Note di Matematica Vol. II, 303-315 (1982)

SU UN PARTICOLARE MODULO DI FRAZIONI DI CERTI Λ-MODULI (*)

Angiolà LETIZIA (**)

Summary. *It is well known that an unique factorization domain is a Krull domain (see [1]). In the light of this result we espound in this paper some considerations on* Λ*-modules from which it follows that if* M(+,*) *is a torsion-free* f*-cryptofactorial* Λ*-module and if* Λ-{0}(•) *is a* h*-finite semigroup for which any atomic element is prime, then* M(+,*) *is included in a quasi Krull module and is a Krull module in the particular case of* Λ(•) f*-cryptofactorial semigroup (see definitions below).*

By this we have that the factorial modules (see [2]) are Krull modules and therefore such are also the direct sum and the direct product of factorial modules, the free modules and the projective modules over an U.F.D.

To conclude we notice that any cryptofactorial domain is included in an U.F.D.

(*) Lavoro svolto nell'ambito del gruppo di ricerca G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Dipartimento di Matematica - Università degli Studi - Lecce.

1. INTRODUZIONE.

Dato un Λ-insieme [1] $M(*)$ (che intenderemo sempre su di un semi-gruppo $\Lambda(\cdot)$ commutativo) indicheremo con " $\lesssim$ " il preordinamento in M dato da $a \lesssim b$ se e soltanto se esiste $\alpha\in\Lambda$ tale che $b = \alpha * a$ ("a divide b") con "$\sim$", la relazione di equivalenza associata a $\lesssim$ e con " $\leq$ " la relazione d'ordine in $\frac{M}{\sim}$ indotta da $\lesssim$. Diremo inoltre, dati $a,b\in M$, che a copre b (in simboli $a \vdash b$) quando $[a]_\sim \vdash [b]_\sim$ (cioé $[b]_\sim < [a]_\sim$ e non esistono classi $[c]_\sim$ tali che $[b]_\sim < [c]_\sim < [a]_\sim$); la scrittura $a \mathbin{\vdash\!\dashv} b$ sarà abbreviazione di "$a \vdash b$ o $b \vdash a$".

Indicato con Z_M l'insieme degli zeri [2] di M, chiameremo componenti connesse di M le classi di equivalenza rispetto alla relazione binaria E definita ponento $aEb \iff a\sim b$ oppure $\exists\, a_\circ, a_1, \ldots, a_n \in M-Z_M$ $(n \geq 1)$ t.c. $a = a_\circ \mathbin{\vdash\!\dashv} a_1 \mathbin{\vdash\!\dashv} \ldots \mathbin{\vdash\!\dashv} a_n = b$.

Considereremo ogni semigruppo Λ come insieme su se stesso ed indicheremo con U_Λ l'insieme delle unità di Λ. Infine se $M(*)$ è un Λ-insieme ad operatori semplificabili [3] indicheremo con Σ la relazione d'equivalenza definita in $\Lambda \times M$ da $(\alpha,x)\Sigma(\beta,y)$ se e solo se $\alpha * y = \beta * x$, indicheremo con Γ l'insieme $\frac{\Sigma\times M}{\Sigma}$ e con $\frac{x}{\alpha}$ gli elementi di Γ . L'insieme Γ sarà strutturato come Λ-insieme da $\alpha * \frac{x}{\beta} = \frac{\alpha * x}{\beta}$ e conterrà una parte isomorfa a $M(*)$.

---

(1) Dato un semigruppo $\Lambda(\cdot)$ unitario (di unità 1) si dice che $M(*)$ è un Λ-insieme se "$*$" è un'operazione esterna con dominio di operatori Λ tale che: i) $\alpha*(\beta*x)=\alpha\beta*x$ $\forall\alpha,\beta\in\Lambda$, $\forall x\in M$; ii) $1*x = x$ $\forall x\in M$. (cfr. [3] pag. 50).

(2) $Z_M = \{z\in M \mid \alpha*z = z \quad \forall\alpha\in\Lambda\}$.

