Note di Matematica Vol. II, 275-301 (1982)

PROBLEMA DI DERIVATA OBLIQUA PER L'OPERATORE Δ^n IN UN SETTORE PIANO(*)

Raffaele PISANI e Maria TUCCI (**)

Summary. *In this note an oblique derivative problem in a plane sector is studied. Using pseudodifferential operators and Hardy Kernels in* $L^p(\underline{\underline{R}}_+)$, *we prove that, under some hipothesis, the boundary operator of the above mentioned problem admits a parametrix and, moreover, that its index is finite.*

INTRODUZIONE. J.E.Lewis-C.Parenti, in [5], studiano un'algebra di operatori pseudodifferenziali su $L^p(\underline{\underline{R}}_+)$, $1<p<+\infty$, chiamati operatori di Mellin in $OP\Sigma_{1/p}$, e definiti mediante la trasformata di Mellin.

Essi, in particolare, studiano gli operatori ellittici, cioé quelli che ammettono una parametrice in $OP\Sigma_{1/p}$ (cfr. def. 1.5) e determinano l'indice di tali operatori. Fanno poi un'applicazione a un problema di derivata obliqua con dati $L^p(\underline{\underline{R}}_+)$, per l'equazio-

(*) Lavoro svolto nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.

(**) Istituto di Analisi Matematica - Via Nicolai, 2 - BARI.

ne di Laplace, in un settore piano $\Omega = \{(x,y) \in \underline{\underline{R}}^2 | x>0, y>0\}$.

Precisamente, considerata la soluzione dell'equazione $\Delta u = 0$ in Ω rappresentata sottoforma di potenziale di semplice strato con densità in $C_0^\infty(\underline{\underline{R}}_+)$, imponendo le condizioni al contorno, ottengono un operatore al bordo $A : (C_0^\infty(\underline{\underline{R}}_+))^2 \to (L^p(\underline{\underline{R}}_+))^2$ e dimostrano che, sotto opportune ipotesi, è ellittico nel senso suddetto, e con indice finito.

Col presente lavoro, otteniamo analoghi risultati per il problema relativo all'operatore Δ^n:

$$
\text{(I)} \quad \begin{cases}
\Delta^n u(x,y) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \\[2ex]
\lim\limits_{y\to 0^+} \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \alpha_h^{n-i}(x)\, \beta_h^i(x)\, D_x^{n-i}\, D_y^i u(x,y) = \psi_h(x) \in L^p(\underline{\underline{R}}_+) \\[2ex]
\lim\limits_{x\to 0^+} \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \alpha_k^{n-i}(y)\, \beta_k^i(y)\, D_x^{n-i}\, D_y^i u(x,y) = \psi_k(y) \in L^p(\underline{\underline{R}}_+)
\end{cases}
$$

$h = 1,3,\dots,2n-1 \quad , \quad k = 2,4,\dots,2n$.

Nel caso in cui i coefficienti α_h, β_h sono costanti, le condizioni al contorno di (I) si possono scrivere nel seguente modo:

$$
\begin{cases}
\lim\limits_{y\to 0^+} (\alpha_h D_x + \beta_h D_y)^n u(x,y) = \psi_h(x) \in L^p(\underline{\underline{R}}_+) \\[2ex]
\lim\limits_{y\to 0^+} (\alpha_k D_x + \beta_k D_y)^n u(x,y) = \psi_k(y) \in L^p(\underline{\underline{R}}_+)
\end{cases}
$$

e pertanto, in questo caso, il problema (I) diventa un problema di derivata obliqua per l'operatore Δ^n.

Le tecniche da noi usate sono analoghe a quelle adoperate in [5] e [3], anche se la generalità del problema da noi trattato, ha reso necessario il superamento di molteplici difficoltà.

Il caso particolare di n=2 è stato trattato da L. Diomeda e B. Lisena in [3].

Il lavoro si articola nel modo seguente:
nel paragrafo 1 richiamiamo alcune definizioni che intervengono nella trattazione del nostro problema; nel paragrafo 2 proviamo che l'operatore al bordo di (I) è ellittico ed ha indice finito.

1. Richiamiamo le seguenti definizioni introdotte in [5].

DEFINIZIONE 1.1. *Sia* $\tau\in R$. *Con* $\mathcal{F}_\tau$ *denotiamo la classe di funzioni* $a \in C^\infty(R_+)$ *che godono della seguente proprietà:*

$$\exists\, \delta>0 \ni' \forall \delta_1 \in R_+, 0<\delta_1<\delta, \forall j\in N\ \exists c=c(\delta_1,j,a) \mid (x\frac{d}{dx})^j(a(x)) \mid \leq c x^{-\tau}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^{\delta_1} \quad \forall x \in R_+$$

DEFINIZIONE 1.2. *Sia* $\tau\in R$. *Con* $\widetilde{\mathcal{F}}_\tau$ *denotiamo la classe delle funzioni* b(z) *per le quali esiste* $\delta>0$ *tale che* b(z) *è definita e olomorfa nella striscia*

$$S_{\tau\delta} = \{z\in C \mid \tau-\delta < RE\ z < \tau+\delta\}$$

e che godono inoltre della seguente proprietà:

$$\forall\delta_1 \in R,\quad 0<\delta_1<\delta,\ \forall j,k\in N\ \exists c=c(\delta_1,j,k,b)\quad \left| z^j \frac{d^k}{dz^k} b(z) \right| \leq c \qquad \forall z \in S_{\tau,\delta_1}$$

DEFINIZIONE 1.3. *Sia* $\tau \in R$. *Con* Φ_τ *denotiamo la classe delle funzioni* $a(x,z)$ *per le quali esistono* ε, $\delta>0$ *tali che*

1) $a \in C^\infty(\underline{\underline{R}}_+ \times S_{\tau,\delta})$

2) $\forall x \in \underline{\underline{R}}_+$ $a(x,\cdot)$ *è una funzione olomorfa in* $S_{\tau,\delta}$

3) $\forall\varepsilon_1 \in R,\ 0<\varepsilon_1<\varepsilon,\ \forall\ \delta_1 \in \underline{\underline{R}},\ 0<\delta_1<\delta,\ \forall j,i,k \in \underline{\underline{N}}\ \exists c=c(\varepsilon_1,\delta_1,i,j,k,a)$

$$\left| z^j \left(x \frac{\delta}{\delta x}\right)^j \left(\frac{\delta}{\delta z}\right)^k a(x,z) \right| \leq c\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^{\varepsilon_1} \qquad \forall z \in S_{\tau,\delta_1}$$

