Note di Matematica Vol. 15 - n. 1, 111-119 (1995)

k-ARCHI NEI PIANI DI BENZ

A. SONNINO

Abstract. *The purpose of this paper is to extend the notion of k–arc—usually defined in finite projective planes—to other incidence structures, such as finite Benz planes. Besides studying properties, some examples of complete k–arcs are determined in the three types of finite Benz planes.*

Nello studio delle strutture di incidenza $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \in)$, siano esse finite o infinite, non è priva di interesse la ricerca di particolari sottoinsiemi di $\mathcal{P}$ aventi con qualsiasi blocco $B \in \mathcal{C}$ un numero di punti di intersezione non maggiore di un intero prefissato. Esempi tipici sono costituiti dai k–archi e dai (k,n)–archi dei piani proiettivi (Desarguesiani e non), oppure dai k–archi e dalle k–calotte in $PG(r,q)$ con $r > 2$ (si vedano [8] e [9])

1. NOZIONI PRELIMINARI

Sia $\Gamma = (\mathcal{P}, \mathcal{C}, \in)$ una struttura di incidenza in cui valgono gli assiomi di piano di Benz. È ben noto che l'ordine di un piano di Benz coincide con l'ordine del piano affine derivato, e che un piano di Benz può essere, rispettivamente, di Möbius, di Laguerre, oppure di Minkowski, a seconda che non possegga rette singolari (classi di punti paralleli), che possegga una sola famiglia di rette singolari concorrenti in un punto, oppure che ne possegga due (cfr. [2], [3]).

Def. 1.1. *Sia $\Gamma = (\mathcal{P}, \mathcal{C}, \in)$ un piano di Benz. Un insieme $\mathcal{K}$ di punti due a due non paralleli è un "k–arco nel piano di Benz" (brevemente, k–arco di Benz) se contiene esattamente k punti ed è intersecato da ogni cerchio di $\mathcal{C}$ in al più tre punti.*

Nel seguito di questa trattazione, potremmo limitarci ad utilizzare semplicemente le denominazione "k–archi", senza specificare "di Benz", in tutti quei casi in cui non sia possibile confusione con gli usuali k–archi nei piani proiettivi.

Un concetto analogo a quello di k–arco di Benz è stato introdotto da Groh e Heise in [5], per i piani di Möbius infiniti e topologici. Per questioni connesse si veda anche [7].

2. PROPRIETÀ DEI k-ARCHI DI BENZ

Dato un k–arco di Benz $\mathcal{K}$, indicheremo con τ_i il numero di cerchi i–secanti $\mathcal{K}$, $(i = 0, 1, 2, 3)$.

Lemma 2.1. *Per ogni k–arco in un piano di Benz Γ, finito di ordine q, con $q = p^h$, p primo, valgono le seguenti relazioni:*

Se Γ è di Möbius,

$$\tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = q(q^2 + 1) \tag{1}$$
$$\tau_1 + 2\tau_2 + 3\tau_3 = kq(q + 1) \tag{2}$$
$$\tau_3 = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}. \tag{3}$$

Se Γ è di Laguerre,

$$\tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = q^3 \tag{4}$$
$$\tau_1 + 2\tau_2 + 3\tau_3 = kq^2 \tag{5}$$
$$\tau_3 = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}. \tag{6}$$

Se Γ è di Minkowski,

$$\tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = q(q^2 - 1) \tag{7}$$
$$\tau_1 + 2\tau_2 + 3\tau_3 = kq(q - 1) \tag{8}$$
$$\tau_3 = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}. \tag{9}$$

Dim. Se Γ è di Möbius la (1) conta i cerchi del piano, la (2) conta i cerchi che intersecano $\mathcal{K}$ ciascuno con molteplicità data dal numero di punti di intersezione, la (3) conta tutte le terne di punti di $\mathcal{K}$. Analogamente per i piani di Laguerre e di Minkowski. □

In seguito si considereranno esclusivamente piani di Benz con ordine potenza di un primo.

