Note di Matematica Vol. I, 137-153 (1981)

SU ALCUNE PROPRIETA' RICORSIVE LEGATE AL CONCETTO DI DENSITA' (°)

Carla CROCIANI (°°)

Summary. *In this paper we use the concept of density as a measure for subsets of* ω *, and we study the relations between density and recursive properties of subsets of* ω.

In § I we show that the set of those real numbers which express the density of a recursive set coincides with the set of weakly recursive real numbers (between 0 and 1, of course); in § II we investigate those sets whose density is recursively constant, i.e. those sets which have the same density of any recursive image of themselves; in § III we introduce the concept of pseudo-immune set and in § IV we analize the relations between our notion of density and the concept "at least dense as".

O-INTRODUZIONE.

La cardinalità come misura per insiemi è di scarsa utilità per la

(°) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del GNSAGA.

(°°) Istituto di Matematica, Siena.

classificazione dei sottoinsiemi di ω , non permettendo alcuna distinzione fra sottoinsiemi finiti (o quantomeno fra sottoinsiemi infiniti non cofiniti). Un senso più naturale di misura vorrebbe invece i pari metà dei naturali ed il triplo dei multipli di sei o, in altro contesto, che le uscite di croce dopo "infiniti" lanci di una moneta fossero il triplo di quelle di quattro dopo "infiniti" lanci di un dado.

Proprio in ambito probabilistico [2] è utilizzata un'altra misura per sottoinsiemi di ω , definita come limite a cui tende la successione il cui n--simo termine è il rapporto tra il numero degli elementi compresi tra 0 ed n ed n stesso. Scopo del presente lavoro è quello di studiare i rapporti tra tale misura, a cui nel seguito ci riferiremo con il termine densità, e le proprietà ricorsive dei sottinsiemi di ω .

Nel I paragrafo dimostriamo che l'insieme dei reali (compresi tra 0 ed 1) che sono densità di un insieme decidibile coincide con l'insieme dei reali debolmente ricorsivi. Non essendo poi la densità di un insieme un concetto ricorsivamente invariante, dedichiamo il II paragrafo alla ricerca delle proprietà ricorsive che un insieme deve possedere affinché le sue immagini isomorfe abbiano la sua stessa densità. In particolare studiamo alcune classi di insiemi che hanno "densità costante" 0, e, per classificare meglio gli insiemi aventi densità 0, definiamo il concetto di densità rispetto ad una funzione totale ricorsiva. Infine, dopo il III paragrafo in cui introduciamo un'altra classe di insiemi, che chiamiamo pseudoimmuni, analizziamo, nel IV, i rapporti tra la densità ed il concetto di "almeno denso quanto" studiato, ad esempio da Rice in [4].

I - LA DENSITA' ED I REALI RICORSIVI.

Definizione 1.1. Sia A un sottinsieme di ω . Diciamo

$$d'A = \liminf_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Card}(\{0,1,\dots,n-1\}\cap A}{n} \quad \textit{densità inferiore} \quad \text{e}$$

$$d''A = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{\mathrm{Card}(\{0,1,\dots,n-1\}\cap A)}{n}$$ *densità superiore* di A.

Nel seguito comunque ci occuperemo prevalentemente di quei sottinsiemi A di ω per i quali $d'A = d''A$; per questi insiemi definiamo allora la *densità* nel seguente modo:

$$dA = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Card}(\{0,1,\dots,n-1\}\cap A}{n}$$

E' facile costruire insiemi per i quali non esiste la densità, che risulta quindi essere definita su di un sottinsieme proprio di $\mathcal{P}(\omega)$. Per brevità indicheremo in seguito con **n** sia l'insieme $\{0,1,\dots,n-1\}$, sia il suo cardinale adottando quindi per indicare la densità la scrittura $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Card}(n\cap A)}{n}$

Definizione 1.2. r è un *reale debolmente ricorsivo* se esiste una funzione totale ricorsiva g a valori razionali tale che

$$r = \lim_{n\to\infty} g(n).$$

TEOREMA 1.3. *Sia* r *un reale tra* 0 *ed* 1; *esiste un insieme decidibile* D *tale che* dD=r sse r *è debolmente ricorsivo.*

