Note di Matematica Vol.III, 307-320 (1983)

SUI (k,n;f)-ARCHI DI TIPO (1,n) DI UN PIANO PROIETTIVO FINITO (*)

Grazia RAGUSO - Luigia RELLA (**)

Summary. *In this paper* (k,n;f)-*arcs of type* (1,n) *in a finite projective plane are investigated and some of them are characterized.*

INTRODUZIONE. La nozione di insieme con punti dotati di peso di uno spazio proiettivo di dimensione $t \geq 2$ e ordine q è stata introdotta per t = 2 nel 1970 da M. Tallini Scafati, [12], e ripresa da A. Barlotti nel 1972, [2]. Per t=2 tali insiemi sono anche chiamati archi con punti dotati di peso. Lo studio di tali archi è stato proseguito da M.Barnabei [3] e da E. D'Agostini [5], [6], [7]. Quest'ultima ha ottenuto alcuni risultati sui (k,n;f)-archi di tipo (0,n) dando successivamente, una caratterizzazione delle (k,n;f)-calotte di tipo (n-2,n).

Dopo aver richiamato, nel paragrafo 1, le nozioni fondamentali, nel paragrafo 2 della presente Nota si studiano gli archi con peso

---

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Dipartimento di Matematica - Via Nicolai,2 - Università -BARI-

di tipo $(1,n)$ determinando una condizione, sul peso totale del piano, necessaria per la loro esistenza. Infine, nel paragrafo 3, si danno caratterizzazioni di particolari $(k,n;f)$-archi di tipo $(1,n)$.

1. ALCUNI RICHIAMI DI CARATTERE GENERALE.

Sia π un piano proiettivo di ordine q e si denotino con $\mathcal{P}$ ed $\mathcal{R}$, rispettivamente, l'insieme dei punti e delle rette di π. Supposta assegnata una funzione f di π nell'insieme N dei numeri interi non negativi, si dice peso del punto $P \in \mathcal{P}$ il valore $f(P)$ e supporto di f l'insieme dei punti del piano di peso non nullo.

A partire da f si può considerare la funzione $F : \mathcal{R} \to N$ tale che, per ogni $r \in \mathcal{R}$,

$$F(r) = \sum_{P \in r} f(P);$$

$F(r)$ si dice peso della retta r.

Definizione 1. Si dice $(k,n;f)$-arco del piano π un sottoinsieme K di punti del piano tale che:

i) K è il supporto di f,
ii) $k = |K|$,
iii) $n = \max\{F(r) : r \in \mathcal{R}\}$.

Si osservi che un $\{k,n\}$-arco K è un $(k,n;f)$-arco se si sceglie la funzione f definita da

$$f(P)= \begin{cases} 0 & \text{se} \quad P \notin K \\ 1 & \text{se} \quad P \in K. \end{cases}$$

Nel seguito, per escludere casi banali, si assumerà $n \geq 2$ e $1 < k < q^2 + q + 1$. E' noto [5] che, in tal caso, se $\omega = \max f$ allora $\omega \leq n-1$ e che se si pone

$$\ell_i = |f^{-1}(i)| \qquad \text{per } i = 0,1,\dots,\omega$$

e

$$w = \sum_{P \in \mathscr{P}} f(P) \qquad \text{(peso totale del piano)},$$

si ha

$$(1.1) \qquad w = \sum_{i=1}^{\omega} i\, \ell_i \qquad k = \sum_{i=1}^{\omega} \ell_i \;.$$

Definizione 2. Un (k,n;f)-arco si dice monoidale se $\mathrm{Im}\, f = \{0,1,\omega\}$ e $\ell_\omega = 1$.

Si denoti con t_i $(i=0,1,\dots,n)$ il numero delle rette di peso i. Gli interi t_i si dicono caratteri del (k,n;f)-arco.

