Note di Matematica Vol. II, 145-157 (1982)

PSEUDOCONNESSIONI DI UNO SPAZIO FIBRATO VETTORIALE

Innocente CANDELA (*)

Summary. *We can define a pseudoconnection of a vector bundle, we find properties analogous to those of a linear pseudoconnection on a differentiable manifold of class* C^∞ *and we obtain the parallel transport notion of fibres along opportune curves of the base space. Finally, for each* $(r,s) \in N^2$ *such that* $(r,s) \neq (0,0)$, *we deal with the pseudoconnections of the vector bundle of the tensors of type* (r,s) *on a differentiable manifold of class* C^∞.

INTRODUZIONE.

Sia M Una varietà differenziabile di classe C^∞. Si indichino con T(M) il fibrato vettoriale tangente, con $\pi : T(M) \to M$ la proiezione canonica, con $\mathcal{F}(M)$ l'algebra delle funzioni reali differenziabili

(*) Istituto di Geometria Università - BARI -

su M e con $\mathscr{X}(M)$ l'algebra delle sezioni differenziabili di $T(M)$, ossia dei campi vettoriali differenziabili su M.

Una pseudoconnessione lineare su M (cfr. [1]) può essere definita assegnando un endomorfismo $A : T(M) \to T(M)$ di fibrato vettoriale tale che $\pi \circ A = \pi$ e un $\mathscr{F}(M)$-omomorfismo $\nabla : X \to \nabla_X$ di $\mathscr{X}(M)$ nell' $\mathscr{F}(M)$-modulo degli R-endomorfismi di $\mathscr{X}(M)$ tale che

$$\forall f \in \mathscr{F}(M),\ \forall X, Y \in \mathscr{X}(M) : \nabla_X fY = f\nabla_X Y + (A \circ X)(f)Y.$$

In questa nota, indicati con E uno spazio fibrato vettoriale di base M, con π' la proiezione canonica e con $\mathscr{S}(M)$ l' $\mathscr{F}(M)$-modulo delle sezioni differenziabili di E, si generalizza la nozione di pseudoconnessione lineare su M, introducendo la nozione di pseudoconnessione di E.

Una pseudoconnessione di E è definita assegnando un omomorfismo $A : E \to T(M)$ di spazi fibrati vettoriali tale che $\pi \circ A = \pi'$, detto B-omomorfismo (cfr. [2]), e un $\mathscr{F}(M)$-omomorfismo $\nabla : \sigma \to \nabla_\sigma$ di $\mathscr{S}(M)$ nell' $\mathscr{F}(M)$-modulo degli R-omomorfismi di $\mathscr{S}(M)$ tale che

$$\forall f \in \mathscr{F}(M),\ \forall \sigma, \tau \in \mathscr{S}(M) : \nabla_\sigma f\tau = f\nabla_\sigma \tau + (A \circ \sigma)(f)\tau.$$

Per le pseudoconnessioni di spazi fibrati vettoriali si trovano proprietà analoghe a quelle delle pseudoconnessioni lineari e, in particolare, si perviene a definire il trasporto parallelo di fibre lungo curve opportune dello spazio base.

Si considera, infine, il fibrato vettoriale $T^r_s(M)$ dei tensori di specie (r,s) su M, con $(r,s) \neq (0,0)$, e si prova che una pseudoconnessione (A,∇) di $T^r_s(M)$ è costituita da un campo tensoriale differenziabile A di specie $(s+1,r)$ su M e da un $\mathscr{F}(M)$-omomorfismo $\nabla : H \to \nabla_H$ dell' $\mathscr{F}(M)$-modulo delle sezioni differenziabili di $T^r_s(M)$, $\mathfrak{T}^r_s(M)$, nell' $\mathscr{F}(M)$-modulo degli R-endomorfismi di $\mathfrak{T}^r_s(M)$ tale che

$$\forall f \in \mathscr{F}(M),\ \forall H,\ K \in \mathfrak{T}^r_s(M)\ :\ \nabla_H fK = f\nabla_H K + (\mathscr{C}(H \otimes A))(f)K,$$

ove $\mathscr{C}(H \otimes A)$ è il campo vettoriale contratto del campo tensoriale $H \otimes A$ ottenuto saturando ordinatamente gli r indici di controvarianza di H con gli r indici di covarianza di A e i primi s indici di controvarianza di A con gli s indici di covarianza di H.