(3) Tale che $\forall\alpha\in\Lambda: \alpha*x = \alpha*y \implies x = y$ quali che siano $x,y\in M$.

Parleremo di Γ come del Λ-insieme delle frazioni di M rispetto a Λ .

Nel caso di un Λ-modulo $M(+,*)$ privo di torsione (e quindi su di un dominio di integrità) il modulo delle frazioni di M rispetto ad un sistema moltiplicativo S di Λ sarà indicato con $S^{-1} * M$; esso sarà un $S^{-1}\Lambda$-modulo (cfr. [4] oppure [5]).

2. CONSIDERAZIONI PRELIMINARI.

Siano $M(*)$ un Λ-insieme, $a \in M$, τ elemento atomico [4] di Λ. Tenendo presente la definizione data in [6] pag. 19, diremo che a ha altezza finita rispetto a τ se esiste un intero $n \in N_0$ (che indicheremo con $h_\tau(a)$) tale che si abbia $a \in \tau^n * M$ e $a \notin \tau^{n+1} * M$ (in caso contrario diremo che a ha altezza infinita rispetto a τ). Porremo $M_\tau^{(i)} = \{x \in M | h_\tau(x) = i\}$.

Se ogni elemento di M ha altezza finita rispetto a τ, diremo che M è h_τ-finito.

Se $a \in M$ ha altezza finita rispetto ad ogni elemento atomico di Λ diremo che a è h-finito e se ogni elemento di M è h-finito diremo che $M(*)$ è un Λ-insieme h-finito. Diremo poi che a ha altezza r (e scriveremo $h(a)=r$) quando $h_\nu(a)=r$ quale che sia ν elemento atomico di Λ.

Porremo $M^{(i)} = \{x \in M | h(x) = i\}$.

Premesso ciò osserviamo subito che ogni $z \in Z_M$ ha altezza infinita rispetto ad ogni elemento atomico di Λ; inoltre se τ è elemento

---

(4) Un elemento $\tau \in \Lambda$ è detto atomico se $\tau \vdash 1$.

semplificabile e primo [5] rispetto a M, si ha $\Lambda_\tau^{(s)} * M_\tau^{(r)} = M_\tau^{(s+r)}$; così, se $M_\tau^{(o)} \neq \emptyset$, essendo $\Lambda_\tau^{(o)} \neq \emptyset$ in quanto 1 e $\Lambda_\tau^{(o)}$, si ha che $M_\tau^{(o)}$ è $\Lambda_\tau^{(o)}$-insieme. Quindi, se ogni elemento atomico di Λ è semplificabile e primo rispetto ad M e se $M^{(o)} \neq \emptyset$, si ha che $M^{(o)}$ è un $\Lambda^{(o)}$-insieme.

Da ciò in particolare risulta, nell'ipotesi che ogni elemento atomico di Λ sia semplificabile e primo in Λ, che $\Lambda^{(o)}$ è sottosemigruppo di $\Lambda(\cdot)$ (privo di zeri e unitario).

Si ha poi che, se $M(*)$ è un Λ-insieme para-cancellativo [6] e se $\xi \notin Z_M$ è eventuale minimo di una componente connessa di M, allora $\xi \in M^{(o)}$. Infatti, se per un certo τ elemento atomico di Λ si avesse $h_\tau(\xi) \neq 0$ risulterebbe $\xi = \tau * x$ (con $x \in M$) e quindi $\xi \vdash x$ (cfr. [7] prop. 11), assurdo perché ξ è minimo in $[\xi]_E = [x]_E$.

In generale non vale il viceversa; basta infatti riferirsi allo N_o-insieme para-cancellativo $M(*)$ di cui alla fig. 1 di [7] ed osservare che $a \in M$ non è minimo in $[a]_E$ ed ha altezza 0.

---

(5) Un elemento $\tau \in \Lambda$, non zero e non invertibile, è detto primo rispetto ad M se per ogni $\alpha \in \Lambda$ e per ogni $x \in M$ si ha che: $\alpha * x \in \tau * M \Rightarrow \alpha \in \tau\Lambda$ oppure $x \in \tau * M$; è detto quasi primo rispetto ad M se, per ogni elemento atomico $\rho \in \Lambda$ e per ogni $x \in M$ tali che $\rho * x \notin Z_M$, si ha che: $\rho * x \in \tau * M \Rightarrow \tau \sim \rho$ oppure $x \in \tau * M$.