Definizione 3. Un (k,n;f)-arco si dice di tipo $(n_1, n_2, \dots, n_h = n)$ con $n_i < n_j$, per $i < j$, se $\mathrm{Im}\, F = \{n_1, n_2, \dots, n_h\}$.

D'ora in poi si studieranno (k,n;f)-archi di tipo (1,n).

Da alcuni risultati di E. D'Agostini ([5],[6],[7]) si ottengono le seguenti proprietà per i (k,n;f)-archi di tipo (1,n):

a) $\mathrm{Im}\, f \subseteq \{0,1,\omega\}$;

b) se P è un qualunque punto del piano,

$$\sum_{r \in [P]} F(r) = w + q\, f(P),$$

ove $[P]$ denota l'insieme delle rette per P;

c) per il peso w di un $(k,n;f)$-arco risulta:

$$q + 1 \leq w \leq (n-\omega)(q+1)+\omega=(n-\omega)q+n;$$

d) indicati con v_1^s e v_n^s rispettivamente il numero delle rette di peso 1 e di peso n passanti per un punto di peso s, risulta:

$$v_1^s = \frac{q(n-s)-w+n}{n-1} \quad ,$$

$$v_n^s = \frac{q(s-1)+w-1}{n-1} \quad ;$$

e) condizione necessaria per l'esistenza di un $(k,n;f)$-arco di tipo $(1,n)$ è che sia

$$q \equiv 0 \mod (n-1);$$

f) i caratteri di un $(k,n;f)$-arco di tipo $(1,n)$ sono dati da

$$t_1 = \frac{q+1}{n-1} \left(n \frac{q^2+q+1}{q+1} - w\right),$$

$$t_n = \frac{q+1}{n-1} \left(w - \frac{q^2+q+1}{q+1}\right),$$

g) il peso w del piano deve essere radice della seguente equazione di secondo grado

$$(1.2) \quad w^2-w\,[n(q+1)+1]+n(q^2+q+1)+q\omega(\omega-1)\,\ell'_\omega = 0 \ .$$

Infine si può verificare, con semplici considerazioni, che $|\mathrm{Im}\, f| \geq 2$, $\ell_0 > 0$, $\ell_1 > 0$ e quindi dalla a) segue che $\mathrm{Im}\, f=\{0,1\}$ oppure $\mathrm{Im}\, f = \{0,1,\omega\}$, $\omega \geq 2$.

2. PROPRIETA' DEI (k,n;f)-ARCHI DI TIPO (1,n).

Se K è un $(k,n;f)$-arco di tipo $(1,n)$ in un piano proiettivo π di ordine q, con $\mathrm{Im}\, f = \{0,1\}$, è immediato che K è un ordinario $\{k,n\}$-arco di tipo $(1,n)$. Tali archi sono stati studiati da Tallini Scafati [10], [11]. In particolare, per $q = n-1$ K è una retta e per $q = (n-1)^2$ K è un arco hermitiano oppure un subpiano di π di ordine $n-1$.

Sia, ora, K un $(k,n;f)$-arco di π di tipo $(1,n)$ con $\mathrm{Im}\, f=\{0,1,\omega\}$ ed $\omega \geq 2$.

PROPOSIZIONE 1. *Condizione necessaria perché esista, in un piano proiettivo* π *di ordine* q, *un* $(k,n;f)$*-arco di tipo* $(1,n)$ *con* $\omega \geq 2$ *è che il peso totale del piano sia* $w = (n-\omega)q+n$.

Poiché per un punto di peso ω passano tutte rette di peso n, essendo K di tipo $(1,n)$, ne segue che $v_n^{\omega} = q+1$ e quindi l'asserto, tenuto conto di d).

Si vogliono, ora, determinare delle relazioni tra n,q e ω che consentano la costruzione di $(k,n;f)$-archi di tipo $(1,n)$.