1. PSEUDOCONNESSIONI DI UNO SPAZIO FIBRATO VETTORIALE.

Siano M una varietà differenziabile di classe C^∞ e dimensione n ed $\mathscr{F}(M)$ l'algebra delle funzioni reali differenziabili su M. Si indichino con T(M) il fibrato tangente su M, con π la proiezione canonica di T(M) su M e con $\mathscr{X}(M)$ l' $\mathscr{F}(M)$-modulo delle sezioni differenziabili di T(M), cioé l' $\mathscr{F}(M)$-modulo dei campi vettoriali differenziabili su M.

Siano V uno spazio vettoriale reale di dimensione r ed E uno spazio fibrato vettoriale di fibra tipo V, base M e proiezione canonica π'(cfr. [2]). Si indichi con $\mathscr{S}(M)$ l' $\mathscr{F}(M)$-modulo delle sezioni differenziabili di E.

Si dà la seguente definizione:

Definizione 1. Sia $A : E \to T(M)$ un B-omomorfismo di spazi fibrati vettoriali (cfr. [2]) e sia $\nabla : \sigma \to \nabla_\sigma$ un $\mathscr{F}(M)$-omomorfismo di $\mathscr{S}(M)$ nell' $\mathscr{F}(M)$-modulo degli R-endomorfismi di $\mathscr{S}(M)$ tale che

$$\forall f \in \mathscr{F}(M),\ \forall \sigma,\tau \in \mathscr{S}(M) : \nabla_\sigma f\tau = f\nabla_\sigma \tau + (A\circ\sigma)(f)\tau.$$

La coppia (A,∇) si chiama *pseudoconnessione* di E, per ogni $\sigma \in \mathscr{S}(M)$, ∇_σ si chiama *pseudoderivazione covariante rispetto a* σ e, per ogni $\tau \in \mathscr{S}(M)$, $\nabla_\sigma\tau$ *pseudoderivata covariante di* τ *rispetto a* σ.

Osservazione 1. Se si prende $E = T(M)$, una pseudoconnessione di E è una pseudoconnessione lineare su M (cfr. [1]).

Siano (A,∇) e (A',∇') due pseudoconnessioni di E e sia $f \in \mathscr{F}(M)$. Si possono definire la pseudoconnessione somma di (A,∇) e (A',∇'), indicata con $(A+A', \nabla+\nabla')$, e la pseudoconnessione prodotto di f per (A,∇), indicata con $(fA,f\nabla)$, le quali operano nel modo seguente:

$\forall u \in E : (A+A')(u) = A(u) + A'(u)$

$\forall \sigma,\tau \in \mathscr{S}(M) : (\nabla + \nabla')_\sigma\tau = \nabla_\sigma\tau + \nabla'_\sigma\tau$;

$\forall u \in E : (fA)(u) = f(\pi'(u))A(u),$

$\forall \sigma,\tau \in \mathscr{S}(M) : (f\nabla)_\sigma\tau = f\nabla_\sigma\tau.$

Pertanto si ha:

PROPOSIZIONE 1. *L'insieme* $\mathscr{L}_M(E)$ *delle pseudoconnessioni di* E *è munito in modo naturale di una struttura di* $\mathscr{F}(M)$-*modulo*.

Per ogni aperto non vuoto U di M, si indichino con $\mathcal{F}(M)$ l'algebra delle funzioni reali differenziabili su U, con T(U) il fibrato tangente su U e con $\mathcal{S}(U)$ l' $\mathcal{F}(U)$-modulo delle sezioni differenziabili di E su U. Sussiste la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 2. *Sia* (A,∇) *una pseudoconnessione di* E *e sia* U *un aperto non vuoto di* M. *Esiste un unico* $\mathcal{F}(U)$*-omomorfismo* ∇_U *di* $\mathcal{S}(U)$ *nell'* $\mathcal{F}(U)$*-modulo degli* R*-endomorfismi di* $\mathcal{S}(U)$ *tale che, per ogni* $(\sigma,\tau) \in \mathcal{S}(M) \times \mathcal{S}(M)$, *risulti:*

$$(\nabla_U)_{\sigma/U}\ \tau/U = (\nabla_\sigma \tau)_{/U}.$$

Indicato con $A_U:\pi'^{-1}(U) \to T(U)$ *il* B*-omomorfismo tale che, per ogni* $u \in \pi'^{-1}(U)$, $A_U(u) = A(u)$, *la coppia* (A_U,∇_U) *è una pseudoconnessione di* $\pi'^{-1}(U)$.

2. COMPONENTI DI UNA PSEUDOCONNESSIONE.

Fissati una base $(e_i)_{1\leq i\leq r}$ di V e un aperto non vuoto U di M, sia $\rho : U \times V \to \pi'^{-1}(U)$ un B-isomorfismo. Per ogni $i \in \{1,...,r\}$, si indichi con ε_i la sezione di E su U così definita:

$$\forall p \in U : \varepsilon_i(p) = \rho(p,e_i).$$

Per ogni $p \in U$, la famiglia $(\varepsilon_i(p))_{1\leq i\leq r}$ è una base della fibra su p, E_p.

