega)$ verificante la condizione (7.111).
Allora $u \in C^{0,\sigma}_{loc}(\Omega)$ $(0 < \sigma = \sigma(n, \lambda, \Lambda) < 1)$.

Dim. [Metodo di Moser]
La limitatezza locale di u segue dai lemmi 7.5.10 e 7.5.11.
Poniamo come prima $M(R) := \sup_{B_R(x^0)} u$ e $m(R) := \inf_{B_R(x^0)} u$. Applichiamo la disuguaglianza di Moser-Harnack (7.127) alle funzioni $w := M(2R) - u$ e $w := u - m(2R)$ (positive in $B_{R/2}\left(x^0\right)$; altrimenti consideriamo $w_\varepsilon := M(2R) - u + \varepsilon$ e $w_\varepsilon := u - m(2R) + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ e facciamo il limite per $\varepsilon \to 0$ dopo aver ottenuto la stima, essendo c indipendente da ε). Otteniamo

$$\sup_{B_{R/2}(x^0)} [M(2R) - u] \leq c \inf_{B_{R/2}(x^0)} [M(2R) - u]$$

cioè

$$M(2R) - m(R/2) \leq c\,[M(2R) - M(R/2)] \tag{7.128}$$

e

$$\sup_{B_{R/2}(x^0)} [u - m(2R)] \le c \inf_{B_{R/2}(x^0)} [u - m(2R)]$$

cioè

$$M\,(R/2) - m(2R) \le c\,[m\,(R/2) - m(2R)]\,. \tag{7.129}$$

Sommando (7.128) e (7.129) abbiamo

$$(c+1)\,[M\,(R/2) - m\,(R/2)] \le (c-1)\,[M\,(2R) - m\,(2R)]\,.$$

Posto, come in precedenza $\omega(t) := M(t) - m(t)$ abbiamo che

$$\omega\,(R/2) \le \frac{c-1}{c+1}\omega(2R) = \gamma\,\omega(2R) \qquad \text{con } \gamma < 1. \tag{7.130}$$

A meno di scegliere c più grande in (7.127) (possiamo supporre $c > 3$) risulta $0 < \gamma < 1$ e $\gamma^{-1} \in (1,2)$. La (7.130) è proprio la (7.126). Iterando (come già visto in precedenza, a partire dalla (7.126)) si dimostra la locale σ-hölderianità della funzione u. □

Ritornando ora al problema della regolarità di una soluzione debole $u \in W^{2,2}_{\text{loc}}\,(\Omega)$ (cfr. teorema 7.3.5) della (Eq-quasilineare), è decisivo il teorema di De Giorgi 7.5.6 applicato con $A_{\alpha\beta}(x) := F_{p_\alpha p_\beta}\,(\nabla u(x)) \in L^\infty\,(\Omega)$ e $\widetilde{u}(x) := D_\gamma u(x) \in W^{1,2}_{\text{loc}}\,(\Omega)$ $(\gamma = 1,2,\ldots,n)$ (cfr. (7.133),(7.132),(7.131) successivi) per dedurre che $\widetilde{u} \in C^{0,\sigma}_{\text{loc}}\,(\Omega)$.
A partire da questo risultato fondamentale si inizia un procedimento di "boot-strap" cioè una reiterata applicazione del teorema di Schauder 7.5.1, che conduce alla maggiore regolarità di u in relazione alla (stessa) maggiore regolarità di F.
Precisamente sussiste il seguente risultato:

Teorema 7.5.15 (maggiore regolarità interna).
Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una Lagrangiana di classe C^∞ soddisfacente le condizioni (7.73), (7.74), (7.75). Sia $u \in W^{1,2}(\Omega)$ una soluzione debole di (7.78). Allora $u \in C^\infty_{loc}(\Omega)$.
Inoltre, se F è analitica reale, allora u è analitica reale.