DEFINIZIONE 1.4. *Sia* $p \in \underline{\underline{R}}$ $1<p<+\infty$; *diremo che* A *è un operatore nella classe* $OP\Sigma_{1/p}$ *con simbolo* $a(x,z)$ *in* $\Sigma_{1/p}$ *se:*

$$Af(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{p}-i\infty}^{\frac{1}{p}+i\infty} x^{-z}\, a(x,z)\, \tilde{f}(z)dz \qquad f \in C_0^\infty(\underline{\underline{R}}_+)$$

e la funzione $a(x,z)$ *soddisfa le seguenti proprietà:*

1) $\exists\delta > 0 \ni' a(x,z) \in C^\infty(\underline{\underline{R}}_+ \times S_{1/p,\delta})$

2) *In* $\underline{\underline{R}}_+ \times S_{1/p}$ $a(x,z)$ *ha la seguente rappresentazione:*

$$a(x,z) = a_+(x)\Theta(z) + a_-(x)(1-\Theta(z)) + a(z) + \alpha(x,z)$$

dove a_+ *e* a_- *sono estendibili come funzioni continue su* $\bar{\underline{\underline{R}}}_+$ *in* *modo tale che:*

$a_{\pm}(x)-a_{\pm}(0)\in \mathscr{F}_o, a(z)\in \tilde{\mathscr{F}}_{1/p}$ e $\alpha(x,z)\in\Phi_{1/p}$ e $\Theta(z)=1/1-e^{2\pi iz})$

La funzione $a(x,z)-\alpha(x,z)$ *si dice simbolo principale di* A *e si denota con* $\sigma_p(A)(t,z)$. *Se* $a(x,z) = \alpha(x,z)$, *cioé* A *è un operatore con simbolo in* $\Phi_{1/p}$, A *si dice regolare.*

DEFINIZIONE 1.5. *Un operatore* $A\in OP\Sigma_{1/p}$ *si dice ellittico se esiste* $B\in OP\Sigma_{1/p}$, *tale che* AB-I *e* BA-I *sono operatori regolari e l'operatore* B *si dice parametrice per* A.

2. In questo paragrafo ci occupiamo del problema di derivata obliqua (I), nel settore piano $\Omega = \{(x,y)\in R^2 \mid x>0,y>0\}$, supponendo che α_h e β_h, $h=1,2,\dots,n$, sono funzioni reali tali che $\alpha_h^2(t) + \beta_h^2(t) = 1$ per ogni $t \geq 0$ e ψ_h sono funzioni assegnate in $L^p(R_+)$.

Cerchiamo una soluzione u scritta sotto forma di somma di potenziale di densità incognite $f_1,f_2,\dots,f_{2n} \in C_o^\infty(R_+)$ nel modo seguente:

$$(2.1)\quad u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\{\sum_{i=0}^{n-1} [\int_0^{+\infty} y^i \cdot\log((x-t)^2+y^2)\ f_{2i+1}(t)dt + \int_0^{+\infty} x^i \log((y-s)^2+x^2)\ f_{2i+2}(s)\ ds]\}$$

ove $f_{2i+1}(t) = \int_0^t dx \int_0^x d\xi \ldots \int_0^n f_{2i+1}^{(n-i-1)}(u)\, du$ e

$$f_{2i+2}(t) = \int_0^t dx \int_0^x d\xi \ldots \int_0^n f_{2i+2}^{(n-i-1)}(u)\, du.$$

Per semplicità, e precisamente per evitare di stare a distinguere casi differenti solo formalmente, ci limitiamo a considerare il caso in cui n è pari.

Tenendo presente che:

$$D_y^h \log(x^2+y^2) = \begin{cases} 2(h-1)!(-1)^{h-1} \sum\limits_{k=o}^{h/2} \binom{h}{2k} \dfrac{(-1)^k y^{h-2k} x^{2k}}{(x^2+y^2)^h}, & \text{se } h \text{ è pari} \\ 2(h-1)! \sum\limits_{k=o}^{(h-1)/2} \binom{h}{2k} \dfrac{(-1)^k y^{h-2k} x^{2k}}{(x^2+y^2)^h}, & \text{se } h \text{ è dispari} \end{cases}$$

si ha che:

$$D_x^n\, x^{n-1} \log(x^2+y^2) = \sum_{h=1}^{n} \binom{n}{h} (D_x^{n-h}\, x^{n-1})(D_x^h \log(x^2+y^2)) =$$

$$= \sum_{h\ \text{pari},\, h=2}^{n} \binom{n}{h} (n-1)(n-2)\ldots h\ x^{h-1} (h-1)!(-1)^{h-1} \left(\sum_{k=o}^{h/2} \frac{(-1)^k x^{h-2k} y^{2k}}{(x^2+y^2)^h}\right) +$$

$$+ \sum_{h\ \text{disp.},\, h=1}^{n} \binom{n}{h} (n-1)(n-2)\ldots h\ x^{h-1} (h-1)! \left(\sum_{k=0}^{(h-1)/2} \frac{(-1)^k x^{h-2k} y^{2k}}{(x^2+y^2)^h}\right.$$

Poniamo, per ogni $t \geq 0$ e $k = 1,2,\dots,2n$

$$\phi_k(t) = \begin{cases} f_k^{(n-\frac{k+1}{2})}(t) & \text{se } k \text{ è dispari} \\ f_k^{(n-\frac{k}{2})}(t) & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases}$$

