Note di Matematica Vol. III, 213-227 (1983)

RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE DELLA SOLUZIONE DI UN SISTEMA DEL SECONDO ORDINE DI TIPO IPERBOLICO IN DUE VARIABILI INDIPENDENTI

Gaetano CARADONNA (*)

Summary. *We establish an integral representation for the solution of a hyperbolic sistem of the second order.*

In [4] ho stabilito un teorema di esistenza per un problema al contorno relativo ad un sistema di equazioni non lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo iperbolico della forma

$$A_x A_y u = f \ ,$$

essendo A_t l'operatore differenziale relativo alle condizioni di Cauchy-Riemann. A tal fine ho utilizzato i risultati contenuti nei lavori [1], [2] e [3] di A.Avantaggiati.

In questa nota utilizzo i risultati stabiliti per tale problema, relativamente al prodotto cartesiano di due cerchi SxS e limitatamente ad equazioni lineari per ottenere una formula di rappresentazione come nel titolo. Si tratta del problema in cui i coefficienti dei dati al contorno $d_i^{(k)}$ sono definiti localmente sulla frontiera di S (cfr. 1.c.) ed in corrispondenza dei quali si ha esistenza ed unicità .

(*) Dipartimento di Matematica - Università degli Studi - BARI.

Ho voluto esplicitare la formula di rappresentazione in quanto mi pare interessante trattandosi di un sistema iperbolico, ma anche perché nel caso semplicemente ellittico e omogeneo (cfr. § 2) tale formula richiama in un certo qual modo l'integrale di Poisson.

Nel n. 1 viene formulato il problema, nel n. 3 si dimostra per esso un teorema di esistenza, mentre nel n. 4 si determina la già citata rappresentazione integrale della soluzione. Il n. 2 è dedicato ad esprimere in forma particolare la rappresentazione integrale della soluzione di un problema al contorno per i sistemi ellittici del primo ordine di cui ho già parlato; tale rappresentazione è alla base di tutti i risultati stabiliti in questo lavoro.

1. Indicato con S il cerchio di R^2 avente il centro coincidente con l'origine di un sistema di assi cartesiani ed il raggio uguale ad 1, detta C la sua circonferenza, siano D_1 e D_2 le due semicirconferenze di C aventi per estremi i punti P_1 e P_2 per i quali $n_1=0$ e rispettivamente $n_2 = \mp 1$, essendo n_1 ed n_2 i coseni direttori della retta normale a C in un suo punto qualsiasi orientata verso il suo interno.

Indicato con Θ l'angolo che il semiasse positivo delle ascisse forma con la normale esterna a C nel punto ξ, si ha

$$n_1(\xi) = - \cos\Theta \ , \quad n_2(\xi) = - \operatorname{sen}\Theta \ .$$

In base ai risultati di [4] (cfr. § 1), ponendo rispettivamente su D_1 e D_2

$$d_1^{(1)}(\xi) = \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}, \ d_2^{(1)}(\xi) = - \cos \frac{\theta}{2}; \ d_1^{(2)}(\xi) = \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}, \ d_2^{(2)}(\xi) = - \cos \frac{\theta}{2} \ ,$$

si verifica su D_k

$$n_1(d_1^{(k)^2} - d_2^{(k)^2}) + 2\, n_2 d_1^{(k)}\, d_2^{(k)} = 1, \qquad k = 1,2;$$

consideriamo quindi il problema

$$(1.1)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1} - \dfrac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_2}\right)u_1(x,y) + \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_1}\right)u_2(x,y) = f_1(x,y) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (x,y) \in \overset{\circ}{S} \times \overset{\circ}{S} \\ -\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_1}\right)u_1(x,y) + \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1} - \dfrac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_2}\right)u_2(x,y) = f_2(x,y) \\ d_1^{(k)}(\xi)\left(\dfrac{\partial}{\partial y_1} u_1 + \dfrac{\partial}{\partial y_2} u_2\right)(\xi,y) + d_2^{(k)}(\xi)\left(-\dfrac{\partial}{\partial y_2} u_1 + \dfrac{\partial}{\partial y_1} u_2\right)(\xi,y) = g^{(k)}(\xi,y) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (\xi,u) \in D_k \times \overset{\circ}{S} \\ d_1^{(k)}(\eta)u_1(x,\eta) + d_2^{(k)}(\eta)u_2(x,\eta) = h^{(k)}(x,\eta) \qquad (x,\eta) \in S \times D_k,\ k=1,2 \end{cases}$$