Dim. [procedimento di linearizzazione]
Nel teorema 7.3.5 abbiamo visto che, posto

$$\widetilde{u}(x) := D_\gamma u(x), \qquad (\gamma = 1,2,\ldots,n) \tag{7.131}$$

$$A_{\alpha\,\beta}(x) := F_{p_\alpha\,p_\beta}(\nabla u(x)) \quad (\alpha,\beta = 1,\ldots,n), \tag{7.132}$$

e fissato un aperto $\Omega' \subset\subset \Omega$, $\widetilde{u} \in W^{1,2}(\Omega')$ è una soluzione debole dell'equazione lineare, ellittica del secondo ordine in forma di divergenza

$$D_\alpha(A_{\alpha\,\beta}(x)\,D_\beta\widetilde{u}(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega'. \tag{7.133}$$

Dall'ipotesi (7.75) e da (7.132) segue che $A_{\alpha\,\beta} \in L^{\infty}(\Omega')$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$ e verificano (7.111).
Per il teorema di De Giorgi-Nash 7.5.6, abbiamo che $\widetilde{u} \in C^{0,\sigma}(\Omega'')$ per ogni $\Omega'' \subset\subset \Omega'$; pertanto, tenuto conto di (7.131),

$$u \in C^{1,\sigma}_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Ora, poiché F è di classe C^{∞} e $\nabla u \in C^{0,\sigma}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, dalla (7.132) segue che $A_{\alpha\,\beta} \in C^{0,\sigma}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$.
Dalla (7.133) e per il teorema 7.5.1 di Schauder segue che $\widetilde{u} \in C^{1,\sigma}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, e quindi, tenuto conto di (7.131),

$$u \in C^{2,\sigma}_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Ma allora $A_{\alpha\,\beta} \in C^{1,\sigma}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e quindi sempre da (7.133) e per il teorema 7.5.1 di Schauder segue che

$$u \in C^{3,\sigma}_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Possiamo continuare questo argomento detto "boot-strap", per dedurre che $u \in C^{k,\sigma}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e quindi $u \in C^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.
Se poi F è analitica reale, l'analiticità di u segue dai risultati classici di Hopf [**44**] e Stampacchia [**68**]. □

7.6. Estensione del teorema di maggiore regolarità a funzionali non necessariamente quadratici.

Usando la versione di Moser del lavoro di De Giorgi, si può provare il seguente risultato più generale del precedente (cfr. [**58**] pag. 27 e teorema 1.10.4(ii) ibidem).

Teorema 7.6.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato e sia $F \in C^{\infty}(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $F = F(x,u,p)$ tale che per ogni $(x,u,p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$*

$$\text{(i)}\quad c_1 \left(1 + u^2 + |p|^2\right)^{\frac{m}{2}} - c_2 \leq F(x,u,p) \leq c_3 \left(1 + u^2 + |p|^2\right)^{\frac{m}{2}},$$

$$\text{(ii)}\quad |F_u|, |F_p|, |F_{xu}|, |F_{xp}| \leq c_3 \left(1 + u^2 + |p|^2\right)^{\frac{m-1}{2}},$$

$$|F_{uu}|, |F_{up}| \leq c_3 \left(1 + u^2 + |p|^2\right)^{\frac{m-2}{2}},$$

$$\text{(iii)}\quad c_4 \left(1 + u^2 + |p|^2\right)^{\frac{m-2}{2}} |\xi|^2 \leq F_{p_\alpha p_\beta}(x,u,p)\,\xi_\alpha \xi_\beta \leq c_5 \left(1 + u^2 + |p|^2\right)^{\frac{m-2}{2}} |\xi|^2$$

dove $m \geq 2$ e $c_i > 0$ $(i = 1,2,3,4,5)$ sono costanti.
Allora un minimo di $\mathcal{F}[v] := \displaystyle\int_\Omega F(x, v(x), \nabla v(x))\,dx$ in $\mathcal{A}_\varphi = \left\{ v \in W^{1,m}(\Omega);\ u - \varphi \in W^{1,m}_0(\Omega) \right\}$ è di classe $C^{\infty}_{loc}(\Omega)$.

Osservazione 7.6.2. Per la regolarità delle soluzioni fin sulla frontiera $\partial\Omega$ rinviamo e.g. a [**58**], [**48**], [**35**], [**37**].