Dim.($\Rightarrow$) Ovvia, in quanto basta definire g ponendo

$$g(n) = \frac{\mathrm{Card}(n\cap D)}{n}$$

($\Leftarrow$) Sia r un reale ricorsivo ed $(r_n)_{n\in\omega}$ una successione di razionali tendente ad r. Costruiamo l'insieme D nel seguente modo:

$0 \in D$ sse $|1 - r_o| \leqslant |r_o|$. Proseguendo induttivamente

$$n \in D \text{ sse } \left| \frac{\mathrm{Card}(n \cap D) + I}{n + 1} - r_n \right| \leqslant \left| \frac{\mathrm{Card}(n \cap D)}{n + 1} - r_n \right|$$

E' chiaro che $\mathrm{Card}(n \cap D)$ è il numero degli elementi minori di n posti in D; quindi, in termini intuitivi, poniamo il numero n in D se in tal modo il rapporto $a_n = \frac{\mathrm{Card}((n+1) \cap D)}{n + 1}$ si avvicina maggiormente ad r_n che non altrimenti.

Dimostriamo ora che per ogni razionale $\frac{p}{q}$, se $r > \frac{p}{q}$, allora anche $dD \geqslant \frac{p}{q}$. Infatti se $r > \frac{p}{q}$, esiste un n_o tale che per ogni $n > n_o$, $r_n > \frac{p}{q}$. Dimostriamo che esiste un n'_o tale che per ogni $m > n'_o$, $a_m > \frac{p}{q}$. Infatti, anche nell'ipotesi più sfavorevole, quella in cui $a_{n_o} = 0$, dovremo, in base alla definizione di D, porre i successivi $\frac{n_o\, p}{q-p}$ numeri in D; quindi, posto $n'_o = n_o + \frac{n_o\, p}{q-p}$, risulta $a_{n'_o} = \frac{p}{q}$, e poiché $\forall\, m > n_o$ si ha $r_m > \frac{p}{q}$, anche $a_m > \frac{p}{q}$.

Analogamente si dimostra $\forall \frac{p}{q} \in Q$, se $r < \frac{p}{q}$, allora $dD \leqslant \frac{p}{q}$; dalle due disuguaglianze si ottiene che $dD = r$.

Una generalizzazione del risultato precedente è data dal

TEOREMA 1.4. *Siano* r *ed* s, $r < s$, *due reali debolmente ricorsivi; esiste un insieme decidibile* D *tale che* $d'D = r$ *ed* $d''D = s$.

La dimostrazione procede in modo analogo alla precedente, facendo però si che $\frac{\mathrm{Card}(m \cap D)}{m}$ approssimi alternativamente i valori della successione convergente ad r e quelli della successione convergente ad s.

Per una estensione del Teorema 1.4 agli insiemi creativi ed agli insiemi semplici ci è utile il seguente:

LEMMA 1.5. *Esistono un insieme creativo ed un insieme semplice con densità* 0.

Dim. Per quanto riguarda l'esistenza di un semplice con densità 0, si consideri $C = \{ \tau(x,y) : y \in W_x$, e y è il primo elemento nella enumerazione di W_x, maggiore di $x^2 \}$; ovviamente C è enumerabile. Sia $S = \{ y :$ esiste un $x : \tau(x,y) \in C \}$. Si dimostra in [1] che S è semplice con densità 0.

Per ottenere un insieme creativo con densità 0 basta considerare un decidibile D di uguale densità ed una funzione iniettiva totalmente ricorsiva f che abbia come dominio D: è immediato che l'insieme fK è creativo ed ha densità 0.

TEOREMA 1.6. *Se* r *ed* s, $r \leqslant s$, *sono due reali debolmente ricorsivi (ovviamente sempre compresi tra* 0 *ed* 1*) allora esistono un insieme creativo ed uno semplice aventi densità inferiore* r *e superiore* s.

Dim. Sia D un decidibile a densità r,S un semplice tale che $d'S = 0$ ed f una funzione crescente totale ricorsiva da ω a $\overline{D}$. L'insieme $S' = fS \cup D$ è semplice e $d'S' = r$, in quanto $d'S' = d'fS + dD$ e $d'fS = d'S \cdot dD$. Analogamente per i restanti casi.

II - INSIEMI A DENSITA' COSTANTE.

