Note di Matematica Vol.I , 187-202 (1981)

UN PROBLEMA AL CONTORNO PER I SISTEMI ELLITTICI DI EQUAZIONI SEMILINEARI ALLE DERIVATE PARZIALI DEL PRIMO ORDINE

Gaetano CARADONNA (°).

Summary. *We establish an existence and uniqueness theorem for the solution of a boundary value problem relative to elliptic system of the first order with constant coefficients.*

In [1] A. AVANTAGGIATI si è occupato di un problema al contorno per un sistema ellittico di equazioni del primo ordine, traducendolo in una equazione funzionale equivalente e stabilendo quindi delle condizioni per cui vi è esistenza, e altre per cui vi è unicità per le soluzioni del problema.

In questa nota ho considerato un problema analogo ma per i sistemi i cui termini noti siano funzioni delle variabili indipendenti e delle funzioni incognite: ho stabilito per esso un teorema di esistenza e di unicità per le soluzioni, utilizzando la rappresentazione integrale usata in [1] per le soluzioni del sistema lineare del primo ordine.

(°) Università degli studi di Bari - Facoltà di Scienze - Istituto di Analisi Matematica - BARI

I. Sono assegnati:

Un dominio limitato X di R^m $(m \geq 3)$ con frontiera di classe $C^{(2)}$;

Un ricoprimento finito di ∂X, mediante gli insiemi $A_1,\dots,A_N$, ciascuno contenuto in ∂X, omeomorfo ad una ipersfera aperta di R^{m-1} ed avente contorno abbastanza regolare;

Su ciascun A_k una matrice $C^{(k)} = (c_{rs}^{(k)})$ ad n righe e 2n colonne, ed un vettore $(c_{10}^{(k)},\dots,c_{n0}^{(k)})$ tali che ciascuna delle funzioni $c_{rs}^{(k)}$ $(r=1,\dots,n;$ $s=0,1,\dots,2n)$ sia di classe $C^{(1)}(A_k)$; le funzioni $c_{rs}^{(k)}$ siano poi tali che in ogni punto di A_k : $(c_{rs}^{(k)})^2 > 0$, e in ogni aperto non vuoto del tipo $A_k \cap A_h$ sia possibile definire una matrice quadrata $\Gamma^{(k,h)}$ di ordine n dotata di inversa $\Gamma^{(k,h)}$, entrambe ad elementi di classe $C^{(0,\lambda)}(A_k \cap A_h)$, tali che in ogni punto di $A_k \cap A_h$ risulti

$$c_{rs}^{(k)} = \sum_{t=1}^{n} \gamma_{rt}^{(k,h)} c_{ts}^{(h)} \; ; \tag{1.1}$$

Le 2n funzioni f_r definite in $X \times R^{2n}$, limitate e di classe $C^{(1)}$.

Posto

$$u = (u_1,\dots,u_{2n})$$

si consideri il seguente

PROBLEMA. - Determinare 2n funzioni $(u_1,\dots,u_{2n})$ tali che

$$u_i \in C^{(0,\lambda)}(X) \cap C^{(1)}(\mathring{X}), \qquad i = 1,\dots,2n,$$

verifichino in $\overset{\circ}{X}$ il sistema

$$(1.2) \qquad \sum_{s=1}^{2n} \sum_{p=1}^{m} a_{rs}^{p} \frac{\partial}{\partial x_p} u_s(x) = f_r(x,u) \qquad r = 1,\dots,2n,$$

e su ogni A_k le condizioni

$$(1.3) \qquad \sum_{s=1}^{2n} c_{rs}^{(k)}(\xi) u_s(\xi) = c_{r0}^{(k)}(\xi) \qquad r = 1,\dots,n,$$

ammettendo che il sistema (1.2) sia a coefficienti costanti reali, simmetrico $(a_{rs}^{p} = a_{sr}^{p})$ e verificante la condizione di ellitticità

$$A(\varepsilon) = \det\left(\sum_{p=1}^{m} a_{rs}^{p} \varepsilon_p\right) \neq 0,$$

$\forall \varepsilon = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m) \in R^m - \{0\}$.

