Note di Matematica Vol. III, 173-181 (1983)

# OSSERVAZIONI SULLA CARATTERISTICA DI EULERO-POINCARE' DI VARIETA' RIEMANNIANE CONFORMEMENTE PIATTE DI DIMENSIONE SEI (*)

Domenico PERRONE (**)

§1. INTRODUZIONE. *Il teorema (generalizzato) di Gauss-Bonnet mette in relazione la curvatura di una varietà Riemanniana compatta orientatabile 2n-dimensionale* M *con un importante invariante topologico di* M *cioè la caratteristica di Eulero-Poincaré* $\chi(M)$. *In particolare se* M *è una varietà Riemanniana compatta, di dimensione* 4 *, di Einstein, dalla formula di Gauss-Bonnet segue (cfr.* [1]*):*

$$192\pi^2\chi(M) \geq \tau^2 \ \mathrm{vol}(M)$$

*dove il segno di uguaglianza si ha se, e solo se,* M *è a curvatura sezionale costante.*

*Scopo di questa breve nota è stimare la caratteristica di Eulero-Poincaré* $\chi(M)$ *di una varietà Riemanniana compatta, orientabile, 6-dimensionale, conformemente piatta e con curvatura scalare costante, in termini di curvatura e del volume* vol(M) *di* M .

*Con* $R, \rho, \tau$ *e* $v_g$ *indicheremo rispettivamente il tensore di curvatura, il tensore di Ricci, la curvatura scalare e la misura canonica di* M. *I risultati che si ottengono sono i seguenti.*

---

(*) Lavoro eseguito nell'ambito di un progetto nazionale di ricerca finanziato dal M.P.I.

(**) Dipartimento di Matematica - Università degli Studi - Lecce

TEOREMA 1. *Sia* M *una varietà Riemanniana compatta, orientabile 6-dimensionale, conformemente piatta e con curvatura scalare costante* $\tau$. *Allora vale:*

$$384\,\pi^3\,\chi(M) + \frac{4}{5}\,\tau \int_M |\rho|^2\, v_g \le \frac{4}{25}\,\tau^3\,\mathrm{vol}(M)$$

*dove il segno di uguaglianza si ha se, e solo se,* M *è localmente simmetrica.*

TEOREMA 2. *Sia* M *una varietà Riemanniana compatta, orientabile, 6-dimensionale, conformemente piatta e con curvatura scalare costante* $\tau$. *Allora*

A) *per* $\tau > 0$

$$14400\,\pi^3\,\chi(M) \le \tau^3\,\mathrm{vol}(M) \tag{1.1}$$

*dove il segno di uguaglianza si ha se, e solo se,* M *è a curvatura sezionale costante;*

B) *per* $\tau < 0$:

$$384\,\pi^3\,\chi(M) \le \frac{151}{600}\,\tau^3\,\mathrm{vol}(M) - \frac{27}{20}\,\tau \int_M |\rho|^2\, v_g \tag{1.2}$$

*dove il segno di uguaglianza si ha se, e solo se,* M *è a curvatura sezionale costante;*

C) *per* $\tau = 0$:

$$\chi(M) \le 0 \tag{1.3}$$

*dove il segno di uguaglianza si ha se, e solo se,* M *è*

(i) $\mathbb{R}^6/G$ *ove* $G$ *è un gruppo discontinuo di traslazioni dello spazio Euclideo* $\mathbb{R}^6$, *oppure*

(ii) $S^3(c) \times H^3(-c)/G'$ *ove* $G'$ *è un gruppo discontinuo di isometrie di* $S^3(c) \times H^3(-c)$.

Dalla C) del Teorema 2 segue poi il seguente corollario.

COROLLARIO. *Affinché una varietà compatta orientabile 6-dimensionale M si possa munire di una metrica conformemente piatta con curvatura scalare nulla, è necessario che la sua caratteristica di Eulero-Poincaré sia non positiva.*

Infine, nella sezione 4, si determinano le caratteristiche di Eulero-Poincaré degli spazi, di dimensione 6, compatti conformemente piatti e localmente simmetrici.

§2. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1. Per la dimostrazione dei teoremi 1 e 2 useremo la seguente espressione della formula di Gauss-Bonnet (cfr. [2],[5]):

$$(2.1) \qquad \chi(M) = \frac{1}{384\pi^3} \int_M \{\tau^3 - 12\tau|\rho|^2 + 3\tau|R|^2 + 16\check{\rho} + 24\alpha$$

$$- 24\beta - 8\gamma + 4\delta\} v_g$$

dove

$$\check{\rho} = \Sigma\, \rho_{ij}\rho_{ih}\rho_{jh} ,$$

$$\alpha = \Sigma\, \rho_{ij}\rho_{kh} R_{ikjh} , \qquad \beta = \Sigma\, \rho_{ij} R_{ipqr} R_{jpqr} ,$$

$$\gamma = \Sigma\, R_{ikjh} R_{kphq} R_{piqj} , \; \delta = \Sigma\, R_{ijkh} R_{khpq} R_{pqij}$$

e $|\cdot|$ indica la norma (le componenti dei tensori considerati sono riferite a una base ortonormale dello spazio tangente).