7.7. Regolarità: il caso vettoriale.

Dal 1957 al 1968 altre dimostrazioni del teorema 7.5.6 di regolarità höderiana di De Giorgi vengono date, anche con l'intento di estendere il risultato ai sistemi, cioè al caso $N > 1$. [8]
Nessuna di queste dimostrazioni, però, risultava estendibile al caso $N > 1$: il motivo non era tecnico, ma sostanziale.
Infatti, che il teorema di hölderianità di De Giorgi non valga in generale per i sistemi è dimostrato dallo stesso De Giorgi nel 1968 con un controesempio (relativo al caso vettoriale, $n = N \geq 3$) di un sistema con coefficienti L^∞ che ha come soluzione una funzione vettoriale non continua e non limitata.
Successivamente E. Giusti e M. Miranda [**38**] mostrano, sempre nel caso vettoriale $n = N \geq 3$ e per un sistema ellittico quasi-lineare con coefficienti analitici reali, l'esistenza di una soluzione che presenta singolarità.

7.8. Esempio di estremale discontinua per un problema variazionale di tipo ellittico (De Giorgi, 1968).

Teorema 7.8.1 ([**24**]).
Sia $B_1(0)$ la palla unitaria di $\mathbb{R}^n$, con centro l'origine.
Per $n = N \geq 3$, la funzione vettoriale

$$u(x) = \frac{x}{|x|^\sigma}\ , \qquad \textit{con } \sigma = \frac{n}{2}\left\{1 - \frac{1}{\sqrt{(2n-2)^2+1}}\right\} > 1, \tag{7.134}$$

appartiene a $W^{1,2}(B_1(0), \mathbb{R}^n)$, non è continua né limitata nell'intorno dell'origine di $\mathbb{R}^n$, ed è l'unico minimo del funzionale

$$\mathcal{F}[v] = \int_{B_1(0)} \underbrace{\left\{\left[(n-2)\sum_{j=1}^n D_j v^j + n\sum_{i,j=1}^n \frac{x_i x_j}{|x|^2} D_i v^j\right]^2 + \sum_{i,j=1}^n \left(D_i v^j\right)^2\right\}}_{:=F(x,\nabla v)} dx \tag{7.135}$$

tra tutte le funzioni $v \in W^{1,2}(B_1(0), \mathbb{R}^n)$ tali che $v(x) = x$ su $\partial B_1(0)$.

---

[8] Nel 1966, Morrey nel suo libro [**58**] a pag. 27 così si esprimeva:
"An unfortunate feature of the De Giorgi-Nash results is that they have been proved only for $N = 1$".

Dim. Posto $\mathcal{F}[v] := \displaystyle\int_{B_1(0)} A^{i\,j}_{\alpha\,\beta} D_\alpha v^i(x) D_\beta v^j(x)\,dx$, i coefficienti

$$A^{ij}_{\alpha\,\beta}(x) := \left[(n-2)\,\delta_{\alpha\,i} + n\frac{x_\alpha\,x_i}{|x|^2}\right]\cdot\left[(n-2)\,\delta_{\beta\,j} + n\frac{x_\beta\,x_j}{|x|^2}\right] + \delta_{\alpha\,\beta}\delta_{i\,j} \in L^\infty(B_1(0));$$

inoltre esistono due costanti $0 < \lambda \le \Lambda$ tali che

$$\lambda|\xi|^2 \le A^{ij}_{\alpha\beta}(x)\xi^i_\alpha\,\xi^j_\beta \le \Lambda|\xi|^2 \quad \text{per q.o. } x \in B_1(0) \text{ e per ogni } \xi \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Il funzionale $\mathcal{F}[\cdot]$ è convesso, e dunque u è il minimo (unico) di $\mathcal{F}[\cdot]$ se (e solo se) u è soluzione dell'equazione di Eulero (estremale) in forma debole (cfr. osservazione 7.3.2)

$$\int_{B_1(0)} A^{ij}_{\alpha\beta}(x) D_\alpha u^i\, D_\beta \varphi^j\,dx = 0 \quad \forall\varphi \in W^{1,2}_0(B_1(0),\mathbb{R}^n). \tag{7.136}$$

In $B_1(0)\setminus\{0\}$, per (2.23)