Lemma 2.2. *Per ogni k–arco di Benz $\mathcal{K}$ valgono le seguenti limitazioni:*
$k \leq q + 3$ *in un piano di Möbius;*
$k \leq q + 2$ *in un piano di Laguerre;*
$k \leq q + 1$ *in un piano di Minkowski.*

Dim. Fissati ad arbitrio due punti $a, b \in \mathcal{K}$, si ponga $\delta = 1$ se il piano è di Möbius, $\delta = 0$ se è di Laguerre, $\delta = -1$ se è di Minkowski. Un k–arco ha il massimo numero di punti quando ciascuno dei $q + \delta$ cerchi per a, b lo interseca in esattamente un altro punto. Considerando anche a e b si ha la tesi. □

Def. 2.1. Un k–arco di Benz si dice massimale se $k = q + \delta + 2$, con δ come nel lemma 2.2.

Nel caso dei piani di Laguerre, la limitazione del lemma 2.2 si può migliorare, come dimostra la seguente

Prop. 2.1. *In un piano di Laguerre non esistono k–archi massimali.*

Dim. Vi sono $q + 1$ rette singolari che formano una partizione del piano. Un eventuale $(q + 2)$–arco dovrebbe necessariamente avere almeno una coppia di punti su una delle rette singolari, ma ciò contraddirebbe la def. 1.1. Quindi $k \leq q + 1$. □

Sia $\Gamma(q) = (\mathcal{P}, \mathcal{C}, \in)$ un piano di Möbius finito di ordine q. Per ogni punto $p \in \mathcal{P}$ la struttura derivata $\Gamma_p(q)$ è un piano affine di ordine q, che è naturalmente immerso in un piano proiettivo di ordine q.

Prop. 2.2. *Se in un piano di Möbius finito di ordine q esiste un k–arco di Benz massimale, allora $q = 2^h$.*

Dim. Indichiamo con $\Gamma_p{}^*$ il piano proiettivo di ordine q che si ottiene da Γ_p, e con $\mathcal{K}$ un $(q+3)$–arco di Benz di $\Gamma(q)$. L'insieme $\mathcal{K}\backslash\{p\}$, $p \in \mathcal{K}$, costituisce un $(q+2)$–arco (proiettivo) di $\Gamma_p{}^*$, e quindi, come è noto, q deve essere pari. Per le ipotesi precedentemente fatte, è $q = 2^h$. □

Lemma 2.3. *In un piano di Möbius $\Gamma(q)$ un k–arco $\mathcal{K}$ è massimale se, e solo se, $\tau_2 = 0$.*

Dim. Se $\tau_2 = 0$, l'asserto segue dalla dimostrazione del lemma 2.2. Infatti, per ogni coppia di punti di $\mathcal{K}$ passano esattamente $q + 1$ cerchi, e nessuno di essi può, ovviamente, essere i–secante, $i < 3$. Viceversa, siano $\mathcal{K}$ un $(q + 3)$–arco e $p \in \mathcal{K}$. Nella struttura derivata Γ_P l'insieme $\mathcal{K}\backslash\{p\}$ costituisce un $(q + 2)$–arco il quale ammette soltanto rette esterne oppure bisecanti. Ciò implica la non esistenza di cerchi bisecanti, $\forall p \in \mathcal{K}$. □

Come conseguenza del lemma 2.3, le (1), (2), (3) costituiscono un sistema di tre equazioni lineari in tre incognite, il quale ammette un'unica soluzione. Resta così provato il

Lemma 2.4. *Ad ogni $(q+3)$–arco di un piano di Möbius $\Gamma(q)$, con $q = 2^h$, $h > 0$ intero, sono associati i seguenti paramentri:*

$$\tau_0 = \frac{(q-2)(-3-4q+q^2)}{3} \tag{10}$$

$$\tau_1 = \frac{(q-2)(q+1)(q+3)}{2} \tag{11}$$

$$\tau_2 = 0 \tag{12}$$

$$\tau_3 = \frac{(q+1)(q+2)(q+3)}{6}. \tag{13}$$

Cor. 2.1. *Un piano di Möbius di ordine 4 non ammette 7–archi.*

Dim. Per la prop. 2.2, e per la (10), $\tau_0 \geq 0 \Rightarrow q \geq 8$. □

Con ragionamenti analoghi a quelli del lemma 2.2 è possibile generalizzare il lemma 2.4.