Siccome M è conformemente piatta, il tensore di curvatura è espresso mediante

$$R_{ijkh} = \frac{1}{4}(g_{ik}\rho_{jh} + g_{jh}\rho_{ik} - g_{ih}\rho_{jk} - g_{jk}\rho_{ih})$$

$$- \frac{\tau}{20}(g_{ik}\, g_{jh} - g_{ih}\, g_{jk})$$

da cui seguono le seguenti identità

$$3\tau\,|R|^2 = 3\tau|\rho|^2 - \frac{3}{10}\tau^3, \quad 24\alpha = \frac{66}{5}\tau|\rho|^2 - \frac{6}{5}\tau^3 - 12\check{\rho},$$

$$-24\beta = -\frac{21}{5}\tau|\rho|^2 + \frac{3}{5}\tau^3 - 6\check{\rho},$$

$$-8\gamma = -\frac{33}{20}\tau|\rho|^2 + \frac{17}{100}\tau^3 + \frac{5}{2}\check{\rho},$$

$$4\delta = \frac{3}{10}\tau|\rho|^2 - \frac{3}{50}\tau^3 + \check{\rho}.$$

Pertanto la (2.1) assume la seguente forma

$$\text{(2.2)} \qquad X(M) = \frac{1}{384\pi^3}\int_M \left(\frac{21}{100}\tau^3 - \frac{27}{20}\tau|\rho|^2 + \frac{3}{2}\check{\rho}\right) v_g .$$

Ora facendo uso delle seguenti formule (cfr. Lemma 2.2 e (3.6) di [4])

$$\Sigma(\nabla^2_{ij}\rho_{kh})\, R_{ikjh} = \frac{1}{2(n-1)}\, \Sigma\rho_{ki}\, \nabla^2_{ki}\tau$$

$$\frac{1}{2}\Delta(|R|^2) = -|\nabla R|^2 - 4\Sigma(\nabla^2_{ij}\rho_{kh})R_{ikjh} - 2\beta + 4\gamma + \delta$$

dove $\nabla$ denota la connessione Riemanniana, per varietà conformemente piatte con curvatura scalare costante $\tau$ e di dimensione 6, otteniamo

$$(2.3) \qquad \frac{3}{2}\int_M \check{\rho}\, v_g = -\int_M |\nabla R|^2 v_g - \frac{1}{20}\tau^3 \,\mathrm{vol}(M) + \frac{11}{20}\tau\int_M |\rho|^2 v_g .$$

Eliminando $\check{\rho}$ tra la (2.2) e la (2.3), abbiamo

$$(2.4) \qquad 384\pi^3\chi(M) + \frac{4}{5}\tau\int_M |\rho|^2 v_g = \frac{4}{25}\tau^3 \,\mathrm{vol}(M) - \int_M |\nabla R|^2 v_g$$

$$\leq \frac{4}{25}\tau^3 \,\mathrm{vol}(M).$$

da cui segue il teorema 1.

§3. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2. Consideriamo su M il tensore $E = (E_{ij})$ definito da $E_{ij} = \rho_{ij} - \frac{\tau}{6} g_{ij}$ [1], allora $|E|^2 = |\rho|^2 - \frac{\tau^2}{6} \geq 0$, e di conseguenza la (2.4) diventa

$$384\pi^3\chi(M) \leq \frac{2}{75}\tau^3 \,\mathrm{vol}(M) - \frac{4}{5}\tau\int_M |E|^2 v_g .$$

Quindi per $\tau > 0$:

$$384\pi^3\chi(M) \leq \frac{2}{75}\tau^3 \,\mathrm{vol}(M)$$

dove il segno di uguaglianza vale se, e solo se, $|E|^2 = 0$.

Ciò prova l'asserto A).

---

[1] Il tensore E si annulla se, e solo se, M è uno spazio di Einstein.

Per $\tau < 0$, dalla (2.3) segue

$$(3.1)\qquad \frac{3}{2}\int_M \check{\rho}\, v_g \leq \frac{1}{24}\, \tau^3\, \mathrm{vol}(M) + \frac{11}{20}\,\tau \int_M |E|^2\, v_g$$

$$\leq \frac{1}{24}\, \tau^3\, \mathrm{vol}(M).$$

Sostituendo la (3.1) nella (2.2) otteniamo

$$384\pi^3\, \chi(M) \leq \frac{151}{600}\, \tau^3\, \mathrm{vol}(M) - \frac{27}{20}\, \tau \int_M |\rho|^2\, v_g$$

dove il segno di uguaglianza vale se, e solo se, $|E|^2 = 0$. Ciò prova l'asserto B).

Per $\tau = 0$, dalla (2.2) e dalla (2.3) segue

$$384\, \pi^3\, \chi(M) = -\int_M |\nabla R|^2\, v_g \leq 0.$$

Quindi se vale $\chi(M) = 0$, allora $M$ è localmente simmetrica.