(6) Un Λ-insieme $M(*)$ è detto para-cancellativo se quale che sia $x \in M$, si ha, per ogni $\alpha, \beta \in \Lambda$, che: $\alpha * x = \beta * y \notin Z_M \Rightarrow \alpha \sim \beta$ (cfr. [7] def. 4).

Se però $M(*)$ è un Λ-insieme criptofattoriale [7] allora, tenendo presente il teorema 2 di [7], si ha che ogni $x \in M - Z_M$ è h-finito e

$M^{(o)} = \{x \in M - Z_M | x$ è minimo in $[x]_E\}$.

3. IL MODULO DELLE FRAZIONI DI CERTI Λ-MODULI RISPETTO A $\Lambda^{(o)}$.

PROPOSIZIONE 1. *Siano* $M(*)$ *un* Λ*-insieme ad operatori semplificabili,* $\Gamma(*)$ *il* Λ*-insieme delle frazioni di* M *rispetto a* Λ, τ *elemento atomico di* Λ, *primo rispetto ad* M.

Si ha che se $\tau^r * \frac{a'}{\alpha'} = \tau^s * \frac{a''}{\alpha''}$, *con* $r,s \in N_o$, $\frac{a'}{\alpha'}, \frac{a''}{\alpha''} \in \Gamma$ *e tali che* $h_\tau(a') = h_\tau(\alpha') = h_\tau(a'') = h_\tau(\alpha'') = 0$, *allora* $r=s$.

Dimostrazione. L'asserto è assicurato dall'essere τ semplificabile e primo rispetto ad M.

Conviene osservare esplicitamente che, sempre nelle ipotesi della proposizione 1, si ha ovviamente:

Osservazione 1. Se $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} \in \Gamma$ sono tali che x,α,y,β sono h_τ-finiti e $h_\tau(x) \geq h_\tau(\alpha)$ allora $h_\tau(y) \geq h_\tau(\beta)$.

Inoltre sussiste la seguente

PROPOSIZIONE 2. *Siano* $M(*)$ *un* Λ*-insieme ad operatori semplificabili e* τ *un elemento atomico di* Λ *primo rispetto ad* M. *Se* $M(*)$ *e*

---

(7) Un Λ-insieme $M(*)$ è detto criptofattoriale se è para-cancellativo e se sussistono le seguenti condizioni: i) per ogni $a \in M$, nella componente connessa di a, ogni catena discendente da a è finita; ii) ogni elemento atomico di Λ è, rispetto ad M, para-cancellativo e quasi-primo (cfr. [7] definizione 13).

$\Lambda(\cdot)$ *sono* h_τ-*finiti si ha che per ogni* $\frac{x}{\alpha} \in \Gamma$ *esiste un unico* $r \in \mathbf{Z}$ t.c. $\frac{x}{\alpha} = \tau^r * \frac{x'}{\alpha'}$ *con* $h_\tau(x') = h_\tau(\alpha') = 0$.

Dimostrazione. Ovviamente per ogni $\frac{x}{\alpha} \in \Gamma$ esiste $r=h_\tau(x)-h_\tau(\alpha)\in\mathbf{Z}$; l'unicità segue dalla proposizione 1.

Alla luce di ciò, se $M(*)$ è un Λ-insieme ad operatori semplificabili e se $M(*)$ e $\Lambda(\cdot)$ sono h_τ-finiti con τ elemento atomico di Λ primo rispetto ad M, è definita la funzione f_τ da Γ in $\mathbf{Z}$ tale che $f_\tau : \frac{x}{\alpha} = \tau^r * \frac{x'}{\alpha'} \in \Gamma \to r \in \mathbf{Z}$.

