

# Introduzione

Operatori differenziali lineari ellittici e parabolici con coefficienti limitati e regolari sono stati oggetto di uno studio vasto e accurato negli ultimi decenni, il quale ha prodotto una teoria completa ed esauriente che comprende risultati di esistenza, unicità e regolarità per le soluzioni delle equazioni associate in vari spazi funzionali, come spazi  $L^p$ , spazi di Hölder e altri. Al momento, la letteratura dimostra un crescente interesse verso operatori con coefficienti illimitati o singolari, che generalizzano in modo naturale quelli classici. Tale interesse è sicuramente motivato dalle applicazioni alla probabilità e specialmente alle equazioni differenziali stocastiche e alla matematica finanziaria. Tra l'altro, il prototipo di questi operatori, l'operatore di Ornstein-Uhlenbeck, proviene proprio dalla probabilità.

Bisogna osservare subito che i risultati forniti dalla teoria classica non si estendono in modo ovvio al caso di coefficienti illimitati. Per esempio, è ben noto che il Laplaciano con dominio  $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$  genera un semigruppone analitico fortemente continuo in  $L^p(\mathbb{R}^N)$  ( $1 < p < \infty$ ). Lo strumento principale per stabilire questo risultato è rappresentato dalla stima fondamentale di Calderon-Zygmund. Aggiungiamo al Laplaciano un termine di ordine zero illimitato, consideriamo pertanto un operatore di Schrödinger  $A = \Delta - V$ . Se  $V$  è in  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$  ed è positivo, allora, mediante il metodo delle forme quadratiche non è difficile provare che  $A$ , con il dominio  $D(A)$  dettato dalla forma associata, genera un semigruppone analitico in  $L^2(\mathbb{R}^N)$ . È naturale a questo punto chiedersi se  $D(A)$  coincide con l'intersezione dei domini dei singoli addendi di  $A$  oppure no. Se il potenziale  $V$  verifica la condizione di oscillazione  $|DV| \leq \gamma V^{3/2}$ , con una costante  $\gamma$  abbastanza piccola, allora la risposta è affermativa e lo stesso risultato vale peraltro anche con  $p \neq 2$ . Ma c'è un esempio in [41] di un operatore di Schrödinger in  $L^2(\mathbb{R}^3)$  il cui potenziale verifica la condizione precedente con una costante  $\gamma$  non sufficientemente piccola e che genera un semigruppone con dominio che contiene propriamente l'intersezione dei domini. Chiaramente la condizione  $|DV| \leq \gamma V^{3/2}$  consente una crescita polinomiale, che non costituisce una piccola perturbazione della parte principale di  $A$ , ossia del Laplaciano.

L'esempio prodotto rivela il fatto che la teoria degli operatori a coefficienti illimitati presenta degli aspetti abbastanza diversi, e non ancora completamente chiari, da quelli della teoria classica.

L'obiettivo di questa tesi è lo studio di proprietà di regolarità di operatori ellittici del secondo ordine a coefficienti regolari, ma illimitati in  $\mathbb{R}^N$  o in suoi sottoinsiemi aperti illimitati.

Nel primo capitolo consideriamo il seguente operatore ellittico in forma divergenza

$$A = \sum_{i,j=1}^N D_i(q_{ij}D_j) + \langle F, D \rangle - V,$$

in  $L^p(\mathbb{R}^N)$ ,  $1 < p < \infty$  e studiamo condizioni sui coefficienti che assicurano che l'operatore genera un semigruppone fortemente continuo in  $L^p(\mathbb{R}^N)$  con caratterizzazione del dominio. In particolare, dimostriamo che, sotto opportune ipotesi sui coefficienti e sulle loro derivate, l'operatore  $(A, \mathcal{D}_p)$

genera un semigruppato, dove  $(\mathcal{D}_p, \|\cdot\|_{\mathcal{D}_p})$  è lo spazio di Banach così definito