Prop. 2.3. *In un piano di Benz finito di ordine q ad ogni k–arco $\mathcal{K}$ è possibile associare una ed una sola quaterna $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3$. Tale quaterna dipende, una volta scelto il tipo di piano, esclusivamente da k e q.*

Dim. Per il lemma 2.1, τ_3 è determinato da k. Siano $a, b \in \mathcal{K}$; il numero di cerchi 3–secanti per a, b uguaglia quello dei punti di K distinti da essi. Sia δ come nel lemma 2.2; poniamo $\rho = q + \delta - (k - 2)$. Dato che ρ non dipende dalla coppia di punti di $\mathcal{K}$, il valore di τ_2 si determina semplicemente ponendo $\tau_2 = \rho\binom{k}{2}$. Le (1) e (2) costituiscono ora un sistema di due equazioni lineari nelle due incognite τ_0 e τ_1, così le (4), (5) e le (7), (8). □

Cor. 2.2. *In un piano di Möbius finito di ordine q ogni $(q+2)$–arco è caratterizzato dai parametri:*

$$\tau_0 = \frac{(q-3)(q-2)(2q+1)}{6} \tag{14}$$
$$\tau_1 = \frac{(q-2)(q+1)(q+2)}{2} \tag{15}$$
$$\tau_2 = \frac{(q+1)(q+2)}{2} \tag{16}$$
$$\tau_3 = \frac{q(q+1)(q+2)}{6}. \tag{17}$$

Dim. Siano $\mathcal{K}$ un $(q+2)$–arco ed a, b due suoi punti. Per ciascuno dei q punti di $\mathcal{K}$ distinti da a, b passa uno ed un solo cerchio 3–secante contenente a e b. Siccome i cerchi per a, b sono in numero di $q+1$, vi è uno ed un solo cerchio 2–secante per a e b. Data l'arbitrarietà della scelta di $a, b \in \mathcal{K}$, per ogni coppia di punti di $\mathcal{K}$ passa uno ed un solo cerchio 2–secante. Il valore di τ_2 si determina, quindi, contando le coppie di punti di $\mathcal{K}$, e per le (1), (2), (3), anche τ_0, τ_1 e τ_3 sono determinati.

3. k-ARCHI DI BENZ COMPLETI

Dim. Sia Γ un piano di Benz. Un k–arco $\mathcal{K}$ si dice completo se non esiste in Γ alcun h–arco $\mathcal{H}$ tale che $\mathcal{H} \supset \mathcal{K}$ $(h > k)$.

Lemma 3.1. *Un k–arco di Benz $\mathcal{K}$ è completo se, e solo se, per ogni punto di $\Gamma(q)\backslash\mathcal{K}$, che non appartenga ad alcuna retta singolare per un punto di $\mathcal{K}$, passa almeno un cerchio 3–secante.*

Dim. Se esistesse un punto $P \in \Gamma(q)\backslash\mathcal{K}$ per il quale non passano cerchi 3–secanti, sarebbe possibile aggiungerlo a $\mathcal{K}$, ottenendo così un $(k+1)$–arco di Benz. □

Descriviamo ora un metodo empirico per costruire k–archi completi in piani di Möbius.