D'ora in avanti indicheremo con $\mathbf{Z}^*$ lo ℓ-gruppo abeliano totalmente ordinato $\mathbf{Z}\cup\{\infty\}$ ottenuto dal gruppo degli interi, usualmente ordinato, con il consueto prolungamento di somma ed ordinamento; inoltre ci riferiremo sempre, anche se non esplicitamente detto, a moduli privi di torsione su anelli commutativi unitari (e quindi dominî).

Premesso ciò, sia $M(+,*)$ un Λ-modulo, sia ϕ il campo dei quozienti di Λ, sia $V(+,*)$ lo spazio vettoriale su ϕ delle frazioni di M rispetto a $\Lambda-\{0\}$. Se τ è elemento atomico di Λ primo rispetto ad M e rispetto a Λ e se $M-\{0\}(*)$ e $\Lambda-\{0\}(\cdot)$ sono h_τ-finiti, possiamo considerare le funzioni ϕ_τ e ν_τ a valori in $\mathbf{Z}^*$ definite da:

$$\phi_\tau : \frac{\alpha}{\beta} \in \phi \to \begin{cases} \infty & \text{se } \frac{\alpha}{\beta} = 0 \\ r\in\mathbf{Z} & \text{se } 0 \neq \frac{\alpha}{\beta} = \tau^r \frac{\alpha'}{\beta'} \text{ con } h_\tau(\alpha')=h_\tau(\beta')=0 \end{cases}$$

e analogamente

$$\nu_\tau : \frac{x}{\beta} \in V \to \begin{cases} \infty & \text{se} \quad \frac{x}{\beta} = 0 \\ s \in Z & \text{se} \quad 0 \neq \frac{x}{\beta} = \tau^s * \frac{x'}{\beta'} \text{ con } h_\tau(x') = h_\tau(\beta') = 0. \end{cases}$$

Si verifica che:

i) $\nu_\tau(\xi) = \infty$ se e solo se $\xi = 0$

ii) $\nu_\tau(\frac{\alpha}{\beta} * \xi) = \phi_\tau(\frac{\alpha}{\beta}) + \nu_\tau(\xi)$ $\quad \forall \frac{\alpha}{\beta} \in \phi, \forall \xi \in V$

iii) $\nu_\tau(\xi+\eta) \geq \nu_\tau(\xi) \cap \nu_\tau(\eta)$ $\quad \forall \xi, \eta \in V$

inoltre si ha che ϕ_τ è una valutazione del campo ϕ.

Risulta così:

PROPOSIZIONE 3. *La terna* (V, ϕ_τ, ν_τ) *è uno spazio vettoriale valutato* (8).

Tenendo presente l'osservazione 1, si ha:

Osservazione 2. $V_\tau = \{\frac{x}{\alpha} \in V | \nu_\tau(\frac{x}{\alpha}) \geq 0\} = \{\frac{x}{\alpha} \in V | h_\tau(x) \geq h_\tau(\alpha)\} =$

$= \{\frac{x}{\alpha} \in V | \exists \frac{y}{\beta} \in V \text{ con } h_\tau(\beta) = 0 \text{ t.c. } \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}\}.$

Analogamente per l'anello A_τ della valutazione ϕ_τ si ha:

$$A_\tau = \{\frac{\alpha}{\beta} \in \phi | \exists \frac{\gamma}{\delta} \in \phi \quad \text{con} \quad h_\tau(\delta) = 0 \quad \text{t.c.} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}\}.$$

Inoltre, essendo $\mathbf{Z}^*$ ℓ-gruppo totalmente ordinato, si ha che V_τ è A_τ-modulo (cfr. [8] pag. 446).