Per la Proposizione 1 occorre mettersi nella ipotesi $w=(n-\omega)q+n$ con $2 \leq \omega \leq n-1$. In tal caso si ottiene

$$v_1^0 = \frac{q\omega}{n-1} \quad , \quad v_n^0 = q - \frac{q\omega}{n-1} + 1$$

$$(2.1) \qquad v_1^1 = \frac{q(\omega-1)}{n-1}\ , \quad v_n^1 = \frac{q(n-\omega)}{n-1} + 1, \quad v_n^\omega = q+1,$$

$$t_1 = \frac{q}{n-1}\,(q\omega+\ \omega - n),\ \ t_n = \frac{q}{n-1}\,|(n-\omega-1)(q+1)+n|\ +1\ .$$

Si osservi che i precedenti parametri sono interi per ogni valore di q,n e ω , poiché per la e) $(n-1)|q$.

Per calcolare, inoltre, i parametri ℓ_1 ed ℓ_ω, si osservi che, poiché il peso totale w del piano è soluzione dell'equazione (1.2), si ha:

$$[(n-\omega)q+n]^2 - [(n-\omega)q+n][n(q+1)+1] + n(q^2+q+1)+q\omega(\omega-1)\ell_\omega = 0$$

da cui

$$(2.2) \qquad \ell_\omega = \frac{q(n\,\omega - n - \omega^2) + \omega(n-1)}{\omega(\omega-1)}\ .$$

Dalla (1.1) segue allora

$$\ell_1 = (n-\omega)\ q + n - \omega\ \ell_\omega$$

e quindi

$$(2.3) \qquad \ell_1 = \frac{q\omega - n+1}{\omega-1} + 1.$$

Si osservi che ℓ_1 ed ℓ_ω per definizione, sono interi. Pertanto dalle espressioni ottenute per essi si possono trarre nuove condizioni di divisibilità.

PROPOSIZIONE 2. *Condizione necessaria perché esista, in un piano proiettivo* π *di ordine* q , *un* (k,n;f)*-arco di tipo* (1,n) *con* $\omega \geq 2$ *è che* $\omega | nq$ *e* $(\omega-1) | (q-n+1)$.

Da (2.2) segue che $\omega | nq$, mentre da (2.3) si deduce che

$(\omega-1) | (\omega q-n+1)$ e quindi $(\omega-1) | (q-n+1)$. Onde l'asserto.

Si osservi che le condizioni di divisibilità della Proposizione 2 non sempre danno, per ℓ_ω , un'epressione intera. Per esempio,per $\omega = 2$, poiché:

$$(2.4) \qquad \ell_1 = 2q - n + 2, \qquad \ell_2 = \frac{q(n-4)+2(n-1)}{2} ,$$

la condizione $2 | nq$ dà ℓ_2 intero, mentre, per $\omega = 3$, essendo:

$$\ell_1 = \frac{3(q+1)-n}{2} , \qquad \ell_3 = \frac{q(2n-9) + 3(n-1)}{6}$$

le condizioni $3 | nq$ e $2 | (q-n+1)$ non rendono intera l'espressione di ℓ_3 se q ed n sono entrambi pari.

3. CARATTERIZZAZIONI DI ALCUNI (k,n;f)-ARCHI DI TIPO (1,n).

PROPOSIZIONE 3. *In un piano proiettivo* π *di ordine* q , *dispari, i* (k,n;f)*-archi di tipo* (1,n) *con* $n = q+1$ *e* $\omega = 2$ *sono tutti e soli quelli che hanno come punti di peso* 1 *i punti di un'ovale* $\mathscr{C}$ *e come punti di peso* ω *i punti interni a* $\mathscr{C}$.

Sia K un (k,n;f)-arco di tipo (1,n) con $n = q+1$ e $\omega = 2$.

