2. Definizioni e Strumenti di Analisi

C'è una larga convergenza di pareri sul fatto che un'aliquota media di imposta crescente al crescere del reddito lordo sia la condizione che definisca una imposta progressiva[9].

Se $T(x)$ indica una funzione d'imposta, e quindi il carico fiscale complessivo su un reddito (individuale) lordo x, $T(x)$ è una imposta progressiva se, e solo se, $T(x)/x$ cresce al crescere del reddito. Se $T(x)$ è una funzione differenziabile con continuità, il criterio di progressività (debole) può esprimersi in questa forma:

$$d\,[T(x)/x]\,/\,dx \geq 0 \quad \forall x \quad \Leftrightarrow \quad T'(x) \geq T(x)/x \qquad \forall x > 0.$$

dove $T'(x)$ indica la variazione infinitesimale dell'imposta relativa ad un incremento infinitesimale dell'imponibile[10].

Qui l'imposta è funzione solo dei redditi (la diseguaglianza non stretta permette di considerare il caso di *no-tax-area* al di sotto di una soglia e/o di imposta proporzionale), mentre un tipico sistema impositivo è funzione anche di altre caratteristiche. In seguito si vedrà come valutare questi attributi nel caso siano rilevanti.

Le curve di Lorenz e le curve di Concentrazione costituiscono un utile strumento al fine di visualizzare agevolmente le distribuzioni oggetto di studio.

Si assuma che i redditi siano distribuiti con continuità lungo un intervallo [0, z], sia F:[0, z]$\rightarrow$ [0, 1] la funzione che caratterizza la distribuzione dei redditi lordi (dove $F(x)$ è la proporzione della popolazione con reddito minore od uguale ad x), sia $f(x)$ la funzione di densità delle frequenze associata anch'essa definita sullo stesso intervallo e supposta strettamente positiva tra il più basso livello di reddito rilevato $x_{min} \geq 0$ e il più alto livello di reddito $x_{max} \leq z$ (z è qualsiasi livello di reddito in eccesso rispetto al più alto reddito rilevato)[11] e, infine, sia n la dimensione della popolazione, il numero delle osservazioni. Per ogni $p \in [0,1]$ esiste un solo livello di reddito y con posizione p, identificato tramite l'applicazione $p = F(y)$. Quando il reddito lordo medio, il prelievo fiscale medio e il reddito netto medio sono, rispettivamente,

$$\mu_X = \int_0^z x\,f(x)\,\mathrm{d}x,\ \mu_T = \int_0^z T(x)\,f(x)\,\mathrm{d}x \ \text{ e } \ \mu_N = \int_0^z N(x)f(x)\,\mathrm{d}x, \text{ il } \textit{total tax ratio} \text{ è } \mu_T / \mu_X = t.$$

---

[9] - Fino ad avviso contrario, per reddito si intende reddito monetario.

[10] - Si suppone che valga la condizione $0 \leq T'(x) < 1 \ \forall x$ (*incentive preservation principle*); essa, tra l'altro, implica che $0 \leq T(x) < x \ \forall x$ e risulta equivalente alla richiesta che il reddito netto, $N(x) = x - T(x)$, sia una funzione monotona crescente in x.

[11] - Si evitano così problemi di convergenza al top della distribuzione.

Per illustrare l'ordinamento di Lorenz, si consideri ora una funzione $L : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ che definisca le funzioni di Lorenz per i redditi lordi e di Concentrazione per i redditi netti e il carico fiscale. Il grafico della funzione L, per una data distribuzione dei redditi, è la convenzionale curva di Lorenz[12].