2. Posto

$$a_{rs}[n(\xi)] = \sum_{p=1}^{m} a_{rs}^{p} n_p(\xi); \qquad a[n(\xi)] = (a_{rs}[n(\xi)]),$$

dove $n_1(\xi),\dots,n_m(\xi)$ indicano i coseni direttori della retta normale a ∂X nel punto ξ orientata verso l'interno di X, e indicata con $C'^{(k)}$ la trasposta di $C^{(k)}$, con I la matrice unitaria (δ_{rs}) di ordine 2n e con 0 quella nulla di ordine n, sia

$$D^{(k)}(\xi,\rho) = \det \begin{pmatrix} a[n(\xi)] - \rho I & C'^{(k)}(\xi) \\ C^{(k)}(\xi) & 0 \end{pmatrix}.$$

In seguito si indicheranno con $A_{rs}[n(\xi)]$ gli elementi della matrice inversa di $a[n(\xi)]$.

Considerate le ipotesi

A) $\forall k \in \{1,\dots,N\}$ e $\forall \xi \in A_k$: $D^{(k)}(\xi, \rho) = 0$ ammette solo radici positive [negative] .

B) Posto, per $r,i = 1,\dots,2n$

$$H_{2n}(x,u_1,\dots,u_{2n}) = \det\left(\frac{\partial f_r}{\partial u_i}\right)$$

e detto H_t, $t = 1,\dots,2n$, il minore principale di H_{2n} formato con le sue prime t righe e t colonne, risulta:

(2.1) $\forall t \in \{1,\dots,2n\}$:

$$H_t(x,u_1,\dots,u_{2n}) > 0 \quad \left[\begin{array}{ll} H_t(x,u_1,\dots,u_{2n}) > 0, & \text{se } t \text{ è pari} \\ H_t(x,u_1,\dots,u_{2n}) < 0, & \text{se } t \text{ è dispari} \end{array}\right]$$

$\forall x \in X$ (1),

si può enunciare il

TEOREMA (2.1). *Nelle ipotesi* A) *e* B) *il problema* (1.2), (1.3) *ammette al più una soluzione.*

(1) La (2.1) assicura che la forma quadratica $\sum_{r,s}^{1,\dots 2n} \frac{\partial f_r}{\partial u_s} \lambda_r \lambda_s$ è definita positiva [negativa] .

Infatti, dette $u' = (u'_1,\dots,u'_{2n})$ e $u'' = (u''_1,\dots,u''_{2n})$ due soluzioni del problema, risulta:

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^{2n} \sum_{p=1}^{m} a^p_{rs} \dfrac{\partial}{\partial x_p} (u'(x)-u''(x)) = f_r(x,u'(x))-f_r(x,u''(x)), x\in \overset{\circ}{X}; \quad r=1,\dots,2n \\ \sum_{s=1}^{2n} c^{(k)}_{rs} (\xi)(u'_s(\xi) - u''_s(\xi)) = 0 \qquad \xi\in A_k;\ r=1,\dots,n. \end{cases}$$

Considerata la formula integrale relativa al sistema (1.2)

$$\int_{\partial X} \sum_{r,s}^{1\dots 2n} a_{rs}[n(\xi)] v_r(\xi) u_s(\xi)\, d_\xi \sigma =$$

$$= -\int_X \sum_{r=1}^{2n} \{v_r(x) \sum_{s=1}^{2n} \sum_{p=1}^{m} a^p_{rs} \frac{\partial}{\partial x_p} u_s(x) + u_r(x) \sum_{s=1}^{2n} \sum_{p=1}^{m} a^p_{sr} \frac{\partial}{\partial x_p} v_s(x)\} dx,$$

se si pone in essa $u'_r - u''_r = v'_r - v''_r$ e si tiene conto della ipotesi di simmetria fatta sul sistema, si ha:

$$\int_{\partial X} \sum_{r,s}^{1,\dots 2n} a_{rs}\left[n(\xi)\right] (u'_r(\xi)-u''_r(\xi))(u'_s(\xi)-u''_s(\xi)) d_\xi \sigma =$$

$$= -2\int_X \sum_{r=1}^{2n} (u'_r(x)-u''_r(x))(f_r(x,u'(x))-f_r(x,u''(x)))dx.$$

Se non fossero tutte nulle le $u'_r - u''_r$, per l'ipotesi B)(2) si avrebbe

(2) Da tale ipotesi consegue che l'applicazione $u \to f(x,u)$ è monotona strettamente crescente [decrescente].