Dal Teorema 1.3 discende immediatamente che il concetto di densità non è ricorsivamente invariante: in un certo senso la finezza di tale misura è legata proprio alla possibilità di distinguere tra loro non solo insiemi aventi la stessa cardinalità, ma anche insiemi ricorsivamente isomorfi. Da questo punto di vista assumono un particolare interesse ricorsivo quegli insiemi per i quali la densità è invariante per biezioni ricorsive; diamo a tale scopo la seguente

Definizione 2.1. Un insieme è detto a *densità costante* se ha densità uguale ad ogni sua immagine isomorfa.

L'esistenza di tali insiemi è banalmente dimostrata dagli insiemi infiniti e cofiniti. In questo paragrafo forniremo comunque altri esempi più significativi. (1)

TEOREMA 2.2. *Se* A *è un insieme enumerabile infinito non semplice né cofinito, allora non ha densità costante.*

Dim. Possiamo subito osservare che gli insiemi decidibili non finiti né cofiniti non hanno densità costante; inoltre se A è un insieme enumerabile infinito, esiste un decidibile B contenuto in A e, se A non è semplice, esiste anche un insieme decidibile C che contiene A. Per ogni biezione ricorsiva f, si ha allora $dfB \leqslant dfA \leqslant dfC$. Detta r la densità di A e supposto $r < 1$ consideriamo una biezione tale che $dfB = 1$: di conseguenza anche $dfA = 1$ e quindi la biezione f non conserva la densità di A. Nel caso $r = 1$ basta considerare, in modo del tutto analogo, una biezione f tale che $dfC < 1$. Si può così concludere che A non ha densità costante.

COROLLARIO 2.3. *Se* A *è un insieme enumerabile infinito a densità costante, allora* A *è semplice (o cofinito) e* $dA = 1$.

(1) Una prima analisi della definizione di insieme random può far supporre che essi costituiscono un esempio di insiemi a densità costante. Viceversa si deduce da un risultato di Loveland [3] l'esistenza di un random una cui immagine ricorsiva non ha densità.

Dim. Ovvia (la densità è necessariamente 1 come si ricava dalla prima parte della dimostrazione del precedente teorema).

TEOREMA 2.4 *Se* A *è un insieme avente densità costante diversa da* 1, *allora è immune o finito.*

Dim. Supponiamo che A non sia né immune né finito; esiste allora un decidibile infinito D contenuto in A. Sia f una biezione ricorsiva tale che $dfD = 1$. Poiché $D \subseteq A$, risulta $dfA = 1$, contro l'ipotesi.

Semplici esempi mostrano che, viceversa, non tutti gli insiemi immuni hanno densità costante.

Esaminiamo ora in particolare il caso di insiemi a densità costante 0. In [1] abbiamo dimostrato che ogni insieme massimale ha densità 1. In effetti, un ragionamento analogo permette di dimostrare il seguente

TEOREMA 2.5. *Ogni insieme ricorsivamente indecomponibile (in particolare ogni insieme coesivo) ha densità costante* 0.

Dim. Si consideri una partizione di ω in insiemi decidibili $A_1 \ldots A_n$ aventi ciascuno densità $\frac{1}{n}$ (ad esempio le classi dei resti modulo n). Sia A un insieme ricorsivamente indecomponibile; se, per un certo i, $A \cap A_i$ è infinito, allora, per definizione di ricorsivamente indecomponibile, $A \cap \overline{A}_i$ è finito; quindi $dA = d(A \cap A_i) + d(A \cap \overline{A}_i) = d(A \cap A_i) \leqslant dA_i = \frac{1}{n}$. Poiché ciò avviene per ogni naturale n, possiamo concludere $dA = 0$. Essendo inoltre l'immagine di un insieme ricorsivamente indecomponibile mediante una biezione ricorsiva ancora tale, possiamo dedurre che ogni insieme ricorsivamente indecomponibile ha densità costante 0.

COROLLARIO 2.6. *Gli insiemi massimali hanno densità costante* 1.

Dim. Ovvia.

COROLLARIO 2.7. a) *Gli insiemi quasicoesivi hanno densità costante* 0. b) *Gli insiemi quasimassimali hanno densità costante* 1.

