Note di Matematica Vol. III, 55-82 (1983)

SU UN PROBLEMA DI BUMCROT

Angela FARINOLA - Margherita LEUCI(*) (**)

Summary. *In* [1] (p. 123) *Bumcrot proposed the problem of finding, in* PG(2,q) *complete arcs* A, *other than ovals, which satisfy the following hypothesis:*

(*) *every point not belonging to* A *is on at least three secants to* A.

In our paper, this problem is solved showing that PG(2,16) *has a* 12-*arc satisfying* (*).

INTRODUZIONE. In un suo lavoro di rassegna, [1], R. Bumcrot proponeva il problema di determinare in un piano proiettivo k-archi completi, diversi dalle ovali, tali che

(*) *per ogni punto non appartenente all'arco passino almeno tre secanti allo stesso arco.*

L'interesse per questo problema è determinato dal fatto che a partire da un tale k-arco si può costruire un piano iperbolico finito

---

(*) Istituto di Geometria, Università degli Studi - Bari.

(**) Le autrici desiderano ringraziare il Prof. Korchmàros per le discussioni avute con lui sull'argomento del presente lavoro.

$H(k)$. Esso ha per punti le rette tangenti ed esterne al k-arco e per rette i punti del piano non appartenenti al k-arco, (cfr. [1] Prop. 7).

In questo lavoro diamo un primo esempio di k-arco, che non sia una ovale, verificante la proprietà (*).

Si tratta di un 12-arco completo del piano desarguesiano $PG(2,16)$ che si ottiene come segue:

Sia Ω una ovale (18-arco) non regolare di $PG(2,16)$ (cfr. [2] [3]). Il gruppo G delle collineazioni che trasformano Ω in sè contiene un sottogruppo L che agisce su Ω secondo due orbite, A e B, ciascuna di lunghezza nove e trasforma in sè un sottopiano proiettivo di ordine 4 di $PG(2,16)$. Inoltre in L esistono nove elazioni involutorie la cui configurazione dei centri nel sottopiano $PG(2,4)$ ha la struttura di piano affine di ordine 3.

In questa Nota si dimostra che in $PG(2,4)$ vi è una terna di punti non allineati, P_1,P_2,P_3 e diversi dai suddetti centri, tale che $A \cup \{P_1,P_2,P_3\}$ risulta un arco completo verificante la proprietà (*).

La dimostrazione utilizza alcuni risultati sulla struttura e l'azione di G esposti in [3].

1. Consideriamo, com'è lecito, $GF(16)$ come l'estensione algebrica di quarto grado ottenuta mediante l'aggiunzione dell'elemento d, radice dell'equazione $x = x^4+1$, irriducibile su $GF(2)$. Pertanto gli elementi di $GF(16)$ sono:

$$0,1,d,d^2,d^3,\ d^4 = d+1,\ d^5 = d^2+d,\ d^6 = d^3+d^2,\ d^7 = d^3+d+1,$$

$d^8 = d^2+1$, $d^9 = d^3+d$, $d^{10} = d^2+d+1$, $d^{11} = d^3+d^2+d$, $d^{12} = d^3+d^2+$ $+ d+1$, $d^{13} = d^3 + d^2+1$, $d^{14} = d^3+1$.

E' facile verificare che $GF(4) = \{0,1,d^5,d^{10}\}$ è un sottocampo di $GF(16)$.

Fissato in $PG(2,16)$ un opportuno riferimento, i punti dell'ovale non regolare Ω sono (cfr. [3],[2])

$A_0(d^3,d,1)$, $A_1(d^{13},d^9,1)$, $A_2(d^9,d^5,1)$, $A_3(d^{13},d^{11},1)$, $A_4(d^5,d^2,1)$,

$A_5(d^9,d^2,1)$, $A_6(d^4,d,1)$, $A_7(d^4,d^9,1)$, $A_8(d^3,d^{11},1)$,

$B_0(d^{12},d^4,1)$, $B_1(d^7,d^6,1)$, $B_2(d^6,d^5,1)$, $B_3(d^7,d^{14},1)$, $B_4(d^5,d^8,1)$

$B_5(d^6,d^8,1)$, $B_6(d,d^4,1)$, $B_7(d,d^6,1)$, $B_8(d^{12},d^{14},1)$.

Indichiamo con A il 9-arco formato dai punti A_i, con B il 9-arco formato dai punti B_i.