essendo $f = (f_1, f_2)$ una coppia di funzioni definite in $S \times S$ limitate e di classe $C^{(1)}$, $g^{(k)}$ $[h^{(k)}]$ una funzione definita in $D_k \times \overset{\circ}{S}$ $[S \times D_k]$ di classe $C^{(1)}$ tale che in P_1, P_2 risulta

$$(1.2)\qquad g^{(1)} = \pm\, g^{(2)} \quad [h^{(1)} = \pm\, h^{(2)}],$$

assumendo il segno $-$ $[+]$ in P_1 $[P_2]$ [1]

---

[1] Osserviamo (cfr. § 1 di [4]) che in P_1 e P_2 si ha $d_r^{(1)} = \pm d_r^{(2)}$ $(r = 1,2)$, scegliendo il segno così come per le $g^{(k)}$ ed $h^{(k)}$.

Diremo soluzione del problema (1.1) una coppia $u = (u_1, u_2)$ di funzioni definite in $S \times S$, di classe $C^{(2)}(\overset{\circ}{S} \times \overset{\circ}{S})$ e tale che u_1, u_2, $\frac{\partial}{\partial y_1} u_1 + \frac{\partial}{\partial y_2} u_2$ e $- \frac{\partial}{\partial y_2} u_1 + \frac{\partial}{\partial y_1} u_2$ sono hölderiane rispetto ad $x[y]$ uniformemtne rispetto ad y $[x]$.

2. Essendo per ogni coppia di funzioni $s = (s_1, s_2)$

$$A_t s = \left(\frac{\partial}{\partial t_1} s_1 + \frac{\partial}{\partial t_2} s_2 \, , \, \frac{-\partial}{\partial t_2} s_1 + \frac{\partial}{\partial t_1} s_2 \right),$$

consideriamo il problema

$$(2.1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t_1} s_1(t) + \dfrac{\partial}{\partial t_2} s_2(t) = F_1(t) & \\ & t \in \overset{\circ}{S} \\ \dfrac{\partial}{\partial t_2} s_1(t) - \dfrac{\partial}{\partial t_1} s_2(t) = - F_2(t) & \\ d_1^{(k)}(\xi) s_1(\xi) + d_2^{(k)}(\xi) s_2(\xi) = G^{(k)}(\xi), \ \xi \in D_k, & k = 1,2 \end{cases}$$

con $F_r \in C^{(0,\alpha)}(S)$, $G^{(k)} \in C^{(0,\alpha)}(D_k)$ e tale che in P_1 e P_2 :

$G^{(1)} = \pm G^{(2)}$, con la scelta del segno fatta come per le funzioni $g^{(k)}$ ed $h^{(k)}$.

L'equazione secolare associata alla forma quadratica relativa al sistema formato dalle prime due equazioni di (2.1), che indicheremo (2.1'), ammette solo le radici semplici $\rho_1 = 1$ e $\rho_1' = -1$ (cfr. § 1 di [4]). E' perciò soddisfatta l'ipotesi I_6 contenuta nel