Siano, con ovvia notazione, $L_X(p)$, $L_N(p)$ e $L_T(p)$ - sinteticamente L_X, L_N e L_T [13]:

$$p = F(y) \rightarrow L_X\ (p) = (1 / \mu_X) \int_0^y x\, f(x) dx,$$

$$p = F(y) \rightarrow L_N\ (p) = \{1 / [\mu_X (1 - t)]\} \int_0^y N(x)\, f(x) dx,$$

$$p = F(y) \rightarrow L_T\ (p) = [1 / (\mu_X t)] \int_0^y T(x)\, f(x) dx.$$

Ai fini di una valutazione comparativa la curva di Lorenz più vicina alla bisettrice rappresenta una distribuzione maggiormente uguale. Jakobsson (1976) e Fellman (1976) hanno mostrato il legame tra progressività della imposta e curve di Lorenz:

$$d\,[T(x)/x] / dx \geq 0 \quad \forall x \quad \Leftrightarrow \quad L_N \geq L_X \geq L_T \quad \forall\, p, \text{ con > per qualche } p.$$

Con un sistema fiscale applicato ad ogni sottoinsieme della popolazione dove la sola differenza tra gli individui sono i rispettivi livelli di reddito, una imposta progressiva riduce le ineguaglianze all'interno del gruppo ed è equivalente alla condizione di dominanza della curva di Concentrazione post–tax sulla curva di Lorenz dei redditi lordi[14].

Si sottolinea nuovamente come per *differenti* distribuzioni dei redditi lordi l'applicazione di un sistema progressivo d'imposizione fiscale sui redditi personali possa dar luogo a *differenti* gradi di progressività. Cambiando la distribuzione di riferimento possono inoltre cambiare i risultati di una comparazione di diversi sistemi di imposizione. In sintesi, non è necessario né sufficiente avere, ad esempio, più elevati tassi marginali di imposizione in ogni singolo scaglione di reddito per ottenere una maggiore progressività.

---

[12] - La funzione L mappa le immagini delle funzioni di distribuzione $F(\cdot)$ in quote di reddito totale. Una curva di *Lorenz* è quindi un modo di rappresentare il grado di diseguaglianza di una economia (Lorenz, 1905). Le unità sono ordinate secondo l'ordine crescente dei redditi. In una curva di Concentrazione si pongono in relazione le frazioni cumulate di una variabile rispetto ai percentili della distribuzione della stessa o di un'altra variabile.

[13] - Le assunzioni sulla forma della funzione $T(x)$ – e quindi l'inesistenza dell'effetto di reranking - permettono in tutto questo paragrafo di riconoscere anche L_N e L_T come funzioni di Lorenz.

[14] - Una distribuzione F domina (*a second order distributional dominance*) nel senso di Lorenz una distribuzione G se $L_F\ (p) \geq L_G\ (p) \quad \forall\, p \in [0,1]$ e $L_F \neq L_G$. La *strict dominance* è quindi implicata se vi è stretta disuguaglianza su un qualche intervallo di misura positiva. Qui, inoltre, si deve escludere l'eventualità di una distribuzione dove nessuno è soggetto passivo d'imposta (ad es. nessuno si trova al di sopra della soglia di esenzione): la curva disegnata dal grafico della funzione L_T non sarebbe definita.

La letteratura ha quindi coerentemente distinto due principali modalità per misurare la configurazione redistributiva di diversi sistemi fiscali:

- misure strutturali (*local measures of structural progression*).

  In questa sede si utilizzerà l'elasticità del reddito post-tax rispetto al reddito pre-tax, la *Residual Income Progression* (*RP*), una delle quattro possibili misure del grado di progressività lungo la scala dei redditi suggerite da Musgrave e Thin (1948)[15]:

  $$RP\,(x) = [1 - T'(x)] \,/\, [1 - T(x) \,/\, x] \quad (\leq 1 \text{ con imposta progressiva}).$$

  Una maggiore progressività è indicata da una riduzione del valore di *RP*.

- misure globali di *effettiva* progressività (*measures of effective progression* o *progressivity*).

  Tradizionalmente misure globali sono scalari che individuano l'efficacia redistributiva riducendo una coppia definita dal sistema d'imposizione fiscale–distribuzione ad un numero indice in grado di fornire un ordinamento completo. Molte sono state le misure proposte[16], spesso gli analisti ne considerano in particolare due, entrambe definite in termini di separazione tra le curve di Lorenz rilevanti:

  ⇒ Indice di Kakwani (1977a):

  $$\Pi^K = 2\int_0^1 [L_X\,(p) - L_T\,(p)]\,dp \;=\; C_T - G_X \;(> 0 \text{ con imposta progressiva}).$$

  dove G_X = coefficiente di Gini per i redditi pre-tax = $1 - 2\int_0^1 L_X\,(p)\,dp$,

  e C_T = coefficiente di concentrazione del carico fiscale = $1 - 2\int_0^1 L_T\,(p)\,dp$.