Sia $\sigma \in \mathcal{S}(U)$. Per ogni $p \in U$, si ha: $\sigma(p) = \sigma^i(p)\varepsilon_i(p)$; pertanto risulta $\sigma = \sigma^i\varepsilon_i$ e, per ogni $i \in \{1,...,r\}$, $\sigma^i \in \mathcal{F}(U)$. La famiglia $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq r}$ è una base dell' $\mathcal{F}(U)$-modulo libero $\mathcal{S}(U)$, la quale si dirà *base associata alla coppia* (U,ρ) *e alla base* $(e_i)_{1\leq i\leq r}$ *di* V.

Per ogni $\sigma \in \mathcal{S}(M)$, le funzioni $\sigma^i \in \mathcal{F}(U)$, $1\leq i\leq r$, tali che $\sigma_{/U} = \sigma^i \varepsilon_i$ si diranno *le componenti di* σ *rispetto a* (U,ρ) *e alla base* $(e_i)_{1\leq i\leq r}$ *di* V, o semplicemente le componenti di σ rispetto a (U,ρ).

Si consideri un'altra coppia (U',ρ'), con U' aperto di M e con $\rho' : U' \times V \to \pi'^{-1}(U')$ B-isomorfismo, tale che $U \cap U' \neq \emptyset$. Si indichi con $(\varepsilon'_{i'})_{1\leq i'\leq r}$ la base di $\mathcal{S}(U')$ associata a (U',ρ') e alla base $(e_i)_{1\leq i\leq r}$ di V.

Per ogni $i' \in \{1,\dots,r\}$, sia $\varepsilon'_{i'/U\cap U'} = \alpha^i_{i'}\varepsilon_{i/U\cap U'}$.

Le funzioni $\alpha^i_{i'}$ appartengono a $\mathcal{F}(U\cap U')$ e, per ogni $p \in U\cap U'$, la matrice $(\alpha^i_{i'}(p))$ è non singolare.

Per ogni $p \in U\cap U'$, sia $(\alpha^{i'}_i(p))$ la matrice inversa della matrice $(\alpha^i_{i'}(p))$. Anche le funzioni $\alpha^{i'}_i$ appartengono a $\mathcal{F}(U\cap U')$.

Se una sezione differenziabile di E, σ, ha componenti σ^i rispetto a (U,ρ) e componenti $\sigma'^{i'}$ rispetto a (U',ρ'), risulta:

$$\sigma'^{i'}_{/U\cap U'} = \alpha^{i'}_i \sigma^i_{/U\cap U'} .$$

Tenendo conto della Prop. 2, si può dare la seguente definizione:

Definizione 2. Siano (A,∇) una pseudoconnessione di E, U un aperto non vuoto di M, $\rho : U \times V \to \pi'^{-1}(U)$ un B-isomorfismo ed $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq r}$ la base di $\mathcal{S}(U)$ associata a (U,ρ) e alla base $(e_i)_{1\leq i\leq r}$ di V.

Posto $(\nabla_U)_{\varepsilon_i}\varepsilon_j = \Gamma^k_{ij}\,\varepsilon_k$, le funzioni Γ^k_{ij}, che appartengono a $\mathscr{F}(U)$, si chiamano *le componenti di* ∇ *rispetto a* (U,ρ) *e alla base* $(e_i)_{1\leq i\leq r}$ di V, o semplicemente le componenti di ∇ rispetto a (U,ρ).

In aggiunta alle notazioni precedenti, si ponga, per ogni $i \in \{1,\dots,r\}$, $X_i = A\circ\varepsilon_i$. Risulta ovviamente che X_i è un campo vettoriale differenziabile su U.

Si dimostrano facilmente le seguenti proposizioni:

PROPOSIZIONE 3. *Per ogni* $(\sigma,\tau) \in \mathscr{S}(M) \times \mathscr{S}(M)$, *indicate con* σ^i *le componenti di* σ *rispetto a* (U,ρ) *e con* τ^i *quelle di* τ, *si ha:*

$$(\nabla_\sigma\tau)_{/U} = \sigma^i(\tau^j\Gamma^k_{ij} + X_i(\tau^k))\varepsilon_k .$$

PROPOSIZIONE 4. *Siano* U *e* U' *due aperti di* M *tali che* $U\cap U' \neq \emptyset$ *e siano* $\rho : U \times V \to \pi'^{-1}(U)$ *e* $\rho' : U' \times V \to \pi'^{-1}(U')$ *due* B-*isomorfismi.*