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left[F_{p^j_i}(x,\nabla v)\right] = 0 \qquad (j = 1,\dots,n),$$

pertanto le equazioni di Eulero relative all'integrale (7.135) in $B_1(0)\setminus\{0\}$ sono

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\left[(n-2)\sum_{t=1}^n \frac{\partial v^t}{\partial x_t} + n\sum_{t,s=1}^n \frac{x_t x_s}{|x|^2}\frac{\partial v^t}{\partial x_s}\right]\cdot\left[(n-2)\,\delta_{ji} + n\frac{x_j x_i}{|x|^2}\right] + \frac{\partial v^j}{\partial x_i}\right\} = 0$$

$(j = 1,\dots,n)$, da cui:

$$\begin{aligned} &(n-2)\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(n-2)\sum_{t=1}^n \frac{\partial v^t}{\partial x_t} + n\sum_{t,s=1}^n \frac{x_t\,x_s}{|x|^2}\frac{\partial v^t}{\partial x_s}\right] \qquad (7.137)\\ +\quad & n\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{x_j\,x_i}{|x|^2}\left[(n-2)\sum_{t=1}^n \frac{\partial v^t}{\partial x_t} + n\sum_{t,s=1}^n \frac{x_t\,x_s}{|x|^2}\frac{\partial v^t}{\partial x_s}\right]\right\}\\ +\quad & \Delta v^j = 0 \qquad\qquad (j = 1,\dots,n) \qquad \text{in } B_1(0)\setminus\{0\}. \end{aligned}$$

Ora, per $v(x) = \dfrac{x}{|x|^\sigma}$, risulta:

$$\begin{aligned}
&\Delta v^j = \left(-\sigma n + \sigma^2\right) x_j\, |x|^{-\sigma-2}\,;\\
&\sum_{t=1}^n \frac{\partial v^t}{\partial x_t} = (n-\sigma)\, |x|^{-\sigma}\,;\\
&\sum_{t,s=1}^n \frac{x_t\, x_s}{|x|^2}\frac{\partial v^t}{\partial x_s} = (-\sigma+1)\, |x|^{-\sigma}\,;\\
&\frac{\partial}{\partial x_j}\, |x|^{-\sigma} = -\sigma x_j\, |x|^{-\sigma-2}\,;\\
&\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_j\, x_i \cdot |x|^{-\sigma-2}\right) = (n-\sigma-1)\, x_j\, |x|^{-\sigma-2}\,.
\end{aligned}$$

Quindi le equazioni di Eulero (7.137) sono soddisfatte in senso forte in $B_1(0) \setminus \{0\}$ non appena si ponga $u(x) = \dfrac{x}{|x|^\sigma}$ e l'esponente σ verifichi l'equazione

$$(2n-2)^2 \left(-\sigma + \frac{n}{2}\right)^2 + \left(-\sigma n + \sigma^2\right) = 0.$$

In definitiva la (7.136) è soddisfatta da (7.134) se φ ha supporto in $B_1(0) \setminus \{0\}$. Supponiamo ora che φ abbia supporto in $B_1(0)$, e sia $\zeta \in C^\infty(B_1(0))$, con

$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 & \text{in } B_1(0) \setminus B_{2R}(0)\ \left(0 < R < \frac{1}{2}\right) \\ \zeta \equiv 0 & \text{in } B_R(0) \\ 0 \le \zeta \le 1 & \text{in } B_{2R}(0) \setminus B_R(0). \end{cases}$$

e $|\nabla \zeta| \le \dfrac{2}{R}$.

La funzione $\zeta\, \varphi^j$ ha supporto in $B_1(0) \setminus B_R(0)$, e pertanto si ha

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{B_1(0)} A^{ij}_{\alpha\beta}(x) D_\alpha u^i\, D_\beta(\zeta \varphi^j)\, dx \qquad (7.138)\\
&= \int_{B_1(0)} \zeta\, A^{ij}_{\alpha\beta}(x) D_\alpha u^i\, D_\beta \varphi^j\, dx + \int_{B_1(0)} \varphi^j\, A^{ij}_{\alpha\beta}(x) D_\alpha u^i\, D_\beta \zeta\, dx.
\end{aligned}$$

