Note di Matematica Vol. II, 177-188 (1982)

SULLE MATRICI TORNEO ASSOCIATE A MATRICI DI PERMUTAZIONE (*)

Norma ZAGAGLIA SALVI (**)

Summary. A *tournament matrix* A *is associated with a permutation matrix* P *if* AP *is still a tournament matrix. In this paper we consider the problem of the existence and the construction of such matrices and in particular we prove that* A *of order* n *is associated with a* n*-cycle* P *if and only if* $AP = A_T$.

In that case the tournament corrispondent with A *is rotational and the eigenvalues of* A *are determined.*

1. INTRODUZIONE. Una matrice torneo A di ordine n è una (0,1)-matrice che verifica la relazione $A+A_T=J-1$, ove A_T è la trasposta di A,J è la matrice di ordine n i cui elementi sono tutti uguali a 1 ed 1 è la matrice unità.

Una matrice torneo coincide con la matrice di adiacenza di un torneo, che è un grafo orientato nel quale c'è esattamente un arco tra ogni coppia di vertici distinti.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del GNSAGA del CNR.

(**) Dipartimento di Matematica - Politecnico - P.za L.da Vinci, 32 - 20133 Milano.

Ricordiamo che un torneo T di ordine n è detto *di rotazione* se il suo gruppo di automorfismi contiene un n-ciclo [1].

Diciamo che una matrice torneo A è *associata* ad una matrice di permutazione P se si verifica che AP è ancora una matrice torneo.

Diremo pure che il torneo T corrispondente ad A è *associato* a P.

Una matrice di permutazione P [2,p.102] di ordine n è un n-ciclo se la permutazione corrispondente a P è composta di un solo ciclo.

Indicata con Π la matrice che rappresenta la permutazione (1,2, ...,n) una matrice A è detta circolante se verifica la relazione $A\Pi = \Pi A$[3].

Nello studio delle proprietà delle matrici torneo si è posto il problema dell'esistenza e costruzione di matrici torneo associate a matrici di permutazione.

In questo lavoro si dimostra che una matrice torneo A è associata ad un n-ciclo se e soltanto se risulta $AP=A_T$. In tal caso P è un automorfismo del torneo T, corrispondente ad A, che risulta quindi un torneo di rotazione. Si determinano, inoltre, gli autovalori di una qualunque matrice torneo associata ad un n-ciclo. Tali risultati costituiscono, per le matrici torneo, una risposta al problema di stabilire il legame che sussiste tra lo spettro di una matrice A e quello della matrice AP, ove P è matrice di permutazione.

2. Sia P un n-ciclo ed A e B due matrici torneo di ordine n tali che

$$AP = B. \tag{2.1}$$

Rappresentiamo la permutazione corrispondente a P con l'n-ciclo

$$(1\ \pi(1)\ \pi^2(1)\ldots\pi^{n-1}(1))$$

ove $1 = \pi^n(1)$.

Indicati con a_{ij} e b_{hk} due generici elementi delle matrici A e B, dalla relazione (2.1) risulta

$$b_{hk} = a_{h\ \pi(k)} \tag{2.2}$$

e quindi

$$a_{ij} = b_{i\ \pi^{-1}(j)}\ . \tag{2.3}$$

Consideriamo l'elemento b_{11} della B. Essendo B una matrice torneo, tale elemento deve essere nullo e per la (2.2) risulta

$$b_{11} = a_{1\pi(1)} = 0.$$

Poiché $1 = \pi^n(1)$, risulta $a_{\pi^n(1)\ \pi(1)} = 0$ ed essendo A una matrice torneo, si ha $a_{\pi(1)\ \pi^n(1)} = 1$.

Per la (2.3), ne segue allora $a_{\pi(1)\ \pi^n(1)} = b_{\pi(1)\ \pi^{n-1}(1)} = 1$,

da cui $b_{\pi^{n-1}(1)\pi(1)} = a_{\pi^{n-1}(1)\ \pi^2(1)} = 0$.

Proseguendo in tal modo, si ottiene la seguente sequenza H_1 di elementi della A e della B ove si intende che π è applicata ad 1 e gli esponenti delle potenze di π sono ridotti modulo n:

$b_{\pi^n\pi^n} = a_{\pi^n\pi} = 0$ $\qquad a_{\pi\pi^n} = b_{\pi\pi^{n-1}} = 1$

$b_{\pi^{n-1}\pi} = a_{\pi^{n-1}\pi^2} = 0$ $\qquad a_{\pi^2\pi^{n-1}} = b_{\pi^2\pi^{n-2}} = 1$

....

