Sunto

La Biomeccanica dei tessuti molli è recentemente diventata un importante argomento di ricerca in molti ambiti ingegneristici, bio-medici e anche matematici. I tessuti molli sono materiali biologici che possono subire deformazioni importanti (sia in ambito fisiologico che patologico) ed esibiscono un comportamento meccanico chiaramente nonlineare. In questo frangente lo studio delle deformazioni con metodi computazionali, come gli elementi finiti, può essere molto complesso. Infatti, risulta difficile conoscere con sicurezza le equazioni costitutive "giuste" per descrivere il comportamento del materiale e il software commerciale risulta spesso inadeguato per affrontare con sicurezza la risoluzione delle equazioni di bilancio corrispondenti. La nonlinearità geometrica dei modelli in questione complica di molto la realtà fisica del problema e spesso l'intuito dell'ingegnere può ben poco se non viene accompagnato da dettagliate e rigorose analisi matematiche. In questo frangente la possibilità di avere semplici soluzioni esatte delle equazioni di campo è uno strumento importante e privilegiato per aiutare la nostra comprensione dei vari fenomeni biomeccanici.

Il metodo semi-inverso è uno dei pochi strumenti a nostra disposizione per ottenere soluzioni esatte nell'ambito della teoria matematica della meccanica dei continui. Il metodo semi-inverso è stato utilizzato in modo sistematico già dai fondatori della teoria dell'elasticità lineare (si pensi alle famose soluzioni di Saint Venant [5, 6]), ma purtroppo questo uso è sempre avvenuto in modo euristico e completamente sganciato da una metodologia generale.

Sostanzialmente lo scopo del metodo semi-inverso è quello di fissare a priori una serie di assunzioni sui campi incogniti in una data teoria e di ridurre le equazioni di bilancio generali a sottoinsiemi semplificati di equazioni. Qui per azione semplificativa solitamente si intende che le equazioni di bilancio vengano ridotte ad un sistema di equazioni differenziali più semplici (per esempio da un sistema di equazioni alle derivate parziali si può passare ad un sistema differenziale ordinario, vedi [90]).

La presente Tesi, nei sei capitoli in cui si sviluppa, studia diversi aspetti di questo metodo ed altre metodologie ad esso, in un certo senso, correlate. I primi capitoli sono di carattere introduttivo mentre i rimanenti riportano i risultati ottenuti durante il mio dottorato ([26, 27, 28]).

Il Primo Capitolo è dedicato alle definizioni, ai simboli e ai concetti base della teoria dell'elasticità nonlineare. In questo capitolo si definisce la cinematica delle deformazioni finite, introducendo il concetto di corpo materiale deformabile e di deformazione. Si passa poi alle leggi di bilancio, alla definizione di sforzo (stress) e alla formulazione delle equazioni del moto. Vengono quindi affrontati i concetti

costitutivi come il concetto frame indifference, di isotropia materiale ed il concetto di iperelasticità. Si analizzano le restrizioni imposte ai modelli matematici per assicurare un comportamento meccanico ragionevole come le diseguaglianze empiriche di Truesdell e Noll.

Il Secondo Capitolo espone alcune specifiche leggi costitutive di materiali iperelastici. Uno dei problemi maggiormente incontrati nelle applicazioni in meccanica dei continui riguarda la scelta di modelli per la funzione energia potenziale per poter descrivere al meglio un comportamento meccanico dei materiali "reali". Qui descriviamo alcuni modelli (sia per materiali comprimibili che incomprimibili) che sono maggiormente utilizzati in letteratura, tra cui: il modello neo-Hookeano, il modello di Mooney-Rivlin, il mdello neo-Hookeano generalizzato, il modello di Hadamard, il modello di Blatz-Ko ed infine una funzione energia potenziale ottenuta come espansione in termini del tensore di Lagrange, utile quest'ultima per "piccole" ma finite deformazioni.

Il Terzo Capitolo presenta una piccola overview dell'uso del metodo semi-inverso in elasticità. Si riportano solo alcuni esempi che possono essere considerati tra i più rappresentativi e/o significativi, sottolineandone i punti di forza e di debolezza. Applichiamo il metodo inverso nella ricerca di soluzioni universali sia nel caso comprimibile (dove le sole deformazioni possibili sono quelle omogenee, [34]) sia nel caso incomprimibile (dove oltre alle deformazioni omogenee nella versione isocorica in letteratura sono state trovate altre "cinque famiglie" non omogenee [33, 119]).

Il risultato di Ericksen [34] dimostra che non ci sono altre deformazioni finite oltre quelle omogenee che sono controllabili per tutti i materiali comprimibili. L'impatto di tale risultato sulla teoria dell'elasticità nonlineare è stato fondamentale. Per molti anni c'è stata "la falsa impressione che le uniche deformazioni possibili per un corpo elastico sono quelle universali" (vedi [25]). Nello stesso tempo della pubblicazione del risultato di Ericksen, una considerevole attività di ricerca cercava di trovare soluzioni usando il metodo semi-inverso. Per i materiali elastici nonlineari isotropi ed incomprimibili il vincolo di incomprimibilità ha facilitato la ricerca delle soluzioni esatte rispetto ai materiali comprimibili. Ovvero è stato possibile trovare soluzioni esatte che non sono universali.