Risulta, mediante calcoli elementari ma alquanto laboriosi, che per $i = 0,2,4,\dots,n$

$$D_x^{n-j} D_y^i u(x,y) = \frac{1}{\pi}\Big\{ \sum_{\frac{k+1}{2}\ \mathrm{disp},k=1}^{2n-1} \sum_{j=1}^{k+1} \Big[c_{j,k}^{(j)} \int_0^{+\infty} \frac{(x-t)y^{2j-2}}{((x-t)^2+y^2)^j} \phi_k(t)dt +$$

$$+c_{i,k+1}^{(j)} \int_0^{+\infty} \frac{(y-s)x^{2j-2}}{((y-s)^2+x^2)^j} \phi_{k+1}(s)\, ds +$$

$$+ \sum_{\frac{k+1}{2}\ \mathrm{pari},k=3}^{2n-1} \sum_{j=1}^{k+1} \Big[c_{j,k}^{(j)} \int_0^{+\infty} \frac{(x-t)^{2j-2}y}{((x-t)^2+y^2)^j} \phi_k(t)dt +$$

$$+ c_{i,k+1}^{(j)} \int_0^{+\infty} \frac{(y-s)^{2j-2}x}{((y-s)^2+x^2)^j} \phi_{k+1}(s)\, ds\Big]\Big\}$$

mentre, per $i=1,3,5\dots, n-1$ si ha:

$$D_x^{n-i} D_y^i u(x,y) = \frac{1}{\pi} \{ \sum_{\frac{k+1}{2} \text{disp.}, k=1}^{2n-1} \sum_{j=1}^{\frac{k+1}{2}} [c_{i,k}^{(j)} \int_0^{+\infty} \frac{y(x-t)^{2j-2}}{((x-t)^2+y^2)^j} \phi_k(t)\, dt +$$

$$+ c_{i,k+1}^{(j)} \int_0^{+\infty} \frac{x(y-s)^{2j-2}}{((y-s)^2+x^2)^j} \phi_{k+1}(s)\, ds +$$

$$+ \sum_{\frac{k+1}{2} \text{pari}, k=3}^{2n-1} \sum_{j=1}^{\frac{k+1}{2}} [c_{i,k}^{(j)} \int_0^{+\infty} \frac{(x-t)y^{2j-2}}{((x-t)^2+y^2)^j} \phi_k(t) dt +$$

$$+ c_{i,k+1}^{(j)} \int_0^{+\infty} \frac{(y-s)x^{2j-2}}{((y-s)^2+x^2)^j} \phi_{k+1}(s) ds \,]\}$$

ove $c_{ik}^{(j)}$, $i = 0,1,2,\dots,n$, $k = 1,2,\dots,2n-1$, sono opportune co-stanti che non è necessario specificare.

Tenendo presente che se $\phi \in C_0^\infty(R_+)$ si ha:

$$(2.2) \begin{cases} \lim\limits_{y\to 0^+} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(x-t)^{2j-2}}{((x-t)^2+y^2)^j} \phi(t)dt = \frac{(2j-3)!!\pi}{(j-1)!2^{j-1}} \phi(x) & \text{per } j=1,2,..,n \\ \lim\limits_{y\to 0^+} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^{2j-2}(x-t)}{((x-t)^2+y^2)^j} \phi(t)dt = \begin{cases} \displaystyle {\int_0^{+\infty}}^{*} \frac{\phi(t)}{x-t} dt & \text{per } j=1 \\ 0 & \text{per } j=2,3,..,n \end{cases} \end{cases}$$

risulta, per $i = 0,2,4,\dots,n$

$$\lim_{y\to 0^+} D_x^{n-i} D_y^i u(x,y) = \frac{1}{\pi}\Big\{\sum_{\frac{k+1}{2}\text{disp},k=1}^{2n-1}\Big[c_{ik}\,{}^*\!\!\int_0^{+\infty}\frac{\phi_k(t)}{x-t}dt - \sum_{j=1}^{\frac{k+1}{2}} c^{(j)}_{i,k+1}\int_0^{+\infty}\frac{sx^{2j-2}}{(s^2+x^2)^j}\phi_{k+1}(s)ds +$$

$$+\sum_{\frac{k+1}{2}\text{pari},k=3}^{2n-1}\Big[c_{ik}\phi_k(x)+\sum_{j=1}^{\frac{k+1}{2}}(-1)^{2j-2}c^{(j)}_{i,k+1}\int_0^{+\infty}\frac{s^{2j-2}x}{(s^2+x^2)^j}\phi_{k+1}(s)ds\Big]\Big\}$$

e, per $i = 1,3,\dots,n-1$

$$\lim_{y\to 0^+} D_x^{n-i} D_y^i u(x,y) = \frac{1}{\pi}\Big\{\sum_{\frac{k+1}{2}\text{disp}.k=1}^{2n-1}\Big[c_{ik}\phi_k(x)+\sum_{j=1}^{\frac{k+1}{2}}(-1)^{2j-2}c^{(j)}_{ik+1}\int_0^{+\infty}\frac{xs^{2j-2}}{(s^2+x^2)^j}\phi_{k+1}(s)ds\Big] +$$

$$\sum_{\frac{k+1}{2}\text{pari},k=3}^{2n-1}\Big[c_{ik}\,{}^*\!\!\int_0^{\infty}\frac{\phi_k(t)}{x-t}dt - \sum_{j=1}^{\frac{k+1}{2}} c^{(j)}_{ik+1}\int_0^{+\infty}\frac{sx^{2j-2}}{(s^2+x^2)^j}\phi_{k+1}(s)ds\Big]\Big\}$$

ove $c^{(j)}_{jk}$ sono quelli prima menzionati e ove si è posto

$$(2.3)\qquad c_{ik} = \begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{(k+1)/2} c^{(j)}_{ik}\,\frac{(2j-1)!!\,\pi}{(j-1)!\,2^{j-1}} & \text{se } (k+1)/2 \text{ è pari}\\[2ex] c^{(1)}_{ik} & \text{se } (k+1)/2 \text{ è dispari.}\end{cases}$$

Analogamente si calcolano i limiti delle derivate $D_x^{n-i}D_y^i u$,

$i = 0,1,2,\dots,n$ per $x \to 0^+$.

