Note di Matematica Vol.I, 25-41 (1981)

# PROBLEMI PARABOLICI NON LINEARI DIPENDENTI DA UN PARAMETRO (°)

Raffaele PISANI e Maria TUCCI (Bari)(°°)

Summary. *In this paper a result of P. Hess concerning boundary value problems of the Ambrosetti-Prodi type (Boll. U.M.I., 1980) is carried over to the non linear parabolic case, for time periodic solutions.*

## INTRODUZIONE

P. Hess ha studiato in [5] la risolubilità in $C(\bar{\Omega})$ ($\Omega$ aperto limitato di $\underline{\underline{R}}^N$, $N \geq 1$) di problemi ellittici dipendenti da un parametro. In questo lavoro, si studia il seguente problema al contorno dipendente da un parametro reale $s \in R$:

$$P_s) \quad Lu(x,t) = g(x,t,u) + f(x,t) + s\ r(x,t) \quad \text{in } Q_T = \Omega \times (0,T),\ T>0$$

dove $L$ è un operatore differenziale lineare uniformemente parabolico del secondo ordine, $f : Q_T \longrightarrow \underline{\underline{R}}$, $r : Q_T \longrightarrow \underline{\underline{R}}$ appartengono a $L^2(0,T;L^2(\Omega))=$

(°) Lavoro svolto nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.

(°°) Istituto di Analisi Matematica, Università di Bari, Palazzo Ateneo, BARI

$=L^2(Q_T)$ e $g : Q_T \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica le condizioni asintotiche del tipo di Ambrosetti-Prodi e l'ulteriore ipotesi:

$$\lim_{|s|\to+\infty} \left| \frac{g(x,t,s)}{s} \right| < +\infty$$

Il risultato principale afferma l'esistenza di un numero $s_o \in \mathbb{R}$, tale che il problema suddetto ammette almeno una soluzione in $S = \{ u \in L^2(0,T; H^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)),\ u' \in L^2(Q_T),\ u(0) = u(T) \}$ per $s \leq s_o$, nessuna per $s > s_o$.

Il caso $s = s_o$ si risolve costruendo una successione $(u_n)$ di soluzioni corrispondenti ai parametri $s_n < s_o$ tali che $s_n \longrightarrow s_o$;si dimostra che $(u_n)$ ha una estratta convergente in $L^2(Q_T)$ ad $u_o \in S$ e che $u_o$ è soluzione del problema $P_{s_o}$ ).

Sia $\Omega$ un dominio limitato in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, con frontiera regolare $\delta\Omega$. Se $T > 0$ è un numero reale dato, denotiamo con $Q_T$ il cilindro di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$:

$$Q_T = \Omega \times ]0,T[$$

e con $\Sigma$ la superficie laterale di $Q_T$:

$$\Sigma = \delta\Omega \times ]0,T[$$

Sia $X$ uno spazio di Banach e $\mathcal{V} = L^p(0,T;X)$, con $1 < p < +\infty$ lo spazio delle funzioni $f(x,t)$ definite nel cilindro $Q_T$ tale che per quasi ogni $t \in ]0,T[$ , $f(t) = f(.,t)$ è un elemento di $X$ e

$$\int_0^T \| f(t) \|_X^p \, dt < +\infty$$

Tale spazio, munito della norma:

$$\| f \|_{\mathcal{V}} = \left( \int_0^T \| f(t) \|_X^p \, dt \right)^{1/p}$$

è uno spazio completo.

Sia $\mathscr{D}'(0,T\ ;\ X) = \mathscr{L}(\mathscr{D}(]0,T[),X)$ (1) lo spazio delle distribuzioni su $]0,T[$ a valori in $X$.