  ⇒ Indice di Reynolds–Smolensky (1977):

  $$\Pi^{RS} = 2\int_0^1 [L_N\,(p) - L_X\,(p)]\,dp = G_X - C_N \;(> 0 \text{ con imposta progressiva}),$$

  dove C_N = coefficiente di concentrazione del reddito post-tax[17] = $1\text{-}2\int_0^1 L_N\,(p)\,dp$.

I due indici forniscono una misura delle aree interne alle curve di Lorenz relative al carico fiscale e redditi pre-tax per l'indice di Kakwani (*disproportionality of tax burden*), redditi pre- e post-tax per l'indice di Reynolds–Smolensky (*redistributive effect*). Quest'ultimo ci informa che, se positivo, maggiore il suo valore numerico, maggiormente

[15] - Misure tutte compatibili con la definizione di imposta progressiva. Ognuna di queste misure quantifica con modalità distinte l'eccesso dell'aliquota marginale rispetto all'aliquota media e conseguentemente implica un differente ordinamento parziale sull'insieme delle possibili *income tax schedules*.

[16] - Cfr., tra gli altri, Blackorby-Donaldson (1984) e Suits (1977).

[17] - Data la nota n. 10 *ivi*, $C_N = G_N$.

equa è la distribuzione post-tax sulla distribuzione definita dalla curva di Lorenz pre-tax (si noti che quest'ultima può interpretarsi come la rappresentazione grafica di una distribuzione post-tax in seguito ad una imposta proporzionale). Date le assunzioni di questo paragrafo, Π^{RS} misura la riduzione del coefficiente di Gini ottenuta tramite il processo impositivo.

Kakwani (1977a, 1977b) dimostra che, in via generale, esiste un collegamento tra i due indici:

$$\Pi^{RS} = [t \,/\, (1-t)]\ \Pi^{K}.$$

Un incremento dell'effetto redistributivo indicato da una variazione di Π^{RS} dipende allora da due fattori: un aumento proporzionale dell'incidenza del prelievo a parità dei differenziali relativi di trattamento fiscale lungo la scala degli redditi, oppure un incremento, a parità della prima, della diseguaglianza nel carico fiscale. Una volta nota la distribuzione pre-tax, con l'applicazione di differenti strutture d'imposizione fiscale l'indice di Reynolds-Smolensky e il raffronto dei valori così ottenuti permette di ordinare in termini di efficacia redistributiva le diverse strutture d'imposta. D'altra parte lo stesso risultato non ambiguo si raggiunge tramite l'osservazione dell'andamento delle curve di Lorenz relative alle distribuzioni dei redditi post-tax definite dall'applicazione dei differenti sistemi fiscali, anche qui data la distribuzione pre-tax rilevante: a parità di gettito, il sistema fiscale connesso con la curva di Lorenz costantemente più interna risulterà maggiormente equalitaria.

Jakobsson (1976) e Kakwani (1977b) hanno dimostrato separatamente come tale conclusione e alcune misure locali siano equivalenti[18].

Siano $T^1(x)$ e $T^2(x)$ due funzioni che definiscono alternative strutture d'imposta; per gli scopi di questo lavoro:

$$RP^1(x) \leq RP^2(x) \ \ \forall x \quad \Leftrightarrow \quad L^1_N(p) \geq L^2_N(p) \quad \forall\, F(x).$$

Se un sistema fiscale risulta possedere una più elevata *degree of progression*, allora deve essere in maggior misura redistributivo (e viceversa). Diversi, per ogni livello di reddito, valori di *RP* caratterizzano, e sono caratterizzate da, differenti distribuzioni dei redditi post-tax. Si tratta di un risultato fondamentale, in quanto si giunge a determinare un legame tra principio di equità verticale (individui in circostanze diverse dovrebbero essere

[18] - Cfr. inoltre Hemming-Keen (1983) e Latham (1988).

tassati in misura diseguale; da qui l'obiettivo di riduzione delle disuguaglianze tra i contribuenti) e struttura progressiva dell'imposta.