§ 6 di [1] e quindi il problema (2.1) ammette, in virtù del teorema (7.4) del lavoro ora citato, una ed una sola soluzione di classe $C^{(0,\alpha)}(S) \cap C^{(1)}(\mathring{S})$. Tale soluzione è rappresentata mediante le formule (5.5) in esso contenute, che in questo caso si scrivono

$$s_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{d\log r(\theta,t)}{dl_1}\,\phi^{(1)}(\theta)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \frac{d\log r(\theta,t)}{dl_1}\phi^{(2)}(\theta)d\theta$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_S \left[-\frac{\partial\log|z-t|}{\partial z_1}F_1(z) + \frac{\partial\log|z-t|}{\partial z_2}F_2(z)\right]dz$$

$$s_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{d\log r(\theta,t)}{dl_2}\,\phi^{(1)}(\theta)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \frac{d\log r(\theta,t)}{dl_2}\phi^{(2)}(\theta)d\theta$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_S \left[-\frac{\partial\log|z-t|}{\partial z_2}F_1(z) - \frac{\partial\log|z-t|}{\partial z_1}F_2(z)\right]dz$$

essendo $v = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, $r(\theta,t) = |v-t|$, $l_1\,[l_2]$ la retta orientata di coseni direttori $(-\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2})$ $[(-\cos\frac{\theta}{2}, -\operatorname{sen}\frac{\theta}{2})]$ e

$$M(z-t) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial z_1} & -\frac{\partial}{\partial z_2} \\ -\frac{\partial}{\partial z_2} & \frac{\partial}{\partial z_1} \end{pmatrix} \log|z-t|$$

una matrice fondamentale del sistema (2.1')[(2)]. Basta infatti osservare che

$$\sum_{s=1}^{2} M_{1s}(\nu-t)d_s^{(q)}(\nu) = -\left(\frac{\partial\log|z-t|}{\partial z_1}\right)_{z=\nu}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + \left(\frac{\partial\log|z-t|}{\partial z_2}\right)_{z=\nu}\cos\frac{\theta}{2}$$

(2) Cfr. [4],§2, [2] e [3].

$$= \frac{d \log r(\theta,t)}{dl_1}$$

$$\sum_{s=1}^{2} M_{2s}(\nu-t)d_s^{(q)}(\nu) = -\left(\frac{\partial \log|z-t|}{\partial z_2}\right)_{z=\nu} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} - \left(\frac{\partial \log|z-t|}{\partial z_1}\right)_{z=\nu} \cos\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{d \log r(\theta,t)}{dl_2}$$

e che $(\phi^{(1)},\phi^{(2)})$ è l'unica soluzione del sistema (7.3) di [1] data da

$$(2.2)\quad \phi^{(q)}(\theta) = G^{(q)}(\theta) - \frac{1}{\pi}\int_S \left[\frac{d \log r(\theta,z)}{dl_1}F_1(z) - \frac{d \log r(\theta,z)}{dl_2}F_2(z)\right]dz$$

in quanto si dimostra facilmente che

$$\sum_{r,s}^{2} M_{rs}(\nu-\xi)d_r^{(q)}(\nu)d_s^{(k)}(\xi) = 0, \qquad q,k = 1,2.$$

OSSERVAZIONE. Gli integrali a secondo membro della (2.2), come le $G^{(q)}$, si raccordano secondo la (1.2) nei punti P_1 e P_2; ciò segue dal valore dei coseni direttori delle rette l_1 ed l_2.

La formula (2.2) si deduce dai teoremi di traccia dei potenziali curvilinei tenendo presente quanto dimostrato in [1].

Alla soluzione del problema (2.1) può darsi quindi la seguente rappresentazione

$$S_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{d \log r(\theta,t)}{dl_1} G^{(1)}(\theta)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \frac{d \log r(\theta,t)}{dl_1} G^{(2)}(\theta)d\theta$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_S \{[\frac{\partial \log|z-t|}{\partial z_1} - H_{11}(t,z)]F_1(z)-[\frac{\partial \log|z-t|}{\partial z_2} - H_{12}(t,z)]F_2(z)\}dz$$

$$S_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{d \log r(\theta,t)}{dl_2} G^{(1)}(\theta)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \frac{d \log r(\theta,t)}{dl_2} G^{(2)}(\theta)d\theta$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_S \{[\frac{\partial \log|z-t|}{\partial z_2} - H_{21}(t,z)]F_1(z)-[-\frac{\partial \log|z-t|}{\partial z_1} - H_{22}(t,z)]F_2(z)\}dz$$

essendo, $i,j = 1,2$

$$H_{ij}(t,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} \frac{d \log r(\theta,t)}{dl_i} \quad \frac{d \log r(\theta,z)}{dl_j} d\theta .$$