Dim. Ovvia, poiché la funzione densità è finitamente additiva.

Non si può estendere il risultato precedente agli insiemi iperimmuni, poiché è facile dimostrare (vedi [5] p. 156) l'esistenza di due insiemi iperimmuni l'uno complementare dell'altro. Limitandosi alla densità inferiore si ottiene comunque un risultato analogo.

TEOREMA 2.8. *Gli insiemi iperimmuni hannno densità inferiore costante* 0.

Dim. Sia $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$ un insieme iperimmune ordinato in modo crescente, B un insieme decidibile infinito avente densità 0 ed f la funzione totale ricorsiva definita ponendo f(n) uguale all'ennesimo elemento di B. Poiché A è iperimmune, l'insieme $I = \{i : a_i > f(i)\}$ è infinito. Per ciascun i di I abbiamo che $\mathrm{Card}(A \cap f(i)) < \mathrm{Card}(B \cap f(i)) = i$. Quindi d'A = 0, ed essendo il concetto di insieme iperimmune ricorsivamente invariante, abbiamo che per ogni biezione ricorsiva f, fA ha densità inferiore 0.

COROLLARIO 2.9. *Se* A *è un insieme iperimmune di cui esiste la densità, allora* dA = 0.

Dim. Ovvia.

Proseguendo la ricerca di insiemi a densità costante 0, introduciamo il seguente concetto:

Definizione 2.10. Chiamiamo *totalmente iperimmune* un insieme $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$ (che supponiamo, al solito, ordinato in modo crescente) se, per ogni funzione parziale ricorsiva φ, $\varphi(n) > a_n$ solo per un numero finito di n.

Mostreremo in seguito come tali sottinsiemi costituiscono un sottinsieme proprio (e non vuoto) dell'insieme degli iperimmuni.

LEMMA 2.11. *Il concetto di insieme totalmente iperimmune è ricorsivamente invariante.*

Dim. Sia A un insieme totalmente iperimmune, f una biezione ricorsiva e supponiamo per assurdo che fA non sia totalmente iperimmune. Sia φ una funzione parziale ricorsiva tale che per infiniti n sia $\varphi(n) > b_n$ (dove con b_n indichiamo l'ennesimo elemento di fA). Definendo $h(n) = \max\{f^{-1}[0, \varphi(n)]\} + 1$ avremo che $h(n) > a_n$ infinite volte, contro l'ipotesi che A fosse totalmente iperimmune.

TEOREMA 2.12. *Gli insiemi totalmente iperimmuni hanno densità costante* 0.

Dim. La dimostrazione procede in modo analogo a quella del Teorema 2.8. In questo caso però $dA = 0$ e non solamente $d'A = 0$ in quanto non solo l'insieme I è infinito, ma, posto $C = \{ b \in B: \exists i, i \in I \text{ e } \varphi(i) = b \}$, abbiamo che B–C è un insieme finito.

COROLLARIO 2.13. *Esiste un insieme iperimmune non totalmente iperimmune.*

Dim. Ovvia dal Teorema 2.12 e dall'esistenza di due insiemi iperimmuni complementari l'uno dell'altro.

Esempio. Può essere interessante dimostrare l'esistenza di un insieme totalmente iperimmune con complementare enumerabile. Quest'ultimo infatti risulterà un nuovo esempio di insieme enumerabile a densità costante 1.

Costruiamo una matrice quadrata infinita tale che l'elemento $a_{m,n}$ è il valore che l'emmesima funzione parziale ricorsiva assume su n (naturalmente si tratta di una "matrice parziale", in quanto vengono via via aggiunti elementi). Le varie funzioni vengono computate contemporaneamente, ritornando ogni volta sui passi precedenti; di tale matrice consideriamo soltanto gli elementi per cui $m \leqslant n$. Costruiamo simultaneamente gli insiemi A e B nel seguente modo: indichiamo con A^n e B^n gli insiemi A e B all'ennesimo stadio della loro costruzione, cioé dopo n valori complessivamente trovati nella computazione delle funzioni. Sia $\varphi_i(s)$ il primo valore trovato: allora poniamo $A^1 = \{\varphi_i(s)+1\}$ e $B^1 = \{0,1,\ldots,\varphi_i(s)\}$. Sia $\varphi_i(m)$ l' n+1-esimo valore trovato: se $\varphi_j(m)+1 \leqslant \max A^n$, poniamo $A^{n+1} = A^n$ e $B^{n+1} = B^n$. Nel caso contrario poniamo