Posto, per ogni $j = 1,2,..,n$:

$$(2.4)\qquad \begin{cases} K_j f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{xs^{2j-2}}{(s^2+x^2)^j}\cdot f(s)ds \\[2ex] K'_j f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{x^{2j-2}\ s}{(s^2+x^2)^j}\ f(s)ds \\[2ex] Hf(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{f(t)}{x-t}\ dt \end{cases}$$

K_j e K'_j risultano operatori di Hardy su $L^p(R_+)$ (1). La prima condizione al contorno del problema (I) si scrive nel seguente modo:

$$\lim_{y\to 0^+} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \alpha_h^{n-i}(x)\beta_h^i(x)\ D_x^{n-i} D_y^i\ u(x,y) =$$

(1) L'operatore $K\ f(x) = \int_0^{+\infty} k(x,y)f(y)dy$, dicesi operatore di Hardy se il suo nucleo $k(x,y)$ soddisfa le seguenti proprietà:

a) $k(\lambda x,\lambda y) = \lambda^{-1}k(x,y) \qquad 0 < \lambda$

b) $\int_0^{+\infty} |k(1,y)|y^{-1/p}dy = \int_0^{+\infty} x^{1/p-1}|k(x,1)|dx < +\infty$ (cfr. [2]).

$$= \sum_{\frac{k+1}{2}\ \mathrm{disp},k=1}^{2n-1} \Big(\sum_{i\ \mathrm{pari},\, i=0}^{n} \binom{n}{i}\alpha_h^{n-i}(x)\beta_h^{i}(x)c_{ik}H + \sum_{i\ \mathrm{disp},\, i=1}^{n-1} \binom{n}{i}\alpha_h^{n-i}(x)\beta_h^{j}(x)I\Big)\phi_k(x) +$$

$$+ \sum_{\frac{k+1}{2}\ \mathrm{pari},k=3}^{2n-1} \Big(\sum_{i\ \mathrm{pari},\, i=0}^{n} \binom{n}{i}\alpha_h^{n-i}(x)\beta_h^{i}(x)c_{ik}I + \sum_{i\ \mathrm{disp},\, i=1}^{n-1} \alpha_h^{n-i}(x)\beta_h^{i}(x)c_{ik}H\Big)\phi_k(x) +$$

$$+ \sum_{\frac{k+1}{2}\mathrm{disp},k=1}^{2n-1} \Big[-\sum_{i\ \mathrm{pari},\, i=0}^{n} \binom{n}{i}\alpha_h^{n-i}(x)\beta_h^{i}(x)\Big(\sum_{j=1}^{(k+1)/2} c_{i,k+1}^{(j)} K'_j\Big) +$$

$$+ \sum_{i\ \mathrm{disp},\, i=1}^{n-1} \binom{n}{i}\alpha_h^{n-i}(x)\beta_h^{i}(x)\Big(\sum_{j=1}^{(k+1)/2} (-1)^{2j-2}\, c_{i,k+1}^{(j)} K_j\Big)\Big]\ \phi_{k+1}(x) +$$

$$+ \sum_{\frac{k+1}{2}\mathrm{pari},k=3}^{2n-1} \Big[\sum_{i\ \mathrm{pari},\ i=0}^{n} \binom{n}{i}\alpha_n^{n-i}(x)\beta_h^{i}(x)\Big(\sum_{j=1}^{(k+1)/2} (-1)^{2j-2} c_{i,k+1}^{(j)} K_j\Big) +$$

$$- \sum_{i\ \mathrm{disp},\, i=0}^{n-1} \binom{n}{i}\alpha_h^{n-i}(x)\beta_h^{i}(x)\Big(\sum_{j=1}^{(k+1)/2} c_{i,k+1}^{(j)} K'_j\Big)\Big]\ \phi_{k+1}(x) = \psi_h(x)$$

per $h = 1,3,\dots,2n-1$. In modo analogo si calcola l'altro limite che compare nella seconda condizione al contorno del problema (I).

Pertanto le condizioni al contorno del suddetto problema si traducono nel seguente sistema di equazioni integrali, scritto in for ma matriciale:

$$A\,\vec{\phi} = \vec{\psi}$$

ove $\qquad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_{2n} \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_{2n} \end{pmatrix}$

ed A è la matrice di operatori avente per elementi:

$$(2.5)\quad A_{h,k} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i\ \text{pari},\, i=0}^{n} \binom{n}{i}\alpha_h^{n-i}\beta_h^{i}c_{ik}\right)H + \left(\sum\limits_{i\ \text{disp},\, i=1}^{n-1} \binom{n}{i}\alpha_h^{n-i}\beta_h^{i}c_{jk}\right)I, & \text{se } \dfrac{k+1}{2} \text{ è dispari} \\[2ex] \left(\sum\limits_{i\ \text{pari},\, i=0}^{n} \binom{n}{i}\alpha_h^{n-i}\beta_h^{i}c_{ik}\right)I + \left(\sum\limits_{i\ \text{disp},\, i=1}^{n-1} \binom{n}{i}\alpha_h^{n-i}\beta_h^{i}c_{ik}\right)H, & \text{se } \dfrac{k+1}{2} \text{ è pari} \end{cases}$$

quando gli indici h e k sono entrambi dispari, mentre se h è dispari e k è pari,

$$(2.6)\quad A_{h,k} = \begin{cases} \left(-\sum\limits_{i\ \mathrm{pari},\, i=0}^{n} \binom{n}{i}\alpha_h^{n-i}\beta_h^{i}\left(\sum\limits_{j=1}^{k/2} c_{ik}^{(j)} K'_j\right) + \sum\limits_{i\ \mathrm{disp},\, i=1}^{n-1} \binom{n}{i}\alpha_h^{n-i}\beta_h^{i}\left(\sum\limits_{j=1}^{k/2} (-1)^{2j-2} c_{ik}^{(j)} K_j\right)\right) & \text{se } k/2 \text{ è dispari} \\[2ex] \left(\sum\limits_{i,\mathrm{pari},\, i=0}^{n} \binom{n}{i}\alpha_h^{n-i}\beta_h^{i}\left(\sum\limits_{j=1}^{k/2} (-1)^{2j-2} c_{ik}^{(j)} K_j\right) - \sum\limits_{i\ \mathrm{disp},\, i=1}^{n-1} \binom{n}{i}\alpha_h^{n-i}\beta_h^{i}\left(\sum\limits_{j=1}^{k/2} c_{ik}^{(j)} K'_j\right)\right), & \text{se } k/2 \text{ è pari} \end{cases}$$

e, infine, per h pari e $k = 1,2,\dots,2n$

$$(2.7)\qquad A_{h,k} = \begin{cases} A_{h-1,k+1} & \text{se } k \text{ è dispari} \\ A_{h-1,k-1} & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases}$$

