Note di Matematica Vol.I, 71-92 (1981)

PSEUDOCONNESSIONI SU VARIETA' FOGLIETTATE (°)

Rosa Anna MARINOSCI (°°)

Summary. *In this paper the notion of foliated linear pseudoconnection on a foliated manifold is introduced and some properties are studied; a characterisation of foliated linear pseudoconnection by their complete lifts is considered.*

INTRODUZIONE.

Sia M una varietà differenziabile di classe $\mathscr{C}^\infty$, dimensione n, si indichi con $\mathscr{F}(M)$ l'anello delle funzioni differenziabili su M e con $\mathscr{D}_1(M)$ l'$\mathscr{F}(M)$-modulo dei campi di vettori su M; una pseudoconnessione lineare su M è una coppia ordinata (A,∇) dove A è un campo tensoriale differenziabile di specie $(1,1)$ su M e $\nabla : X \longrightarrow \nabla_X$ è un $\mathscr{F}(M)$-omomorfismo di $\mathscr{D}_1(M)$ nell'$\mathscr{F}(M)$-modulo degli R-endomorfismi di $\mathscr{D}_1(M)$, soddisfacente l'assioma

(°) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(°°) Dipartimento di Matematica, Università di Lecce, 7100 Lecce.

$$\nabla_X\, f\, Y = f\nabla_X Y + A(X)(f)Y$$

per ogni $X,Y\in \mathcal{D}_1(M)$ e per ogni $f\in\mathcal{F}(M)$.

Nel presente lavoro si generalizzano al caso delle pseudoconnessioni lineari alcune nozioni introdotte da vari autori (R. Bott, F.W.Kamber, A. Sanini, P. Tondeur, F. Tricerri ed altri) sulle connessioni lineari fogliettate, trasverse e proiettabili; più precisamente nel n. 1 si introduce la nozione di pseudoconnessione fogliettata e se ne trova una caratterizzazione mediante il campo di torsione e l'applicazione di curvatura della pseudoconnessione stessa; si introducono poi le nozioni di pseudoconnessione trasversa e proiettabile e se ne mettono in evidenza alcune proprietà; nel n. 2 si studiano pseudoconnessioni sul fibrato trasverso alla fogliazione, indotte da pseudoconnessioni lineari trasverse o fogliettate; infine nel n.3 si definisce il lift completo di una pseudoconnessione lineare su una varietà differenziabile M e nel caso di M fogliettata si dà una caratterizzazione di una pseudoconnessione lineare fogliettata mediante il suo lift completo.

N.1 PSEUDOCONNESSIONI FOGLIETTATE.

In questo paragrafo si denoterà con M una varietà differenziabile $\mathcal{C}^\infty$ e dimensione n, munita di una struttura fogliettata definita da una distribuzione involutoria $\mathcal{D}$ di dimensione costante $r < n$.

Def.1.1. *Una pseudoconnessione lineare* (A,∇) *su* M *si dice fogliettata se soddisfa alle condizioni:*

a) $A(X)\in\overline{\mathcal{D}}(M)$ $\qquad\forall X\in\overline{\mathcal{D}}_1(M)$

b) $\nabla_X Y\in\overline{\mathcal{D}}_1(M)$ $\qquad\forall X,Y\in\overline{\mathcal{D}}_1(M)$

essendo $\overline{\mathscr{D}}_1(M)$ *l'algebra di Lie di campi di vettori fogliettati* [(1)] *su* M.

Osservazione 1.1.

Essendo $\overline{\mathscr{D}}_1(M)$ un'algebra di Lie, per ogni campo tensoriale differenziabile A di specie (1,1) fogliettato su M e per ogni $X, Y \in \overline{\mathscr{D}}_1(M)$, risulta $[X,Y]_A$ un campo di vettori fogliettato, essendo $[X,Y]_A$ definito da (c.f.r. [3]):

$$[X,Y]_A = [A(X),Y] - [X,A(Y)] - A([X,Y]).$$

Dalla precedente osservazione segue subito la proposizione

Prop. 1.1. *Se* (A,∇) *è una pseudoconnessione lineare fogliettata su M allora il campo tensoriale T di torsione e l'applicazione di curvatura R di* (A,∇) *sono campi tensoriali fogliettati.*

Prop. 1.2. *Una pseudoconnessione lineare* (A,∇) *su M è fogliettata se e solo se indicate con* A^δ_β , $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ *le componenti di* (A,∇) *rispetto ad un sistema di coordinate adattate* $(x^a, x^{\bar a})$, *si ha:*

a') $A^{\bar a}_b = 0$

$\partial_a A^{\bar a}_\alpha = 0$

b') $\Gamma^{\bar a}_{\alpha\, b} = 0$

$\Gamma^{\bar a}_{a\beta} = 0$

(1) c.f.r. [5] .

$$\partial_a \Gamma^{\bar{a}}_{\alpha\beta} = 0$$

per ogni $a,b = 1,2,\dots,r$; $\bar{a} = r+1,\dots,n$; $\alpha,\beta = 1,2,\dots,n$.