Osserviamo che per l'ultimo integrale vale la maggiorazione:

$$\begin{aligned}
\int_{B_1(0)} \left|\varphi^j A^{ij}_{\alpha\beta}(x) D_\alpha u^i D_\beta \zeta\right| dx &\le \sup_{B_1(0)} |\varphi| \cdot \sup_{B_1(0)} \left|A^{ij}_{\alpha\beta}\right| \cdot \left(\int_{B_1(0)} |\nabla u(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \cdot \left(\int_{B_{2R}(0)\setminus B_R(0)} |D_\beta \zeta|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le 2^{\frac{n}{2}+1} \omega_n^{\frac{1}{2}} R^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{2}{R} \left(\int_{B_1(0)} |\nabla u(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}};
\end{aligned}$$

pertanto possiamo maggiorare l'ultimo integrale della (7.138) con

$$c\left(\int_{B_1(0)} |\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot R^{\frac{n-2}{2}}$$

e questo, ricordando l'ipotesi $n \geq 3$, è infinitesimo per $R \to 0^+$.
Passando al limite per $R \to 0^+$ in (7.138), si ha allora la (7.136) per ogni $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0), \mathbb{R}^n)$, e dunque per ogni $\varphi \in W_0^{1,2}(B_1(0), \mathbb{R}^n)$. □

Osservazione 7.8.2. Il controesempio di De Giorgi mostra che non è possibile provare la regolarità delle soluzioni deboli di un problema variazionale regolare di tipo vettoriale allo stesso modo seguito nel caso scalare.
Il XIX problema di Hilbert nel caso vettoriale non ha in generale risposta affermativa per $n \geq 3$.
Tuttavia, lo stesso controesempio di De Giorgi non chiude [9] il problema della regolarità nel caso vettoriale: eccetto che in dimensione $n = 2$ (come già ricordato, risultati di Morrey), nel caso vettoriale è raro, in generale, ottenere minimi regolari ovunque; si dimostrano comunque risultati di *regolarità parziale* (ogni soluzione debole u è di classe $C^{1,\sigma}$ in un insieme aperto $\Omega_0 \subset \Omega$ e *l'insieme singolare* $\Omega \setminus \Omega_0$ è di misura nulla).

---

[9] *La scoperta di un controesempio che smentisce una congettura molto importante rappresenta un punto di svolta che apre alla scienza orizzonti più ampi ed affascinanti dei precedenti.*
Con una frase un po' paradossale potremmo dire che la normale crescita della scienza segue la logica dello "sfruttamento del successo" mentre le grandi svolte della scienza obbediscono alla logica dello "sfruttamento dell'insuccesso".

Ennio De Giorgi

pag. 124 in Quaderni dell' Accademia Pontaniana (n. 18), *Riflessioni su Matematica e Sapienza*, 1996.

E' motivo di riflessione il fatto che in De Giorgi la fiducia nella capacità dell'uomo di ricercare la verità si completa con una autentica visione sapienziale.

Per quanto ricchi possono essere i nostri schemi concettuali, essi non abbracciano mai tutta la realtà.
Questa considerazione è interessante per lo scienziato perché proprio il fatto che la realtà è molto più ampia delle nostre conoscenze ci induce a tentare sempre di allargare il campo della nostra riflessione scientifica, ad ampliare l'angolo della realtà illuminato dalle nostre teorie.
*Nello stesso tempo dobbiamo riconoscere che comunque quest'**angolo illuminato** sarà una piccola parte dell'enorme immensità che rimane oscura.*
Vi è in fondo all'origine di ogni progresso scientifico questo atteggiamento sapienziale: il riconoscimento di quanto grande sia la realtà che si trova fuori dall'angolo illuminato delle nostre teorie.
Questo non ci deve portare a spegnere il riflettore, ma piuttosto a cercare di migliorarlo ed ampliarlo.

Ennio De Giorgi

pag. 106 ibidem.

7.9. Un caso di regolarità parziale negli spazi di Hölder.

Descrivere le idee nuove e le tecniche per affrontare le problematiche relative alla *regolarità parziale*, supera ampiamente i limiti della presente trattazione; per questo rinviamo a [**33**], [**34**].
Qui ci limitiamo a enunciare un risultato di regolarità parziale in un caso semplice.