PROPOSIZIONE 2.1. *Se* $\alpha_\ell(t) - \alpha_\ell(0)$, $\beta_\ell(t) - \beta_\ell(0)$ *appartengono a* $\mathscr{F}_0$ *allora* A *è una matrice di operatori in* $OP\Sigma_{1/p}$; *inoltre, posto:*

$$v_\ell = \alpha_\ell - i\beta_\ell$$

si ha che la matrice $\sigma_p(A)$ *dei simboli di* A *è la matrice* (a_{hk}) *di ordine* 2n *così definita: se* h *e* k *sono entrambi dispari:*

$$a_{hk} = \binom{n}{s}\left[iv_h^{n-s}(t)\ \beta_h^{s}(t)\ \Theta(z) - iv_h^{n-s}(t)\ \beta_h^{s}(t)(1-\Theta(z))\right]$$

ove, $s = (k-1)/2$, *mentre se* h *è dispari e* k *è pari*

$$
(2.9)\quad a_{hk}=\begin{cases}
\dfrac{1}{\operatorname{sen}\pi z}\{ -\displaystyle\sum_{i\ \mathrm{pari},\, i=0}^{n}\Big[\binom{n}{i}\alpha_h^{n-i}(0)\beta_h^{i}(0)P_{ik}(z)\Big]\cos\frac{\pi}{2}z\ + \\[2ex]
\qquad + \big(\displaystyle\sum_{i\ \mathrm{disp},\, i=1}^{n-1}\Big[\binom{n}{i}\alpha_h^{n-i}(0)\beta_h^{i}(0)P_{ik}(z)\Big]\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}z\ \big] \\[2ex]
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{se } k/2 \text{ dispari} \\[4ex]
\dfrac{1}{\operatorname{sen}\pi z}\{ \displaystyle\sum_{i\ \mathrm{pari},\, i=0}^{n}\Big[\binom{n}{i}\alpha_h^{n-i}(0)\beta_h^{i}(0)P_{ik}(z)\Big]\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}z\ + \\[2ex]
\qquad +\big(-\displaystyle\sum_{i\ \mathrm{disp},\, i=1}^{n-1}\Big[\binom{n}{i}\alpha_h^{n-i}(0)\beta_h^{i}(0)P_{ik}(z)\Big]\cos\frac{\pi}{2}z\big] \\[2ex]
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{se } k/2 \text{ pari}
\end{cases}
$$

dove $P_{ik}(z)$ *sono polinomi nella variabile* z *di grado* $\frac{k}{2}-1$. *Infine se* h *è pari e* $k = 1,2,\dots,2n$

$$
(2.10)\qquad a_{hk} = \begin{cases} a_{h-1,k+1} & \text{se } k \text{ è dispari} \\[2ex] a_{h-1,k-1} & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases}
$$

Dim. Calcoliamo gli elementi della matrice dei simboli $\sigma_p(A)$. Proviamo l'uguaglianza (2.8) nel caso che $s = \frac{k-1}{2}$ è pari. Analoga mente si prova nel caso in cui s è dispari.

Osservato che, mediante calcoli elementari, risulta (cfr. (2.3))

$$c_{ik} = \begin{cases} \binom{i}{s}(-1)^{(i-s)/2} & \text{se } i \text{ è pari} \\ \binom{i}{s}(-1)^{(i-s-1)/2} & \text{se } i \text{ è dispari} \end{cases}$$

e tenuto presente la (2.5) e che il simbolo principale di H è

$$i\Theta(z) - i(1-\Theta(z)) \quad (^2)$$

si ha:

$$\sigma_p(A_{hk})(t,z)=\beta_h^s(t)\{[\sum_{r=\mathrm{disp},r=s}^{n-1} i\binom{n}{r}\alpha_h^{n-r}(t)\beta_h^{r-s}(t)\binom{r}{s}(-1)^{(r-s-1)/2}](2\Theta(z)-1) +$$

$$+\sum_{r\ \mathrm{pari},r=s+1}^{n}\binom{n}{r}\alpha_h^{n-r}(t)\beta_h^{r-s}(t)\binom{r}{s}(-1)^{(r-s/2}\} =$$

$$= \beta_h^s(t)\{[\sum_{r\ \mathrm{pari},r=0}^{n-s-2} i\binom{n}{r+s}\alpha_h^{n-r-s}(t)\beta_h^r(t)\binom{r+s}{s}(-1)^{r/2}](2\Theta(z)-1)+$$

$$+\sum_{r\ \mathrm{disp},r=1}^{n-s-1}\binom{n}{r+s}\alpha_h^{n-r-s}(t)\beta_h^r(t)\binom{r+s}{s}(-1)^{(r-1)/2}\} =$$

$$=i\,\beta_h^s(t)\binom{n}{s}\{[\sum_{r\ \mathrm{pari},r=0}^{n-s-1}\binom{n-s}{r}\alpha_h^{n-r-s}(t)(i\beta_h(t))^r]\ (2\Theta(z)-1) +$$

(2) Cfr. [2]

$$+\sum_{r\ \mathrm{disp},\, r=1}^{n-s} \binom{n-s}{r}\alpha_h^{n-r-s}(t)(i\beta_h(t))^r\} = i\beta_h^s(t)\binom{n}{s}\left[v_h^{n-s}(t)\Theta(z)-\bar{v}_h^{n-s}(t)(1-\Theta(z))\right]$$

dove si è tenuto conto che $\binom{n}{s}\binom{n-s}{r} = \binom{n}{r+s}\binom{r+s}{s}$.

Proviamo ora la (2.9) nel caso k/2 dispari. Analogamente si prova nel caso in cui k/2 è pari.

Tenendo presente la (2.6) e che per $j = 1,2,\dots n$

$$\begin{cases} \sigma_p(K_j) = \binom{(2j-z-3)/2}{j-1} \dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}z}{\operatorname{sen}\pi z} \\[2ex] \sigma_p(K_j') = (-1)^{j-1}\binom{-z/2}{j-1} \dfrac{\cos\frac{\pi}{2}z}{\operatorname{sen}\pi z} \end{cases}$$

si ha subito la (2.9), dopo aver posto:

$$P_{ik}(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{k/2} c_{i,k+1}^{(j)}(-1)^{j-1}\binom{-z/2}{j-1} & \text{se } i \text{ è pari} \\[2ex] \displaystyle\sum_{j=1}^{k/2} c_{i,k+1}^{(j)}(-1)^{2j-2}\binom{(2j-z-3)/2}{j-1} & \text{se } i \text{ è dispari} \end{cases}$$

Infine la (2.10) segue immediatamente dalla (2.7). Con ciò resta completamente provato l'asserto.