$$A^{n+1} = (A^n \cup \{\varphi_j(m)+1\}) - \{\varphi_k(r) : \varphi_k(r) \in A^n, \ \varphi_k(r) < \varphi_j(m) \quad e \quad k \geqslant j\}$$

e

$$B^{n+1} = \{0,1,\ldots,\varphi_j(m)\} - A^{n+1}.$$

E' ovvio che $B = \overline{A}$ ed è facile convincersi che B è enumerabile in quanto, per ogni $n, B^{n+1} \supseteq B^n$. Inoltre A è totalmente iperimmune in quanto, detto a_n l'ennesimo elemento di A, a_n è maggiore del $\max\{\varphi_p(s) : p,s \leqslant n; p \geqslant s\}$ e quindi per ogni φ_i e per ogni $n \geqslant i$ si ha $\varphi_i(n) < a_n$.

Un rafforzamento dei risultati ottenuti in questo paragrafo si ottiene introducendo il concetto di densità rispetto ad una funzione.

Definizione 2.14. Dati un insieme A ed una funzione totale ricorsiva crescente f diciamo densità $\mathbf{d}_f A$ di A rispetto a f $\lim_{n\to\infty} \frac{f(\mathrm{Card}(A \cap n))}{n}$.

I due seguenti teoremi costituiscono una parziale caratterizzazione degli insiemi iperimmuni.

TEOREMA 2.15. *Se* A *è iperimmune e* $d_f A$ *esiste, allora* $d_f A = 0$.

Dim. Supponiamo per assurdo che f sia una funzione tale che $d_f A \neq 0$. Esistono allora un naturale k ed un naturale n_o tali che, per ogni $n > n_o$ $\frac{f(\mathrm{Card}(A \cap n))}{n} > \frac{1}{k}$. Per ogni m tale che $kf(m) \geqslant n_o$, $\mathrm{Card}(A \cap kf(m)) > m$, e quindi $kf(m)$ a_m, dove al solito a_m è l'emmesimo elemento di A. Di conseguenza la funzione $f'(n) = kf(n)$ è tale che per ogni $n > n_o$, $f'(n) > a_m$.

TEOREMA 2.16. *Sia* A *un insieme tale che per ogni* f $d_f A = 0$: A *è allora iperimmune.*

Dim. Sia per assurdo f una funzione tale che per ogni n $f(n) > a_n$. Si ha $\mathrm{Card}(A \cap a_s + 1) = s$, $f(s) > a_s$ e $\frac{f(\mathrm{Card}(A \cap a_s + 1))}{a_s}$ è maggiore di 1. Di conseguenza $d_f A$, se esiste, è diverso da 0.

L'analogo del Teorema 2.12, riferito alla densità rispetto ad f, è costituito dal seguente

TEOREMA 2.17. *Se* A *è totalmente iperimmune, per ogni funzione (crescente)* f *esiste* $d_f A$ *ed è uguale a* 0.

Dim. Per ogni f crescente sia B un insieme decidibile avente $d_f B = 0$ (è immediata l'esistenza di un tale insieme). Dimostriamo che, per quasi tutti gli n, $\frac{f(\mathrm{Card}(A \cap n))}{n} \leqslant \frac{f(\mathrm{Card}(B \cap n))}{n}$ e quindi $d_f A \leqslant d_f B = 0$. Supponiamo per assurdo che per infiniti n $\frac{f(\mathrm{Card}(A \cap n))}{n} > \frac{f(\mathrm{Card}(B \cap n))}{n}$; essendo f crescente $\frac{\mathrm{Card}(A \cap n)}{n} > \frac{\mathrm{Card}(B \cap n)}{n}$ per infiniti n. Sia g la funzione totale ricorsiva che enumera B in ordine crescente; segue allora dalla precedente disuguaglianza che $g(n) > a_n$ per infiniti n, contro l'ipotesi che A fosse totalmente iperimmune.

III - INSIEMI PSEUDO-IMMUNI.