Dalle (2.1), (2.2) e (2.3) si ha

$$v_1^o = 2,\ v_n^o = q-1,\quad v_1^1 = 1,\quad v_n^1 = q\quad v_n^2 = q+1,$$

(3.1)
$$\ell_1 = q+1,\quad \ell_2 = \frac{q(q-1)}{2},\quad \ell_o = \frac{q(q+1)}{2}\ ,$$

$$t_1 = q+1,\qquad t_n = q^2.$$

Fissato un qualsiasi punto P di peso 1, per esso passa un'unica retta di peso 1. Ognuna delle rimanenti q rette per P deve avere peso n. Ma da $n = q+1$ e q dispari segue n pari. Allora ognuna di queste q rette contiene almeno un altro punto di peso 1. Poiché si sono individuati così $q+1$ punti di peso 1 ed $\ell_1 = q+1$ ciascuna delle q rette per P contiene un unico punto di peso 1. Allora, per la genericità di P, i $q+1$ punti di peso 1, sono a tre a tre non allineati e formano un'ovale $\mathscr{C}$ di π .

Una retta di peso n o non contiene punti di peso 1 oppure ne contiene due, per cui le tangenti a $\mathscr{C}$ sono le $q+1$ rette di peso 1.

Due rette tangenti a $\mathscr{C}$ si incontrano necessariamente in un punto di peso 0, quindi i punti di peso 0, che sono in numero di $\frac{q(q+1)}{2}$, sono i punti esterni a $\mathscr{C}$. Segue che i rimanenti punti del piano, quelli interni alla $\mathscr{C}$, sono quelli di peso due.

Infine, sia K un (k,n,f) arco avente come punti di peso 1 quelli di un'ovale $\mathscr{C}$ e come punti di peso ω quelli interni a $\mathscr{C}$.

Da (2.3) ponendo $\ell_1 = q+1$ segue che $n=q+1$. Sostituendo poi nella (2.2) si ha

$$\ell_\omega = \frac{q(n-\omega)}{q-n+1-\omega} .$$

Poiché, per ipotesi, $\ell_\omega = \frac{q(q-1)}{2}$, risulta $\omega = n-q+1$, e quindi $\omega = 2$. Si verifica immediatamente che K è di tipo (1,n).

PROPOSIZIONE 4. *In un piano proiettivo* π *di ordine* $q(\neq 2)$, *pari, i* (k,n;f)*-archi di tipo* (1,n) *con* $n = q+1$ *e* $\omega = 2$ *sono tutti e soli quelli che hanno come punti di peso* 1 *i punti di una retta* r *e come punti di peso* ω *i punti di un* $\{\frac{q(q-1)}{2}, \frac{q}{2}\}$*-arco di tipo* $(0, \frac{q}{2})$.

Sia K un (k,n;f)-arco di tipo (1,n) con $n = q+1$ e $\omega = 2$. Dalle (2.1), (2.2) e (2.3) si ottengono, come nella Proposizione 2 le (3.1).

Se P è un qualsiasi punto di peso 2, tutte le rette per esso hanno peso n. Da $n = q+1$, q pari, segue n dispari. Allora ognuna delle q+1 rette contiene almeno un punto di peso 1. Poiché si sono individuati tutti i q+1 punti di peso 1, ogni retta per P contiene un unico punto di peso 1.

La retta r congiungente due punti di peso 1 ha peso n e non contiene punti di peso 2 per quanto detto prima. Pertanto i punti di peso 1 sono tutti e soli quelli della retta r.

Inoltre su ciascuna delle q+1 rette per P ci sono $\frac{q}{2}$ punti di peso 2.

Le rette del piano rispetto ai punti di peso 2 si suddividono nel seguente modo:

q^2-1 rette di peso n che contengono, ciascuna q/2 punti di peso 2,
1 retta di peso n che non contiene punti di peso 2,
q+1 rette di peso 1 che non contengono punti di peso 2.

Pertanto i punti di peso 2 costituiscono un $\{\frac{q(q-1)}{2}, \frac{q}{2}\}$-arco di tipo $(0,\frac{q}{2})$.