Teorema 7.9.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ aperto limitato e sia $F : \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$ $(N \geq 2)$ una Lagrangiana tale che*

(i) $\lambda |p|^2 \leq F(p) \leq \Lambda |p|^2$ $\forall p \in \mathbb{R}^{n\times N}$, *con* Λ, λ *costanti positive,*
(ii) $F \in C^2\left(\mathbb{R}^{n\times N}\right)$, $|F_{pp}| \leq c_1$ $(c_1 > 0)$,
$F_{p^i_\alpha p^j_\beta}(p)\zeta^i_\alpha \zeta^j_\beta \geq c_2 |\zeta|^2$ $(c_2 > 0)$ $\forall p \in \mathbb{R}^{n\times N}$, $\forall \zeta \in \mathbb{R}^{n\times N}$.

Sia $u \in W^{1,2}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$ un minimo del funzionale $\mathcal{F}[u] := \int_\Omega F\left(\nabla u(x)\right)\, dx$.
Allora esiste un aperto $\Omega_0 \subset \Omega$, tale che $u \in C^{1,\sigma}\left(\Omega_0, \mathbb{R}^N\right)$ e per la dimensione di Hausdorff dell'insieme singolare $\Omega \setminus \Omega_0$ risulta
$\mathcal{H} - dim(\Omega \setminus \Omega_0) \leq n - 2$.

Naturalmente i risultati di regolarità parziale aprono nuovi interessanti problemi riguardanti la natura topologica e analitica dell'insieme singolare: per una loro formulazione rinviamo e.g. a [**33**] pag. 118.

Bibliografia

[1] E. Acerbi & N. Fusco: *Semicontinuity problems in the Calculus of Variations*, Arch. Rational Mech. Anal., (2) **86** (1984), 125-145. [10]

[2] R. Adams: *Sobolev spaces*, Academic Press, 1975.

[3] C. Arzelà: *Il principio di Dirichlet*, Rend. Acc. Bologna (1897), 71-84.

[4] L. Ambrosio, N. Fusco & D. Pallara: *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford Math. Monographs, Oxford University Press, 2000.

[5] J. M. Ball: *Convexity and existence theorems in nonlinear elasticity*, Arch. Ration. Mech. Anal., **63** (1977), 337-403.

[6] J. M. Ball: *Constitutive inequalities and existence theorems in elastostatics*, Nonlinear Analysis and Mechanics, ed. by R. J. Knops, Res. Notes, vol. 17, Pitman, London, 1977, 13-25.

[7] J.M. Ball & F. Murat: *$W^{1,p}$-quasiconvexity and variational problems for multiple integrals*, J. Funct. Anal., **58** (1984), 225-253.

[8] H. Brezis: *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.

[9] F. E. Browder, ed.: *Mathematical developments arising from Hilbert Problems*, Proceeding of Symposia in Pure Mathematics, vol. XXVIII- part 1, part 2, Providence, R. I., 1976.

[10] G. Buttazzo, G. Dal Maso & E. De Giorgi: *Variazioni, calcolo delle* in “Enciclopedia del Novecento” Treccani,, Volume XI, (1999), 832-848.

[11] G. Buttazzo, M. Giaquinta & S. Hildebrandt: *One-dimensional Variational Problems, An Introduction.*, Clarendon Press, Oxford, 1998.

[12] R. Caccioppoli: *Sui teoremi di esistenza di Riemann*, Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, s. II, **7** (1937), 177-187.

[13] L. Caffarelli: *De Giorgi’s contribution to the regularity theory of elliptic equations* in “Ennio De Giorgi. Selected papers”, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006, 42-47.

[14] R. Courant: *Dirichlet’s Principle, Conformal Mapping and Minimal Surfaces*, Interscience, New York, 1950.

[15] B. Dacorogna: *Quasiconvexity and relaxation of nonconvex problems in the Calculus of Variations*, J. Func. Analysis, **46** (1982), 102-118.

[16] B. Dacorogna: *Direct methods in the Calculus of Variations*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[17] B. Dacorogna: *Introduction to the Calculus of Variations*, Imperial College Press, 2$^{\text{nd}}$ ed., 2009.