Sia $\Sigma \subset PG(3, q)$ un ovoide. Come è noto, ad esso è associato un piano di Möbius $\Gamma(q)$ i cui punti sono i punti di Σ, ed i cui cerchi sono le sezioni piane di Σ ottenute mediante piani non tangenti. Evidentemente, tre punti costituiscono un 3–arco di Benz, che indicheremo con $\mathcal{K}(3)$. Detto π il piano determinato da tali punti, è chiaro che tale 3–arco si può estendere con un punto di $\Sigma\backslash(\pi \cap \Sigma)$, ottenendo così un 4–arco $\mathcal{K}(4)$, i cui punti denotiamo con $p_1, [0]p_2, [0]p_3, [0]p_4$. Detto $\pi_{i,j,s}$ il piano individuato da p_i, p_j, p_s, consideriamo la famiglia

$$\Pi_4 = \{\pi_{i,j,s} : p_i, p_j, p_s \in K(4), i, j, s \in \{1, \dots, 4\}, i \neq j \neq s, i \neq s\}$$

di piani, e l'insieme

$$\mathcal{F}_4 = \bigcup_{i,j,s=1}^{4} (\pi_{i,j,s} \cap \Sigma).$$

Se $\mathcal{F}_4$ è contenuto propriamente in Σ, cioé se $\Sigma\backslash\mathcal{F}_4 \neq \emptyset$, allora è possibile aggiungere un qualsiasi punto di $\Sigma\backslash\mathcal{F}_4$ a $\mathcal{K}(4)$ per ottenere un 5–arco. In generale, dato un k–arco di Benz, si può tentare di ripetere lo stesso procedimento con $i, j, s \in \{1, \dots, k\}$ e considerando

$$\Pi_k = \{\pi_{i,j,s} : p_i, p_j, p_s \in K(k), i \neq j \neq s, i \neq s\},$$
$$\mathcal{F}_k = \bigcup_{i,j,s=1}^{k} (\pi_{i,j,s} \cap \Sigma),$$

per ottenere, eventualmente, un $(k+1)$–arco. Ad un certo punto non si potrà più procedere oltre; si sarà così determinato un k–arco completo.

Mostriamo ora qualche primo esempio di k–arco completo.

Es. 3.1. Un piano di Möbius di ordine 2 è esso stesso, banalmente, un 5–arco di Benz massimale, e quindi completo.

Es. 3.2. Con le notazioni precedenti, sia Σ un ovoide di $PG(3,3)$ (per ottenere un piano di Möbius $\Gamma(3)$); si scelgano $p_1, p_2, p_3 \in \Sigma$. Il piano $\pi_{1,2,3}$ contiene un punto $p^* \neq p_1, p_2, p_3$ in Σ, e tale punto va scartato in quanto non può coesistere in un k–arco di Benz con p_1, p_2, p_3. Dato che $|\Sigma \backslash \pi_{1,2,3}| = 10 - 4 = 6$, è possibile aggiungere un punto $p_4 \in \Sigma \backslash \pi_{1,2,3}$ ai primi tre, ottenendo un 4–arco. Successivamente, combinando in ogni modo possibile in terne i punti p_1, p_2, p_3, p_4, si determinano in $PG(3,3)$ esattamente quattro piani, e ciascuno di essi contiene esattamente un altro punto di Σ distinto dalla terna che lo genera. Alla fine si saranno scartati p_1, p_2, p_3, p_4 ed al più altri quattro punti che con i primi quattro costituiscono l'insieme $\mathcal{F}_4$ precedentemente descritto. Essendo $\Sigma \backslash \mathcal{F}_4 \neq \emptyset$, si può aggiungere all'insieme $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ un ulteriore punto $p_5 \in \Sigma \backslash \mathcal{F}_4$, ottenendo un 5–arco che, per la prop. (2.2), è completo in quanto, in un piano di Möbius di ordine 3, $k \leq 5$.

Nel costruire questo esempio, si determina dapprima un tetraedro con vertici $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, poi si eliminano gli altri punti di Σ che giacciono sulle "facce" di tale tetraedro. Rimangono due punti fra i quali scegliere p_5. Ciò suggerisce un modo per contare il numero $\mathcal{N}$ di 5–archi distinti in $\Gamma(3)$.