3. Considerate le funzioni

$$(3.1)\quad u_1(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{d \log r(\theta,y)}{dl_1} h^{(1)}(x,\theta)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \frac{d \log r(\theta,y)}{dl_1} h^{(2)}(x,\theta)d\theta$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_S \{[\frac{\partial \log|z-y|}{\partial z_1} - H_{11}(y,z)]v_1(x,z) - [\frac{\partial \log|z-y|}{\partial z_2} - H_{12}(y,z)]v_2(x,z)\}dz$$

$$(3.2)\quad u_2(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{d \log r(\theta,y)}{dl_2} h^{(1)}(x,\theta)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \frac{d \log r(\theta,y)}{dl_2} h^{(2)}(x,\theta)d\theta$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_S \{[\frac{\partial \log|z-y|}{\partial z_2} - H_{21}(y,z)]v_1(x,z) - [-\frac{\partial \log|z-y|}{\partial z_1} - H_{22}(y,z)]v_2(x,z)\}dz$$

$$(3.3)\quad v_1(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{d\log r(\theta,x)}{dl_1} g^{(1)}(\theta,y)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \frac{d\log r(\theta,x)}{dl_1} g^{(2)}(\theta,y)d\theta$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_S \{[\frac{\partial \log|\zeta-x|}{\partial\zeta_1} - H_{11}(x,\zeta)]f_1(\zeta,y) - [\frac{\partial\log|\zeta-x|}{\partial\zeta_2} - H_{12}(x,\zeta)]f_2(\zeta,y)\}d\zeta$$

$$(3.4)\quad v_2(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{d\log r(\theta,x)}{dl_2} g^{(1)}(\theta,y)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \frac{d\log r(\theta,x)}{dl_2} g^{(2)}(\theta,y)d\theta$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_S \{[\frac{\partial\log|\zeta-x|}{\partial\zeta_2} - H_{21}(x,\zeta)]f_1(\zeta,y) - [-\frac{\partial\log|\zeta-x|}{\partial\zeta_1} - H_{22}(x,\zeta)]f_2(\zeta,y)\}\, d\zeta$$

e rilevato che sono funzioni continue in $S \times S$, α-hölderiane rispetto ad $x[y]$ uniformente rispetto ad $y[x]$ [3], dimostriamo il

TEOREMA - *Se* (u_1,u_2) *è una soluzione del problema* (1.1), *essa si può rappresentare mediante le* (3.1),(3.2), *con le funzioni* v_1 *e* v_2 *date dalle* (3.3),3.4); *viceversa la coppia* (u_1,u_2) *data dalle* (3.1), (3.2) *è una soluzione per il problema* (1.1) *allorché* v_1 *e* v_2 *sono date dalle* (3.3),(3.4).

Posto

$$(3.5)\qquad A_y u(x,y) = v(x,y) \qquad (x,y)\quad S \times \mathring{S},$$

(3) Cfr. L'osservazione del § 3 di [4].

dove u è una soluzione del problema (1.1), si ha

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y_1} u_1(x,y) + \dfrac{\partial}{\partial y_2} u_2(x,y) = v_1(x,y) & \\ & (x,y) \in S \times \overset{\circ}{S} \\ \dfrac{\partial}{\partial y_2} u_1(x,y) - \dfrac{\partial}{\partial y_1} u_2(x,y) = -v_2(x,y) & \\ d_1^{(k)}(\eta)u_1(x,\eta)+d_2^{(k)}(\eta)u_2(x,\eta)=h^{(k)}(x,\eta), & (x,\eta) \in S \times D_k \\ & k = 1,2 \end{cases}$$

e quindi, per quanto stabilito nel paragrafo precedente, sono verificate le (3.1), (3.2).