Infine, sia K un (k,n;f)-arco avente come punti di peso 1 quelli di una retta r e come punti di peso ω quelli di un $\{\frac{q(q-1)}{2}, \frac{q}{2}\}$-arco di tipo $(0, \frac{q}{2})$. Procedendo come nella dimostrazione della Proposizione 2 si ha:

$$n = q + 1 \qquad \omega = 2$$

e quindi K è di tipo (1,n).

COROLLARIO 1. *Esistono* $(k,2^h+1;f)$-*archi,* $h \geq 2$ *di tipo* $(1,2^h+1)$ *con* $\omega = 2$ *in un piano di Galois, di ordine* 2^h, $S_{2,2^h}$.

Per h = 2 siffatti archi sono costituiti dai punti di un'ovale e dai punti di una retta esterna ad essa.

Per h > 2 l'asserto segue dalla Proposizione 3 e dalla esistenza degli archi di Cossu-Denniston (cfr. paragrafo 2 Propp. IV e V di [4] [8]).

PROPOSIZIONE 5. *In un piano proiettivo* π *di ordine* q, *i* (k,4;f)-*archi di tipo* (1,4) *con* $\omega = 2$ *sono tutti e soli quelli che hanno* *come punti di peso* 1 *i punti di un* $\{2(q-1),4\}$*-arco di tipo* (0,1,2,4) *avente tre rette* 0*-secanti e* 3(q-1) *rette* 2*-secanti e come punti di peso* ω *i punti di intersezione delle* 0*-secanti.*

Sia K un (k,4;f)-arco di tipo (1,4) con $\omega = 2$. Dalle (2.4) si ha $\ell_2 = 3$, $\ell_1 = 2(q-1)$ e dalle (2.1)

$$v_1^o = \frac{2q}{3}\ ,\ v_4^o = \frac{q+3}{3}\ ,\ v_1^1 = \frac{q}{3}\ ,\ v_4^1 = \frac{2q+3}{3}$$

$$v_4^2 = q+1\ ,\ t_1 = \frac{2q(q-1)}{3}\ ,\quad t_4 = \frac{q^2+5q+3}{3}\ .$$

I tre punti di peso 2 non sono, ovviamente, allineati.

Sia P un punto di peso 2, per esso passano due rette di peso 4 con due punti di peso 2 e q-1 rette di peso 4 con un solo punto di peso 2.

Sia K^* l'insieme dei punti di peso 1. Una retta del piano di peso 4 con due punti di peso 2 non ha punti di K^*, una retta di peso 4 con un sol punto di peso 2 ha due punti di K^* e una di peso 4 che non contenga punti di peso 2 ha quattro punti di K^*, una retta di peso 1 ha un solo punto di K^*.

Quindi le rette del piano, rispetto a K^*, sono o 0-secanti o 1-secanti o 2-secanti oppure 4-secanti.

Pertanto, K^* risulta un $\{2(q-1),4\}$-arco di tipo (0,1,2,4), avente tre 0-secanti. Poiché per ciascun punto di peso 2 passano q-1 rette 2-secanti il numero totale delle 2-secanti è 3(q-1).

Infine sia K un (k,4;f)-arco avente come punti di peso 1 i pun ti di un $\{2(q-1),4\}$-arco K^* di tipo $(0,1,2,4)$ con tre rette 0-secanti e $3(q-1)$ rette 2-secanti e come punti di peso ω i punti di intersezione delle 0-secanti.

Sia P un punto di peso ω. Le tre 0-secanti non formano fascio essendo $\omega \leq 3$ e tutte le rette per P di peso 4. Pertanto $\ell_\omega = 3$ e quindi $\omega = 2$. Per ciascun punto di peso 2 passano, allora, due 0-secanti e $q-1$ rette 2-secanti. Allora le rimanenti rette del piano sono necessariamente 1-secanti e 4-secanti K^* e quindi di peso 1 e 4 rispettivamente. Pertanto, K è di tipo $(1,4)$.