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_p &:= \{u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N) : \langle F, Du \rangle \in L^p(\mathbb{R}^N), Vu \in L^p(\mathbb{R}^N)\}, \\ \|u\|_{\mathcal{D}_p} &:= \|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^N)} + \|\langle F, Du \rangle\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|Vu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Ciò implica risultati di regolarità ottimale per le soluzioni dell'equazione ellittica  $\lambda u - Au = f$ , poichè supponendo soltanto  $u, \lambda u - Au \in L^p(\mathbb{R}^N)$ , si ricava che  $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ ,  $\langle F, Du \rangle, Vu \in L^p(\mathbb{R}^N)$ . Un passo fondamentale nella dimostrazione di questo risultato è costituito da stime a priori della forma

$$\|u\|_{\mathcal{D}_p} \leq C(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|Au\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}),$$

con  $u \in \mathcal{D}_p$  e  $C$  costante indipendente da  $u$ . Quella per le derivate seconde è esattamente l'analogo della stima di Calderon-Zygmund per il Laplaciano e come questa è delicata da provare. Le stime precedenti implicano facilmente la chiusura dell'operatore  $(A, \mathcal{D}_p)$ . Segue anche in modo semplice la quasi-dissipatività di  $A$ , cioè la dissipatività di  $A - \omega$ , per un'opportuna costante  $\omega \in \mathbb{R}$ . Per applicare il teorema di generazione di Hille-Yosida, rimane solo da verificare la suriettività di  $\lambda - A$  da  $\mathcal{D}_p$  su  $L^p(\mathbb{R}^N)$ , per  $\lambda$  abbastanza grande. Ciò è provato mediante un procedimento di approssimazione che sfrutta casi già noti in letteratura. Tale procedimento distingue il caso  $p = 2$  da quello  $p \neq 2$ . Questo fatto tuttavia risulta abbastanza frequente. I risultati ottenuti sono ispirati dai lavori [41] e [37], ma offrono anche nuovi casi non presenti in letteratura.

Nel secondo capitolo l'attenzione è rivolta all'operatore in forma non divergenza

$$A = \sum_{i,j=1}^N q_{ij} D_{ij} + \langle F, D \rangle - V,$$

nello spazio delle funzioni continue e limitate in  $\bar{\Omega}$ ,  $C_b(\bar{\Omega})$ , dove  $\Omega$  è un aperto illimitato di  $\mathbb{R}^N$ . L'ambientazione in un aperto generico e non in tutto lo spazio costituisce un elemento di novità, giacchè il caso  $\Omega = \mathbb{R}^N$  è quello più largamente studiato in letteratura. Risulta altresì significativo l'approccio puramente analitico, visto che spesso risultati affini sono ottenuti mediante metodi probabilistici. Lo scopo del capitolo è quello di fornire delle ipotesi sui coefficienti di  $A$  affinché il problema di Neumann

$$(0.0.1) \quad \begin{cases} u_t(t, x) - Au(t, x) = 0 & t > 0, \quad x \in \bar{\Omega} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}(t, x) = 0 & t > 0, \quad x \in \partial\Omega \\ u(0, x) = f(x) & x \in \bar{\Omega} \end{cases}$$

abbia un'unica soluzione classica limitata il cui gradiente spaziale soddisfa delle stime opportune. Il metodo usato per provare l'esistenza di tale soluzione consiste nel considerare una successione di soluzioni di problemi di Neumann in aperti limitati invadenti  $\bar{\Omega}$ , e nel far vedere che tale successione converge. La scelta di condizioni al bordo di Neumann non permette di avere una successione monotona (contrariamente al caso di condizioni di Dirichlet). Dunque, lo strumento principale usato per provare la convergenza è rappresentato dalle stime classiche di Schauder. La funzione limite così ottenuta è l'unica soluzione classica limitata del problema (0.0.1) (l'unicità è assicurata dall'ipotesi che esista una funzione di Liapunov opportuna). Associando ad ogni dato iniziale la soluzione costruita, è possibile definire un semigruppato di operatori lineari e limitati  $(P_t)_{t \geq 0}$  in  $C_b(\bar{\Omega})$ , non fortemente continuo in generale (questo fatto è tipico per semigruppato associati ad operatori con coefficienti illimitati). Pertanto non si può definire il generatore in senso classico. Tuttavia, si può introdurre il cosiddetto generatore "debole", che nella situazione considerata, coincide con l'operatore di partenza.