Se $f \in L^p(0,T;X)$, ad essa corrisponde la distribuzione:

$$f(\Phi) = \int_0^T f(t)\ \Phi(t)dt \qquad \forall\ \Phi \in \mathscr{D}(]0,T[)$$

Si definisce quindi $\frac{\delta f}{\delta t}$ come elemento di $\mathscr{D}'(0,T;X)$ nel seguente modo:

$$\frac{\delta f}{\delta t}(\Phi) = -\ f\left(\frac{\delta \Phi}{\delta t}\right) \qquad \forall\, \Phi \in \mathscr{D}(]0,T[)$$

Denotiamo con A l'espressione differenziale del 2° ordine:

$$A\ u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta}{\delta x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\delta u}{\delta x_j}\right)$$

con coefficienti $a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\bar{\Omega})$.

Insieme alle condizioni al contorno omogenee di Dirichlet, essa induce

(1) Con $\mathscr{D}(]0,T[)$ si denota lo spazio delle funzioni definite su $]0,T[$ a valori reali, infinitamente derivabili, a supporto compatto.

un operatore differenziale autoaggiunto su $L^2(\Omega)$, che denotiamo ancora con A, con dominio:

$$D(A) = H^1_o(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Sia $H = L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q_T)$ e $\widetilde{H} = L^2(0,T;D(A))$, sia inoltre $\widetilde{A} : \widetilde{H} \longrightarrow H$ così definita:

$$\forall\, u \in \widetilde{H} : (\widetilde{A}\, u)(t) = A(u\,(t)\,) \qquad \text{q.o. in } ]0,T[$$

$\widetilde{A}$ è un operatore autoaggiunto in H.

Sia inoltre $\frac{d}{dt} : H \supset D(\frac{d}{dt}) \longrightarrow H$ l'operatore lineare con dominio $D(\frac{d}{dt}) = \{ u \in H \mid u' \in H,\ u(0) = u(T) \}$, così definito:

$$\forall\, u \in D(\frac{d}{dt}) : \frac{d}{dt} u = u'$$

ove u' è la derivata di u rispetto a t nel senso delle distribuzioni.

Sia

(1) $$L = - \frac{d}{dt} + \widetilde{A}$$

l'operatore associato alla condizione omogenea di Dirichlet su $\Sigma$ (2).

Si consideri il seguente problema al contorno dipendente dal parametro

(2) Si osservi che essendo $u \in H$, $u' \in H$, la funzione u è, dopo averla modificata su un insieme di misura nulla di $[0,T]$, una funzione continua di $[0,T]$ in $L^2(\Omega)$, perciò la condizione $u(0)=u(T)$ ha senso.

reale $s \in \underline{\underline{R}}$:

$$P_s) \qquad L\, u(x,t) = G(u)(x,t) + f(x,t) + s\, r(x,t) \quad \text{in } Q_T$$

ove G denota l'operatore di Nemytskii associato alla funzione $g:\bar{Q}_T \times \underline{\underline{R}} \longrightarrow \underline{\underline{R}}$ così definito:

$$G(u)(x,t) = g(x,t,u(x,t))$$

ed $f, r$ sono funzioni date definite in $\bar{Q}_T$ con

$$r \geq 0 \quad \text{su } \bar{Q}_T, \ r \not\equiv 0.$$

Siano verificate le seguenti ipotesi:

a) $g(x,t,z)$ è continua in $z$ per quasi ogni $(x,t) \in Q_T$ ed è misurabile in $(x,t) \in Q_T$, per ogni $z \in \mathbb{R}$; $r$ ed $f$ sono funzioni appartenenti ad $H = L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

b) Esiste una costante $K > 0$ tale che per ogni $x \in \bar{\Omega}$ e $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ appartenente ad $R^n$, risulta:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \geq K |\xi|^2.$$

Per l'operatore L definito precedentemente, valgono i seguenti risultati:(3)

(3) Cfr. Lemma 4.3. di [1] e Teorema 2. di [2]

TEOREMA 1. *Se* u *è tale che*

$$L\, u(x,t) \leq 0 \qquad q.o. \text{ in } Q_T$$

$$u(x,t) \leq 0 \qquad q.o. \text{ su } \Sigma$$

*allora risulta* $u(x,t) \leq 0$ *q.o. in* $Q_T$.