In questo paragrafo esaminiamo un altro possibile modo di collegare la nozione di densità al concetto ricorsivo di insieme immune; diamo in primo luogo la seguente definizione che può avere applicazioni anche in problemi di carattere logico.

Definizione 3.1. Un insieme A è *pseudo-immune* se ogni enumerabile in esso contenuto ha densità 0.

Ovviamente ogni insieme immune, contenendo solo enumerabili finiti, è pseudo-immune, e così pure ogni insieme a densità 0.

Facciamo subito notare, a riprova della non invarianza ricorsiva della densità, che il concetto di pseudo-immune non è ricorsivamente invariante (basta considerare un insieme pseudo-immune A né immune né finito; poiché A contiene un decidibile infinito, esistono immagini isomorfe di A che contengono decidibili aventi densità diversa da 0).

Per dimostrare l'esistenza di insiemi pseudo-immuni non banali è utile il seguente

LEMMA 3.2. *Esistono due insiemi immuni, complementari uno dell'altro, aventi entrambi densità* $\frac{1}{2}$.

Dim. Sia $W_{x_0}, W_{x_1}, \dots$ una lista degli insiemi enumerabili infiniti, ciascuno ordinato in modo crescente (naturalmente la costruzione non è effettiva). Sia $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ l'insieme ottenuto prendendo due elementi da ciascun enumerabile, secondo il seguente procedimento induttivo:

a_o, a_1 sono i primi elementi di W_{x_o}; detti a_{2n}, a_{2n+1} gli elementi scelti in W_{x_n}, $a_{2(n+1)}$ e $a_{2(n+1)+1}$ sono due elementi consecutivi di $W_{x_{n+1}}$ tali che $a_{2(n+1)} > a_{2n+1} + n$. E' facile verificare che, poiché aumenta la distanza tra le successive coppie di elementi scelti, la densità di A è 0. Chiamiamo A' l'insieme degli elementi di A di indice pari, cioé dei primi elementi scelti da ogni enumerabile, e A" l'insieme dei secondi elementi, cioé A-A'. Detti P e D gli insiemi dei pari e dei dispari, siano I ed $\overline{I}$ rispettivamente gli insiemi (P-A') + A" e (D-A")+A'. Gli insiemi I ed $\overline{I}$, ovviamente uno complementare dell'altro, sono immuni poiché ciascuno interseca ogni enumerabile infinito; essendo inoltre dA' = dA" = 0 si ha $dI = dP = \frac{1}{2} = d\overline{I}$.

TEOREMA 3.3. *Esistono insiemi pseudo-immuni non immuni e con densità diversa da 0.*

Dim. Disponiamo i numeri naturali in una matrice infinita; nella prima colonna scriviamo in ordine crescente i naturali privati delle potenze di 10, e nelle altre colonne le potenze di 10, disposte come indicato in figura:

$$\begin{tikzcd}
0 & 10^1 \arrow[r] & 10^2 \arrow[dl] & 10^6 \arrow[r] & 10^7 \arrow[dl] \\
1 & 10^3 \arrow[d] & 10^5 \arrow[ur] & 10^8 \arrow[dl] & \\
2 & 10^4 \arrow[ur] & 10^9 \arrow[dl] & & \\
3 & 10^{10} \arrow[d] & & & \\
\vdots & & & &
\end{tikzcd}$$

L'insieme D_n degli elementi dell'ennesima riga è un insieme decidibile infinito con densità 0; inoltre gli insiemi $D_o, D_1 D_2, \ldots$ formano una partizione di ω. E' anche immediato che, detto D l'insieme costituito dagli elementi della prima colonna, $dD = 1$.