Indichiamo, ora, con $D(\alpha,\beta)(t)$ e con $P(\alpha,\beta)(t)$ le matrici di ordine n di termine generale rispettivamente:

$$d_{ij}(t) = (\alpha_{2i-1}^{n-j}\ \beta_{2i-1}^{j-1})(t) \quad e \quad p_{ij}(t) = (\alpha_{2i}^{n-j}\ \beta_{2i}^{j-1})(t) \qquad ij=1,2,..n$$

e con $D(v)(t)$ e $P(v)(t)$ quelle che si ottengono rispettivamente da $D(\alpha,\beta)(t)$ e $P(\alpha,\beta)(t)$ sostituendo ad α_h, $v_h = \alpha_h - i\beta_h$

Si verifica facilmente che:

$$(2.11) \qquad \begin{cases} \det D(v)(t) = \det D(\alpha,\beta)(t) \\ \\ \det P(v)(t) = \det P(\alpha,\beta)(t)\ . \end{cases}$$

Lo stesso risultato si ottiene se al posto di α_h si sostituisce $\bar{v}_h$.

Sussiste ora la seguente proposizione che mostra sotto quali ipotesi l'operatore A è ellittico, cioé ammette una parametrice.

PROPOSIZIONE 2.2. *Supponiamo che:*

$$(2.12) \qquad \inf_{Re\, z=1/p} |\det \sigma_p(A)(o,z)| > 0$$

$$(2.13) \qquad \inf_{t\geq 0} |\det D(\alpha,\beta)(t)| > 0$$

$$(2.14) \qquad \inf_{t\geq 0} |\det P(\alpha,\beta)(t)| > 0$$

Esiste allora una matrice B *di operatori in* $OP\Sigma_{1/P}$ *tale che* AB-I *e* BA-I *sono matrici di operatori regolari.*

Dim. Iniziamo col provare che la funzione $\sigma_p(A)(t,z)$ è il simbolo di un operatore ellittico in $OP\Sigma_{1/p}$; cioé posto:

$$\det\sigma_p(A)(t,z) = a_+(t)\Theta(z) + a_-(t)(1-\Theta(z)) + a(z)$$

con $a_+(t) - a_+(0) \in \mathscr{F}_0$, $a_-(t) - a_-(0) \in \mathscr{F}_0$ e $a(z) \in \mathscr{F}_{1/p}$; si deve avere:

$$(2.15) \qquad \inf_{Re z=1/P} |\det\sigma_p(A)(0,z)| > 0$$

$$(2.16) \qquad \inf_{t\geq 0} |a_+(t)| > 0 \quad , \inf_{t\geq 0} |a_-(t)| > 0$$

La (2.15) è verificata per l'ipotesi (2.12). Inoltre risulta:

$$a_+(t) = c(v_1 v_2 \ldots v_{2n})(t) \det D(v)(t) \det P(v)(t)$$

con c opportuna costante. Quindi per l'ipotesi (2.13) e (2.14) e poiché $\alpha_\ell^2 + \beta_\ell^2 = 1$, si ha che l'estremo inferiore di $|a_+(t)|$ è strettamente positivo. Infine dato che

$$a_-(t) = \bar{a}_+(t)$$

anche la seconda di (2.16) è verificata. Detto E l'operatore che ha per simbolo det $\sigma_p(A)(t,z)$, si è allora provato che E è ellittico in $OP\Sigma_{1/p}$. Ciò significa che esiste un operatore F in $OP\Sigma_{1/p}$ tale che:

$$EF - I \in \Phi_{1/p} \qquad e \qquad FE - I \in \Phi_{1/p}$$

In [5] è provato che:

$$\sigma_p(F)(t,z) = \frac{1}{a_+(t)} \Theta(z) + \frac{1}{a_-(t)} (1-\Theta(z)) + b(z)$$

ove

$$b(z) = \frac{1}{\det\sigma_p(A)(0,z)} - \frac{1}{a_+(0)}\,\Theta(z) - \frac{1}{a_-(0)}\,(1-\Theta(z)).$$

Sia allora B la matrice $2n\mathrm{x}2n$ di operatori in $OP\Sigma_{1/p}$ la cui matrice di simboli principali si ottiene nel modo seguente: si considera la matrice $\sigma_p(A)(t,z)$ e si costruisce la sua matrice inversa, dove il prodotto tra simboli si esegue secondo le regole del calcolo simbolico sviluppato in [5] e il rapporto per il $\det\sigma_p(A)(t,z)$ è inteso come prodotto per $\sigma_p(F)(t,z)$. Allora

$$\sigma_p(B)(t,z)\cdot\sigma_p(A)(t,z) = I$$

dove $\cdot$ denota il prodotto righe per colonne, sempre secondo il calcolo simbolico ed I denota la matrice identica $2n\mathrm{x}2n$. Con ciò resta provato l'asserto.

Osservazione 2.1. - La condizione (2.13) (risp. (2.14)) implica che i vettori $v_1, v_3, \ldots$(risp. $v_2, v_4, \ldots$) non sono mai paralleli. Segue pertanto che $v_1 \neq v_3 \neq \ldots$ (risp. $v_2 \neq v_4 \neq \ldots$).

Osservazione 2.2. - Le condizioni (2.13) e (2.14) sono equivalenti alle usuali condizioni di ricoprimento per l'operatore Δ^n in un settore piano (cfr. [8]).

Osservazione 2.3. - Se valgono le condizioni (2.13), (2.14), allora la (2.12) è soddisfatta per tutti i p al di fuori di un insieme discreto.

Infatti, poiché

$$\det\sigma_p(A)(t,z) = a_+(t)\Theta(z) + a_-(t)(1-\Theta(z)) + a(z)$$

con $a(z) \in \tilde{\mathscr{F}}_{1/p}$, per $1 < p < +\infty$, per l'ipotesi (2.13) e (2.14), si ha che $\inf\limits_{t\geq 0} |a_+(t)| > 0$ e $\inf\limits_{t\geq 0} |a_-(t)| > 0$. Allora la funzione $\psi(z) = (\det\sigma_p(A)(0,z))^{-1}$ è meromorfa nella striscia $0 < \mathrm{Re}\ z < 1$; inoltre in ogni striscia $0 < \delta < \mathrm{Re}\ z < 1 - \delta < 1$, $\psi(z)$ ha un numero finito di poli. Da ciò la (2.12) è soddisfatta per tutti i p al di fuori di un insieme discreto.