TEOREMA 2. *Sia* $(x_o,t_o) \in Q_T$ *un punto tale che, se* u *è una sottosoluzione del problema*:

$$L\, u = 0 \qquad in \qquad S_{(x_o,t_o)} \subset Q_T{}^{(4)}$$

*risulti* $u(x,t) \leq 0$, *q.o. in* $S_{(x_o,t_o)}$

*Risulta allora* $u = 0$ *q.o. in* $S_{(x_o,t_o)}$.

TEOREMA 3. *Per ogni* $\lambda \in R$, *l'autospazio di* $L-\lambda$ *coincide con l'autospazio di* $A-\lambda$ , cioé:

$$N(L-\lambda) = N(A-\lambda)$$

*Dimostrazione* .Dalla relazione

$$(u',v)+(u,v')=(u(T),v(T))_{L^2(\Omega)} -(u(0),v(0))_{L^2(\Omega)}$$

con $u,v \in L^2(0,T;L^2(\Omega))-H, u',v' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))=H$, si ha

(4) Con $S_{(x_o,t_o)}$ denotiamo l'insieme dei punti $(x,t)\subset Q_T$ che possono essere congiunti a $(x_o,t_o)$ mediante una curva, diretta verso l'alto, che ha come punto iniziale il punto $(x_o,t_o)$ e punto finale il punto $(x,t)$

$$(2) \qquad (\frac{d}{dt}u,u) = 0 \qquad \forall u \in D(\frac{d}{dt}) \ .$$

Risulta allora:

$$N(L-\lambda)=N(\frac{d}{dt}) \cap N(\tilde{A}-\lambda)=N(A-\lambda)$$

Infatti se $(L-\lambda)(u)=0$, cioé $-\frac{du}{dt}+\tilde{A}u-\lambda u=0$, tenendo presente la (2) e che:

$$(\frac{du}{dt},\tilde{A}u)=0 \qquad \forall u \in D(\frac{d}{dt}) \cap D(\tilde{A}) \text{ (5)}$$

si ha:

$$(\frac{du}{dt},\frac{du}{dt}) = (\frac{du}{dt},\tilde{A}u-\lambda u) = 0$$

da cui $\frac{du}{dt}=0$ e quindi $(\tilde{A}-\lambda)(u)=0$. Poiché il viceversa è ovvio per (2), la prima uguaglianza risulta pertanto vera. La seconda consegue subito dalla definizione di A.

Sia ora $\lambda_1$ l'autovalore principale del problema al contorno $P_s$ (cfr. Teorema 3). Sulla funzione g imponiamo la condizione asintotica del tipo:

$$(3) \qquad \lim_{s \to -\infty}. \sup \frac{g(x,t,s)}{s} < \lambda_1 \ , \quad \lim_{s \to +\infty} \inf \frac{g(x,t,s)}{s} > \lambda_1$$

uniformemente rispetto a $(x,t) \in \bar{Q}_T$.

(5) Cfr.[8], pag.537, formula (20).

Supponiamo inoltre che:

(4) $$\limsup_{|s|\to+\infty} \left|\frac{g(x,t,s)}{s}\right| < +\infty$$

Sussiste allora il seguente

TEOREMA 4. *Nelle ipotesi su* g *sopra scritte, esiste* $s_o \in R$ *con la proprietà che il problema* $P_s$ *non ha alcuna soluzione per* $s > s_o$ *ed ha almeno una soluzione per* $s \leq s_o$.

Prima di provare il Teorema, facciamo le seguenti premesse:

Osserviamo in primo luogo che dall'ipotesi (4) segue che esiste $\gamma > 0$ tale che:

(5) $$|g(x,t,s)| \leq \gamma(1+|s|) \qquad \forall (x,t) \in \overline{Q}_T , \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Poniamo $L_\gamma = L+\gamma I$ e $g_\gamma(x,t,s) = g(x,t,s) + \gamma s$ con $(x,t,s) \in \overline{Q}_T \times \mathbb{R}$.