Tale nesso si rivela utile per il lavoro degli analisti che intendano giudicare alternativi sistemi fiscali di imposizione personale sui redditi ai fini di confronti intertemporali o tra diverse economie. A tal fine, in sintesi, risultano disponibili:

⇒ Misure strutturali;

⇒ Misure globali di effettiva progressività;

⇒ Teoremi di Jakobsson–Kakwani.

Indicazioni del grado di progressività sono fornite dalle misure locali (un criterio di ordinamento parziale). Un calcolo riassuntivo dell'effettiva progressività dei sistemi fiscali emerge, invece, con gli indici Π^{RS} ed Π^{K} (un criterio di ordinamento globale). Queste ultime misure saranno, in dipendenza degli scopi dei ricercatori, riferibili a:

⇒ Una data distribuzione dei redditi pre-tax e vari sistemi di imposta;

⇒ Un dato sistema d'imposta e diverse distribuzioni pre-tax;

⇒ Coppie di distribuzioni dei redditi post-tax e pre-tax.

Con questi ultimi dati sintetici non si è in grado di determinare gli effetti di progressività sulle differenti classi di reddito, ma esclusivamente una stima complessiva degli effetti redistributivi. La relazione tra elasticità e criterio di dominanza caratterizza invece i teoremi di Jakobsson-Kakwani. Valori della *RP* lungo *tutta* la scala dei redditi costantemente minori implicano - e sono implicati da - una condizione di dominanza tra le curve di Lorenz rilevanti: tali teoremi subiscono il vincolo di dover scegliere una distribuzione pre-tax come *baseline* di riferimento e conseguentemente lasciano spazio a repliche da parte di chi intendesse criticare le valutazioni conseguenti. Nascondendo il ruolo delle differenze distributive, l'evidenza empirica di distribuzioni pre-tax che non rimangono immutate nel tempo e che differiscono tra diversi paesi rimane irrilevante ai fini dell'analisi. Al contrario, rivolgendosi al criterio di Lorenz si possono tenere in considerazione anche ineguaglianze presenti prima dell'applicazione dell'imposta.

Sia l'unità base dell'analisi il *regime* $\langle N, F \rangle$. Indicando con $\succ_L$ l'ordinamento parziale dei regimi $\langle N,F \rangle$ in base al criterio di dominanza di Lorenz,

$$\langle N_1, F_1 \rangle \succ_L \langle N_2, F_2 \rangle \Leftrightarrow L^1_{\mathrm{N}}(p) - L^1_{\mathrm{X}}(p) \geq L^2_{\mathrm{N}}(p) - L^2_{\mathrm{X}}(p) \quad \forall p, \text{ con } > \text{ per qualche } p.$$

Sia invece $\succ_{RP}$ l'ordinamento parziale della funzione N in base al criterio della *RP*. Con alcuni cambiamenti nella notazione, si può riformulare il risultato di Jakobsson-Kakwani:

$$N_1 \succ_{RP} N_2 \quad \Leftrightarrow \quad \langle N_1, F_0 \rangle \succ_L \langle N_2, F_0 \rangle \quad \forall F_0 .$$

Se col criterio di Lorenz si possono confrontare e ordinare coppie con differenti distribuzioni pre-tax, ciò ora è precluso: la distribuzione, una volta scelta, è data per ciascun sistema fiscale (con uguale distribuzione pre-tax i due criteri si rivelano, ovviamente, equivalenti nelle loro prescrizioni). Pur tuttavia sono questi ultimi i risultati teorici ad essere con frequenza utilizzati nei lavori di valutazione empirici: matematicamente validi ma debolmente realistici.