[18] G. Dal Maso: *Problemi di semicontinuità e rilassamento nel Calcolo delle Variazioni*, Appunti raccolti da A. Garroni e A. Malusa, Pubblicazioni S.I.S.S.A., **118**/M (1993).

[19] E. De Giorgi: *Su una teoria generale della misura $(r-1)$-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **36** (1954), 191-213.

[10] Senza la pretesa di essere esaustivo, il primo autore ha incluso in bibliografia anche articoli e libri che ritiene possano essere di utile guida per approfondimenti da parte del lettore orientato alla ricerca.

[20] E. De Giorgi: *Nuovi teoremi relativi alle misure* $(r-1)$*-dimensionali in uno spazio ad* r *dimensioni*, Ricerche Mat., **4** (1955), 95-113.
[21] E. De Giorgi: *Sull'analiticità delle estremali degli integrali multipli*, Rend. Accad. Naz. Lincei, **20** (1956), 438-441.
[22] E. De Giorgi: *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*, Mem. Accad. Sci. Torino, (3) **3** (1957), 25-43.
[23] E. De Giorgi: *Semicontinuity Theorems in the Calculus of Variations*, Quaderno n. 56 dell'Accademia Pontaniana, 2008.
[24] E. De Giorgi: *Un esempio di estremali discontinue per un problema variazionale di tipo ellittico*, Boll. Un. Mat. Ital., (4) **1** (1968), 135-137.
[25] E. De Giorgi: *Selected Papers*, Springer, 2005.
[26] E. DiBenedetto: *Partial Differential Equations*, Birkhäuser, 1995 .
[27] I. Ekeland: *Sur les problèmes variationnels*, C. R. Acad. Sci., Paris, **275** (1972), 1057-1059.
[28] I. Ekeland: *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl., **47** (1974), 324-353.
[29] I. Ekeland: *Non convex minimization problems*, Bull. Am. Math. Soc., (3) **1** (1979), 443-474.
[30] L.C. Evans: *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, Am. Math. Soc., 1998.
[31] S. Fornaro, S. Maniglia & G. Metafune: *Equazioni ellittiche del secondo ordine. Parte prima: teoria* L^2 *e* C^α, Quaderno 4/2004, Univ. di Lecce, Dip. Mat. "E. De Giorgi".
[32] M. Giaquinta & E. Giusti: *On the regularity of the minima of variational integrals*, Acta Math., **148** (1982), 31-46.
[33] M. Giaquinta: *Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems*, Ann. of Math. Studies, **105**, Princeton University Press, 1983.
[34] M. Giaquinta: *Introduction to Regularity theory for nonlinear Elliptic Systems*, Lectures in Math., Birkhäuser, 1993.
[35] D. Gilbarg & N.S. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 2^{nd} ed., 1983.
[36] E. Giusti: *Equazioni ellittiche del secondo ordine*, Quaderno dell' U.M.I., Pitagora Ed., **6** (1978).
[37] E. Giusti: *Metodi Diretti nel Calcolo delle Variazioni*, Unione Matematica Italiana (1994).
[38] E. Giusti & M. Miranda: *Un esempio di soluzioni discontinue per un problema di minimo relativo ad un integrale regolare del calcolo delle variazioni*, Boll. U.M.I., **2** (1968), 1-8.
[39] J. Hadamard: *Sur le principe de Dirichlet*, Bull. Soc. Math. France, **34** (1906), 135-138.
[40] P. R. Halmos: *Measure theory*, Springer, 1974.
[41] D. Hilbert: *Mathematical Problems; Lecture delivered before the international Congress of Mathematicians at Paris in 1900*, Bull. (New Series) Am. Math. Soc. (4) **37** (2000), 407-436. Reprinted from Bull. Am. Math. Soc. **8** (1902), 437-479.
[42] D. Hilbert: *Über das Dirichletsche Prinzip.*, Jber. Deut. Math. Ver., **8** (1900), 184-188.
[43] D. Hilbert: *Über das Dirichletsche Prinzip.*, Math. Ann., **59** (1904), 161-168.
[44] E. Hopf: *Über den funktionalen, insbesondere den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Math. Zeitschrift, Band **34** (1932), 194-233.
[45] A.D. Ioffe: *On lower semicontinuity of integral functionals*, SIAM J. Control Optimization, **15** (1977), 521-538 and 991-1000.
[46] J. Jost: *Partial Differential Equations*, Springer, 2002.