Dato che $|\Sigma| = 10$, scegliendo i vertici in Σ è possibile costruire $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6 = 4320$ tetraedri. D'altra parte, poiché l'ordine dei quattro punti che definiscono un tetraedro è irrilevante, dividendo quest'ultimo numero per 4! si ottiene precisamente il numero di tetraedri distinti. Per ciascun tetraedro si hanno due 5–archi distinti, ma ogni 5–arco contiene cinque tetraedri distinti. Ciò implica che $\mathcal{N} = 2 \cdot \dfrac{4320}{5 \cdot 4!} = \dfrac{1728}{4!}$.

È possibile esplicitare la costruzione dell'es. 3.2 utilizzando la nozione di sistema di Steiner [11]. Un piano di Möbius di ordine 3, infatti, coincide con l'unico sistema di Steiner $S(3,4,10)$. Considerando $\Gamma(3) = S(3,4,10)$ su $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, i suoi trenta blocchi (cerchi) si ottengono a partire dai blocchi iniziali $\{1,2,4,5\}$, $\{1,2,3,7\}$, $\{1,3,5,8\}$, sotto l'azione del gruppo C_{10}, che opera come $j \mapsto j+1 \pmod{10}$. Due 5–archi di tale piano di Möbius sono $\{1,2,4,6,7\}$ e $\{3,5,8,9,10\}$. Osserviamo che tali 5–archi sono ciascuno il complemento dell'altro in $\Gamma(3)$, come del resto si poteva verificare a priori utilizzando il cor. 2.2. Infatti, per $q = 3$ la (14) dà $\tau_0 = 0$, e quindi non esistono cerchi completamente contenuti nel complemento di un 5–arco. Dato che i cerchi sono costituiti da quattro punti, il complemento di un 5–arco è esattamente un altro insieme di cinque punti dei quali al più tre conciclici. In più, sotto l'azione di C_{10} e partendo dai due 5–archi precedentemente detti, si ottiene un insieme di venti 5–archi distinti in $\Gamma = S(3,4,10)$. Tale insieme è ripartito in due orbite di lunghezza 10, ed ogni 5–arco di un'orbita ha il complementare nell'altra.

Il fatto che sia possibile effettuare una partizione del piano di Möbius di un ovoide in $PG(3,3)$ mediante una coppia di 5–archi disgiunti lo distingue da tutti gli altri piani di Möbius di ordine q, per ogni $q = p^h \neq 3$. Se si cercano infatti i piani di Möbius che ammettono una partizione in insiemi disgiunti, tutti di cardinalità $k = q + 2$, si perviene al seguente

Lemma 3.2. *Un piano di Möbius può ammettere una partizione in s insiemi disgiunti di cardinalità $q + 2$ se e solo se $q = 3$ ed $s = 2$.*

Dim. Se $q = 3$, si ha l'es. 3.2. Viceversa, l'asserto è verificabile esclusivamente per le coppie di interi (q, s), $q = p^h$ tali che

$$q^2 + 1 = s(q + 2). \tag{18}$$

Infatti, $q^2 + 1 \equiv 5 \pmod{q + 2}$, e la (18) ha una soluzione intera soltanto se $(q + 2)|5$, ossia se $q = 3$, e quindi $s = 2$. □

4. k-ARCHI DI BENZ E k-ARCHI IN $PG(3, q)$

La nozione di k–arco in un piano di Benz è collegata con quella di k–arco in $PG(3, q)$. Riportiamo la definizione di k–arco in tali spazi come è data in [13], insieme ad alcune proprietà riguardanti le cubiche sghembe. Per le dimostrazioni, e per tutti i dettagli al riguardo, si rimanda il lettore a [6], [9], [12]. [14].

Def. 4.1. Un k–arco di $PG(3, q)$ è un insieme di k punti mai quattro dei quali appartengono al medesimo piano.