Recentemente tale lacuna sembra superabile. Grazie ad un contributo di Dardanoni-Lambert (2002) sono a disposizione nuove procedure adatte ad indicare effetti redistributivi globali tramite l'analisi locale dei valori di elasticità, tenendo opportunamente conto delle differenze nelle distribuzioni pre-tax soggette al prelievo.

In questa sede è sufficiente sottolineare come essi ritengano necessario *correggere*, con modalità che verranno successivamente descritte, gli effetti dei sistemi di imposizione fiscale sulle distribuzioni dei redditi per le differenze esistenti nelle distribuzioni dei redditi lordi soggette al prelievo, al fine di tenere conto delle *differenti dimensioni* e *differenti livelli di diseguaglianza* da queste ultime catturate. Ciò dovrebbe realizzarsi prima di effettuare qualsiasi tipo di confronto di progressività tra i diversi sistemi di imposizione fiscale. Essi indicano, nel caso di due sistemi impositivi, come procedura valida un metodo che definisca un terzo *comune* scenario di riferimento per entrambi i regimi fiscali; oppure quel metodo che *importi* uno dei due regimi fiscali nell'altro (*a transplant-and-compare procedure*).

Anche in questo caso, con due regimi sotto esame, si possono ottenere risultati redistributivi ambigui in relazione alla distribuzione scelta come baseline. Il teorema n. 1 di Dardanoni-Lambert (*ib.*) dimostra che tale scelta è invece ininfluente se le due distribuzioni pre-tax sono, dopo aver posto i redditi in ordine crescente, ognuna una trasformata isoelastica dell'altra. In tal caso gli ordinamenti parziali rimangono inalterati e si raggiunge l'indipendenza di giudizio dalla baseline adottata.

Formalmente, sia $g\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ una qualsiasi funzione monotona crescente e continua.

Siano F_0 ed a G_0 due alternative distribuzioni di riferimento per la comparazione dei regimi $\langle N_1, F_1 \rangle$ e $\langle N_2, F_2 \rangle$.

Gli ordinamenti parziali sui regimi $\langle N_1, F_1 \rangle$ e $\langle N_2, F_2 \rangle$ condizionati a F_0 ed a G_0, rimangono inalterati $\Leftrightarrow$ $G_0^{-1} \circ F_0 = g$ è isoelastica ($\Leftrightarrow$ $\exists\, A, b > 0 : g(x) = A\, x^{b}$) [19].

Per ricercatori che intendano determinare anche gli effetti redistributivi reali, intenzionati non solo a separare gli effetti di progressività prodotti da mutamenti dei sistemi d'imposizione fiscale da quelli causati da cambiamenti distributivi, il passaggio decisivo è l'analisi delle distribuzioni lorde e la ricerca dell'esistenza di una trasformazione isoelastica che le colleghi, non più la scelta di una di esse come riferimento applicativo dei vari sistemi fiscali. In caso di esito positivo e scelta una comune base di riferimento (per ciò che riguarda gli aspetti applicativi essa può essere semplicemente una delle due - o più - distribuzioni pre-tax a disposizione del ricercatore), il teorema n. 2(*b*) di Dardanoni-Lambert (*ib.*) dimostra le condizioni sufficienti per un ordinamento (parziale) tra i regimi, da ricercare verificando opportune misure delle relative *RP*.

Siano $\langle N_1, F_1 \rangle$ e $\langle N_2, F_2 \rangle$ due regimi. Si indichino gli ordinamenti parziali sui regimi, condizionati ad una distribuzione di riferimento *F*, tramite $\succ_{P\,|\,F}$.

Si supponga che $g = F_1^{-1} \circ F_2$ sia isoelastica.

Se $RP_1(g(x)) \leq RP_2(x) \quad \forall x$, con < per qualche $x \quad \Rightarrow \quad \langle N_1, F_1 \rangle \succ_{P\,|\,F_1} \langle N_2, F_2 \rangle$ e $\langle N_1, F_1 \rangle \succ_{P\,|\,F_2} \langle N_2, F_2 \rangle$.

La procedura di correzione relativa alle distribuzioni post-tax (per i dettagli analitici si rinvia al prossimo paragrafo) utilizzerà proprio quei valori *A* e *b* che caratterizzano, se esiste, il legame isoelastico. Il parametro *A* misura la crescita proporzionale, *b* la scala della diseguaglianza della distribuzione.