Dimostrazione. Per brevità ci si limita a dimostrare solo la condizione necessaria; se (A,∇) è fogliettata allora le a') seguono dalle (2.10) e (2.11) di pag. 14 c.f.r. [5] ; per provare le b') si osservi che se X^α sono le componenti di un campo di vettori fogliettato su M, allora le combinazioni lineari del tipo:

$$X^\alpha_\beta = A^\delta_\beta \partial_\delta X^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} X^\gamma$$

sono le componenti di un campo tensoriale fogliettato di specie (1,1) su M, rispetto ad un sistema coordinato (x^α) qualunque; in un sistema di coordinate adattate $(x^a, x^{\bar{a}})$ si ha in particolare per $X = \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$

$$X^{\bar{a}}_b = \Gamma^{\bar{a}}_{b\alpha}$$

ed essendo $X^{\bar{a}}_b = 0$ per la 2.10 di pag. 14 c.f.r. [5], segue che $\Gamma^{\bar{a}}_{b\alpha} = 0$.

Il campo tensoriale di torsione T di (A,∇) essendo fogliettato per la 2.17 di pag. 15 c.f.r. [5], in coordinate adattate $(x^a;x^{\bar{a}})$, deve soddisfare alla condizione:

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x^b}, \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) \in \mathcal{D} \qquad \begin{array}{l} b = 1,\dots,r \\ \alpha = 1,\dots,n \end{array}$$

da questa dopo semplici calcoli si ricava:

$$\{\Gamma^\beta_{b\alpha} - \Gamma^\beta_{\alpha b} - (\partial_b A^\beta_\alpha - \partial_\alpha A^\beta_b)\partial_\beta \in \mathcal{D}$$

da cui si ottiene:

$$\Gamma^{\bar{c}}_{b\alpha} - \Gamma^{\bar{c}}_{\alpha b} - \partial_b A^{\bar{c}}_{\alpha} + \partial_{\alpha} A^{\bar{c}}_{b} = 0$$

essendo poi $\Gamma^{\bar{c}}_{b\alpha} = 0$ e gli ultimi due addendi nulli per la a') già dimostrata, si ha $\Gamma^{\bar{c}}_{\alpha b} = 0$.

L'ultima uguaglianza delle b') segue subito dalle (2.3) di pag. 12 c.f.r.[5].

Una caratterizzazione intrinseca delle pseudoconnessioni lineari fogliettate su M è messa in luce dalla seguente proposizione:

Prop. 1.3. *Una pseudoconnessione lineare* (A, ∇) *su* M *è fogliettata se e solo se indicati con* T *il campo tensoriale di torsione e con* R *l'applicazione di curvatura di* (A, ∇) *risulta:*

a") $A(X) \in \mathcal{D}$

$\nabla_X Y \in \mathcal{D}$

b") $T(X,Y) \in \mathcal{D}$

$R(X,Y)\, Z \in \mathcal{D}$

per ogni $X \in \mathcal{D}$ e per ogni $Y, Z \in \mathcal{D}_1(M)$.

Dimostrazione. Sempre per brevità ci si limita a dimostrare la condizione necessaria. Se (A, ∇) è fogliettata, allora in coordinate adattate $(x^a, x^{\bar{a}})$, dalla prop. 1.1 segue che $A^{\bar{a}}_b = 0$ e $\Gamma^{\bar{a}}_{b\alpha} = 0$, per cui essendo $\partial_b \in \mathcal{D}$ si ha:

$$A(\partial_b) = A^a_b\ \partial_a \in \mathscr{D} \qquad \text{e} \qquad \nabla_{\partial_b} \partial_\alpha = \Gamma^a_{b\alpha}\ \partial_a \in \mathscr{D}$$

da queste seguono immediatamente le a").

Per provare le b") basta tener presente che T ed R essendo fogliettati soddisfano alla (2.17) di pag. 15 c.f.r.[5].

Def. 1.2. *Una pseudoconnessione lineare* (A,∇) *su* M *si dice trasversa alla fogliazione se soddisfa alle condizioni:*

$$A(X) \in \mathscr{D}$$

$$\nabla_Y X \in \mathscr{D}$$

$$T(X,Y) \in \mathscr{D}$$

per ogni $X \in \mathscr{D}$ e per ogni $Y \in \mathscr{D}_1(M)$.

Osservazione 1.2.

Se (A,∇) e (A,∇') sono pseudoconnessioni lineari trasverse su M, allora il tensore S definito da

$$S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla'_X Y \qquad \forall X,Y \in \mathscr{D}_1(M)$$

soddisfa alla proprietà

"$S(X,Y) \in \mathscr{D}$ se X oppure Y appartiene a $\mathscr{D}$".

Viceversa se (A,∇') è una pseudoconnessione lineare trasversa ed (A,∇) è una pseudoconnessione lineare su M tale che il tensore S soddisfa alla proprietà $S(X,Y) \in \mathscr{D}$ se X oppure Y appartiene a $\mathscr{D}$, allora anche (A,∇) è trasversa; infatti con ovvio significato dei simboli, sottraendo membro a membro le due uguaglianze:

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]_A$$

$$T'(X,Y) = \nabla'_X Y - \nabla'_Y X - [X,Y]_A$$

si ottiene:

$$T(X,Y) = T'(X,Y) - S(X,Y) - \nabla_Y X + \nabla'_Y X$$

allora se $X \in \mathscr{D}$ per ipotesi deve aversi $T'(X,Y) \in \mathscr{D}$, $\nabla'_Y X \in \mathscr{D}$, inoltre essendo $\nabla_Y X = \nabla'_Y X + S(Y,X)$, risulta ovviamente anche $\nabla_Y X \in \mathscr{D}$; si conclude allora che $T(X,Y) \in \mathscr{D}$ per ogni $X \in \mathscr{D}$, quindi (A,∇) è trasversa.