In virtù della (3.5) e delle (1.1) risulta

$$A_x v(x,y) = A_x A_y u(x,y) = (f_1(x,y),f_2(x,y)), \qquad (x,y) \in \overset{\circ}{S} \times \overset{\circ}{S}$$

e quindi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_1} v_1(x,y) + \dfrac{\partial}{\partial x_2} v_2(x,y) = f_1(x,y) & \\ & (x,y) \in \overset{\circ}{S} \times \overset{\circ}{S} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} v_1(x,y) - \dfrac{\partial}{\partial x_1} v_2(x,y) = -f_2(x,y) & \\ d_1^{(k)}(\xi)v_1(\xi,v)+d_2^{(k)}(\xi)v_2(\xi,y) = g^{(k)}(\xi,y), & (\xi,y) \in D_k \times S \\ & k = 1,2. \end{cases}$$

Sono perciò verificate anche le (3.3), (3.4).

Viceversa, indicate con u^* e v^* le coppie date rispettivamente dalle (3.1), (3.2) e dalle (3.3), (3.4), si ha per le proprietà dei potenziali di dominio e di doppio strato

$$(3.6)\qquad \begin{cases} A_y u^*(x,y) = v^*(x,y) & (x,y) \in S \times \overset{\circ}{S} \\ d_1^{(k)}(\eta)u_1^*(x,\eta)+d_2^{(k)}(\eta)u_2^*(x,\eta) = h^{(k)}(x,\eta), & (x,\eta) \in S \times D_k \end{cases}$$

$$k = 1,2$$

$$(3.7)\qquad \begin{cases} A_x v^*(x,y) = f(x,y) & (x,y) \in \overset{\circ}{S} \times S \\ d_1^{(k)}(\xi)v_1^*(\xi,y) + d_2^{(k)}(\xi)v_2^*(\xi,y) = g^{(k)}(\xi,y), & (\xi,y) \in D_k \times \overset{\circ}{S} \end{cases}$$

$$k = 1,2$$

da cui segue

$$A_x A_y u^*(x,y) = A_x v^*(x,y) = f(x,y) \qquad (x,y) \in \overset{\circ}{S} \times \overset{\circ}{S} .$$

Per la prima di (3.6) e per la seconda di (3.7), risulta infine

$$d_1^{(k)}(\xi)\left(\frac{\partial}{\partial y_1}u_1^* + \frac{\partial}{\partial y_2}u_2^*\right)(\xi,y)+d_2^{(k)}(\xi)\left(-\frac{\partial}{\partial y_2}u_1^* + \frac{\partial}{\partial y_1}u_2^*\right)(\xi,y)$$

$$= g^{(k)}(\xi,y),(\xi,y) \in D_k \times \overset{\circ}{S}, \quad k=1,2.$$

4. Sostituendo nelle (3.1), (3.2) le v_i date dalle (3.3),(3.4), si ha

$$(4.1)\quad u_1(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{d\ \log\ r(\theta,y)}{dl_1} h^{(1)}(x,\theta)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \frac{d\ \log\ r(\theta,y)}{dl_1} h^{(2)}(x,\theta)d\theta$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_S \sum_{t=1}^{2} (-1)^t \left[\frac{\partial \log|z-y|}{\partial z_t} - H_{1t}(y,z)\right]\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{d\log r(\theta,x)}{dl_t} g^{(1)}(\theta,z)d\theta +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \frac{d\log r(\theta,x)}{dl_t} g^{(2)}(\theta,z)d\theta\right\}dz - \frac{1}{2\pi}\int_S \sum_{t=1}^{2} (-1)^t \left[\frac{\partial \log|z-y|}{\partial z_t} + \right.$$

$$\left. - H_{1t}(y,z)\right] \left\{ + \frac{1}{2\pi}\int_S \left[\left(\frac{\partial \log|\zeta-x|}{\partial \zeta_t} - H_{t1}(x,\zeta)\right)f_1(\zeta,z) - \left(\frac{\partial \log|\zeta-x|}{\partial \zeta_{t+1}}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - H_{t2}(x,\zeta)\right)f_2(\zeta,z)\right]d\zeta\right\}dz$$