$$\int_{\partial X} \sum_{r,s}^{1,\dots,2n} a_{rs}\left[n(\xi)\right] (u'_r(\xi)-u''_r(\xi))(u'_s(\xi)-u''_s(\xi))d_\xi\sigma<0 \left[>0\right].$$

Ma ciò è assurdo perché dall'ipotesi A) consegue che la forma quadratica

$$\sum_{r,s}^{1,\dots,2n} a_{rs}\left[n(\xi)\right](u'_r(\xi)-u''_r(\xi))(u'_s(\xi)-u''_s(\xi)),$$

quando le $u'_r(\xi)-u''_r(\xi)$ verificano le condizioni

$$\sum_{s=1}^{2n} c^{(k)}_{rs}(\xi)(u'_s(\xi) - u''_s(\xi)) = 0 \qquad r = 1,\dots,n,$$

assume solo valori positivi [negativi] in corrispondenza di valori non tutti nulli per le $u'_i(\xi)-u''_i(\xi)$, $i=1,\dots,2n$ (3).

3. Il sistema differenziale (1.2) verifichi l'ulteriore ipotesi.

Ciascuna delle radici dell'equazione in ρ

$$\det(a\left[n(\xi)\right] - \rho\, I) = 0$$

abbia ordine di molteplicità costante al variare di ξ in ogni regione connessa di ∂X.

In tale ipotesi è possibile determinare un ricoprimento aperto e finito di ∂X, sia $\{B_1,\dots,B_p\}$, e su ciascun B_k una matrice ortogonale $\mathscr{D}^{(k)} = (d^{(k)}_{rs})$ di ordine 2n con coefficienti di classe $C^{(0,\lambda)}(B_k)$; inoltre in ogni

(3) Cfr. il teorema (8.5) di [1].

regione non vuota del tipo $B_h \cap B_k$ esiste una matrice ortogonale $\Theta^{(h,k)} = (\Theta^{(h,k)}_{i\ell})$ con coefficienti di classe $C^{(0,\lambda)}$ tale che si abbia

$$d^{(h)}_{rs} = \sum_{t=1}^{2n} \Theta^{(h,k)}_{rt} d^{(k)}_{ts} \qquad r=1,\dots 2n$$

$\forall \xi \in B_h \cap B_k$ (4).

Per ogni $\varphi \in C^{(0,\lambda)}(\{\Theta\}_{B,n})$ (5) e per ogni decomposizione di ∂X in insiemi $D_1,\dots,D_p$ abbastanza regolari e tali che $D_q \subset B_q$, per $q=1,\dots,P$, si considerino le funzioni

$$(3.1) \qquad u_r(x) = \sum_{q=1}^{p} \sum_{s=1}^{2n} \int_{D_q} M_{rs}(\eta - x) \sum_{l=1}^{n} d^{(q)}_{\ell r}(\eta) \quad \varphi^{(q)}_{\ell}(\eta) d_n\sigma +$$

$$- \sum_{s=1}^{2n} \int_X M_{rs}(\bar{x}-x) f_s(\bar{x}, a(\bar{x})) d\bar{x} \qquad r=1,\dots,2n,$$

essendo $a = (a_1,\dots,a_{2n})$ una 2n-pla di funzioni di classe $C^{(0,\lambda)}(X)$ e $(M_{rs}(y-x))$ una matrice fondamentale del sistema (1.2) (6).

(4) Cfr. [1], teorema (6.3). Vedere anche il par.9 in cui sono proposti alcuni esempi nei quali la predetta ipotesi è verificata.

(5) Indicato con $[C^{(0,\lambda)}(B_k)]^n$ l'insieme dei vettori ad n componenti ciascuna di classe $C^{(0,\lambda)}(B_k)$, si pone $C^{(0,\lambda)}(B,n) = [C^{(0,\lambda)}(B_1)]^n \times\dots\times [C^{(0,\lambda)}(B_p)]^n$ e si indica con $C^{(0,\lambda)}(\{\Theta\}_{B,n})$ il sottoinsieme di $C^{(0,\lambda)}(B,n)$ i cui elementi $((\varphi^{(1)},\dots,\varphi^{(P)}))$ verifichino la condizione

$$\varphi^{(k)}_i = \sum_{t=1}^{n} \Theta^{(k,h)}_{it} \quad \varphi^{(h)}_t \qquad \forall \xi \in B_h \cap B_k.$$

(6) Cfr. 5) di [1] e cap. III di [2].