Def. 1.3. *Una pseudoconnessione lineare* (A, ∇) *su* M *si dice che conserva parallela la distribuzione* $\mathscr{D}$ *se soddisfa alle condizioni:*

$$A(X) \in \mathscr{D}$$

$$\nabla_Y X \in \mathscr{D}$$

per ogni $X \in \mathscr{D}$ e per ogni $Y \in \mathscr{D}_1(M)$.

Ovviamente ogni pseudoconnessione lineare fogliettata è anche trasversa e ogni pseudoconnessione lineare trasversa conserva la distribuzione $\mathscr{D}$ parallela, ma non viceversa.

N. 2 PSEUDOCONNESSIONI SUL FIBRATO TRASVERSO.

In questo paragrafo si denoterà con M una varietà differenziabile paracompatta fogliettata, con fogliazione definita da una distribuzione involutoria $\mathscr{D}$ di dimensione r; la distribuzione $\mathscr{D}$ individua un sottofibrato D del fibrato tangente TM, di dimensione r, essendo la fibra sopra $x \in M$ il sottospazio $\mathscr{D}_x$ dello spazio tangente $T_x(M)$, il fibrato $Q=T(M)/D$ è il fibrato trasverso al fogliettamento; ogni punto di Q è una classe di equivalenza $\{X_x\}$ dove $X_x \in T_x(M)$, e due vettori X_x e Y_x di $T_x(M)$ appartengono alla stessa classe di equivalenza se la loro differenza $X_x - Y_x$ appartiene al sottospazio $\mathscr{D}_x$.

Prop. 2.1. *Ogni pseudoconnessione lineare* (A, ∇) *su* M *che conserva parallela la distribuzione* $\mathscr{D}$ *, induce una pseudoconnessione* $\overset{*}{\Gamma}$ *sul fibrato trasverso* Q*, avente il campo* A *come campo tensoriale associato.*

Dimostrazione. Per ogni punto $p \in M$, per ogni $Z_p \in T_p(M)$ e per ogni sezione $\Phi : p \longrightarrow \{X_p\}$ del fibrato Q, si ponga:

$$\overset{*}{\nabla}_{Z_p} \Phi = \pi(\nabla_{Z_p} X)$$

dove $\pi : T(M) \longrightarrow T(M)/D$ è la surgezione canonica ed X è un campo di vettori su M tale che per ogni $q \in M$ risulta $\Phi(q) = \{X_q\}$.

Si verifica facilmente che per $\overset{*}{\nabla}$ sono soddisfatte le proprietà:

1) $$\overset{*}{\nabla}_{X+Y} \Phi = \overset{*}{\nabla}_X \Phi + \overset{*}{\nabla}_Y \Phi$$

2) $$\overset{*}{\nabla}_X (\Phi + \Psi) = \overset{*}{\nabla}_X \Phi + \overset{*}{\nabla}_Y \Psi$$

3) $$\overset{*}{\nabla}_{fX} \Phi = f \overset{*}{\nabla}_X \Phi$$

4) $$\overset{*}{\nabla}_X (\alpha \Phi) = \alpha \overset{*}{\nabla}_X \Phi$$

5) $$\overset{*}{\nabla}_X (f\Phi) = f \overset{*}{\nabla}_X \Phi + A(X)(f)\Phi$$

per ogni $X, Y \in \mathscr{D}_1(M)$, $f \in \mathscr{F}(M)$, $\alpha \in R$, Φ e Ψ sezioni differenziabili di Q; resta allora definita una ed una sola pseudoconnessione $\overset{*}{\Gamma}$ sul fibrato Q avente A come campo tensoriale associato e rispetto alla quale $\overset{*}{\nabla}_{Z_p}$ è la pseudoderivata covariante di Φ rispetto a Z_p (c.f.r.[2] pag. 131).

Prop. 2.2. *Se* (A,∇) *è una pseudoconnessione lineare trasversa su* M, allora per ogni $Z\in\mathcal{D}$ *e per ogni sezione* Φ *di* Q *risulta:*

$$\overset{*}{\nabla}_Z \Phi = \pi([Z,X]_A)$$

essendo $\Phi(q) = \{X_q\}$ *per ogni* $q\in M$ *e* $\overset{*}{\nabla}_Z\Phi$ *la pseudoderivata covariante di* Φ *rispetto a* Z, *della pseudoconnessione* $\overset{*}{\Gamma}$ *su* Q *associata ad* (A,∇). $\overset{*}{\Gamma}$ *si chiamerà pseudoconnessione basica (o pseudoconnessione di Bott* (2)*, sul fibrato trasverso* Q .