$$(4.2)\quad u_2(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{d\log r(\theta,y)}{dl_2} h^{(1)}(x,\theta)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \frac{d\log r(\theta,y)}{dl_2} h^{(2)}(x,\theta)d\theta$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_S \sum_{t=1}^{2} (-1)^t \left[\frac{\partial \log|z-t|}{\partial z_{t+1}} + H_{2t}(y,z)\right]\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{d\log r(\theta,x)}{dl_t} g^{(1)}(\theta,z)d\theta +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \frac{d\log r(\theta,x)}{dl_t} g^{(2)}(\theta,z)d\theta\right\}dz - \frac{1}{2\pi}\int_S \sum_{t=1}^{2} (-1)^t \left[\frac{\partial \log|z-t|}{\partial z_{t+1}} + \right.$$

$$\left. - H_{2t}(y,z)\right] \left(+ \frac{1}{2\pi}\int_S \left[\left(\frac{\partial \log|\zeta-x|}{\partial \zeta_t} - H_{t1}(x,\zeta)\right)f_1(\zeta,z) - \left(\frac{\partial \log|\zeta-x|}{\partial \zeta_{t+1}}\right.\right.\right.$$

$$- H_{t2}(x,\zeta))f_2(\zeta,z)] \; d\zeta\}dz$$

essendo per convenzione $\quad \frac{\partial}{\partial z_3} = - \frac{\partial}{\partial z_1}, \; \frac{\partial}{\partial \zeta_3} = - \frac{\partial}{\partial \zeta_1}$.

Al fine di verificare che le (4.1), (4.2) forniscono una rappresentazione integrale della soluzione del problema (1.1) si osserva che risulta $\forall y \in \overset{\circ}{S}$

$$(4.3) \qquad \frac{\partial}{\partial y_1} u_1(x,y) + \frac{\partial}{\partial y_2} u_2(x,y) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{d\log r(\theta,x)}{dl_1} g^{(1)}(\theta,y)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \frac{d\log r(\theta,x)}{dl_1} g^{(2)}(\theta,y)d\theta$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_S \{[- \frac{\partial \log|\zeta-x|}{\partial \zeta_1} + H_{11}(x,\zeta)] \; f_1(\zeta,y) + [\frac{\partial \log|\zeta-x|}{\partial \zeta_2} +$$

$$- H_{12}(x,\zeta)] \; f_2(\zeta,y)\} \; d\zeta$$

$$(4.4) \qquad \frac{\partial}{\partial y_2} u_1(x,y) - \frac{\partial}{\partial y_1} u_2(x,y) =$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{d\log r(\theta,x)}{dl_2} g^{(1)}(\theta,y)d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \frac{d\log r(\theta,x)}{dl_2} g^{(2)}(\theta,y)d\theta$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_S \{[- \frac{\partial \log|\zeta-x|}{\partial \zeta_2} + H_{21}(x,\zeta)]f_1(\zeta,y) + [- \frac{\partial \log|\zeta-x|}{\partial \zeta_1} - H_{22}(x,\zeta)]f_2(\zeta,y)\}d\zeta$$

e perciò, essendo per i = 1,2

$$(4.5)\quad \frac{1}{2\pi}\int_S [H_{i1}(x,\zeta)f_1(\zeta,y)-H_{i2}(x,\zeta)f_2(\zeta,y)]\,d\zeta$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi}\frac{d\log r(\theta,x)}{dl_i}\{\frac{1}{\pi}\int_S[-\frac{d\log r(\theta,\zeta)}{dl_1}f_1(\zeta,y)+\frac{d\log r(\theta,\zeta)}{dl_2}f_2(\zeta,y)]d\zeta\}d\theta,$$