Si consideri un punto ξ qualunque di ∂X e si supponga che $\xi \in A_{p'} \cap B_p$; imponendo alle funzioni (3.1) di soddisfare in ξ alle condizioni (1.3) si ottiene

$$(3.2)\quad \sum_{\ell=1}^{n} k_{j\ell}^{(p',p)}(\xi,\xi)\,\varphi_\ell^{(p)}(\xi) + \sum_{q=1}^{p}\sum_{l=1}^{n} \int_{D_q}^{*} h_{j\ell}^{(p',q)}(\xi,\eta)\,\varphi_\ell^{(q)}(\eta)\,d_\eta\sigma =$$

$$= g_j^{(p')}(\xi) \qquad j = 1,\dots,n;$$

avendo posto per $(\xi,\eta) \in A_{p'} \cap B_q$

$$k_{j\ell}^{(p',q)}(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\sum_{r,s}^{1,..2n} A_{rs}\left[n(\xi)\right] c_{jr}^{(p')}(\xi)\, d_{\ell s}^{(q)}(\eta)$$

$$h_{j\ell}^{(p',q)}(\xi,\eta) = \sum_{r,s}^{1,..2n} M_{rs}(\eta-\xi)\, c_{jr}^{(p')}(\xi)\, d_{\ell s}^{(q)}(\eta), \qquad \xi \neq \eta$$

$$g_j^{(p')}(\xi) = c_{j0}^{(p')}(\xi) + \sum_{r,s}^{1,\dots,2n} c_{jr}^{(p')}(\xi)\int_X M_{rs}(\bar{x}-\xi) f_s(\bar{x},a(\bar{x}))\,d\bar{x}.$$

Associando al precedente sistema di equazioni integrali (3.2) la trasformazione S che ad ogni $\varphi \in C^{(0,\lambda)}(\{\theta\}_{B,n})$ associa

$$\varphi' = ((\varphi'^{(1)},\dots,\varphi'^{(N)})) \in C^{(0,\lambda)}(\{\Gamma\}_{A,n})$$

definito dai primi membri di (3.2), questo si scriverà anche

$$(3.2')\qquad S(\varphi) = g.$$

Definite qui di seguito le matrici simboliche associate alla S:

Indicato con π_ξ l'iperpiano tangente a ∂X nel punto ξ, si pone $\forall(\xi,\eta) \in A_{p'} \cap B_q$ e $\forall \tau \in \pi_\xi \cap \partial\Omega^m(\xi,1)$

$$\mathscr{M}^{(p'q)}(\xi,\eta,\tau) = \left(\sum_{r,s}^{1,\dots,2n}\left[A_{rs}\left[n(\xi)\right] + i\widetilde{C}_{rs}(\xi,\tau)\right]c_{jr}^{(p')}(\xi)d_{\ell s}^{(q)}(\eta)\right)$$

$$j,\ell = 1,\dots,n$$

essendo

$$\widetilde{C}_{rs}(\xi,\tau) = \pi \int_{\pi_\xi \cap \partial\Omega^m(\xi,1)} M_{rs}(\tau'-\xi)\,sg(\tau' x \tau)\,d_{\tau'}\sigma$$

formuliamo le ipotesi

C) $\forall \xi \in \partial X$ e $\forall \tau \in \tau_\xi \cap \Omega^m(\xi,1)$ si ha

$$\det \mathscr{M}^{(p',q)}(\xi,\xi,\tau) \neq 0 \qquad \xi \in A_{p'} \cap B_p$$

e

D) $\forall k \in \{1,\dots,N\}$, per quasi tutti i punti $\xi \in A_k$ la forma quadratica

$$\sum_{j,\ell}^{1,\dots,N}\left(\sum_{r,s}^{1,\dots,2n} A_{rs}\left[n(\xi)\right] c_{jr}^{(k)}(\xi)c_{\ell s}^{(k)}(\xi)\right)\lambda_j\lambda_\ell$$

è definita positiva [negativa] .