Il seguente teorema permette, di calcolare l'indice dell'operatore A.

TEOREMA 2.1. *Nelle ipotesi della proposizione precedente, detto* ν_k *l'indice di* $v_k, k = 1,2,\dots,2n$, *si ha che* A, *come operatore su* $(L^p(R_+))^{2n}$, *ha indice uguale a due volte la somma degli indici dei* v_k, *cioé:*

$$\mathrm{Ind}\ A = 2 \sum_{k=1}^{2n} \nu_k$$

Dim. Denotiamo con A_o la matrice di operatori avente come matrice dei simboli $\sigma_p(A)(0,z)$ e con B_o la matrice di operatori la cui matrice dei simboli è:

$$\sigma_p(B_o)(t,z) = ((\sigma_p(A_o))^{-1}$$

Poiché $\sigma_p(B_oA_o) = I$, è quindi $A_oB_o = B_oA_o = I$.

Perciò l'indice dell'operatore A è uguale all'indice dell'operatore B_oA. Quindi d'ora in poi studieremo la matrice di operatori B_oA.

La matrice $\sigma_p(B_o)$ è formata dai seguenti blocchi σ_{hk} :

$$\sigma_{hk} = \begin{pmatrix} \dfrac{iX_{hk}(0)\Theta(z)}{v_{2k-1}(0)\ \det D(v)(0)} & -\dfrac{iX_{hk}(0)(1-\Theta(z))}{v_{2k-1}(0)\ \det D(v)(0)} & 0 \\ & & \\ 0 & \dfrac{iX'_{hk}(0)\ (z)}{v_{2k}(0)\det D(v)(0)} & -\dfrac{X'_{hk}(0)(1-\Theta(z))}{v_{2k}(0)\det D(v)(0)} \end{pmatrix}$$

con $h,k = 1,2,...,n$, e dove X_{hk} e X'_{hk} sono i minori complementari dell'elemento di riga h-esima e di colonna k-esima rispettivamente della matrice $D(v)(t)$ e della matrice $P(v)(t)$. Infatti, per trovare il primo elemento della matrice $\sigma_p(B_o)$ è sufficiente tener presente che il minore complementare di $A_{hk}(0,z)$ quando h e k sono entrambi dispari, è dato da:

$$[(v_2v_4\cdots v_{2n})(0)\det P(v)(0)X_{hk}(0)]\,i\Theta(z)+[\overline{(v_2v_4\cdots v_{2n})}(0)\det P(v)(0)\bar{X}_{hk}(0)]\,i(1-\Theta(z)).$$

Essendo ora:

$$B_oA = I + B_o(A - A_o)$$

si ha che la matrice $\sigma_p(B_oA)$ è una matrice di ordine 2n di termine generale:

$$\Gamma_{ij}(t,z) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \text{ è pari e } j \text{ è dispari oppure viceversa} \\ \gamma_{i,\frac{j+1}{2}} & \text{se } i \text{ e } j \text{ sono entrambi dispari} \\ \gamma_{i,\frac{j}{2}} & \text{se } i \text{ e } j \text{ sono entrambi pari} \end{cases}$$

dove, per $k = 1,2,\dots,2n$ e $h = 1,2,\dots n$ è

$$\gamma_{hk}(t,z) = q_{kh}(t)\,\Theta(z) + \bar{q}_{hk}(t)(1-\Theta(z))$$

con

$$q_{kh}(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{(v_{2j-1}^{n-h+1}\,\beta_{2j-1}^{h-1})(t)\;X_{kj}(0)}{v_{2j-1}(0)\;\det D(v)(0)} & \text{se } k \text{ è dispari} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{(v_{2j}^{n-h+1}\,\beta_{2j}^{h-1})(1)\;X_{kj}(0)}{v_{2j}(0)\;\det P(v)(0)} & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases}$$

Osserviamo che B_oA ha lo stesso indice dell'operatore T che ha per simbolo principale la seguente matrice, scritta a blocchi:

$$\left(\begin{array}{c|c} \sigma_p(M)(t,z) & 0 \\ \hline 0 & \sigma_p(N)(t,z) \end{array}\right)$$

dove $\sigma_p(M)(t,z) = (\gamma_{kh})$ con $k = 1,3,\dots 2n-1$, $h = 1,2,\dots n$ e

$\sigma_p(N)(t,z) = (\gamma_{kh})$ con $k = 2,4,\ldots 2n$, $h = 1,2,\ldots n$.

L'indice dell'operatore T si può calcolare sommando gli indici dei due operatori matriciali M ed N i cui simboli sono stati ora definiti. Calcoliamo l'indice di M; analogamente si calcola l'indice di N.

Siano P,Q ed R tre matrici nxn di operatori in $OP\Sigma_{1/p}$, aventi per simboli principali rispettivamente le matrici $\sigma_p(P)(t,z)$, $\sigma_p(Q)(t,z)$ e $\sigma_p(R)(t,z)$ ove $\sigma_p(P)(t,z)$ è la trasposta della matrice il cui termine generale è

$$\left(\frac{X_{kh}(t)\Theta(z)}{\det D(v)(t)} + \frac{X_{kh}(t)(1-\Theta(z))}{\det D(v)(t)} \right) \text{ con } k,h = 1,2,\ldots,n \text{ e } X_{kh} \text{ so-}$$

no quelli menzionati precedentemente, $\sigma_p(Q)(t,z) = \sigma_p(P)(0,z)$ e $\sigma_p(R)(t,z)$ è la matrice diagonale di ordine n di termine generale

$$\left(\frac{v_k(t)}{v_k(0)}\,\Theta(z) + \frac{\bar{v}_k(t)}{\bar{v}_k(0)}\,(1-\Theta(z)) \right) \quad \text{con} \quad k = 1,3,\ldots,2n-1.$$

Tenendo presente come sono stati definiti gli X_{kh}, per le ipotesi (2.13),(2.14) e poiché $\alpha_\ell^2 + \beta_\ell^2 = 1$, per ogni $h=1,2,\ldots,n$, si ha che P,Q ed R sono operatori ellittici [3].