Per ogni pseudoconnessione (A,∇) *di* E, *indicate con* Γ^k_{ij} *le componenti di* ∇ *rispetto a* (U,ρ) *e con* $\Gamma'^{k'}_{i'j'}$ *quelle di* ∇ *rispetto a* (U',ρ'), *risulta:*

$$(2.1)\qquad \Gamma'^{k'}_{i'j'/U\cap U'} = \Gamma^k_{ij/U\cap U'}\alpha^i_{i'}\alpha^j_{j'}\alpha^{k'}_k + \alpha^i_{i'}\alpha^{k'}_k(X_{i/U\cap U'})(\alpha^k_{j'}) .$$

3. TRASPORTO PARALLELO.

Definizione 3. Sia (A,∇) una pseudoconnessione di E sia $\gamma : I \to M$ una curva differenziabile su M, con I intervallo (aperto o chiuso) di R. Si dice che γ *è una curva ammissibile per* (A,∇), se esiste una sezione differenziabile di E su γ, $\sigma = (\sigma(t))_{t\in I}$, tale che

$$(3.1) \qquad \forall t\in I : A(\sigma(t)) = \dot{\gamma}(t).$$

Siano $\gamma : I \to M$ una curva differenziabile su M ammissibile per (A,∇), $\sigma = (\sigma(t))_{t\in I}$ una sezione differenziabile di E su γ soddisfacente la (3.1), $\tau = (\tau(t))_{t\in I}$ una qualunque sezione differenziabile di E su γ e $t_\circ \in I$.

Posto $\gamma(t_\circ) = p$ e indicato con U un intorno aperto di p, siano $\rho : U\times V \to \pi'^{-1}(U)$ un B-isomorfismo ed $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq r}$ la base di $\mathscr{S}(U)$ associata a (U,ρ) e alla base $(e_i)_{1\leq i\leq r}$ di V.

Per ogni $t \in \gamma^{-1}(U)$, posto: $\sigma(t) = \sigma^i(t)\varepsilon_i(\gamma(t))$ e $\tau(t)=\tau^i(t)\varepsilon_i(\gamma(t))$, utilizzando le (2.1), si dimostra la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 5. *L'elemento* $\tau'(t_\circ)$ *definito da*

$$(3.2) \quad \tau'(t_\circ) = (\sigma^i(t_\circ)\tau^j(t_\circ)\Gamma^k_{ij}(\gamma(t_\circ)) + (\frac{d\tau^k(t)}{dt})_{t_\circ})\varepsilon_k(\gamma(t_\circ))$$

non dipende né dalla coppia (U,ρ) *né dalla base* $(e_i)_{1\leq i\leq r}$ *di* V.

Con le notazioni precedenti si possono dare le seguenti definizioni:

Definizione 4. L'elemento $\tau'(t_o)$ si chiama *pseudoderivata covariante di* τ in direzione $\sigma(t_o)$ e si indica con $\nabla_{\sigma(t_o)}\tau$.

Definizione 5. La sezione τ di E su γ si dice *parellela rispetto a* σ, se, per ogni $t \in I$, risulta: $\nabla_{\sigma(t)}\tau = 0$.

Sussiste la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 6. *Sia* $\gamma : [a,b] \to M$ *una curva differenziabile ammissibile per* (A,∇) *e sia* σ *una sezione differenziabile di* E *su* γ *soddisfacente la* (3.1). *Posto* $\gamma(a) = p$ *e* $\gamma(b) = q$ *e indicate con* V_p *e* V_q *le fibre di* E *rispettivamente su* p *e su* q, *per ogni* $v \in V_p$, *esiste un'unica sezione* τ *di* E *su* γ *parallela rispetto a* σ *tale che* $\tau(a) = v$.

L'applicazione $v = \tau(a) \to \tau(b)$ *di* V_p *in* V_q *è un isomorfismo di spazi vettoriali. Questo isomorfismo si dirà trasporto parallelo lungo* γ *rispetto a* σ.

La dimostrazione è analoga a quella relativa al trasporto parallelo per le connessioni e per le pseudoconnessioni lineari.

Osservazione 2. Per E = T(M) si riottengono noti risultati relativi alle pseudoconnessioni lineari (cfr. [1]).