Dato ora un Λ-modulo $M(+,*)$, diremo che esso è un *Λ-modulo quasi*

(8) Per la definizione di spazio vettoriale valutato cfr. [8].

di Krull se esiste una famiglia $(\phi_i,\nu_i)_{i\in I}$ $(I\neq\emptyset)$ di valutazioni discrete [9] rispettivamente su ϕ (campo dei quozienti di Λ) e su V (ϕ-spazio vettoriale delle frazioni di M rispetto a $\Lambda-\{0\}$) tali che:

1) Per ogni $i\in I$: (V,ϕ_i,ν_i) è spazio vettoriale valutato;

2) $M = \bigcap_{i\in I} V_i$ con $V_i = \{\frac{x}{\alpha} \in V | \nu_i(\frac{x}{\alpha}) \geq 0\}$ (quindi M è modulo su $\bigcap_{i\in I} A_i$ dove A_i è anello della valutazione ϕ_i);

3) Per ogni $\xi\in V-\{0\}$ è finito l'insieme $\{i\in I | \nu_i(\xi) > 0\}$.

Diremo che $M(+,*)$ è un Λ-*modulo di Krull* se valgono 1),2) e 3') per ogni $\xi\in V-\{0\}$ è finito l'insieme $\{i\in I | \nu_i(\xi)\neq 0\}$.

E' chiaro che ogni dominio di Krull è un modulo di Krull.

Premesso che chiameremo f-criptofattoriale ogni Λ-insieme criptofattoriale nel quale gli elementi atomici di Λ sono primi rispetto ad M, si ha:

PROPOSIZIONE 4. *Sia* $M(+,*)$ *un* Λ-*modulo f-criptofattoriale* [10]. *Sia* $\Lambda-\{0\}(\cdot)$ *un semigruppo h-finito nel quale ogni elemento atomico risulti primo. Sia* $S=\Lambda^{(o)}$ *il sistema moltiplicativo degli elementi di* Λ *di altezza* 0 .

Si ha che $S^{-1} * M$ *è* $S^{-1}\Lambda$-*modulo quasi di Krull.*

Dimostrazione. Lo spazio vettoriale delle frazioni di $S^{-1} * M$ rispetto a $S^{-1}\Lambda-\{0\}$ è, a meno di isomorfismi, lo spazio vettoriale

(9) Cioé a valori in un ℓ-gruppo con ∞ isomorfo a Z^*.

(10) Cioé tale che $M(*)$ risulta Λ-insieme f-criptofattoriale.

V su ϕ delle frazioni di M rispetto a Λ.

Premesso ciò e fissata una funzione f di scelta in $\frac{\Lambda}{\sim}$, sia $\mathcal{A}$ l'insieme degli elementi atomici di Λ fissati da f. Consideriamo la famiglia $(\phi_\tau, \nu_\tau)_{\tau\in\mathcal{A}}$ dove ϕ_τ e ν_τ sono le applicazioni di cui alla proposizione 3.

Verifichiamo

1) $S^{-1} * M = \bigcap_{\tau\in\mathcal{A}} V_\tau$

2) $\forall \frac{x}{\alpha} \in V-\{0\}$ risulta che $\{\tau\in\mathcal{A} | \nu_\tau(\frac{x}{\alpha}) > 0\}$ è finito

Chiaramente (cfr. osservazione 2) se $\frac{x}{\alpha} \in S^{-1} * M$ necessariamente $\frac{x}{\alpha} \in V_\tau$ per ogni $\tau\in\mathcal{A}$.

Viceversa se $\frac{x}{\alpha} \in \bigcap_{\tau\in\mathcal{A}} V_\tau$ proviamo che esiste $\frac{y}{\beta} \in V$ con $h(\beta)=0$ tale che $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}$; ciò è ovvio se $x = 0$, se $x \neq 0$, essendo M criptofattoriale si ha (cfr. [7] teorema 2) che x è minimo nella sua componente connessa oppure, in unico modo, $x = u.\tau_1^{\alpha_1}\dots\tau_s^{\alpha_s} * \xi$ dove $u \in U_\Lambda$, $\tau_1,\dots,\tau_s \in\mathcal{A}$ e ξ è minimo nella componente connessa di x.

Nel primo caso, come osservato nelle considerazioni preliminari, $h(x) = 0$ e di conseguenza $h(\alpha) = 0$ (cfr. osservazione 2).

Nel secondo caso si ha

$$\frac{x}{\alpha'} = \frac{u\cdot\tau_1^{\alpha_1-h_{\tau_1}(\alpha)}\cdot\ldots\cdot\tau_s^{\alpha_s-h_{\tau_s}(\alpha)} * \xi}{\alpha'}$$

dove $h(\alpha') = 0$ [11].