Si consideri il caso in cui siano verificate le ipotesi A),C) e D): per quanto stabilito in [1] si ha che la trasformazione S ammette una ed una sola soluzione [7]. Inoltre la S ha inversa continua; perciò

$$\varphi = S^{-1}(g)$$

ed esiste una costante H tale che

(3.3) $$\|\phi\|_{C^{(0,\lambda)}} \leq H \|g\|_{C^{(0,\lambda)}} .$$

Posto, per r,s = 1,...,2n; h = 1,...P:

$$\alpha_{rs}(x) = \int_X M_{rs}(\bar{x}-x)q_s(\bar{x})d\bar{x}$$

$$\beta_{rs}(x) = \int_{D_h} M_{rs}(\eta-x)p_s(\eta)d_\eta\sigma ,$$

sia K un numero positivo tale che, per ogni funzione $q_s \in C^{(0,\lambda)}(X)$ e per ogni funzione $p_s \in C^{(0,\lambda)}(\partial X)$, risulti [8]

(3.4) $$|\alpha_{rs}(x)| \leq K\max_x |q_s| ; \left[\alpha_{rs}\right] \leq K\max_x |q_s|$$

(3.5) $$|\beta_{rs}(x)| \leq K\max_\eta |p_s| ; \left[\beta_{rs}\right]_\lambda \leq K \left[p_s\right]_\lambda .$$

(7) Essendo le funzioni g_j di classe $C^{(0,\lambda)}(\partial X)$, di conseguenza le φ_1 appartengono allo spazio $C^{(0,\lambda)}(\{0\}_{B,n})$: cfr. [3]

(8) L'esistenza di K è nota (cfr. il teorema (3.8) di [1] e, tenuto conto che i nuclei M_{rs} sono di classe $N^{(1,\lambda)}$, i teoremi 2.1 di [4] e 77.11 di [5]).

Si può fare in modo che K sia maggiore dell'estremo superiore del modulo di ognuna delle funzioni f_s e $\sum_{\ell=1}^{n} d_{\ell s}^{(h)} \varphi_{\ell}^{(h)}$ (s=1,...,2n; h = =1,...P), quando le φ_{ℓ} siano calcolate risolvendo il sistema (3.2), con le g_j così definite, per j=1,...n

$$(3.6) \qquad g_j^{(p')}(\xi) = c_{j0}^{(p')}(\xi) + \sum_{r,s}^{1,\dots,2n} c_{jr}^{(p')}(\xi)\int_X M_{rs}(\bar{x}-\xi) f_s(\bar{x}, v(\bar{x}))d\bar{x}.$$

qualunque siano le $v \in C^{(0,\lambda)}(X)$; inoltre K può essere maggiore del coefficiente di Hölder di ordine λ delle stesse $\sum_{l=1}^{n} d_{\ell s}^{(h)} \varphi_{\ell}^{(h)}$ (9), tenendo presente che sussistono la (3.3) e la seconda delle (3.4).

Sia E lo spazio costituito dalle 2n-ple $(e_1,\dots,e_{2n})$ di funzioni definite in X, ivi λ-hölderiane e tali che

$$\max_x |e_i(x)| \leq 2n(P+1)K^2, \qquad [e_i]_\lambda \leq 2n(P+1)K^2 \qquad i = 1,\dots;2n$$

con la norma definita da

$$\| e \|_E = \| e \|_{[C^{(0)}X)]^{2n}},$$

avendo indicato con e un elemento di E.