La parte più importante del capitolo consiste nel provare delle stime sul gradiente del semigruppato. La prima stima è

$$(0.0.2) \quad |DP_t f(x)| \leq \frac{C_T}{\sqrt{t}} \|f\|_\infty \quad 0 < t < T, \quad x \in \bar{\Omega},$$

che viene provata con il metodo di Bernstein. Sostanzialmente, si tratta di applicare il principio del massimo alle funzioni  $z_n = u_n^2 + at|Du_n|^2$ , dove  $u_n$  è la successione approssimante  $P_t f$  e  $a$  è un opportuno parametro positivo. Per far questo, il punto cruciale consiste nell'assumere che  $\Omega$  sia convesso per dimostrare che ogni  $z_n$  ha derivata normale non positiva al bordo. Si ottengono così delle stime per  $|Du_n|$ , che al tendere di  $n$  all'infinito forniscono la stima (0.0.2). Nel caso di un dato iniziale più regolare, lo stesso metodo produce anche la seguente stima

$$|DP_t f(x)| \leq C_T(\|f\|_\infty + \|Df\|_\infty) \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in \bar{\Omega}$$

la quale implica che il dominio del generatore è contenuto in  $C_b^1(\bar{\Omega})$ . A differenza del caso  $L^p$ , in questo contesto non abbiamo la caratterizzazione del dominio, di conseguenza, anche i risultati di regolarità che se ne possono dedurre sono parziali. Oltre a stime *uniformi* nello stesso capitolo dimostriamo anche stime *puntuali* per il gradiente di  $P_t f$ . Queste ultime sono utili nello studio della realizzazione del semigruppato negli spazi  $L^p(\Omega, \mu)$ , dove  $\mu$  è la misura invariante di  $(P_t)$  (quando esiste).

Nel terzo capitolo proviamo stime uniformi per il gradiente delle soluzioni di problemi parabolici del tipo (0.0.1) in domini illimitati  $\Omega$ , con condizioni al bordo di Dirichlet. Se da un lato è immediato provare l'esistenza della soluzione classica limitata, per approssimazione, come nel caso precedente, dall'altro è più delicato provare la stima (0.0.2). La difficoltà consiste nel fatto che non è dato conoscere il valore al bordo delle funzioni alle quali si applica il metodo di Bernstein. Per superare tale ostacolo, mediante il confronto con un operatore unidimensionale, proviamo dapprima una stima al bordo per il gradiente della soluzione del problema in tutto  $\Omega$ . Quindi, con il metodo di Bernstein proviamo la stima anche all'interno di  $\Omega$ . C'è da notare che questa procedura richiede delle ipotesi ulteriori di regolarità per la soluzione. Per trattare il caso generale ricorriamo ancora una volta ad una tecnica di approssimazione.

Nel capitolo successivo, studiamo l'operatore unidimensionale  $Au = au'' + bu'$  in  $C_b(\mathbb{R})$ , spazio delle funzioni continue e limitate in  $\mathbb{R}$  e in  $C(\bar{\mathbb{R}})$ , spazio delle funzioni continue aventi limiti finiti a  $\pm\infty$ . Il risultato principale dimostra, in ciascuno dei due casi, che l'operatore genera un semigruppato con dominio costituito dall'intersezione dei domini di ogni addendo dell'operatore. Purtroppo il metodo impiegato resta genuinamente unidimensionale e conferma la difficoltà di avere informazioni sul dominio quando  $p = \infty$  e si è in più dimensioni.

Infine, l'ultimo capitolo raccoglie prevalentemente alcuni fatti noti su misure invarianti associate a semigruppato di Feller in  $C_b(\mathbb{R}^N)$ . La trattazione poteva essere fatta in maggiore generalità, ma è stato scelto un livello più vicino al caso concreto maggiormente ricorrente, che è quello di semigruppato di Feller generati da operatori differenziali ellittici del secondo ordine.