si ha, $\forall(x,y)\in\overset{\circ}{S}\times\overset{\circ}{S}$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}[-\frac{\partial}{\partial y_1}u_1(x,y)+\frac{\partial}{\partial y_2}u_2(x,y)]+\frac{\partial}{\partial x_2}[-\frac{\partial}{\partial y_2}u_1(x,y)+\frac{\partial}{\partial y_1}u_2(x,y)]=f_1(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}[-\frac{\partial}{\partial y_1}u_1(x,y)+\frac{\partial}{\partial y_2}u_2(x,y)]-\frac{\partial}{\partial x_1}[-\frac{\partial}{\partial y_2}u_1(x,y)+\frac{\partial}{\partial y_1}u_2(x,y)]=-f_2(x,y);$$

inoltre dalle (4.3), (4.4) segue, tenuto conto delle (4.5)

$$d_1^{(k)}(\xi)(\frac{\partial}{\partial y_1}u_1+\frac{\partial}{\partial y_2}u_2)(\xi,y)+d_2^{(k)}(\xi)(-\frac{\partial}{\partial y_2}u_1+\frac{\partial}{\partial y_1}u_2)(\xi,y)=g^{(k)}(\xi,y)$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_S[\frac{d\log r(\theta,\zeta)}{dl_1}f_1(\zeta,y)-\frac{d\log r(\theta,\zeta)}{dl_2}f_2(\zeta,y)]d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_S[\frac{d\log r(\theta,y)}{dl_1}f_1(\zeta,y)$$

$$-\frac{d\log r(\theta,y)}{dl_2}f_2(\zeta,y)]d\zeta=g^{(k)}(\xi,y),\quad(\xi,y)\in D_k\times\overset{\circ}{S}(k=1,2);$$

infine dalle (4.1),(4.2) consegue, in forza delle (4.3),(4.4) nonché dalle (4.5),

$$d_1^{(k)}(\eta)u_1(x,\eta)+d_2^{(k)}(\eta)u_2(x,\eta)=h^{(k)}(x,\eta)$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_S\{\frac{d\log r(\theta,z)}{dl_1}[\frac{\partial}{\partial z_1}u_1(x,z)+\frac{\partial}{\partial z_2}u_2(x,z)]-\frac{d\log r(\theta,z)}{dl_2}[-\frac{\partial}{\partial z_2}u_1(x,z)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z_1}u_2(x,z)]\}dz-\frac{1}{\pi}\int_S\{\frac{d\log r(\theta,z)}{dl_1}[\frac{\partial}{\partial z_1}u_1(x,z)+\frac{\partial}{\partial z_2}u_2(x,y-$$

$$-\frac{d\log r(\theta,z)}{dl_2}[-\frac{\partial}{\partial z_2}u_1(x,z)+\frac{\partial}{\partial z_1}u_2(x,z)]\}\ dz$$

$$=h^{(k)}(x,\eta),\ (x,\eta)\in S\times D_k\qquad (k=1,2).$$

BIBLIOGRAFIA

[1] A. AVANTAGGIATI: "*Problemi al contorno per i sistemi ellittici simmetrici di equazioni lineari alle derivate parziali del primo ordine a coefficienti costanti in* m($\geq$3) *variabili indipendenti*". Annali di Mat. pura ed applicata, (VI), vol. LXI (1963), 193-258.

[2] A. AVANTAGGIATI: "*Sulla matrice fondamentale per i sistemi ellittici del prim'ordine a coefficienti costanti in due variabili indipendenti*". Boll. U.M.I., (3), vol. 18(1963),185-196.

[3] A. AVANTAGGIATI: "*Sui sistemi ellittici del primo ordine a coefficienti costanti, in due variabili indipendenti*". Rend. Acc. Naz. dei Lincei, vol. XXXIV(1963).

[4] G. CARADONNA: "*Sui sistemi di equazioni non lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo iperbolico, in due variabili indipendenti*". In corso di stampa.

Lavoro pervenuto alla Redazione il 21 Maggio 1983
ed accettato per la pubblicazione il 27 Febbraio 1984
su parere favorevole di G. Trombetti e M.Troisi