Dimostrazione. Infatti per ogni $Z\in\mathcal{D}_1(M)$ e per ogni sezione Φ di Q si ha:

$$\overset{*}{\nabla}_Z\Phi = \pi(\nabla_Z X) = \pi(\nabla_X Z - T(X,Z) - [X,Z]_A) =$$

$$=\pi(\nabla_X Z) + \pi(T(Z,X)) - \pi([X,Z]_A)$$

se $Z\in\mathcal{D}$ essendo (A,∇) trasversa risulta $\nabla_X Z\in\mathcal{D}$ e $T(Z,X)\in\mathcal{D}$ e quindi $\pi(\nabla_X Z) = \pi(T(Z,X)) = 0$ da cui la tesi.

Prop. 2.3 *Sia* (A,∇) *una pseudoconnessione lineare fogliettata su* M, *l'applicazione di curvatura* (3) R^* *della pseudoconnessione* $\overset{*}{\Gamma}$ *associa-*

(2) Tale denominazione è giustificata dal fatto che se A è il campo tensoriale di Kronecker, allora $\overset{*}{\nabla}$ è una connessione basica secondo Bott (c.f.r.[1] pag. 33)

(3) L'applicazione di curvatura R di una pseudoconnessione Γ su Q è definita da: $R(X,Y)\phi = \nabla_X(\nabla_Y\phi)-\nabla_Y(\nabla_X\phi)-\nabla_{[X,Y]_A}\phi$ per ogni $X,Y\in\mathcal{D}_1(M)$ e ϕ sezione di Q; ∇ ed A sono rispettivamente la pseudoderivata covariante ed il campo tensoriale associati a Γ .

ta ad (A,∇) *soddisfa alla proprietà:*

$$\overset{*}{R}(X,Y)\Phi = 0$$

per ogni $X \in \mathscr{D}$, $Y \in \mathscr{D}_1(M)$ e per ogni sezione Φ di Q.

$\overset{*}{\Gamma}$ *si chiamerà nel seguito pseudoconnessione proiettabile* (4).

Dimostrazione. Se X ed Y sono campi di vettori su M e $\Phi : q \longrightarrow \{Z_q\}$ è una sezione del fibrato $Q = T(M)/D$, si ha:

$$\overset{*}{R}(X,Y)\Phi = \overset{*}{\nabla}_X(\overset{*}{\nabla}_Y\ ) - \overset{*}{\nabla}_Y(\overset{*}{\nabla}_X\Phi) - \overset{*}{\nabla}_{[X,Y]_A}\Phi =$$

$$\pi(\nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]_A} Z) = \pi(R(X,Y)Z);$$

se $X \in \mathscr{D}$ allora per b") della prop. 1.3 deve risultare

$R(X,Y)Z \in \mathscr{D}$ e quindi $\pi(R(X,Y)Z) = 0$, da cui la tesi.

I risultati ora esposti, si possono invertire in quanto vale il seguente teorema:

TEOREMA 2.1. *Ogni pseudoconnessione* $\overset{*}{\Gamma}$ *sul fibrato trasverso* Q *induce una pseudoconnessione lineare su* M, *trasversa o fogliettata a seconda che* $\overset{*}{\Gamma}$ *è basica oppure proiettabile.*

Dimostrazione. Avendo supposto M paracompatta allora esiste una metrica riemanniana su M e quindi si può costruire il fibrato vettoriale $D^{\perp}$ (isomorfo a Q) tale che $T(M) = D \oplus D^{\perp}$; inoltre fissato un campo tensoriale

(4) Tale denominazione è giustificata dal fatto che se A è il campo tensoriale di Kronecker allora $\overset{*}{\Gamma}$ è una connessione proiettabile secondo Molino oppure basica secondo Kamber-Tondeur (c.f.r. [4]).

differenziabile A di specie (1,1) su M, esiste una pseudoconnessione $\overline{\Gamma}$ sul fibrato D associata ad A (c.f.r.[2] pag. 114); premesso ciò sia $\overset{*}{\Gamma}$ una pseudoconnessione sul fibrato trasverso Q, avente A come campo tensoriale associato e siano inoltre $\overline{\nabla}$, $\overset{*}{\nabla}$ le pseudoderivate covarianti di $\overline{\Gamma}$ e $\overset{*}{\Gamma}$ rispettivamente, indicato con p l'isomorfismo tra $D^{\perp}$ e $Q=T(M)/D$, sia ∇ l'operatore definito da:

$$\nabla_X Y = \overline{\nabla}_X Y_1 + p(\overset{*}{\nabla}_X \Phi)$$

per ogni $X, Y = Y_1 + Y_2 \in \mathscr{D}_1(M)$ e per ogni sezione Φ di Q tale che $\Phi(q) = \{Y_q\}$ per ogni $q \in M$. La coppia (A,∇) è una pseudoconnessione lineare su M che induce $\overset{*}{\Gamma}$ su Q, in quanto essendo $\overline{\nabla}_X Y_1 \in \mathscr{D}$ e $\pi \circ p = i_Q$ si ha:

$$\pi(\nabla_X Y) = \pi(\overline{\nabla}_X Y_1) + \pi(p(\overset{*}{\nabla}_X \Phi)) = \overset{*}{\nabla}_X \Phi .$$

Se si fa l'ipotesi che $Y \in \mathscr{D}$ allora $Y_2 = 0$ e quindi $\Phi = 0$, da cui si ottiene:

$$\nabla_X Y = \overline{\nabla}_X Y_1 \in \mathscr{D}.$$

Si supponga ora $\overset{*}{\Gamma}$ basica, allora $A(X) \in \mathscr{D}$ se $X \in \mathscr{D}$, inoltre se $X \in \mathscr{D}$ e $Y \in \mathscr{D}_1(M)$ per il campo tensoriale di torsione T di (A,∇) si ha:

$$\pi(T(X,Y)) = \pi(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]_A) =$$

$$= \pi(\nabla_X Y) - \pi([X,Y]_A) = 0$$

da cui consegue che $T(X,Y) \in \mathscr{D}$ e quindi (A,∇) è trasversa.