Proviamo 2). Sia $\frac{x}{\alpha} \in V-\{0\}$. Se x è minimo nella sua componente connessa si ha $h(x)=0$ e quindi $\{\tau\in\mathcal{Q} \mid \nu_\tau(\frac{x}{\alpha}) > 0\} = \emptyset$; se $x = \tau_1^{\alpha_1} \cdot\cdot \tau_s^{\alpha_s} * \xi$ con $\tau_1,\dots,\tau_s \in \mathcal{Q}$ e ξ minimo nella componente connessa di x, per ogni $\rho \in \mathcal{Q}$, $\rho \notin \{\tau_1,\dots,\tau_s\}$ risulta $h_\rho(x) = 0$ (cfr. [7] teorema 2) e quindi $\nu_\rho(\frac{x}{\alpha}) = -h_\rho(\alpha) \leq 0$ da ciò l'asserto.

In modo analogo a quanto fatto per la dimostrazione della proposizione 4 può verificarsi la seguente

PROPOSIZIONE 5. *Sia* $M(+,*)$ *un* Λ*-modulo f-criptofattoriale. Se* $\Lambda(+,\cdot)$ *è un anello f-criptofattoriale allora, posto* $S = \Lambda^{(o)}$, *si ha che* $S^{-1} * M$ *è* $S^{-1}\Lambda$*-modulo di Krull.*

Se $\Lambda(+,\cdot)$ è un dominio a fattorizzazione unica si ha $\Lambda^{(o)} = U_\Lambda$ e quindi

COROLLARIO 6. *Se* $M(+,*)$ *è un* Λ*-modulo f-criptofattoriale e se* $\Lambda(+,\cdot)$ *è un dominio a fattorizzazione unica,* M *è un* Λ*-modulo di Krull.*

Di cónseguenza

PROPOSIZIONE 7. *Se* $M(+,*)$ *è un* Λ*-modulo fattoriale* [12] *allora* M *è* Λ*-modulo di Krull.*

---

(11) Se per τ, elemento atomico di Λ, risulta $\tau\sim\tau_i$ (per $i\in\{1,\dots s\}$) si ha $h_\tau(\alpha')=h_{\tau_i}(\alpha')=0$; se per $\tau \not\sim \tau_1,\dots,\tau_s$ si avesse $h_\tau(\alpha')>0$ risulterebbe $\nu_{f(\tau)}(\frac{x}{\alpha})=\nu_\tau(\frac{x}{\alpha})<0$ (cfr. osservazione 1) e ciò è assurdo in quanto $\frac{x}{\alpha} \in V_{f(\tau)}$.

(12) Per la definizione di modulo fattoriale cfr. [2] definizione 2.1.

Dimostrazione. Essendo $M(+,*)$ un Λ-modulo fattoriale allora $\Lambda(+,\cdot)$ è un dominio a fattorizzazione unica (cfr. [2] proprietè 2.2), inoltre (cfr. [2] thèorème 2.3) si ha che per esso valgono le condizioni (1) e (2) della proposizione 21 di [7].

Da ciò si deduce, sulla falsariga della dimostrazione della proposizione 21 di [7] che $M(+,*)$ è un Λ-modulo f-criptofattoriale. Da ciò la tesi.

Dalla proposizione 7 e grazie al teorema 3.2 e al corollario 3.4 di [2] si ha

COROLLARIO 8. *La somma diretta e il prodotto diretto di una famiglia di moduli fattoriali è un modulo di Krull.*

COROLLARIO 9. *Ogni modulo libero su di un dominio a fattorizzazione unica è un modulo di Krull.*

COROLLARIO 10. *Ogni modulo proiettivo su di un dominio a fattorizzazione unica è un modulo di Krull.*

Concludiamo osservando che il risultato della proposizione 5 riferito ad un dominio f-criptofattoriale si affina nel modo seguente:

PROPOSIZIONE 11. *Ogni dominio $A(+,\cdot)$ f-criptofattoriale è incluso in un dominio a fattorizzazione unica.*

Dimostrazione. Ricordiamo che $A^{(o)} = \{x \in A-\{0\} \mid x$ è minimo in $[x]_E\}$ e, posto $S = A^{(o)}$, consideriamo l'anello $S^{-1}A$.