Come in [ 3 ] Teorema 19, dove è considerato il problema dei valori iniziali, si prova che risulta:

$$R\left(\frac{d}{dt} + \widetilde{A} + \gamma I\right) = H$$

Inoltre essendo A uniformemente ellittico e $\gamma > 0$, l'operatore $L_\gamma$ è monotono. Sia allora

$$K : H \longrightarrow H$$

l'operatore tale che per ogni $h \in H$, $u = K\,h$ sia l'unica soluzione del problema:

$$L_\gamma u = h \qquad \text{in} \quad Q_T$$

Dai Teoremi 1 e 2 segue che $K$ è un operatore strettamente positivo in $H$.

Risulta anche, per il lemma di Aubin (cfr. [4], pag. 58), che $K$ è un operatore compatto. Osserviamo ora che per l'ipotesi a) su $g$ e per la (5), l'operatore di Nemijskii: $u \longrightarrow g_\gamma(.,u)$ è continuo da $H$ in $H$[6] e manda limitati in limitati; pertanto l'operatore di $H$ in $H$:

$$u \rightarrow K(g_\gamma(.,u) + f + sr)$$

è completamente continuo ed il problema $P_s$ è equivalente alla ricerca di punti fissi di tale operatore. In altri termini il problema $P_s$ è equivalente al problema:

$$\bar{P}_s) \qquad u=K(g_\gamma(.,u) + f + sr) \quad \text{in } Q_T.$$

Fatte queste premesse, dimostriamo i seguenti lemmi:

LEMMA 1. *Siano* $\Phi$ *e* $\psi$ *rispettivamente una sottosoluzione e una soprasoluzione del problema* $P_s$. *Se* $\Phi \leq \psi$ *allora esiste una soluzione* $u$ *del problema* $P_s$ *con* $\Phi \leq u \leq \psi$.

*Dimostrazione.* Consegue dal Teorema 1 di [6], osservando che, nel nostro caso, poiché la non linearità non dipende dal gradiente, non è necessario che $\Phi$ e $\psi$ appartengano a $L^\infty(Q_T)$.

LEMMA 2. *Siano verificate le ipotesi del Teorema 3. Sia inoltre* $R_1$ *un numero reale strettamente positivo.*

(6) Cfr. [9], Teorema 3.2. pag. 12.

*Esiste allora un numero reale* $S = S(R_1)$ *tale che:*

$$v \neq \tau\, K(g_\gamma(.,v) + f + sr)$$

*per ogni* $v \in H$, *con* $\|v^+\|_H = R_1$, *per ogni* $\tau \in [0,1]$ *e per ogni* $s < S$.

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che fissato $R_1$, un tale numero $S$ non esista. Allora per ogni $n \in N$ sia $v_n \in H$, con $\|v_n^+\|_H = R_1$, e siano $\tau_n \in [0,1]$, $s_n \in \underline{\underline{R}}$, con $s_n \leq -n$, tali che

$$v_n = \tau_n\, K(g_\gamma\,(.,v_n) + f + s_n r)\ ,\qquad \forall\ n \in N$$

Poiché per ogni $(x,t) \in \bar{Q}_T$ ed $s \leq 0$ si ha per (5):

$$g(x,t,s) \leq \gamma s + g(x,t,s) \leq \gamma s + \gamma + \gamma|s| \leq \gamma \leq g_\gamma(x,t,0) + 2\gamma$$

risulta

$$g_\gamma(.,v_n) \leq g_\gamma(.,v_n^+) + 2\gamma$$

Essendo K un operatore positivo, si ha:

$$v_n \leq \tau_n\, K(g_\gamma\,(.,v_n^+) + 2\gamma + f + s_n r)$$

e quindi:

$$v_n^+ \leq [\,\tau_n\, K(g(.,v_n^+) + 2\gamma + f + s_n r)]^+\ .$$

Essendo $(K(g_\gamma\,(.,v_n^+)))_{n \in N}$ relativamente compatta in H, esiste una sottosuccessione $(K(g_\gamma(.,v_{n_k}))_{k\in N}$ ed $y \in H$ tale che:

$$K(g_\gamma(.,v^+_{n_k})) \leq y \ , \qquad \forall\, k \in \underline{\underline{N}}$$