Detto a_n il primo elemento di D_n, ed I l'insieme immune del Lemma precente, poniamo $B = \bigcup_{a_n \in I} D_n$. Dimostriamo dapprima che $dB = \frac{1}{2}$. Infatti, poiché $dD=1$, si ha $dB=d(B \cap D)$. Si noti che $B \cap D = \{a_n : a_n \in I\} = D \cap I$ pertanto, sempre tenendo presente che $dD=1$, si conclude $d(B \cap D) = d(D \cap I)$ $= dI = \frac{1}{2}$. Ora, è immediato che B non è immune; infatti per ogni $a_n \in I$, l'insieme decidibile infinito D_n è contenuto in B. Non ci resta che dimostrare che B è pseudo-immune, cioé che per ogni enumerabile E, se $E \subseteq B$, allora $dE = 0$. Per ogni elemento b di E, poiché i D_i formano una partizione di ω, si può trovare in modo effettivo un i tale che D_i contiene b; poiché $b \in B$, $a_i \in I$. E deve quindi avere intersezione non vuota con un numero finito di D_i, altrimenti i rispettivi a_i costituirebbero un enumerabile infinito contenuto in I; di conseguenza $dE \leqslant d(\bigcup_{j=o}^{n} D_{ij}) = 0$.

IV - UNA OSSERVAZIONE SUL CONCETTO "UGUAL DENSITA'".

Può essere interessante analizzare il rapporto fra la densità, come è stata fin qui studiata, ed il seguente concetto (cfr. ad esempio Rice [4]):

Definizione 4.1. Un insieme B è *denso almeno quanto* A (scriviamo $B \geqslant_R A$) se esiste una funzione totale ricorsiva g tale che, per ogni n, $\mathrm{Card}(A \cap n) \leqslant \mathrm{Card}(B \cap g(n))$. Se $A \geqslant_R B$ e $B \geqslant_R A$ scriviamo $A \equiv_R B$.

Vale il seguente

TEOREMA 4.2. 1) *Se* $dA \neq 0$ *e* $dB \neq 0$ *allora* $A \equiv_R B$

2) $dA = dB = 0$ non implica $A \equiv_R B$.

Dim. 1) Supponiamo $dA = r$ e $dB = r'$; vogliamo dimostrare $A\ _R B$. Sia $\frac{p}{q} > r$ e $\frac{p'}{q} < r'$ (p e p' diversi da 0) (2); per definizione di limite esiste un n_o tale che per ogni $m \geqslant n_o$ $\frac{\mathrm{Card}(A \cap m)}{m} < \frac{p}{q}$ e $\frac{\mathrm{Card}(B \cap m)}{m} > \frac{p}{q}$; possiamo supporre $n = 0$. Sia s un naturale tale che $s \cdot p' > p$; abbiamo allora, per ogni m, $\mathrm{Card}(A \cap m) < \frac{p \cdot m}{q} < \frac{s \cdot p' \cdot m}{q} < \mathrm{Card}(B \cap sm)$.

2) Per quanto riguarda la seconda parte dell'enunciato basta considerare un decidibile A ed un iperimmune B entrambi con densità 0. Se fosse $A \leqslant_R B$, se esistesse cioé una funzione f tale che $\mathrm{Card}(A \cap n) \leqslant \mathrm{Card}(B \cap fn)$, la funzione g, $g(n) = f(a_n) + 1$ (a_n = l'ennesimo elemento di A) maggiorerebbe l'insieme B.

Se indichiamo con $A \equiv_d B$ la relazione di equivalenza determinata dall'avere la stessa densità, l'ultimo teorema mostra la "complementarità"

(2) Nel caso r=1 la dimostrazione è sostanzialmente identica.

delle due relazioni $\equiv_R$ e $\equiv_d$ (sull'insieme dei sottinsiemi di ω aventi densità), nel senso che tutte le classi di equivalenza meno una di ciascuna delle due relazioni sono incluse in una sola classe di equivalenza dell'altra.

BIBLIOGRAFIA

[1] C.BERNARDI-C.CROCIANI, *Insiemi semplici e massimali in ricorsività*, in Rassegna di matematica, Editore Tilgher, Genova, 1979, pp.9-24.

[2] A.CHURCH, *On the concept of random sequence*, Bull.Amer.Math.Soc. 46 (1940), pp. 130-135.

[3] D.LOVELAND, *A new interpretation of the Von Mises concept of random sequence*, Math. Logik.Grundl. Math. 12, (1966), pp. 279-294.

[4] H.G.RICE, *On the relative density of sets of integers*, Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), pp. 320-321.

[5] H.ROGERS jr., *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, Mc. Graw Hill, New York 1967.

Lavoro pervenuto alla Redazione il 22 Settembre 1980
ed accettato per la pubblicazione il 10 Aprile 1981
su parere favorevole di A.De Luca e R.Magari