Considerando esclusivamente piani di Benz su superfici quadriche in $PG(3, q)$, la relazione fra la def. 1.1 e la def. 4.1 è evidente. Infatti, un k–arco di Benz contenuto in un siffatto piano di Möbius, Laguerre, oppure Minkowski, è anche un k–arco proiettivo in $PG(3, q)$. Viceversa, non è necessariamente vero che un k–arco di $PG(3, q)$ contenuto in una superficie quadrica associata ad un piano di Benz sia un k–arco di Benz. Infatti, in un k–arco proiettivo potrebbero esistere due punti appartenenti ad una stessa retta singolare, in contraddizione con la def. 1.1. Per quanto riguarda la completezza, occorre osservare che un k–arco proiettivo completo, contenuto in una superficie associata ad un piano di Benz, e tale che non vi siano due punti appartenenti ad una stessa retta singolare, è un k–arco di Benz completo. Anche in questo caso il viceversa non è vero. Infatti, un k–arco proiettivo costituito dai punti di un k–arco di Benz completo potrebbe completarsi con punti esterni alla superficie in questione.

Es. 4.1. Se q è dispari, le cubiche sghembe tracciate su di un particolare cono (cfr. [9], lemmi 21.1.6 pag. 237 e 21.1.7 pag. 238) contengono tutti e soli i q–archi di Benz del piano di Laguerre associato.

Si può esplicitare la costruzione di questo esempio considerando, in $PG(3, q)$, l'insieme

$$\mathcal{C} = \{P(t) = (t^3, t^2, t, 1) : t \in GF(q)\} \cup \{P(\infty) = (1, 0, 0, 0)\}.$$

Fissato $\theta \in GF(q) \cup \{\infty\}$, le equazioni del cono che ha come vertice $P(\theta)$ e contiene $\mathcal{C}$ sono:

$$\begin{cases} x = w(t^3 - \theta^3) + \theta^3 \\ y = w(t^2 - \theta^2) + \theta^2 \\ z = w(t - \theta) + \theta, \end{cases}$$

$w \in GF(q) \cup \{\infty\}$. Ad esempio, se scegliamo come vertice il punto $P(0)$, abbiamo il cono di equazione $y^2 - xz = 0$. In tal modo si è ottenuto, per ognuna delle $q+1$ scelte possibili di θ, il piano di Laguerre che ammette $\mathcal{C} \setminus P(\theta)$ come q–arco.

L'esempio 4.1 conduce a migliorare il risultato del lemma 2.2 nel caso del cono in $PG(3,q)$.

Lemma 4.1. *Per i k–archi di Benz in piani di Laguerre su coni quadrici di $PG(3,q)$, con q dispari, vale la limitazione $k \leq q$.*

Dim. Per quanto visto sui legami fra k–archi in $PG(3,q)$ e k–archi di Benz dei piani di Laguerre associati a coni quadrici, ogni k–arco di Benz del cono è un k–arco dello spazio proiettivo ambiente. Per i teoremi che si trovano in [9], 21.2.3 e 21.2.4 pag. 243, i $(q+1)$–archi di $PG(3,q)$ sono tutte e sole le cubiche sghembe, e per la seconda parte del lemma 21.1.7 pag. 238, uno dei punti della cubica è sempre il vertice del cono, ossia non appartiene al piano di Laguerre. Ne segue l'asserto. □

Una conseguenza del lemma 21.1.6 pag. 237 in [9] è la seguente

Prop. 4.1. *In qualsiasi piano di Möbius associato ad un ovoide di $PG(3,q)$, $q > 5$ dispari, i k–archi di Benz soddisfano la limitazione $k < q+1$.*

Dim. Per il lemma 4.1, una cubica sghemba è tracciabile esclusivamente su di una quadrica rigata. D'altra parte, per i teor. 21.2.3 e 21.2.4 pag. 243 in [9], e se $q > 5$ è dispari, non esistono in $PG(3,q)$ dei $q+1$–archi (massimali) che non siano cubiche sghembe.