Risulta allora:

$$v^+_{n_k} \leq |y + K(2\gamma f) + s_{n_k} K r|^+ \ , \qquad \forall\, k \in \underline{\underline{N}}$$

Essendo $K r > 0$ e $\lim_{n\to+\infty} s_n = -\infty$, risulta: $\lim_{k\to+\infty} \| [y+K(2\gamma + f) + s_{n_k} Kr]^+\|_H = 0$ e quindi $\lim_{k\to+\infty} \| v^+_{n_k}\|_H = 0$ tenendo presente la precedente disuguaglianza, il che è assurdo.

LEMMA 3. *Sia* $s \in \underline{\underline{R}}$ *fissato. Esiste allora un numero reale* $R_2 > 0$ *tale che:*

$$v \neq K(g_\gamma(.,v) + f + sr)$$

*per ogni* $v \in H$ *con* $\| v^- \|_H = R_2$ *per ogni* $\tau \in [0,1]$.

*Dimostrazione.* Facciamo una stima a priori per tutte le possibili soluzioni $v_\tau$ di

(6) $$v_\tau = \tau K(g_\gamma(.,v) + f + sr) \ , \qquad \tau \in [0,1]$$

Dall'ipotesi (3) segue che esiste $\lambda' < \lambda_1$ e $c_1 \in R$ tali che:

(7) $$g(x,t,s) \geq \lambda' s + c_1 \ , \quad \forall\, (x,t,s) \in \overline{Q}_T \times R$$

Risulta da ciò:

(8) $$L_\gamma(v_\tau) = \tau(g_\gamma(.,v_\tau) + f + sr) \geq \tau((\lambda' + \gamma)v_\tau + c_1 + f + sr)$$

in $Q_T$. Essendo $\tau(\lambda'+\gamma) < \lambda_1+\gamma$, esiste una ed una sola soluzione $w_\tau$ del problema

(9) $$L_\gamma(w_\tau) - \tau(\lambda'+\gamma)w_\tau = \tau(c_1+f+sr)$$

L'insieme $(w_\tau)_{\tau \in [0,1]}$ è limitato in H. Infatti se $K_\tau$ è l'operatore inverso di $L_\gamma - \tau(\lambda'+\gamma)I$, per il Teorema 6.7 di [7], la funzione

$$\tau \in [0,1] \longrightarrow K_\varepsilon$$

è una funzione continua in $[0,1]$.

Sia $c_2 \in \underline{\underline{R}}$ tale che

$$\| w_\tau \|_H \leq c_2 , \qquad \forall \tau \in [0,1]$$

Da (8) e (9) consegue che

$$(L_\gamma - \tau(\lambda' + \gamma))(v_\tau - w_\tau) \geq 0 \quad \text{in} \quad Q_T$$

e quindi per il principio di massimo (cfr. [1]) si ha

$$v_\tau - w_\tau \geq 0 \qquad \text{q.o.} \quad \text{in} \quad Q_T$$

da cui

(10) $$v_\tau \geq w_\tau \qquad \text{q.o.} \quad \text{in } Q_T , \qquad \forall \tau \in [0,1]$$

D'altra parte risulta

$$\| w_\tau^- \|_H = \| w_\tau^+ - w_\tau \|_H \leq \| w_\tau^+ \|_H + \| w_\tau \|_H \leq \| w_\tau \|_H + \| w_\tau \|_H = 2c_2$$

e allora, tenendo presente che per la (10) risulta $v_\tau^- \leq w_\tau^-$, si ha:

$$\| v_\tau^- \|_H \leq \| w_\tau^- \|_H \leq 2c_2, \qquad \forall\ \tau \in [0,1]$$

Se si prende $R_2 = 2c_2 + 1$, il lemma sussiste.