PROPOSIZIONE 6. *Tutti e soli i* $(k,n;f)$-*archi di* π *di tipo* $(1,n)$ *con* $\omega = n-1$, $n \geq 3$ *sono i* $(k,n;f)$-*archi monoidali aventi come punti di peso* 1 *quelli di una retta.*

Sia K un $(k,n;f)$-arco di tipo $(1,n)$ con $\omega = n-1$ ed $n \geq 3$. Da (2.2), poiché $\omega = n-1$ si ha:

$$\ell_{n-1} = \frac{(n-1)^2 - q}{(n-1)(n-2)} .$$

Poiché $\ell_{n-1} \geq 1$ risulta $q \leq n-1$ e per la e) $q = n-1$. Sicché $\ell_{n-1} = 1$ e dalla (2.3) $\ell_1 = q+1$.

I $q+1$ punti di peso 1 sono allineati. Infatti, essendo $v_n^1 = 2$, per ogni punto P di peso 1 passano due rette di peso n, di cui una contiene necessariamente l'unico punto di peso $n-1$ e l'altra deve contenere $n-1 = q$ punti di peso 1 distinti da P.

Infine un $(k,n;f)$-arco monoidale, con $\omega = n-1$ avente come punti di peso 1 i punti di una retta è ovviamente un $(k,n;f)$-arco di tipo

(1,n).

PROPOSIZIONE 7. *Non esistono, in* π *di ordine* $q(\neq 2)$, $(k,3;f)$-*archi di tipo* (1.3).

L'asserto segue banalmente dal fatto che per $n = 3$ e $q \neq 2$ è $\ell_2 \leq 0$.

Lavoro pervenuto alla Redazione il 7 Ottobre 1983
ed accettato per la pubblicazione il 30 Maggio 1984
su parere favorevole di M. Biliotti e di G. Tallini

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BARLOTTI: "*Sui {k,n}-archi di un piano lineare finito*", Boll. U.M.I. (3), II, (1956), 553-556.

[2] A. BARLOTTI: "*Recent results in Galois geometries useful in coding theory*", Colloques Internationaux du C.N.R.s.n. 276,Théorie de l'Information Cachan, 4-8 July 1977, éditions du C.N.R.S. (1978) 185-187.

[3] M.BARNABEI:" *On arcs with weighted points*", Journal of statistical planning and inference, 3(1979), 279-286.

[4] A. COSSU: "*Su alcune proprietà di {k,n}-archi di un piano proiettivo sopra un corpo finito*", "Rend. di Mat." (5),20,(1961), 271-277.

[5] E. D'AGOSTINI: "*Alcune osservazioni sui (k,n;f)-archi di un piano finito*", Atti dell'Accademia delle Scienze di Bologna, Rendiconti, Serie XIII, 6(1979), 211-218.

[6] E. D'AGOSTINI: "*On caps with weighted points in* PG(t,q), Discrete Math. 34 (1981), 103-110.

[7] E. D'AGOSTINI: "*Sulla caratterizzazione delle* (k,n;f)-*calotte di tipo* (n-2,n)", Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, XXIX,(1980), 263-275.

[8] R.H.F. DENNISTON: "*Some maximal arcs in finite projective planes*", Journal of Combinatorial theory 6(1969), 317-319.

[9] B. SEGRE: "*Lectures on modern geometry*", Cremonese, Roma (1961).

[10] M. TALLINI SCAFATI: "*Sui {k,n}-archi di un piano grafico finito*", Rend. Acc. Naz.Lincei, Vol. XL (1966), 373-378.

[11] M. TALLINI SCAFATI: " *{k,n}-archi di un piano grafico finito, con particolare riguardo a quelli a due caratteri*", Rend.Acc. Naz. Lincei, (8), 40 (1966); Nota I, 812-818; Nota II 1020-1025.

[12] M. TALLINI SCAFATI: "*Graphic curves on a Galois plane*", Atti Conv. Geom. Comb. e sue Appl., Perugia 11-17 sett. 1970 (Oderisi, Gubbio 1971), 395-401.