La teoria dei k–archi e delle cubiche sghembe in $PG(3,q)$ cambia notevolmente se $q = 2^h$. Ad esempio, è ben noto [6] che, se $q = 2^h$, $m(3,q) = max(5, q+1)$, ed inoltre tutti i $(q+1)$–archi sono cubiche sghembe se, e solo se, $q = 2, 4, 8, 16$, *oppure* 64. Per la dimostrazione di questa proprietà, e per tutti i dettagli, si veda anche [9], teor. 21.3.17 pag. 252. Come conseguenza di ciò, se $q = 2^h > 5$, le condizioni del lemma 4.1 e della prop. 4.1 non sono più necessariamente verificate, a meno che non sia $q = 8, 16, 64$.

Per le note proprietà delle curve razionali normali in $PG(3,q)$, in relazione alle superfici quadriche rigate, è possibile costruire il seguente

Es. 4.2. Se q è pari, una cubica sghemba che sia tracciata su di una quadrica iperbolica, e tale che ogni retta di ciascuna delle due schiere la incontri in al più un punto, fornisce un esempio di k–arco di Benz massimale (cfr. [9], lemmi 21.1.7 pag. 238 e 21.1.8 pag. 239).

La limitazione della prop. 4.1 si può migliorare, se q è dispari e "abbastanza grande", utilizzando un noto teorema di J. A. Thas [14], che qui riportiamo nella versione 3–dimensionale.

Teor. 4.1. *In $PG(3,q)$, con q dispari, ogni k–arco per cui valga la condizione $k > q - \frac{\sqrt{q}}{4} + \frac{11}{4}$ è contenuto in un'unica cubica razionale.*

Supponendo che sia $q = p^n$ dispari, $q > 5$, si dimostra il seguente

Lemma 4.2. *Per ogni k–arco in un piano di Möbius $\mathcal{M}(Q)$ di ordine q, con Q quadrica ellittica, si ha*

$$k \leq q - \frac{\sqrt{q}}{4} + \frac{11}{4}.$$

Dim. Sia Q una quadrica ellittica di $PG(3,q)$. Sia inoltre $\mathcal{K}$ un k–arco di Benz tale che $k > q - \frac{\sqrt{q}}{4} + \frac{11}{4}$. Dato che $\mathcal{K}$ deve essere contenuto in una cubica sghemba Γ, si avrebbe $|\Gamma \cap Q| > 6$, e, per il teorema di Bézout, $\Gamma \subset Q$. Questo è impossibile per il lemma 21.1.6 pag. 237 in [9], da cui l'asserto. □

4. PARTIZIONE DI $PG(3,q)$ IN OVOIDI

È noto che, per ogni $q = p^h$, $PG(3,q)$ ammette una partizione in $q+1$ ovoidi disgiunte [4, 10].

$PG(3,q)$ ammette una proiettività ciclica, il ciclo di Singer σ, che agisce transitivamente sui punti e sui piani dello spazio. Se si denotano i punti di $PG(3,q)$ con $\{0,1,\ldots,q^3+q^2+q\}$ ed i piani con π_j, $j = 0,1,\ldots,q^3+q^2+q$, il blocco iniziale π_0 è determinato da un $\left(\frac{q^4-1}{q-1}, \frac{q^3-1}{q-1}, \frac{q^2-1}{q-1}\right)$ insieme di differenze. Inoltre, σ agisce sui punti e sui piani come $\sigma : j \mapsto j+1 \pmod{\frac{q^4-1}{q-1}}$ [8]. Dato che $<\sigma>$ ¿ il gruppo ciclico di ordine $q^3+q^2+q+1 = (q+1)(q^2+1)$, esso ammette $<\sigma^{q+1}>$ come sottogruppo di ordine q^2+1; si dimostra che l' orbita di un punto di $PG(3,q)$ sotto l'azione di σ^{q+1} è un'ovoide della suddetta partizione [4].