Se $\overset{*}{\Gamma}$ è proiettabile allora per ogni $X \in \mathscr{D}$ risulta $A(X) \in \mathscr{D}$ ed inoltre per ogni $X \in \mathscr{D}$, $Y, Z \in \mathscr{D}_1(M)$ con ovvio significato dei simboli si ha:

$$\pi(R(X,Y)Z) = \pi(\nabla_X \nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]_A} Z) =$$

$$\pi(\nabla_X(\overline{\nabla}_Y Z_1) + \nabla_X p(\overset{*}{\nabla}_Y \Phi) - \nabla_Y \overline{\nabla}_X Z_1 -$$

$$\nabla_Y\, p(\overset{*}{\nabla}_X \Phi) - \overline{\nabla}_{[X,Y]_A} Z_1 - p(\overset{*}{\nabla}_{[X,Y]_A} \Phi)$$

poiché $\overline{\nabla}_Y Z_1 \in \mathscr{D}$ risulta $\nabla_X(\overline{\nabla}_Y Z_1) \in \mathscr{D}$ e $\nabla_Y(\overline{\nabla}_Y Z_1) \in \mathscr{D}$ e quindi la precedente uguaglianza si riduce a:

$$\pi(R(X,Y)Z) = \pi(\nabla_X(p\overset{*}{\nabla}_Y \Phi)) - \pi(\nabla_Y(p\overset{*}{\nabla}_X \Phi)) - \overset{*}{\nabla}_{[X,Y]_A} \Phi =$$

$$= \overset{*}{\nabla}_X((\overset{*}{\nabla}_Y \Phi) - \overset{*}{\nabla}_Y \overset{*}{\nabla}_X \Phi) - \overset{*}{\nabla}_{[X,Y]_A} \Phi =$$

$$= \overset{*}{R} \quad (X,Y)Z = 0$$

da cui si conclude che $R(X,Y)Z \in \mathscr{D}$ e quindi (A,∇) è fogliettata.

N.3 - LIFT COMPLETO DI UNA PSEUDOCONNESSIONE LINEARE.

Sia M una varietà differenziabile di classe C^∞ e dimensione n, ogni sistema di coordinate locali (x^i) in un intorno di un punto $p \in M$ induce un sistema di coordinate locali $(x^i, \dot{x}^i)$ sul fibrato tangente $T(M)$, la base naturale nel generico punto $(x;\dot{x})$ di $T(M)$ è data da $\left(\frac{\partial}{\partial x^i} ; \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\right)$; se $(x'^{i'})$ è un altro sistema di coordinate locali nell'intorno di $p \in M$, allora sussistono le uguaglianze (c.f.r. [7] pag. 3)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x'^{h'}} = \dfrac{\partial x^h}{\partial x'^{h'}} \dfrac{\partial}{\partial x^h} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial \dot{x}'^{h'}} = \dfrac{\partial^2 x^h}{\partial x'^{h'} \partial x'^{i'}} \dot{x}'^{i'} \dfrac{\partial}{\partial x^h} + \dfrac{\partial x^h}{\partial x'^{h'}} \dfrac{\partial}{\partial \dot{x}^h} \end{cases}$$

Se $f \in \mathscr{F}(M)$ si chiama *lift verticale* di f la funzione $f^V = f \circ \pi$ essendo $\pi : T(M) \longrightarrow M$ la proiezione del fibrato tangente T(M).

Se X è un campo di vettori su M rappresentato localmente da $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ il *lift verticale* di X è il campo vettoriale X^V su T(M) rappresentato localmente da: $X^V = X^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$; si chiama invece *lift completo* di X, il campo di vettori X^C su T(M) rappresentato localmente da:

$$X^C = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \dot{x}^j \frac{\partial x}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}.$$

Prop. 3.1.- *Sia* (A,∇) *una pseudoconnessione lineare su* M, *allora esiste una ed una pseudoconnessione lineare* (A^C, ∇^C) *su* T(M) *univocamente caratterizzata dalle condizioni:*

(1) $A^C(X^C) = (A(X))^C \qquad \forall X \in \mathscr{D}_1(M)$

(2) $\nabla^C_{X^C} Y^C = (\nabla_X Y)^C \qquad \forall X,Y \in \mathscr{D}_1(M)$

Dimostrazione. La (1) dice che A^C è il lift completo del campo tensoriale A, che è univocamente determinato (c.f.r.[7] pag.20).