Negli anni più recenti ci si è molto interessati della possibilità di determinare classi di soluzioni esatte anche per i mezzi comprimibili. Una delle strategie adottate per trovare soluzioni esatte anche in quest'ultimo caso consiste nel prendere ispirazione dalle soluzioni non omogenee per materiali elastici nonlineari incomprimibili e cercare simili soluzioni per materiali comprimibili. Nel Quarto Capitolo ci si interessa proprio ai risultati ottenuti per materiali comprimibili in questo filone di ricerca. Si tratta di determinare quali materaili comprimibili possono sostenere deformazioni isocoriche quali ad esempio la "torsione pura", lo "shear puro assiale" e lo "shear rotazionale puro". Questi filoni di ricerca a nostro avviso possono essere molto fuorvianti. Per illustrare i nostri argomenti abbiamo considerato delle piccole perturbazioni su alcune classi di materiali comprimibili capaci di sostenere una particolare deformazione isocorica. Ne risulta che seppur la perturbazione può considerarsi "piccola" la variazione di volume che ne corrisponde può non essere trascurabile. Sottolineiamo quindi come non sia importante capire quali materiali elastici ed isotropi comprimibili possono subire ad esempio una torsione semplice ed isocorica, in quanto questi materiali in ogni caso sono inesistenti, ma piuttosto capire quale geometria accompagna l'azione di un momento torcente in un cilindro che viene idealizzato come elastico ed isotropo. Solo in questo modo i risultati ottenuti con il metodo semi-inverso possono essere capiti in modo profondo.

Tra gli esempi di applicazione del metodo semi-inverso riportiamo la ricerca di soluzioni per la deformazione di "anti-plane shear" e per la deformazione "radiale". Nel caso incomprimibile sappiamo che le equazioni di bilancio per un qualunque solido elastico sono compatibili con l'assunzione di antiplane shear solo nel caso di simmetria cilindrica. Non sappiamo dire nulla quando la geometria del corpo è più generale, in quanto in questo caso le equazioni di equilibrio si riducono ad un sistema sovradeterminato che non sempre risulta compatibile. Questo significa che in corpi generali la deformazione di anti-plane shear deve essere accoppiata a deformazioni secondarie. Ovvero anche se le condizioni al contorno risultano compatibili con una deformazione di antiplane shear, questa per essere ammissibile non può essere pura. Automaticamente nel corpo si crea uno stato tensionale complesso. Cercare modelli speciali per cui questo stato tensionale viene meno non permette di capire veramente cosa succede nella realtà.

Nel Quinto Capitolo dopo aver brevemente esposto i risultati già ottenuti in letteratura sulle deformazioni latenti (vedi [39, 63, 83]), presentiamo un nuovo esempio analitico e non approssimato della questione (vedi anche [27]). Consideriamo infatti un campo di deformazioni complesso per un cilindro elastico isotropo nonlineare ed incomprimibile: una combinazione di uno shear assiale, di una torsione e di uno shear rotazionale. Sotto la scelta di alcune condizioni al bordo, si dimostra come nel caso neo-Hookeano lo shear rotazionale è inessenziale indipendentemente se la torsione è presente. Se il materiale invece è idealizzato essere un materiale di Mooney-Rivlin, lo shear rotazionale nel caso di torsione non nulla è strettamente necessario. Applicando il campo di stress, trovato nel caso neo-Hookeano, all'estrazione di un tappo di una bottiglia di vino, congetturiamo infine che è richiesta più forza a "tirare" solamente che "tirare e torcere".

La tesi termina con un Sesto Capitolo nel quale una nuova applicazione del metodo semi-inverso è discussa (vedi anche [26]). La celebre formula di Eulero sull'instabilità in "buckling" trova il valore critico della forza assiale per un cilindro "snello" che diviene instabile. La sua derivazione poggia sull'assunzione di elasticità lineare e che la "snellezza" del cilindro sia infinitesima. Considerando un ordine in più per il paremetro che misura la "snellezza" del cilindro, troviamo la prima correzione non lineare alla formula di Eulero. Per fare questo, specializziamo le soluzioni esatte dell'elasticità nonlineare per la compressione omogenea di un cilindro "spesso" con estremi lubrificati all'interno della teoria dell'elasticità del terzo ordine. Questo esempio è particolarmente interessante perchè prevede l'utilizzo di una metodologia generale, anche se in un certo senso approssimata, che può essere applicata in diversi contesti.

Questi risultati dimostrano ancora una volta come la teoria dell'elasticità sia un argomento complesso dove è difficile scegliere le semplificazioni ragionevoli. I risultati ottenuti hanno inoltre un loro significato applicativo in ambito biomeccanico che sarà argomento delle nostre prossime ricerche.