4. PSEUDOCONNESSIONI DI $T^r_s(M)$.

Sia $T^r_s(M)$, con $(r,s) \in N^2$ tale che $(r,s) \neq (0,0)$, il fibrato vettoriale dei tensori di specie (r,s) su una varietà differenziabile M di classe C^∞. Si indichi con $\mathfrak{T}^r_s(M)$ l'$\mathscr{F}(M)$-modulo delle sezioni differenziabili di $T^r_s(M)$, cioé l'$\mathscr{F}(M)$-modulo dei campi tensoriali differenziabili di specie (r,s) su M.

Sia (U,ϕ) una carta di M e, per ogni $p \in U$, posto $I=\{1,2,...,n\}$ (con n si indica la dimensione di M), siano $(e_i(p))_{i\in I}$ la base naturale relativa a (U,ϕ) dello spazio tangente in p a M, $T(p)$, ed $(e^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}(p))_{(i_1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_s)} \in I^{r+s}$ la base dedotta da $(e_i(p))_{i\in I}$ dello spazio dei tensori di specie (r,s) in p, $T^r_s(p)$.

Risulta allora che $(e_i)_{i\in I}$ è una base dell'$\mathscr{F}(U)$-modulo libero delle sezioni differenziabili su U di $T(M)$, ossia $\mathscr{X}(U)$, ed $(e^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r})_{(i_1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_s)\in I^{r+s}}$ è una base dell'$\mathscr{F}(U)$-modulo libero delle sezioni differenziabili su U di $T^r_s(M)$, ossia $\mathfrak{T}^r_s(U)$.

Sia $A:T^r_s(M)\to T(M)$ un B-omomorfismo. Per ogni $(i_1,\dots,i_r,j_1,\dots j_s)\in I^{r+s}$, $A\circ e^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}$ appartiene a $\mathscr{X}(U)$, per cui risulta $A \circ e^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} =$

$= A^{j_1 \dots j_s t}_{i_1 \dots i_r} e_t$, ove con $A^{j_1 \dots j_s t}_{i_1 \dots i_r}$ si indicano funzioni, che sono differenziabili su U. Queste funzioni, al variare della carta (U,ϕ), determinano univocamente un campo tensoriale differenziabile su M di specie $(s+1,r)$, che si indica ancora con A.

Si noti che in tal modo l' $\mathscr{F}(M)$-modulo dei B-omomorfismi di $T^r_s(M)$ in $T(M)$ risulta isomorfo all' $\mathscr{F}(M)$-modulo dei campi tensoriali differenziabili su M di specie $(s+1,r)$, $\mathfrak{T}^{r+1}_s(M)$.

Siano (U,ϕ) una carta di M e $H \in \mathfrak{T}^r_s(M)$. Con le notazioni precedenti, posto:

$$H_{/U} = H^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} e^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} \quad ,$$

si ha:

$$A \circ H_{/U} = H^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} A \circ e^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} = H^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} A^{j_1 \dots j_s t}_{i_1 \dots i_r} e_t = \mathscr{C}(H \boxtimes A)_{/U} \quad ,$$

ove $\mathscr{C}(H \boxtimes A)$ è il campo vettoriale contratto del campo tensoriale differenziabile su M di specie $(r+s+1,r+s)$ $H \boxtimes A$ ottenuto saturando ordinatamente gli r indici di controvarianza di H con gli r indici di covarianza di A e i primi s indici di controvarianza di A con gli s indici di covarianza di H.

Pertanto una pseudoconnessione (A,∇) di $T^r_s(M)$ è una coppia costituita da un campo tensoriale differenziabile su M di specie $(s+1,r)$ e da un $\mathscr{F}(M)$-omomorfismo $\nabla : H \to \nabla_H$ di $\mathfrak{T}^r_s(M)$ nell' $\mathscr{F}(M)$-modulo degli R-endomorfismi di $\mathfrak{T}^r_s(M)$ tali che

$$\forall f \in \mathscr{F}(M),\ \forall H,\ K \in \mathfrak{T}^r_s(M)\ :\ \nabla_H fK = f\nabla_H K + (\mathscr{C}(H \otimes A))(f)K.$$

Altri esempi di pseudoconnessioni di spazi fibrati vettoriali si possono avere considerando il fibrato vettoriale di base M dei vettori osculatori di ordine $\leq$ r (con r fissato).

BIBLIOGRAFIA

[1] C. DI COMITE: *Pseudoconnessioni lineari su una varietà differenziabile di classe* C^{∞}, Annali di Matematica, serie IV, Tomo LXXXIII (1969).

[2] PHAM MAU QUAN: *Introduction à la géométrie des variétés différentiables*, Dunod, Paris (1969).

Lavoro pervenuto alla Redazione il 15 Giugno 1982
ed accettato per la pubblicazione il 17 Gennaio 1983
su parere favorevole di G.B.Rizza e P.Mastrogiacomo