Sia $(A^C,\tilde{\nabla})$ una pseudoconnessione lineare su T(M) tale che:

(3) $\tilde{\nabla}_{X^C} Y^C = (\nabla_X Y)^C \qquad \forall X,Y \in \mathscr{D}_1(M)$

allora tenendo conto che (c.f.r.[7] pag. 14):

$$(fX)^C = f^C X^V + f^V X^C \qquad \forall f \in \mathscr{F}(M); \quad \forall X \in \mathscr{D}_1(M)$$

si ottiene

$$\tilde{\nabla}_{X^c}(fY)^c = \tilde{\nabla}_{X^c}(f^cY^V + f^VY^c) = A^c(X^c)(f^c)Y^V +$$

$$+ A^c(X^c)(f^V)Y^c + f^c\tilde{\nabla}_{X^c}Y^V + f^V\tilde{\nabla}_{X^c}Y^c =$$

$$= (A(X)(f))^cY^V + (A(X)(f))^VY^c + f^V(\nabla_XY)^c + f^c\tilde{\nabla}_{X^c}Y^V.$$

D'altra parte risulta anche:

$$\tilde{\nabla}_{X^c}(fY)^c = (\nabla_X fY)^c = (f\nabla_X Y + A(X)(f)Y)^c =$$

$$= f^c(\nabla_XY)^V + f^V(\nabla_XY)^c + A(X)(f)^cY^V + A(X)(f)^VY^c$$

da cui si ricava che:

(4) $$\tilde{\nabla}_{X^c}Y^V = (\nabla_XY)^V$$

in modo analogo si prova che:

(5) $$\tilde{\nabla}_{X^V}Y^c = (\nabla_XY)^V .$$

Dalla (3) (o anche dalla (4) si deduce che

(6) $$\tilde{\nabla}_{X^V}Y^V = 0$$

infatti

$$\tilde{\nabla}_{(fX)^c}Y^V = \tilde{\nabla}_{f^cX^V+f^VX^c}Y^V = f^c\tilde{\nabla}_{X^V}Y^V + f^V(\nabla_XY)^V$$

$$\widetilde{\nabla}_{(fX)^C} Y^V = (\nabla_{fX} Y)^V = (f\nabla_X Y)^V = f^V(\nabla_X Y)^V .$$

Le uguaglianze (3)(4)(5)(6) provano che la pseudoconnessione lineare $(A^C,\widetilde{\nabla})$ se esiste è unica.

Per dimostrare l'esistenza si fissi una carta locale (V,Φ) su M e sia (x_i) il relativo sistema coordinato; è noto che $(x_1^C,\ldots,x_n^C;x_1^V,\ldots,x_n^V)$ è un sistema coordinato su T(M); su $\pi^{-1}(U)$ si definisce una pseudoconnessione lineare $(\widetilde{A}^{(U)}, \widetilde{\nabla}^{(U)})$ univocamente determinata dalle condizioni:

$$(7)\qquad \begin{cases} \widetilde{A}^{(U)} = (A^{(U)})^C \\ \widetilde{\nabla}^{(U)}_{X_i^C} X_j^C = (\nabla^{(U)}_{X_i} X_j)^C \\ \widetilde{\nabla}^{(U)}_{X_i^V} X_j^C = (\nabla^{(U)}_{X_i} X_j)^V \\ \widetilde{\nabla}^{(U)}_{X_i^C} X_j^V = (\nabla^{(U)}_{X_i} X_j)^V \\ \widetilde{\nabla}^{(U)}_{X_i^V} X_j^V = 0 \end{cases}$$

dove $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $(i = 1,\ldots,n)$ ed $(A^{(U)}, \nabla^{(U)})$ è la pseudoconnessione lineare indotta da (A,∇) su U.

Se (W,Ψ) è un'altra carta locale su M tale che $U\cap W \neq \emptyset$ e se $(\widetilde{A}^{(W)}, \widetilde{\nabla}^{(W)})$ è la pseudoconnessione lineare su $\pi^{-1}(W) \subset T(M)$ definita dalle (7), allora si può verificare facilmente che su $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(W)$ le pseudoconnessioni lineari indotte rispettivamente da $(\tilde{A}^{(U)}, \tilde{\nabla}^{(U)})$ e $(\tilde{A}^{(W)}, \tilde{\nabla}^{(W)})$, sono le stesse; resta così definita globalmente su $T(M)$ una pseudoconnessione lineare $(\tilde{A}, \tilde{\nabla})$ soddisfacente le condizioni volute.

Indicato con (y_i) il sistema coordinato relativo alla carta (W, Ψ) e posto $Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i}$ si proverà per brevità che in $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(W)$ si ha:

$$\tilde{\nabla}^{(U)}_{Y_i^c} Y_j^c = \tilde{\nabla}^{(W)}_{Y_i^c} Y_j^c = (\nabla_{Y_i} Y_j)^c \ .$$