([3]) La matrice $\sigma_p(P)(t,z)$ è proprio l'inversa della matrice $D(v)(t)\Theta(z)$ più l'inversa della matrice $\bar{D}(v)(t)(1-\Theta(z))$ e quindi det $\sigma_p(P)(t,z)$ è diverso da zero per (2.13) e (2.14).

Si verifica che:

$$(2.17)\qquad \sigma_p(M)(t,z)\cdot\sigma_p(P)(t,z) = \sigma_p(Q)(t,z)\cdot\sigma_p(R)(t,z)\ .$$

Dimostriamo l'uguaglianza per il primo elemento della precedente matrice prodotto; in modo analogo si prova per gli altri.

Tenendo presente come sono stati definiti i q_{1h} e che X_{1h} è il minore complementare dell'elemento della prima riga e della colonna h-esima di $D(v)(t)$, si ha:

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{q_{1h}(t)X_{1h}(t)}{\det D(v)(t)} =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{(v_{2j-1}^{n-h+1}\ \beta_{2j-1}^{h-1})(t)X_{1j}(0)}{v_{2j-1}(0)\ \det D(v)(0)} \right) \frac{X_{1h}(t)}{\det D(v)(t)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{v_{2j-1}(t)X_{1j}(0)}{v_{2j-1}(0)\ \det D(v)(0)\ \det D(v)(t)} \left(\sum_{h=1}^{n} (v_{2j-1}^{n-h}\beta_{2j-1}^{h-1})(t)X_{1h}(t)\right)$$

$$= \frac{v_1(t)}{v_1(0)}\ \frac{X_{11}(0)}{\det D(v)(0)}$$

Per la (2.17) gli operatori M P e Q R coincidono, a meno di operatori regolari. Risulta, quindi:

$$\mathrm{Ind}\ M = \mathrm{Ind}\ Q + \mathrm{Ind}\ R - \mathrm{Ind}\ P$$

Si verifica poi, mediante calcoli elementari, che esistono delle costanti c_{ij} , $i,j = 1,2,\dots,n$, nulle per $i \leq j \leq n-i$ e tali che $\sigma_p(P)(t,z)$ si può scomporre nel prodotto della matrice di termine generale:

$$c^*_{ij}(z) = \begin{cases} c_{ij} & \text{se } i \text{ è pari e } j \text{ dispari o viceversa} \\ c_{ij}h(z) & \text{se } i \text{ e } j \text{ sono entrambi pari o entrambi dispari} \end{cases}$$

e della matrice:

$$\left(\frac{1}{\det D(v)(t)}\right)^n \begin{pmatrix} X^\alpha_{1n}(t) & X_{2n}(t) & \dots\dots\dots & X^\alpha_{nn}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X^\alpha_{12}(t) & X^\alpha_{22}(t) & \dots\dots\dots & X^\alpha_{n2}(t) \\ X^\alpha_{11}(t) & X^\alpha_{21}(t) & \dots\dots\dots & X^\alpha_{n1}(t) \end{pmatrix}$$

ove $h(z) = i\,\Theta(z) - i(1-\Theta(z))$ e $X^\alpha_{kh}(t)$ sono i minori complementari dei corrispondenti elementi di $D(\alpha,\beta)(t)$.

La prima delle matrici è il simbolo dell'operatore invertibile di termine generale

$$c^*_{ij} = \begin{cases} c_{ij}I & \text{se } i \text{ pari e } j \text{ dispari o viceversa} \\ c_{ij}H & \text{se } i \;\; j \text{ entrambi pari o entrambi dispari} \end{cases}$$

ove $c_{ij} = 0$ per $i \leq j \leq n-1$; e la seconda è invertibile grazie alle ipotesi (2.13) e (2.14), tenendo presente (2.11).

Poiché $\sigma_p(Q)(t,z)$ è uguale a $\sigma_p(P)(0,z)$, si ha che:

$$\text{Ind } P = \text{Ind } Q = 0 \ .$$

Per l'operatore R si ha per il teorema 6 di [5] sul calcolo del l'indice di un operatore ellittico:

$$\text{Ind } R = 2 \sum_{k=1}^{n} \nu_{2k-1}$$

Analogamente si prova che

$$\text{Ind}(N) = 2 \sum_{k=1}^{n} \nu_{2k}$$

e quindi

$$\text{Ind } A = \text{Ind } M + \text{Ind } N = 2 \sum_{k=1}^{n} \nu_k$$

da cui l'asserto.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. AVANTAGGIATI - M. TROISI: "*Spazi di Sobolev con peso e problemi ellittici in un angolo* I,II,III. Ann. di Mat. pura ed appl. 95 aa 361-408 (1973), 97 pp. 207-252(1973), 99 pp.1-64 (1974).

[2] E.B. FABES - M. JODEIT - J.E.LEWIS :"*On spectra of Hardy kernel* Journ. of functional Analysis 21 pp. 187-194 (1976).

[3] L. DIOMEDA - B. LISENA: "*Problemi di Direchlet e di derivata obliqua per l'operatore* Δ^2 *in un settore piano*.(In corso di pubblicazione su Rendiconti di Roma).

[4] U. NERI: "*Singular integrals*. Lectures Notes in Math. 200 - Springer-Verlag (1971).

[5] J.E.LEWIS - C. PARENTI: "*Pseudodifferential Operators and Hardy Kernel on* $L^p(R_+)$, in corso di stampa su Annali Scuola Norm. di Pisa).

[6] M. MERIGOT: "*Potentiels et regularitè* L^p *pour les problèmes elliptiques dans un secteur plan*. C.R. Acad.Sc.Paris 278 pp. 1487-1498 (1974).

[7] E.B. FABES - M.JODEIT - J.E.LEWIS: "*Double layer potential for domains with corcornes and edges*, Indiana U. Math. J. 26, pp. 95-114 (1977).

[8] M. SCHECHTER: "*Modern methods in partial differential equations*, Advanced book program.

Lavoro pervenuto alla Redazione il 29 Luglio 1981
ed accettato per la pubblicazione il 14 Giugno 1983
su parere favorevole di A. Avantaggiati e C. Parenti