[47] J. Jost & X. Li-Jost: *Calculus of Varitions*, Cambridge studies in advanced mathematics, **64** (1998).
[48] O.A. Ladyzhenskaya & N. Ural'tseva: *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Acad. Press, New York, 1968.
[49] H. Lebesgue: *Sur le probleme de Dirichlet*, Rend. Circ. Mat. Palermo (1907), 371-402.
[50] J.L. Lions: *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Gauthier-Villars, Paris, 1968.
[51] J. Malý & W.P. Ziemer: *Fine Regularity of Solutions of Elliptic Partial Differential Equations*, Math. Surveys and Monographs, vol. 51, Am. Math. Society, 1997.
[52] B. Manià: *Sopra un esempio di Lavrentieff*, Boll. U.M.I., **13** (1934), 146-153.
[53] P. Marcellini & C: Sbordone: *On the existence of minima of multiple integrals of the Calculus of Variations*, J. Math. Pures et Appl., **16** (1983), 1-9.
[54] P. Marcellini: *Approximation of quasiconvex functions and lower semicontinuity of multiple integrals*, Manuscripta Math., **51** (1985), 1-28.
[55] P. Marcellini: *Non convex integrals of the Calculus of Variations*, Preprint **16**, Univ. di Firenze (1989).
[56] C. Miranda: *Partial differential equations of elliptic type*, Springer, 2$^{\text{nd}}$ ed., 1970.
[57] C.B. Morrey: *Quasiconvexity and lower semicontinuity of Multiple integrals*, Pacific J. Math, vol. 2 (1952), 25-33.
[58] C.B. Morrey: *Multiple integrals in the Calculus of Variations*, Springer, 1966.
[59] J. Moser: *A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., **14** (1960), pp. 457-468.
[60] J. Moser: *On Harnack's theorem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., **14** (1961), 577-591.
[61] F. Murat: *Compacité par compensation II*, Atti del Conv. "Metodi recenti in analisi non lineare", De Giorgi, Magenes e Mosco ed., Pitagora, Bologna (1979), 245-256.
[62] J. Nash: *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations*, Amer. J. Math., **80** (1958), pp. 931-954.
[63] R. Osserman: *The isoperimetric inequality*, Bull. Am. Soc., **84** (1978), 1182-1238.
[64] J. Schauder: *Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Math. Z., **38** (1934), 257-282.
[65] L. Schwartz: *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.
[66] G. Scorza Dragoni: *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile*, Rend. Sem. Mat. Padova, **XVII** (1948), 102-106.
[67] S. Spagnolo: *3. La regolarità ellittica (De Giorgi-Nash)* in "Scripta volant, verba manent. Ennio De Giorgi, matematico e filosofo", edizioni ETS, Pisa (2008), 42-57.
[68] G. Stampacchia: *Sistemi di equazioni di tipo ellittico a derivate parziali del primo ordine e proprietà delle estremali degli integrali multipli*, Ricerche di Matem., **1** (1952), 200-226.
[69] V. Šverák: *Quasiconvex functions with subquadratic growth*, Proc. Roy. Soc. London, **433** (1991), 725-733.
[70] V. Šverák: *Rank-one convexity does not imply quasiconvexity*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **120** (1992), 185-189.
[71] G. Talenti: *Calcolo delle Variazioni*, Quaderno dell' U.M.I., Pitagora Ed., **2** (1977).
[72] L. Tonelli: *La semicontinuità nel Calcolo delle Variazioni*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **44** (1920), 167-249.
[73] L. Tonelli: *Fondamenti del Calcolo delle Variazioni*, voll. 1-2, Zanichelli, Bologna, 1921-23.
[74] H. Weyl: *The method of orthogonal projections in potential theory*, Duke Math. J., **7** (1940), 411-444.