Infatti posto $Y_i = \xi_i^j X_j$, si ha:

$$\tilde{\nabla}^{(U)}_{Y_i^c} Y_j^c = \tilde{\nabla}^{(U)}_{(\xi_i^h)^c X_h^V + (\xi_i^h)^V X_h^c} ((\xi_j^k)^c X_k^V + (\xi_j^k)^V X_k^c) =$$

$$= (\xi_i^h)^c (A^c(X_h^V)(\xi_j^k)^c) X_k^V + (\xi_i^h)^c (A^c(X_h^V)(\xi_j^k)^V) X_k^c +$$

$$+ (\xi_i^h)^V (A^c(X_h^c)(\xi_j^k)^c) X_k^V + (\xi_i^h)^V (A^c(X_h^c)(\xi_j^k)^V) X_k^c +$$

$$+ (\xi_i^h)^c (\xi_j^k)^c \, \tilde{\nabla}^{(U)}_{X_h^V} X_k^V + (\xi_i^h)^c (\xi_j^k)^V \, \tilde{\nabla}^{(U)}_{X_h^V} X_k^c +$$

$$+ (\xi_i^h)^V (\xi_j^k)^c \, \tilde{\nabla}^{(U)}_{X_h^c} X_k^V + (\xi_i^h)^V (\xi_j^k)^V \, \tilde{\nabla}^{(U)}_{X_h^c} X_k^c \ .$$

Tenendo conto che:

$$A^c(X_h^V)(\xi_j^k)^c = (A(X_h))^V(\xi_j^k)^c = (A(X_h)(\xi_j^k))^V$$

$$A^c(X_h^c)(\xi_j^k)^c = (A(X_h))^c(\xi_j^k)^c = (A(X_h)(\xi_j^k))^c$$

$$A^c(X_h^V)(\xi_j^k)^V = (A(X_h))^V(\xi_j^k)^V = 0$$

$$A^c(X_h^c)(\xi_j^k)^V = (A(X_h))^c(\xi_j^k)^V = (A(X_h)(\xi_j^k)^V$$

ed usando le (7), si ottiene

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}^{(U)}_{Y_i^c} Y_j^c = {} & (\xi_j^h)^c(A(X_h)(\xi_j^k))^V X_k^V + (\xi_i^h)^V(A(X_h)(\xi_j^k))^c X_k^V + \\ & +(\xi_i^h)^V(A(X_h)(\xi_j^k))^V X_k^c + (\xi_i^h)^c(\xi_j^k)^V(\nabla_{X_h}X_k)^V + \\ & + (\xi_i^h)^V(\xi_j^k)^c(\nabla_{X_h}X_k)^V + (\xi_j^h)^V(\xi_j^k)^V(\nabla_{X_h}X_k)^c \ .\end{aligned}$$

Ma:

$$(fg)^V = f^V g^V$$

$$(fg)^c = f^c g^V + f^V g^c$$

e quindi si ottiene in definitiva:

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}^{(U)}_{Y_i^c} Y_j^c = {} & (\xi_i^h A(X_h)(\xi_j^k))^c X_k^V + (\xi_i^h A(X_h)(\xi_j^k))^V X_k^c + \\ & + (\xi_i^h \xi_j^k)^c(\nabla_{X_h}X_k)^V + (\xi_i^h \xi_j^k)^V(\nabla_{X_h}X_k)^c =\end{aligned}$$

$$= (\xi_i^h \, A(X_h)(\xi_j^k)X_h)^c + (\xi_i^h \, \xi_j^k \nabla_{X_h} X_k)^c =$$

$$= (A(Y_i)(\xi_j^k)X_k + \xi_j^k \, \nabla_{Y_i} X_k)^c = (\nabla_{Y_i} Y_j)^c =$$

$$= \widetilde{\nabla}^{(W)}_{Y_i^c} Y^c .$$

In modo analogo si provano le uguaglianze:

$$\widetilde{\nabla}^{(U)}_{Y_i^c} Y_j^V = \widetilde{\nabla}^{(W)}_{Y_i^c} Y_j^V$$

$$\widetilde{\nabla}^{(U)}_{Y_i^V} Y_j^c = \widetilde{\nabla}^{(W)}_{Y_i^V} Y_j^c$$

$$\widetilde{\nabla}^{(U)}_{Y_i^V} Y_j^V = \widetilde{\nabla}^{(W)}_{Y_i^V} Y_j^V = 0.$$

La proposizione è così completamente provata.

Osservazione 3.1. Mantenendo le notazioni della proposizione precedente, si ponga per semplicità:

$$\widetilde{X}_i = X_i^c$$

$$\widetilde{X}_{n+i} = X_i^V$$

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}_A} \widetilde{X}_B = \widetilde{\Gamma}^D_{AB} \widetilde{X}_B$$

dove $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$; $X_i^c = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$; $X_i^V = \dfrac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$ con $i = 1,\dots,n$

$A,B,C,D = 1,2,\dots,2n$; dalle (7) si ottengono allora le uguaglianze:

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}\ ;\ \tilde{\Gamma}^k_{i\ n+j} = 0;\ \tilde{\Gamma}^k_{n+i\ j} = 0;\ \tilde{\Gamma}^k_{n+i\ n+j} = 0$$

$$\tilde{\Gamma}^{n+k}_{ij} = \dot{x}^m \frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^m};\ \tilde{\Gamma}^{n+k}_{i\ n+j} = 0;\ \tilde{\Gamma}^{n+k}_{n+i\ j} = 0;\ \tilde{\Gamma}^{n+k}_{n+i\ n+j} = 0\ .$$

Inoltre dalle (3.31) c.f.r.[7] pag. 21, si ha:

$$\tilde{A}^j_h = A^j_h\ ;\ \tilde{A}^j_{n+h} = 0;\ \tilde{A}^{n+j}_h = \dot{x}^m \frac{\partial A^j_h}{\partial x^m};\ \tilde{A}^{n+j}_{n+h} = A^j_h$$

dove $(A^i_h;\ \Gamma^k_{ij})$ sono le componenti di (A,∇) rispetto alla carta (U,Φ) prefissata.

