Quest'ultima espressione mostra come i criminali riescano a far fruttare i loro redditi tramite gli investimenti nei mercati legali, grazie alla ripulitura, e nei mercati illegali, riuscendo anche a impiegare una parte dei redditi in consumi.
Una tecnica di ripulitura è costituita dall'usura; il soggetto, che offre un credito, è un criminale che utilizza i suoi fondi liquidi di natura illecita per prestare denaro ed inoltre il criminale trae da questa attività finanziaria un ulteriore vantaggio che è costituito dal fatto di potersi impossessare di imprese legali, utilizzate per il riciclaggio.

2 . Modello del riciclaggio del denaro proveniente da attività illegali

Nel modello precedente, si utilizza una parte del denaro ripulito, nuovamente in attività illegali e poiché la ripulitura prevede dei costi, riteniamo più verosimile un modello in cui questa fase viene evitata e proponiamo quindi il seguente modello.
Sia :
I = Capitale illegale
R = Capitale illegale ripulito
L = Capitale legale
Percentuali di capitale:
y = capitale da ripulire
c = Costo per ripulire il capitale
f = parte da reinvestire in attività legali.
Tassi di interesse:
r_i = tasso illegale
r_l = tasso legale.

Faremo inoltre l'ipotesi che i beni di consumo possano essere acquistati solo con denaro ripulito, per motivi di prudenza.

Inizialmente supponiamo di disporre di un capitale illegale I_0, parte di esso yI_0 sarà ripulito in quanto dovrà essere usato nel mercato legale, la rimanente parte $(1-y)I_0$ sarà reinvestita nel mercato illegale. Per ripulire yI_0 si affronteranno dei costi, per cui il capitale ripulito sarà:

(1) $$R_0 = (1-c)\, y\, I_0$$

La parte di questo capitale , che sarà investita nel mercato legale è $f\, R_0$ mentre la rimanente parte $(1-f)\, R_0$ sarà spesa in beni di consumo.
Il capitale legale, frutto dell'investimento, dopo il primo periodo sarà quindi:

(2) $$L_1 = f\, R_0\, (1 + r_l).$$

mentre la parte di capitale illegale $(1-y)I_0$, reinvestita nel mercato illegale, avrà fruttato complessivamente il capitale illegale:

(3) $$I_1 = (1-y)I_0 \ (1 + r_i).$$

Nel secondo periodo il capitale legale proverrà da due fonti: dal capitale L_1 e dal capitale I_1 una volta ripulito; quindi avremo:

(4) $$L_2 = f \ (1 + r_l) \ (L_1 + R_1)$$

essendo

(5) $$R_1 = (1-c) \ y \ I_1$$

Questo procedimento può essere iterato e si perverrà alla seguente formula:

(6) $$L_n = f \ (1 + r_l) \ (L_{n-1} + R_{n-1}),$$

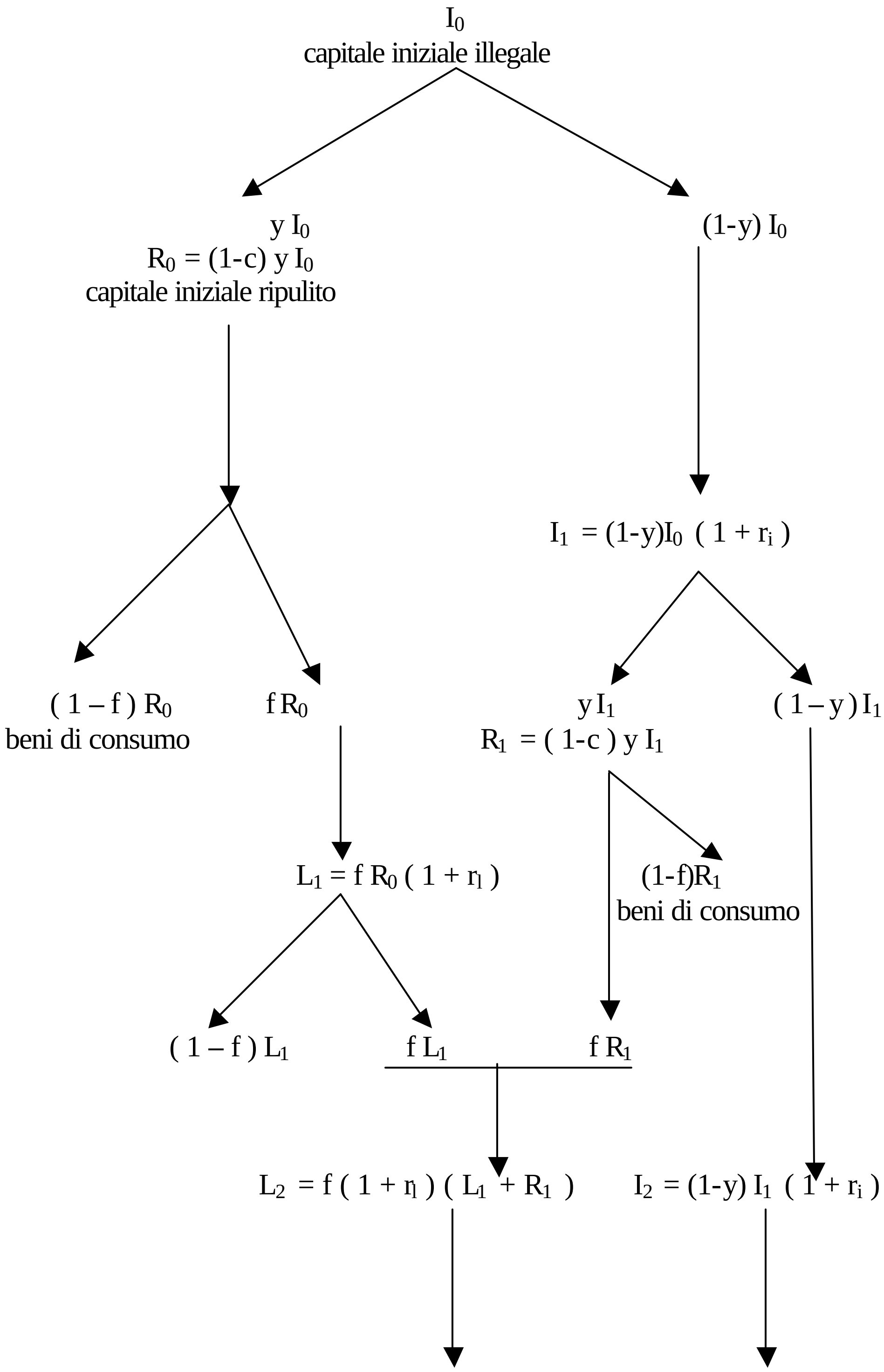
dove

(7) $$R_n = (1-c) \ y \ I_n$$

ed analogamente alla (3):

(8) $$I_n = (1-y) \ I_{n-1} \ (1 + r_i).$$

Questo procedimento può essere illustrato con il seguente diagramma:


I_0
capitale iniziale illegale
$y\, I_0$
$R_0 = (1\text{-}c)\, y\, I_0$
capitale iniziale ripulito
$(1\text{-}y)\, I_0$
$I_1 = (1\text{-}y) I_0\, (1 + r_i)$
$(1 - f)\, R_0$
beni di consumo
$f\, R_0$
$y\, I_1$
$R_1 = (1\text{-}c)\, y\, I_1$
$(1 - y)\, I_1$
$L_1 = f\, R_0\, (1 + r_l)$
$(1\text{-}f) R_1$
beni di consumo
$(1 - f)\, L_1$
$f\, L_1$
$f\, R_1$
$L_2 = f\, (1 + r_l)\, (L_1 + R_1)$
$I_2 = (1\text{-}y)\, I_1\, (1 + r_i)$

La (6) insieme alla (7) ed alla (8) costituiscono un sistema di equazioni definite per ricorrenza. La (8) si risolve facilmente partendo dalla condizione iniziale I_0 . Si ha infatti

$$I_2 = (1\text{-}y)\, I_1\, (1 + r_i\,)$$

e sostituendo il valore di I_1 (vedi la (3)), si ha

$$I_2 = (1\text{-}y)^2\, I_0\, (1 + r_i\,)^2.$$

In generale si avrà:

$$I_n = (1\text{-}y)^n\, (1 + r_i\,)^n\, I_0. \tag{9}$$

Per risolvere la (6) procederemo in modo iterativo, tenendo presente che $L_0=0$.
Incominciamo con l'osservare che la (6) si può scrivere più semplicemente:

$$\begin{aligned} L_n &= f\,(\,1 + r_l\,)\,(\,L_{n-1} + R_{n-1}\,) = \\ &= f\,(\,1 + r_l\,)\,[\,L_{n-1} + (\,1\text{-}c\,)\,y\,I_{n-1}\,] = \\ &= f\,(\,1 + r_l\,)\,[\,L_{n-1} + (\,1\text{-}c\,)\,y\,(1\text{-}y)^{n-1}\,(1 + r_i\,)^{n-1}\,I_0\,] \end{aligned} \tag{10}$$

e quindi è del tipo:

$$a_n = r\,(\,a_{n-1} + g_{n-1}\,). \tag{11}$$

Allora si ha :

$$a_1 = r\,(\,a_0 + g_0\,)$$

$$a_2 = r\,(\,a_1 + g_1\,) =$$

$$= r\,[r\,(\,a_0 + g_0\,) + g_1\,] = r^2\,a_0 + r^2\,g_0 + r\,g_1$$

$$a_3 = r\,(\,a_2 + g_2\,) =$$

$$= r\,(\,r^2\,a_0 + r^2\,g_0 + r\,g_1 + g_2\,) = r^3\,a_0 + r^3\,g_0 + r^2\,g_1 + r\,g_2$$

…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………

$$a_n = r^n\,a_0 + r^n\,g_0 + r^{n-1}\,g_1 + \ldots + r\,g_{n-1}.$$

Nel caso in esame :

$a_n = L_n$, $r = f\,(1+ r_l)$,
$g_{n-1} = R_{n-1} = (1\text{-}c)\ y\ (1\text{-}y)^{n-1}\ (1 + r_i)^{n-1}\ I_0$ che può scriversi più semplicemente :

$$g_{n-1} = R_{n-1} = R_0\ s^{n-1}$$

avendo posto
$s = (1\text{-}y)(1+r_i)$.

Pertanto essendo
$a_0 = L_0 = 0$, $g_0 = R_0 = y\,(1\text{-}c)\,I_0$,

risulta

(12) $L_n = r^n R_0 + r^{n-1} R_0\, s + ... + r\, R_0\, s^{n-1} = r\, R_0\, (r^{n-1} + r^{n-2} s + \dots + s^{n-1}) =$
$= r\, R_0\, (s^n - r^n)/(s - r)$.

Essendo, presumibilmente $r_i >> r_l$, non fosse altro per l'assenza di tassazione nel caso illegale, possiamo ipotizzare che sia $s > r$ e quindi risultano numeratore e denominatore positivi.
Osserviamo che possiamo ancora scrivere, posto $q = r/s$

(13)
$$L_n = r \cdot R_0 \cdot s^{n-1} \frac{[1-q^n]}{[1-q]}$$

quindi L_n è legato alla somma parziale n-ma

$$1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

della serie geometrica di ragione q

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

Se trascuriamo il termine q^n , in quanto piuttosto piccolo, si ha una approssimazione di L_n:

(14)
$$L_n \cong r \cdot s^{n-1} \cdot R_0 \frac{1}{1-q} = \frac{r}{s-r} s^n R_0$$

In termini espliciti

(15) $$L_n \cong \frac{f \cdot (1+r_l)}{(1-y)(1+r_i) - f \cdot (1+r_l)} y(1-c) I_0 \left[(1-y)(1+r_i)\right]^n$$

Può essere interessante un esempio numerico che illustri come in effetti il capitale legale cresca non tanto per il tasso legale, quanto per l'effetto del tasso illegale.

Supponiamo che sia:

r_l =10%, r_i = 70%, I_0 = 500 M, y = 20%, c = 40%, f = 60%

allora applicando la (15) si ha che il capitale legale dopo un periodo di 10 anni, sarà passato da zero a

$$L_0 = \frac{(0{,}6 \cdot 1{,}1) \cdot 0.2 \cdot 0{,}6 \cdot 500M \cdot (0{,}8 \cdot 1{,}7)^{10}}{(0{,}8 \cdot 1.7 - 0{,}6 \cdot 1{,}1)} = 1222M$$

3. Effetto moltiplicativo di L_n al variare dei parametri

E' interessante esaminare la variazione del capitale legale al variare dei parametri in gioco: c (costo della ripulitura), I_0 (capitale illegale al tempo 0), r_i (rendimento atteso dell' attività illegale), y (parte del capitale illegale che si vuole ripulire).
L' ammontare di capitale legale sarà tanto ***maggiore* :**

- quanto ***minore*** è il costo c della ripulitura (ossia, è decrescente all'aumentare di c);
c compare in R_0 quindi il segno di **¶ L_n / ¶ c** coincide con quello di
$\partial R_0 / \partial c = -y I_0 < 0$ quindi

$$\P L_n / \P c < 0$$

- quanto ***maggiore*** è l' ammontare di capitale iniziale frutto dell' attività economica illegale (è crescente rispetto a I_0);
anche qui I_0 compare solo in R_0 quindi il segno di $\partial L_n / \partial I_0$ coinciderà con quello di
$\partial R_0 / \partial I_0 = y (1- c) > 0$ quindi

$$\P L_n / \P I_0 > 0$$