Sia T la trasformazione che ad ogni 2n-pla $e = (e_1,\dots,e_{2n}) \in E$ associa la 2n-pla $e^* = (e_1^*,\dots,e_{2n}^*)$ data da

(9) Per il lemma (2.2) di [1] si ha che le funzioni $\sum_{l=1}^{n} d_{\ell s}^{(h)} \varphi_{\ell}^{(h)}$, essendo le $d_{\ell s}$ di classe $C^{(1)}(\partial X)$, sono di classe $C^{(0,\lambda)}(\partial X)$.

$$e_i^*(x) = \sum_{h=1}^{p} \sum_{r=1}^{2n} \int_{D_h} M_{ir}(\eta-x) \sum_{l=1}^{n} d_{\ell r}^{(h)}(\eta)\, \varphi_\ell^{(h)}(\eta)\, d_\eta\sigma \, +$$

$$- \sum_{r=1}^{2n} \int_X M_{ir}(\bar{x}-x) f_r(\bar{x}, e(\bar{x}))d\bar{x} \qquad i = 1,\dots,2n,$$

essendo $(\varphi_1^{(h)},\dots,\varphi_n^{(h)})$ la soluzione del sistema (3.2) con

$$(3.6')\quad g_j^{(p')}(\xi) = c_{j0}^{(p')}(\xi) + \sum_{r,s}^{1,\dots,2n} c_{jr}^{(p')}(\xi) \int_X M_{rs}(\bar{x}-\xi) f_s(\bar{x}, e(\bar{x}))d\bar{x}$$

$$j=1,\dots,n.$$

Essendo le funzioni $f_r(x,e(x))$ e $\sum_{l=1}^{n} d_{lr}\,\varphi_l$ rispettivamente di classe $C^{(0,\lambda)}(X)$ e di classe $C^{(0,\lambda)}(\partial X)$, si ha che anche i potenziali di dominio e di frontiera sono rispettivamente di classe $C^{(0,\lambda)}(X)$ e di classe $C^{(0,\lambda)}(\partial X)$; e ciò per quanto citato in [8]. Perciò le funzioni e_i^* sono λ-hölderiane.

Inoltre, in virtù delle (3.4) e (3.5), si ha, per i=1,...,2n

$$|e_i^*(x)| \le \Big| \sum_{h=1}^{p} \sum_{r=1}^{2n} \int_{D_h} M_{ir}(\eta-x) \sum_{\ell=1}^{n} d_{\ell r}^{(h)}(\eta)\, \varphi_\ell^{(h)}(\eta)\, d_\eta\sigma \, +$$

$$+\Big| \sum_{r=1}^{2n} \int_X M_{ir}(\bar{x}-x) f_r(\bar{x}, e(\bar{x}))d\bar{x} \Big| \le$$

$$\le \sum_{h=1}^{p} \sum_{r=1}^{2n} K \max_\eta \Big| \sum_{\ell=1}^{n} d_{\ell r}^{(h)}(\eta)\, \varphi_\ell^{(h)}(\eta)\Big| + \sum_{r=1}^{2n} K \max_x |f_r(x,e(x))| \le$$

$$\le 2n(P+1)K^2 \quad ,$$

$\left[e_i^*\right]_\lambda \leq 2n(P+1)K^2.$

Si dimostra il

TEOREMA (3.1). *La trasformazione* T *ammette almeno un elemento unito.*

Si prova anzitutto che T è continua. Infatti sia $(e^p)_{p\in N}$, con

$$e^p = (e_1^p,\dots,e_{2n}^p),$$

una successione di elementi di E che converge ad

$$e = (e_1,\dots,e_{2n}) \in E.$$

Posto

$$T(e^p) = (e_1^{*p},\dots,e_{2n}^{*p})$$

$$T(e) = (e_1^*,\dots,e_{2n}^*),$$

in virtù delle (3.4) e (3.5) si ha, per i = 1,...,2n:

$$|e_i^{*p}(x)-e_i^*(x)| \leq \Big|\sum_{h=1}^{p}\sum_{r=1}^{2n}\int_{D_h} M_{ir}(\eta-x)\sum_{\ell=1}^{n} d_{\ell r}^{(h)}(\eta)\left[\varphi_\ell^{(h)}(\eta,e^p)-\varphi_\ell^{(h)}(\eta,e)\right]d_\eta\sigma +$$

$$+\Big|\sum_{r=1}^{2n}\int_X M_{ir}(\bar{x}-x)\left[f_r(\bar{x},e(\bar{x}))-f_r(\bar{x},e^p(\bar{x}))\right]d\bar{x}\Big| \leq$$

$$\leq \sum_{h=1}^{p}\sum_{r=1}^{2n} K \max_\eta \Big|\sum_{\ell=1}^{n} d_{\ell r}^{(h)}(\eta)\left[\varphi_\ell^{(h)}(\eta,e^p)-\varphi_\ell^{(h)}(\eta,e)\right]\Big|+$$