Utilizzando questa proprietà di $PG(3,q)$, è possibile trovare k–archi di Benz completi in certi piani di Möbius con notevole rapidità, come mostra il seguente

Es. 5.1. Fissato $q = 8$, siano $\{0,1,2,\ldots,584\}$ i punti di $PG(3,8)$, e sia π_0 il \piano iniziale" che si trova nell'appendice di [1], pag. 156. Gli altri piani sono $\pi_r = \pi_0\sigma^r$ $(r = 1,2,\ldots,584)$. Sia inoltre $\mathcal{O}$ l'ovoide orbita del punto 0 sotto l'azione di $\sigma^{q+1} = \sigma^9$. Dato che $<\sigma>$ agisce transitivamente sui punti e sui piani di $PG(3,8)$, resta determinato l'insieme $\mathcal{C}$ dei cerchi del piano di Möbius su $\mathcal{O}$; precisamente, $\mathcal{C} = \{\mathcal{O} \cap \pi_r : 0 \leq r < 585,\ |\mathcal{O} \cap \pi_r| = 9\}$. L'insieme

$$\mathcal{K} = \{0,9,18,36,72,171,207\}$$

è un 7–arco di Benz completo in $\mathcal{O} \subset PG(3,8)$, e per ciascuna delle 35 terne $\{(i,j,s) : i,j,s \in \mathcal{K}\}$ si può determinare l'intero r per cui $\mathcal{O} \cap \pi_r$ è un cerchio 3–secante di $\mathcal{K}$. Per dimostrare che $\mathcal{K}$ è completo, basta solamente verificare che l'insieme $\mathcal{F}_7$, definito come nel §3, ricopre tutto $\mathcal{O}$.

L'autore ringrazia la Prof. M. J. de Resmini, il Prof. G. Korchmáros, ed il referee per alcuni preziosi suggerimenti.

REFERENCES

[1] L.D. BAUMERT, *Cyclic Difference Sets*, Lecture Notes in Mathematics, 182. Springer–Verlag, 1971.

[2] A. BEUTELSPACHER, *Einführung in die endliche Geometrie*, volume II. Bibliographisches Institut–Wissenschaftsverlag, 1983.

[3] F. BUEKENHOUT, Les plans de Benz: une approche unifiée des plans de Möbius, Laguerre et Minkowski. *J. Geometry*, 17:61–67, 1981.

[4] G.L. EBERT, Partitioning projective geometries into caps. *Can. J. Math.*, 37:1163–1175, 1985.

[5] H. GROH, W. HEISE, 3–ovals in Möbius planes. *Geom. Dedicata*, 1:426–433, 1973.

[6] B.R. GULATI, E.G. KOUNIAS, On bounds useful in the theory of symmetrical factorial designs. *J. Roy. Statist. Soc., B*, 32:123–133, 1970.

[7] H. HALDER, W. HEISE, On the existence of finite chain–m–structures and k–arcs in finite projective spaces. *Geom. Dedicata*, 3:483–486, 1974.

[8] J.W.P. HIRSCHFELD, *Projective Geometries Over Finite Fields*, Clarendon Press, Oxford, 1979.

[9] J.W.P. HIRSCHFELD, *Finite Projective Spaces of Three Dimensions*, Clarendon Press, Oxford, 1985.

[10] B.C. KESTENBAND, Partitioning projective geometries that are disjoint unions of caps. *Can. J. Math.*, 32:1299–1305, 1980.

[11] C.C. LINDNER, A. ROSA, Steiner Quadruple Systems. A survey. *Discr. Math.*, 21:147–181, 1976.

[12] H. LÜNEBURG, *Translation Planes*, Springer–Verlag, Berlin, 1980.

[13] B. SEGRE, Curve razionali normali e k–archi negli spazi finiti *Ann. Mat. Pura Appl., IV Ser.*, 39:357–379, 1955.

[14] J.A. THAS, Normal rational curves and k–arcs in Galois spaces. *Rend. Mat.* (6), 1:331–334, 1968.

Received September 25, 1996
A. SONNINO
Dipartimento di Matematica
Università della Basilicata
Via Nazario Sauro 85
85100 Potenza
ITALIA
E-mail: sonnino@unibas.it