Si è in grado così di ricorrere al risultato di Jakobsson-Kakwani data una precisa relazione strutturale tra le distribuzioni dei redditi. Essi permettono in questo caso di valutare gli effetti redistributivi reali, e ottenere risultati globali a partire da una *local progression comparison*: per il loro tramite, la dominanza nel senso di Lorenz tra le distribuzione dei redditi netti induce a ricorrere al teorema di Atkinson (1970) e quindi fornire un elemento di giudizio prescrittivo[20].

[19] - Il simbolo $\circ$ definisce l'operatore 'composizione di funzioni'.
[20] - Cfr. inoltre Kolm, 1969.

Atkinson assume che il benessere sociale sia espresso tramite una funzione - definita sui redditi individuali - additiva, separabile e simmetrica:

$$W = \int_0^z U(x) f(x)\, dx.$$

Per qualsiasi dimensione della popolazione, siano $H(x)$ e $G(x)$ due distribuzioni dei redditi con media uguale, $\mu_H = \mu_G$ [21]:

$$L_H(p) \geq L_G(p) \quad \forall\, p \quad \Leftrightarrow \quad W_H \geq W_G \quad \forall\, U(x), \text{ dove } U'(x) > 0,\ U''(x) < 0,\ \forall x > 0.$$

Con la sola restrizione di una funzione di utilità individuale che goda delle suddette proprietà[22], il confronto tra due distribuzioni con media uguale assegnerà una preferenza in termini di welfare alla distribuzione dominante secondo il criterio di Lorenz (e viceversa). Se si è disposti ad assumere un *SWFL* coerente con il criterio di Pareto e *inequality-adverse*, la diseguaglianza si rivela essere nient'altro che una perdita di benessere[23].

3. L'Analisi Empirica

In un precedente lavoro, Russo (2005), si è impiegata per il caso italiano la procedura Dardanoni-Lambert qui sinteticamente descritta: per l'analisi della riforma Visco dell'IRPEF della seconda metà degli anni '90, si è, tra l'altro, accertata l'esistenza di trasformazioni isoelastiche che collegano le distribuzioni campionarie dei redditi lordi nei periodi 1995, 1998 e 2000. Dalla condizione di isoelasticità e dalla procedura di correzione è seguito un risultato definitivo in termini di efficacia redistributiva.

Nel contempo alcuni limiti della procedura sono emersi. Come detto, quel che rileva ai fini della effettiva progressività è dove sono situati i soggetti passivi di imposta: ci sono molti individui soggetti ad un alta aliquota marginale, o un numero scarso; l'ultimo

[21] - L'interesse per un indicatore della diseguaglianza pura (la forma della distribuzione) impone di ricorrere al teorema di Atkinson, prescindendo dallo *shift* nelle distribuzioni. Per annullare eventuali differenze nelle medie dei redditi netti, esse devono essere riproporzionate: non si deve alterare la misura della elasticità e a tal fine si può ricorrere ad un *Residual–Progression–neutral device.* Si ottiene così la parità di gettito tramite il desiderato incremento (o diminuzione) della media senza che si modifichi la misura di *Residual Progression* (cfr. Pfälher, 1984; Formby-Smith, 1986; Lambert-Pfälher, 1987).

[22] - Tale restrizione permette di rispettare il ben noto *Principle of Transfers* di Pigou-Dalton.

[23] - Si osserverà l'andamento delle curve di Lorenz e le misure globali di effettiva progressività, ma si preferisce un ordinamento parziale basato su preferenze unanimi. Formby e Smith (1986, p. 562) commentano, "If Lorenz curves intersect, a social welfare function can always be found which ranks income distribution differently than does the Gini coefficient or other summary measures of inequality.". Se così non fosse, qualsiasi indice di ineguaglianza che rispetti il principio di Pigou–Dalton e di Simmetria fornirà lo stesso risultato dell'ordinamento parziale di Lorenz (cfr., tra gli altri, Foster, 1985).