$$+\sum_{r=1}^{2n} K \max_x |f_r(x,e(x)) - f_r(x,e^p(x))| .$$

Perciò, anche per la continuità delle f_r e delle $\varphi_\ell^{(h)}$:

$$\lim_p e_i^{*p} = e_i^* \qquad \text{in} \qquad C^{(0)}(X);$$

quindi

$$\lim_p T(e^p) = T(e).$$

Per dimostrare che l'insieme $T(E)$ è relativamente compatto consideriamo una qualunque successione di elementi di E $(e^p)_{p\in N}$, con $e^p = (e_1^p,\dots,e_{2n}^p)$.

Dalla equilimitatezza dei coefficienti di Hölder delle e_i^p si deduce che esistono due costanti positive H_1 e H_2 tali che, per $\mu \in]\lambda,1[$:

$$\left[\int_X M_{rs}(\bar{x}-\xi)f_s(\bar{x},e^p(\bar{x}))\, d\bar{x}\right]_\mu \leq H_1 \text{ (10)},$$

e, tenuto contc che le $c_{jr} \in C^{(1)}(\partial X)$,

$$\left[g_j(\xi,e^p)\right]_\mu \leq H_2 \text{ (11)}.$$

Dal sistema (3.2) segue la equilimitatezza dei coefficienti di Hölder delle $\varphi_1(\xi,e^p)$, di ordine μ tenuto conto della (3.3), e perciò ogni successione $(\varphi_1(\xi,e^p)_{p\in N}$ ha una estratta convergente in $C^{(0,\lambda)}(\partial X)$; di conseguenza anche $(e^{*p})_{p\in N}$, per il teorema 2.1 di [4], ha una estratta convergente in $C^{(0,\lambda)}(X)$.

Perciò, essendo E chiuso e convesso, la trasformazione T ammette almeno un elemento unito, in forza del teorema di SCHAUDER.

(10) Cfr. il teorema 3.11 di [4].

(11) E' una ovvia conseguenza del teorema 3.11 di [4].

Le funzioni costruite con le formule (3.1) e corrispondenti alla soluzione del sistema (3.2), a causa di quanto stabilito nel n.3 di [1], sono di classe $C^{(0,\lambda)}(X) \cap C^{(1)}(\overset{\circ}{X})$; inoltre la 2n-pla $(e_1^*,\dots,e_{2n}^*)$ verifica il sistema differenziale (1.2) e ciò per le proprietà della sua matrice fondamentale. Per cui dai teoremi (2.1) e (3.1) segue il

TEOREMA (3.2). *Nelle ipotesi* A),B),C) *e* D) *il problema* (1.2),(1.3)*ammette una ed una sola soluzione, qualunque siano i termini noti* .

OSSERVAZIONE. Nelle ipotesi A),B),C) e D) la trasformazione T ammette un unico elemento unito.

Infatti se T ammettesse più di un elemento unito il problema (1.2), (1.3) ammetterebbe più di una soluzione.

BIBLIOGRAFIA

[1] A.AVANTAGGIATI, *Problemi al contorno per i sistemi ellittici simmetrici di equazioni lineari alle derivate parziali del primo ordine a coefficienti costanti in* m ($\geq$ 3) *variabili indipendenti*, Annali di Mat.pura ed applicata; (IV), Vol. LXI (1963), 193-258.

[2] F.JOHN, *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations*, Interscience publishers, inc. New York (1955).

[3] S.G.MIHLIN, *Singular integral Equations in the classes of Lipschitz functions*, Dokl.Akad.Nauk.SSSR 138 (1961).

[4] C.MIRANDA, *Sulle proprietà di regolarità di certe trasformazioni integrali*, Atti delle Accademie Nazionali dei Lincei, 7(1965), 303-336.

[5] C.MIRANDA, *Istituzioni di Analisi Funzionale Lineare*,U.M.I. 1978.

Lavoro pervenuto alla Redazione il 19 Gennaio 1981
ed accettato per la pubblicazione l'11 Luglio 1981
su parere favorevole di A.Avantaggiati e C.Parenti