Pertanto dal teorema di classificazione di M. Kurita [3] abbiamo che M è localmente uno dei seguenti spazi:

$$(3.2)\qquad \mathbb{R}^6,\ S^6(c),\ H^6(-c),\ \mathbb{R}\times S^5(c),\ \mathbb{R}\times H^5(-c),\ S^2(c)\times H^4(-c),$$
$$S^4(c)\times H^2(-c),\ S^3(c)\times H^3(-c),$$

dove $\mathbb{R}^n$ denota l'n-spazio Euclideo, $S^n(c)$ l'n-sfera Euclidea con curvatura sezionale costante $c > 0$ e $H^n(-c)$ l'n-spazio iperbolico con curvatura sezionale costante $-c < 0$.

Il teorema di Kurita e $\tau = 0$ completano la dimostrazione del-l'asserto C).

§4. ESEMPI. Se M è una varietà Riemanniana compatta, orientabile, 6-dimensionale, conformemente piatta e localmente simmetrica, come già osservato, M è localmente uno degli spazi indicati nella (3.2). Di conseguenza M è uno dei seguenti spazi quozienti:

$$M_1 = \frac{\mathbb{R}\times S^5(c)}{G_1}, \quad M_2 = \frac{\mathbb{R}\times H^5(-c)}{G_2}, \quad M_3 = \frac{S^2(c)\times H^4(-c)}{G_3},$$

$$M_4 = \frac{S^3(c)\times H^3(-c)}{G_4}, \quad M_5 = \frac{S^4(c)\times H^2(-c)}{G_5}$$

$M_6(\sigma)$ = spazio a curvatura sezionale costante $\sigma$,

dove $G_1$, $G_2$, $G_3$, $G_4$ e $G_5$ sono dei gruppi discontinui di isometrie rispettivamente di $\mathbb{R}\times S^5(c)$, $\mathbb{R}\times H^5(-c)$, $S^2(c)\times H^4(-c)$, $S^3(c)\times H^3(-c)$ e $S^4(c)\times H^2(-c)$.

In questa sezione determiniamo quindi la caratteristica di Eulero-Poincaré di $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$, $M_5$ e $M_6(\sigma)$.

Usando l'espressione (2.2) dalla formula di Gauss-Bonnet, facili calcoli mostrano quanto segue:

1) Per $M_1$ si ha $\tau = 20c$, $|\rho|^2 = 80c^2$, $\check{\rho} = 320c^3$ e quindi $\chi(M_1)=0$.

2) Per $M_2$ si ha $\tau = -20c$, $|\rho|^2 = 80c^2$, $\check{\rho} = -320c^3$ e quindi $\chi(M_2)=0$.

3) Per $M_3$ si ha $\tau = -10c$, $|\rho|^2 = 38c^2$, $\check{\rho} = -106c^3$ e quindi $\chi(M_3) = (3/8\pi^3)c^3 \operatorname{vol}(M_3)$.

4) Per $M_4$ si ha $\tau = 0$, $|\rho|^2 = 24c^2, \check{\rho} = 0$ e quindi $\chi(M_4) = 0$.

5) Per $M_5$ si ha $\tau = 10c, |\rho|^2 = 38c^2$, $\check{\rho} = 106c^3$ e quindi
$\chi(M_5) = -(3/8\pi^3)c^3 \operatorname{vol}(M_5)$.

6) Per $M_6(\sigma)$ si ha $\tau = 30\sigma$ , $|\rho|^2 = 150\sigma^2$, $\check{\rho} = 750\sigma^3$ e quindi
$\chi(M_6) = (15/8\,\pi^3)\sigma^3 \operatorname{vol}(M_6)$.

I casi 1), 2), 3), 4), 5) e 6) sono casi estremali nel Teorema 1

Il caso 6) con $\sigma > 0$ è caso estremale in A) del Teorema 2.

Il caso 6) con $\sigma < 0$ è caso estremale in B) del Teorema 2.

Il caso 4) e il caso 6) con $\sigma = 0$ sono casi estremali in C) del Teorema 2.

BIBLIOGRAFIA

[1] R.L.BISHOP - S.I.GOLDBERG: "*Some implications of the generalized Gauss-Bonnet theorem*", Trans. Amer. Math. Soc., 112(1964), 508-535.

[2] J.C.DESSERTINE: "*Expressions nouvelles de la formula de Gauss-Bonnet en dimensions* 4 e 6",C.R.Acad.Sc. Paris, t.273(1971), 164-167.

[3] M.KURITA: "*On the holonomy group of the conformally flat Riemannian manifold*", Nagoya Math. J. 9(1955), 161-171.

[4] D.PERRONE: "*Varietà conformemente piatte e geometria spettrale*", Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 317-330.

[5] T.SAKAI: "*On the eigen-values of Laplacian and curvature of Riemannian manifold*", Tôhoku Math. J. 23 (1971), 589-603.

*Lavoro pervenuto alla Redazione il 23 Febbraio 1983*
*ed accettato per la pubblicazione il 12 Novembre 1983*
*su parere favorevole di A. Gray e di F. Tricerri*