Si ha che se p è elemento atomico di A esso è elemento irriducibile di $S^{-1}A$. Infatti da $p = \frac{a}{m_1} \cdot \frac{b}{m_2}$ segue $(m_1m_2)p = ab$ e quindi (cfr. [7] teorema 2) $a \in S$ oppure $b \in S$; da ciò $\frac{a}{m_1} \in U_{S^{-1}A}$ oppu re $\frac{b}{m_2} \in U_{S^{-1}A}$. Si ha così che ogni elemento non nullo e non invertibile di $S^{-1}A$ è prodotto finito di elementi irriducibili [13].

D'altra parte se $\frac{a}{m}$ è elemento irriducibile in $S^{-1}A$ esso è primo. Infatti se $\frac{a}{m}$ è irriducibile in $S^{-1}A$ si ha che $a = \bar{m}p$ dove $\bar{m}$ è minimo in $[a]_E$ e p è atomico in A [14].

Pertanto se $\frac{b}{m_1} \cdot \frac{c}{m_2} = \frac{\bar{m}p}{m} \cdot \frac{d}{m_3}$ si ha $(mm_3)bc = (\bar{m}m_1m_2)pd$ e da ciò (cfr. [7] teorema 2) $b = b'p$ oppure $c = c'p$ (con $b'c' \in A$); si ha così che $\frac{a}{m}$ divide $\frac{b}{m_1}$ oppure $\frac{a}{m}$ divide $\frac{c}{m_2}$.

([13]) Con $\frac{a}{m} \in S^{-1}A$, $\frac{a}{m} \neq 0$, $\frac{a}{m} \notin U_{S^{-1}A}$ si ha: $\frac{a}{m} = p_1 \cdots p_r \frac{\bar{m}}{m}$ dove $p_1, \ldots, p_r$ sono atomici in A ed $\bar{m}$ è minimo in $[a]_E$.

([14]) a non è minimo in $[a]_E$ (in tal caso $\frac{a}{m} \in U_{S^{-1}A}$), quindi $a = \bar{m} \cdot p_1 \cdots p_r$ ($\bar{m}$ minimo in $[a]_E$ e $p_1, \ldots, p_r$ atomici in A). D'altra parte $r = 1$ perché in caso contrario si avrebbe $\frac{a}{m} = p_1 \cdot \frac{p_2 \cdots p_r \bar{m}}{m}$ e quindi $\frac{p_2 \cdots p_r \bar{m}}{m} \in U_{S^{-1}A}$ il che è assurdo.

BIBLIOGRAFIA

[1] N.BOURBAKI: "*Algèbre commutative*" (chap. 7). Herman, Paris, 1965.

[2] A.M.NICOLAS: "*Modules factoriels*" Bull. Sc. Math. 2$^{\underline{a}}$-série, t. 95, 33-52, (1971).

[3] N.BOURBAKI: "*Algebre*" (chap. 1) Herman, Paris, 1971.

[4] M.F.ATIYAH, I.G.MACDONALD: "*Introduction to commutative algebra*". Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[5] N.BOURBAKI: "*Algèbre commutative*"(XXVII) Herman, Paris, 1961.

[6] I.KAPLANSHY: "*Infinite abelian groups*". University of Michigan press, 1969.

[7] A.LETIZIA: "*S-insiemi criptofattoriali*". La Ricerca-Matematiche pure ed applicate. Anno XXXII N.3 (1981).

[8] L.FUCHS: "*Vector spaces with general valuations*". Simposia Matematica. Vol. XXI, 433-450, (1977).

Lavoro pervenuto alla Redazione l'11 Giugno 1983
ed accettato per la pubblicazione il 14 Luglio 1983
su parere favorevole di M. Curzio e A. Restivo