(2.4) $b_{\pi^{n-k+1}\pi^{k-1}} = a_{\pi^{n-k+1}\pi^k} = 0 \quad a_{\pi^k\pi^{n-k+1}} = b_{\pi^k\pi^{n-k}} = 1$

con k intero positivo.

Tale successione si interrompe in corrispondenza di un elemento di A o di B con i due indici coincidenti. Per gli elementi di A deve risultare $n-k+1 = k$, da cui $k = \frac{n+1}{2}$ che è un intero per n dispari.

Per gli elementi di B deve risultare $k=n-k$ da cui $k= \frac{n}{2}$ che è un intero per n pari. In tal caso, però, risulta dalla sequenza H_1 $b_{\pi^k\pi^{n-k}} = 1$, mentre dovrebbe essere nullo essendo un elemento della diagonale principale della matrice torneo B. Pertanto non può esistere una tale sequenza per n pari e vale la seguente

PROPOSIZIONE 2.1. *Se una matrice torneo* A *è associata ad un* n-*ciclo, allora* n *è dispari.*

L'insieme di elementi della A nella sequenza H_1 coincidenti con 1 risulta

$$S_1 = \{a_{\pi^r\pi^{n-r+1}}, \ 1 \leq r \leq \frac{n-1}{2}\}.$$

Osservazione 2.2. Gli elementi di S_1 appartengono a righe [colonne] distinte. Infatti se due elementi

$a_{\pi^{r_1},\pi^{n-r_1+1}}$ e $a_{\pi^{r_2}\pi^{n-r_2+1}}$ con $r_1, r_2 \in \left[1, \frac{n-1}{2}\right]$ appartenessero alla stessa riga, ne seguirebbe che $r_1 \equiv r_2 \pmod{n}$. Ma questo è impossibile essendo $|r_1 - r_2| < n$.

Un procedimento analogo vale per le colonne.

Consideriamo, ora, l'elemento b_{22} della B. Poiché $2 = \pi^n(2)$, risulta $b_{\pi^n(2)\pi^n(2)} = a_{\pi^n(2)\pi(2)} = 0$ da cui $a_{\pi(2)\pi^n(2)} = b_{\pi(2)\pi^{n-1}(2)} = 1$.

Continuando in questo modo si ottiene una sequenza H_2 di elementi della A e della B che si differenzia dalla H_1 per la condizione che π è applicata a 2 invece che a 1.

Osservando che $2 = \pi^{h_2}(1)$, $1 \leq h_2 \leq n-1$, si ha che l'insieme di elementi della A nella sequenza H_2 coincidenti con 1 risulta

$$S_2 = \{a_{\pi^{h_2+r}\pi^{h_2+n-r+1}}\ ,\ 1 \leq r \leq \frac{n-1}{2}\}\ ,$$

ove si intende la permutazione π applicata a 1. Per le precedenti considerazioni tali elementi appartengono a righe e colonne distinte.

In generale, posto $i = \pi^{h_i}(1)$, con $1 \leq i, h_i \leq n$, otteniamo l'insieme di elementi della A coincidenti con 1

$$S_i = \{a_{\pi^{h_i+r}\pi^{h_i+n-r+1}}\ ,\ 1 \leq r \leq \frac{n-1}{2}\},$$

ove π è ancora applicata ad 1.

Osservazione 2.3. Gli indici di due elementi appartenenti ad insiemi distinti S_i e S_j, con $1 \leq i, j \leq n$ e $i \neq j$, non sono mai entrambi coincidenti.

Siano $a_{\pi^{h_i+r_1}\pi^{h_i+n-r_1+1}}$ e $a_{\pi^{h_j+r_2}\pi^{h_j+n-r_2+1}}$ due elementi di S_i e S_j rispettivamente, con $1 \leq h_j < h \leq i \leq n$ e $1 \leq r_1 < r_2 \leq n$.

La condizione che appartengano alla stessa riga equivale ad affermare che $h_i - h_j \equiv r_2 - r_1 \pmod{n}$. Se appartenessero alla stessa colonna otterremmo $h_i - h_j \equiv -(r_2 - r_1) \pmod{n}$. Poiché tali relazioni sono incompatibili, ne segue la tesi.