Dimostriamo ora il Teorema 4.

Sia $R_1 > 0$ ed $S(R_1)$ quel numero che verifica la condizione del Lemma 2. Fissiamo $s \leq S(R_1)$ e consideriamo $R_2 > 0$ verificante la condizione del Lemma 3. Consideriamo l'insieme

$$S_{R_1,R_2} = \{ v \in H \mid \| v^+ \|_H < R_1, \| v^- \|_H < R_2 \}$$

$S_{R_1,R_2}$ è un insieme aperto in $H$ contenente l'origine.

Poiché, per ogni $v \in \delta(S_{R_1,R_2})$, è $v \neq \tau K(g_\gamma(.,v) + f + sr)$,

si ha, per l'invarianza omotopica dèl grado di Leray-Schauder,

$$\deg(I - K(g_\gamma(.) + f + sr), S_{R_1,R_2}, 0) =$$

$$= \deg(I, S_{R_1,R_2}, 0) = 1 .$$

Di qui il problema $\bar{P}_s$ e quindi il problema $P_s$ ha almeno una soluzione.

Sia $u$ una soluzione del problema $P_s$. Essendo $r \geq 0$ e $K$ un operatore strettamente positivo, risulta $u$ una soprasoluzione del problema $P_{s-\varepsilon}$, per ogni $\varepsilon \in R_+^*$.

Proviamo che esiste una sottosoluzione $w$ di $P_{s-\varepsilon}$ con $w \leq u$.

Sia $w$ l'unica soluzione del problema:

$$L\, w = \lambda' w + c_1 + f + (s-\varepsilon)r$$

dove $\lambda' < \lambda_1$ e $c_1 \in R$ sono i numeri definiti in (7).

Allora

$$L\, w \leq g(.,w) + f + (s-\varepsilon)r$$

e quindi $w$ è una sottosoluzione di $P_{s-\varepsilon}$.

Essendo

$$L\, u \geq g(.,u) + f + (s-\varepsilon)r \geq \lambda' u + c_1 + f + (s-\varepsilon)r$$

risulta

$$(L-\lambda')(u-w) \geq 0 \qquad \text{in } Q_T$$

Per il principio di massimo di [1] risulta $u - w \geq 0$ e quindi $u \geq w$.

Per il lemma 1, esiste allora una soluzione del problema $P_{s-\varepsilon}$, per ogni $\varepsilon \in \underline{\underline{R}}^+$.

Come in [5] (cfr. dim. Teorema 1) si prova che

$$s_o = \sup \{ s \in \underline{\underline{R}} \mid P_s \text{ ha una soluzione} \}$$

è il numero che verifica le condizioni richieste dal Teorema 4.

Proviamo ora che il problema $P_s$ ammette soluzione anche per $s = s_o$.

Sia $(s_n)_{n\in \underline{\underline{N}}}$ una successione di numeri reali tale che $\lim_{n\to+\infty} s_n = s_o$.

Siano $u_n$ le corrispondenti soluzioni del problema:

$$L_\gamma u_n = g_\gamma(\cdot, u_n) + f + s_n r$$

Per (7) si ha:

$$L_\gamma(u_n) \geq (\lambda' + \gamma)u_n + c_1 + f + s_n r \tag{11}$$

Detta $w$ l'unica soluzione del problema

$$L_\gamma(w) - (\lambda' + \gamma)\, w = c_1 + f + q\, r \tag{12}$$

ove $q < s_n$ $\forall\, n \in N$, consegue da (11) e da (12):