Osservazione 3.2. Poiché per ogni $X,Y \in \mathcal{D}_1(M)$ risulta $[X^C,Y^C] = [X,Y]^C$ (c.f.r. [7] pag. 16) il tensore di torsione e l'applicazione di curvatura di (A^C,∇^C) sono uguali rispettivamente al lift completo del tensore di torsione e dell'applicazione di curvatura di (A,∇).

Si supponga ora che M sia una varietà fogliettata e sia (A,∇) una pseudoconnessione lineare su M; sussiste la seguente proposizione:

Prop. 3.2. *La sottovarietà* D *di* T(M) *è autoparallela rispetto al lift completo* (A^C,∇^C) *se e solo se* (A,∇) *è fogliettata.*

Dimostrazione. In ciò che segue si suppone che gli indici i,j,k,ℓ,r,s variano da 1 ad n; α,β,γ da 1 ad r; $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$, da r+1 ad n.

Se D è autoparallela rispetto ad (A^C,∇^C) allora deve aversi:

$$(1) \qquad A^c\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \in \mathscr{D}_1(D)$$

$$(2) \qquad A^c\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha}\right) \in \mathscr{D}_1(D)$$

$$(3) \qquad \nabla^c_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \in \mathscr{D}_1(D)$$

$$(4) \qquad \nabla^c_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha} \in \mathscr{D}_1(D)$$

$$(5) \qquad \nabla_{\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_j} \in \mathscr{D}_1(D)$$

$$(6) \qquad \nabla_{\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\beta} \in \mathscr{D}_1(D)$$

Essendo $A^c\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = A^k_i \frac{\partial}{\partial x_k} + \dot{x}_j \frac{\partial A^h_j}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\ell}$ dalla (1) segue che $x_\alpha \frac{\partial A^{\bar{\beta}}_i}{\partial x_\alpha} = 0$.

Dalla (2) poiché $A^c\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha}\right) = A^c_\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\ell}$ si ha: $A^{\bar{\beta}}_\alpha = 0$.

Dalla (3) poiché $\nabla^c_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_r} + \dot{x}_\ell \frac{\partial \Gamma^s_{ij}}{\partial x_\ell} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_s}$ si ha:

$$\frac{\partial \Gamma^{\bar{\beta}}_{ij}}{\partial x_\alpha} = 0$$

Dalla (4) poiché $\nabla^c_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha} = \Gamma^\ell_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\ell}$ si ha: $\Gamma^{\bar{\beta}}_{i\alpha} = 0$.

Dalla (5) poiché $\nabla^c_{\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma^\ell_{\alpha j} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\ell}$ si ha $\Gamma^{\bar{\beta}}_{\alpha j} = 0$.

Dalla (6) infine risulta $\nabla^{c}_{\frac{\partial}{\partial \dot{x}_{\alpha}}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{\beta}} = 0$

si conclude allora per la prop. 1.2 che (A, ∇) è fogliettata. In modo analogo si prova il viceversa.

Dalla proposizione ora provata, dalla prop. 2.3 e dal teorema 2.1 segue immediatamente la proposizione:

Prop. 3.3. *La sottovarietà D è autoparallela rispetto al lift completo* (A^{c}, ∇^{c}) *di* (A, ∇) *se e solo se* (A, ∇) *mantiene* $\mathcal{D}$ *parallela e la pseudoconnessione* $\overset{*}{\Gamma}$ *indotta da* (A, ∇) *sul fibrato trasverso* $Q = T(M)/D$ *è proiettabile.*

BIBLIOGRAFIA

[1] R. BOTT *Lectures on characteristic classes* Lectures Notes in Math. n. 279 Springer (1972).

[2] C.DI COMITE *Pseudoconnessioni di seconda specie su uno spazio fibrato principale* Annali di Mat. Pura ed Appl. Serie IV Tomo IC (1974) pag. 109--142

[3] C.DI COMITE *Sulla curvatura delle pseudoconnessioni su uno spazio fibrato principale differenziabile* Rendic. Acc. dei XL serie IV vol. XXIV--XXV (1974) pag. 1-19.

[4] F.W.KAMBER-P.TONDEUR *Foliated Bundles and characteristic classes* Lecture Notes in Math. n. 453 Springer (1975)

[5] A. SANINI-F.TRICERRI *Connessioni e varietà fogliettate* Coop.libr. Univ. Torinese 1977

[6] A.SANINI-F.TRICERRI *Prolungamenti di enti geometrici su una varietà fogliettata* Rend. del Sem. Mat. dell'Univ. e Polit. di Torino vol. 34 (1975--76) pag. 1-11.

[7] K.YANO-S.ISHIHARA *Tangent and cotangent bundles* M. Dekker Inc. New York (1973).

Lavoro pervenuto alla Redazione il 16 Gennaio 1981
ed accettato per la pubblicazione il 5 Marzo 1981
su parere favorevole di I.Cattaneo Gasparini e C.Di Comite