Osservazione 2.4. Per gli elementi dell'insieme S_i, con $1 \leq i \leq n$, si verifica che la differenza tra il secondo e il primo esponente delle potenze di π è sempre *pari*, mentre per gli elementi coincidenti con 0 tale valore, che risulta l'opposto del precedente , ridotto modulo n, è sempre *dispari*.

Dagli insiemi S_i, $1 \leq i \leq n$, possiamo formare gli insiemi

(2.5). $$F_r = \{a_{\pi^{i+r}\pi^{i+n-r+1}} = 1, \quad 1 \leq i \leq n\}$$

con $1 \leq r \leq \frac{n-1}{2}$.

Poiché, essendo π un n-ciclo, π^{i+r} per r fisso ed $i \in [1,n]$ descrive l'insieme $\{1,2,\ldots,n\}$, si ha che F_r consiste in un insieme di n elementi, uno per ogni riga di A. Per lo stesso motivo tali elementi appartengono tutti a colonne diverse.

Per le Oss. 2.2. e 2.3. risulta che, dalla collezione degli insiemi F_r, $1 \leq r \leq \frac{n-1}{2}$, in ogni riga di A vi sono $\frac{n-1}{2}$ elementi uguali a 1, per cui è verificata la relazione $AJ = \frac{n-1}{2} J$.

Poiché una matrice torneo è regolare quando è costante il numero di elementi di ogni riga, ne segue che A è regolare ed univocamente determinata. Possiamo pertanto dedurre la seguente

PROPOSIZIONE 2.5. *Per ogni* n-*ciclo dispari* P *esiste sempre ed è univocamente determinata la matrice torneo ad esso associata.*

TEOREMA 2.6. *Se la matrice torneo* A *è associata ad un* n-*ciclo* P, *vale la relazione* $AP=A_T$

Sia $A = [a_{hk}]$ e $B = AP = [b_{hk}]$: dimostriamo che, per $h \neq k$, $b_{hk} + a_{hk} = 1$, cioé $a_{h\pi(k)} + a_{hk} = 1$, per la (2.2).

Dalla Oss. 2.4 ne segue che se a_{hk} è uguale a 1[0] allora, posto $h = \pi^r(1)$ e $k = \pi^s(1)$, con $1 \leq r,s \leq n$, risulta che la differenza s-r è pari [dispari] . Pertanto, per $a_{h\pi(k)} = a_{\pi^r \pi^{s+1}}$ tale differenza è dispari [pari] e quindi l'elemento vale 0[1].

Di qui la tesi.

TEOREMA 2.7. *Se* A *è la matrice torneo associata ad un* n-*ciclo* P, *risulta* AP=PA. *Pertanto* P *è un automorfismo del torneo* T *corrispondente ad* A *e* T *è un torneo di rotazione.*

Per il Teor. 2.6 si ha $AP=A_T$, da cui $P_TAP=P_TA_T=(AP)_T=(A_T)_T=A$. Pertanto P è un automorfismo del torneo T corrispondente ad A[2] e, poiché è un n-ciclo, ne viene che T è un torneo di rotazione.

PROPOSIZIONE 2.8. *Ogni matrice torneo associata ad un n-ciclo è permutazionalmente simile alla matrice torneo circolante associata a* Π.

Se A è una matrice torneo associata ad un n-ciclo P, per il Teor. 2.6 risulta $AP=A_T$. Poiché P è un n-ciclo, esiste una matrice di permutazione R tale che $P=R_T \Pi R$, da cui $AR_T \Pi R = A_T$ e quindi $RAR_T \Pi = RA_T R_T$. La matrice $B = RAR_T$ è pertanto associata all'n-ciclo Π.

Per il Teor. 2.7 si ha $B\Pi = \Pi B$, per cui B è una matrice circolante. Di qui la tesi.

Ne deriva subito il seguente

COROLLARIO 2.9. *I tornei associati ad n-cicli distinti sono isomorfi.*

3. Supponiamo che π si scomponga nel prodotto di $h \geq 1$ cicli disgiunti $p_1, p_2, \ldots, p_h$. Indicheremo con $P_1, P_2, \ldots, P_h$ le matrici di permutazione corrispondenti a tali cicli. Senza ledere la generalità della permutazione π possiamo supporre la matrice di permutazione P corrispondente a π scomposta in blocchi che coincidono con le matrici $P_1, P_2, \ldots, P_h$ sulla diagonale principale e sono tutti nulli altrimenti.