$$(L_\gamma - (\lambda' + \gamma))(u_n - w) \geq 0 \qquad \text{q.o. in } Q_T$$

e quindi per il principio di massimo di [1], si ha:

$$u_n \geq w \qquad \text{q.o. in } Q_T \qquad \forall\, n \in N \tag{13}$$

Risulta $(u_n)_{n \in \underline{\underline{N}}}$ limitata in H. Infatti se per assurdo $\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_H = +\infty$, posto $v_n = u_n / \|u_n\|_H$, per l'ipotesi (4) e per (13) si ha che la successione $(L_\gamma(u_n)/\|u_n\|_H)_{n \in \underline{\underline{H}}}$ è limitata in H.

Essendo $u_n = K(g_\gamma(\cdot, u_n) + f + s_n r)$ e $K$ un operatore compatto, si ha che $(v_n)_{n \in \underline{\underline{N}}}$ è relativamente compatta in H. Allora per una sottosuccessione $(v_{n_k})_{k \in \underline{\underline{N}}}$ si ha

$$v_{n_k} \longrightarrow v \qquad \text{in H.}$$

Da (13) segue che $v \geq 0$ q.o. in $Q_T$.

Per (7) si ha inoltre che:

$$v_n \geq \frac{K(\lambda' + \gamma)\ u_n}{\| u_n \|_H} + \frac{K(c_1 + f + s_n\ r)}{\| u_n \|_H}$$

Passando al limite per $n \longrightarrow \infty$ si ha:

$$v \geq K(\lambda' + \gamma) v$$

da cui, per il principio di massimo di [1] , si ha:

$$v \leq 0 \qquad \text{q.o. in } Q_T$$

e quindi $v = 0$ q.o. in $Q_T$. Ma ciò contraddice il fatto che $\| v \|_H = 1$.

La successione $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ risulta dunque limitata in H. Per la compattezza di K si ha che esiste un'estratta convergenza in H ad $u \in H$ e inoltre

$$u = K(g_\gamma(.,u) + f + s_o r)$$

$u$ è allora una soluzione del problema $P_{s_o}$.

Con ciò resta completamente provato l'asserto.

## BIBLIOGRAFIA

[1] F.NICOLOSI - *Sottosoluzioni deboli delle equazioni paraboliche lineari del 2° ordine superiormente limitate,* Le Matematiche, fasc.II, vol. XXVIII, 1973, pag. 361-377.

[2] O.ARENA - *A Strong maximum principle for quasilinear parabolic differential inequalities,* Proceedings of the American Math. Society, vol. 32,n°2,aprile 1972, pag. 497-502.

[3] H.BREZIS - *Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to non-linear partial differential equations;contributions to Nonlinear Functional Analysis,* E. Zarantonello ed., Academic Press, 1971,pag. 101-156.

[4] J.L.LIONS - *Quelques méthodes de resolution des problèmes aux limites non lineaires.* Ed. DUNOD (1969).

[5] P.HESS - *On a non linear elliptic boundary value problem of the Ambrosetti-Prodi type;*.Boll. U.M.I., 1980.

[6] J.DUEL-P.HESS - *Non linear parabolic boundary value problems with upper and lower solutions;* Israel Journal of Mathematics,Vol.29,No.1 (1978) pag.92-104.

[7] KATO T. - *Perturbation theory for linear operators* Ed. Springer (1969).

[8] P.HESS - *Non linear perturbation of linear elliptic and parabolic problems at resonance: Existence of multiple solutions.* Annali Sc. Nord. Sup. di Pisa Serie IV, Vol. 5; n.3(1978),527-537.

[9] G.PRODI-A.AMBROSETTI - *Analisi non lineare.* - I Quaderno - Sc.Nor. Sup. di Pisa - Classe di Scienze - Pisa 1973.

*Lavoro pervenuto alla Redazione il 15 Dicembre 1980*
*ed accettato per la pubblicazione il 25 Febbraio 1981*
*su parere favorevole di A.Ambrosetti e A.Avantaggiati*