Rappresentiamo una matrice torneo A a blocchi nel seguente modo

$$A = \begin{bmatrix} M_1 & U_2 & \dots & U_h \\ V_1 & M_2 & \dots & V_h \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_1 & Z_2 & \dots & M_h \end{bmatrix}$$

ove $M_1, M_2, \dots, M_h$ sono matrici torneo di ordini rispettivamente $p_1, p_2, \dots, p_h$.

Consideriamo la matrice

$$B = AP = \begin{bmatrix} M_1P_1 & U_2P_2 & \dots & U_hP_h \\ V_1P_1 & M_2P_2 & \dots & V_hP_h \\ \dots & & & \\ Z_1P_1 & Z_2P_2 & \dots & M_hP_h \end{bmatrix}$$

Poiché A e B sono matrici torneo, ne segue che M_i, M_iP_i, $1 \leq i \leq h$, sono matrici torneo. Pertanto, poiché P_i è un p_i-ciclo, risulta che p_i è dispari.

Vale pertanto la seguente

PROPOSIZIONE 3.1. *Se una matrice torneo* A *è associata ad una matrice di permutazione* P, *ognuno dei cicli disgiunti in cui è scomposta la permutazione corrispondente a* P *ha lunghezza dispari.*

TEOREMA 3.2. *Se una matrice torneo* A *è associata ad una matrice di permutazione* P *e verifica la relazione* $AP=A_T$, *allora* P *è un* n-*ciclo*.

Sia $h \geq 1$ il numero di cicli disgiunti in cui è scomposta la permutazione corrispondente a P. Adoperando le notazioni precedentemente usate, dalle relazioni $AP=A_T$ e $A+A_T = J-I$, ne segue che

$U_iP_i+U_i = J_{p_1p_i}$, $2 \leq i \leq h$.

Essendo U_i una (0,1)-matrice e P_i un p_i-ciclo, otteniamo che in ogni riga della U_i vi sono tanti 1 quanti 0 e pertanto il numero delle colonne è pari. Poiché questo contraddice la Prop. 3.1. ne segue che $p_i = 0$, $2 \leq i \leq h$.

4.

PROPOSIZIONE 4.1. *Gli autovalori della matrice torneo associata a* Π *risultano*

$$\lambda_r = \sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \omega^{2h\cdot r} \quad , \qquad 0 \leq r \leq n-1$$

ove $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{n})$.

Ricordiamo che nel prodotto $A\Pi$ le colonne della matrice A sono ciclicamente permutate a sinistra di un posto. Pertanto, poiché per il Teor. 2.6 risulta $A\Pi = A_T$, ne segue che vengono successivamente scambiati gli elementi uguali a 1 con quelli uguali a 0 e quindi gli elementi di posto pari sono nulli, mentre quelli di posto dispari, tranne ovviamente il primo, sono uguali a 1.

Inoltre, per il Teor. 2.7, si ha che $A\Pi = \Pi A$ e pertanto A è matrice circolante.

E' ben noto [2] che indicata con $[s_1,s_2,...,s_n]$ la prima riga di una matrice circolante S e con $W = \Pi_T$ si ha che

$$S = \sum_{j=1}^{n} \;_{j}\, W^{j-1}$$

e poiché gli autovalori di W sono $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ ne segue che gli autovalori di S sono $\lambda_r = \sum_{j=1}^{n} s_j\, \omega^{(j-1)\cdot r}$, $0 \leq r \leq n-1$.

Nel caso della matrice A si ha pertanto che gli autovalori risultano $\lambda_r = \sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \omega^{2h\cdot r}$, $0 \leq r \leq n-1$.

TEOREMA 4.2. *Gli autovalori di una matrice torneo di ordine* n *associata ad un* n-*ciclo risultano*

$$\lambda_r = \sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \omega^{2h\cdot r} , \quad 0 \leq r \leq n-1$$

ove $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{n})$

La tesi segue immediatamente dalla Prop. 2.8 e 4.1.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. ALSPACH: *On point-symmetric tournaments*, Canad. Math. Bulletin 13 (3), 1970, 317-323.

[2] N. BIGGS: *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, 1974.

[3] P.J.DAVIS: *Circulant matrices*, A Wiley-Interscience Publication, 1979.

Lavoro pervenuto alla Redazione il 25 Novembre 1982
ed accettato per la pubblicazione il 16 Marzo 1983
su parere favorevole di A.Andreatta e M.Sce