Nel gruppo G delle collineazioni di $PG(2,16)$ che lasciano fissa Ω, distinguiamo con Korchmàros, [3], le nove elazioni involutorie di G la cui azione su Ω è espressa come segue

$$h_0:(A_0)(A_1\ A_5)(A_2\ A_6)(A_3\ A_7)(A_4\ A_8)(B_0)(B_1\ B_5)(B_2\ B_6)(B_3\ B_7)(B_4\ B_8)$$

$$h_1:(A_1)(A_0\ A_5)(A_2\ A_7)(A_3\ A_4)(A_6\ A_8)(B_1)(B_0\ B_5)(B_2\ B_7)(B_3\ B_4)(B_6,B_8)$$

$$h_2:(A_2)(A_0\ A_6)(A_1\ A_7)(A_3\ A_8)(A_4\ A_5)(B_2)(B_0\ B_6)(B_1\ B_7)(B_3\ B_8)(B_4\ B_5)$$

$$h_3:(A_3)(A_0\ A_7)(A_1\ A_4)(A_2\ A_8)(A_5\ A_6)(B_3)(B_0\ B_7)(B_1\ B_4)(B_2\ B_8)(B_5\ B_6)$$

(1.1) $h_4: (A_4)(A_0\ A_8)(A_1\ A_3)(A_2\ A_5)(A_6\ A_7)(B_4)(B_0\ B_8)(B_1\ B_3)(B_2\ B_5)(B_6\ B_7)$

$h_5: (A_5)(A_0\ A_1)(A_2\ A_4)(A_3\ A_6)(A_7\ A_8)(B_5)(B_0\ B_1)(B_2\ B_4)(B_3\ B_6)(B_7\ B_8)$

$h_6: (A_6)(A_0\ A_2)(A_1\ A_8)(A_3\ A_5)(A_4\ A_7)(B_6)(B_0\ B_2)(B_1\ B_8)(B_3\ B_5)(B_4\ B_7)$

$h_7: (A_7)(A_0\ A_3)(A_1\ A_2)(A_4\ A_6)(A_5\ A_8)(B_7)(B_0\ B_3)(B_1\ B_2)(B_4\ B_6)(B_5\ B_8)$

$h_8: (A_8)(A_0\ A_4)(A_1\ A_6)(A_2\ A_3)(A_5\ A_7)(B_8)(B_0\ B_4)(B_1\ B_6)(B_2\ B_3)(B_5\ B_7)$

Gli assi delle h_i sono le rette A_iB_i e i rispettivi centri sono i seguenti punti

$H_0(1,1,1)$, $H_1(d^{10},0,1)$, $H_2(1,0,0)$ $H_3(d^{10},d^{10},1)$, $H_4(0,1,0)$,

$H_5(d^5,1,0)$, $H_6(0,1,1)$, $H_7(0,0,1)$, $H_8(1,d^{10},1)$.

Detto H l'insieme dei centri H_i, H è contenuto nel sottopiano PG(2,4), di PG(2,16) associato al sottocampo GF(4), mentre i punti di Ω sono in PG(2,16)-PG(2,4).

Per le dimostrazioni delle proposizioni che seguono confronta [3] (Prop. 4 e Prop. 5).

PROPOSIZIONE 1.1. *Le seguenti terne non ordinate di elazioni*

$$\{h_0,h_1,h_5\}\ \{h_0,h_4,h_8\}\ \{h_1,h_6,h_8\}\ \{h_3,h_5,h_6\}\ \{h_0,h_2,h_6\}\ \{h_1,h_2,h_7\}$$

(1.2)

$$\{h_2,h_3,h_8\}\ \{h_4,h_6,h_7\}\ \{h_0,h_3,h_7\}\ \{h_1,h_3,h_4\}\ \{h_2,h_4,h_5\}\ \{h_5,h_7,h_8\}$$

godono delle seguenti proprietà:

a) *In ciascuna di essa due elazioni qualsiasi sono coniugate mediante la terza elazione.*

b) *I centri delle elazioni di ciascuna terna sono punti allineati del sottopiano* PG(2.4).

c) *Gli assi delle elazioni di ciascuna terna concorrono in un punto del sottopiano.*

Con calcoli diretti è possibile verificare che le uniche secanti ad H sono le trisecanti citate in c).

COROLLARIO 1.1. a) *Le rette di* PG(2,4) *sono le tracce degli assi e delle trisecanti ad* H.

b) *I punti di* PG(2,4) *sono i centri* H_i *e i punti in cui concorrono gli assi.*

Si ha inoltre che

COROLARIO 1.2. a) *Le rette del sottopiano* PG(2,4) *sono tali che per ogni punto* H_i $(i=0,\dots,8)$ *passano l'asse di* h_i *e quattro trisecanti ad* H.

b) *Per un punto di* PG(2,4)-H *passano tre assi e due trisecanti ad* H.

Infine si trova che

PROPOSIZIONE 1.2. *Le uniche rette di* PG(2,4) *che hanno intersezione non vuota con* Ω *sono gli assi delle elazioni* h_i.

PROPOSIZIONE 1.3. *Le elazioni* h_i *appartengono ad un sottogruppo* L *del gruppo delle collineazioni di* PG(2,16) *che lasciano fissa* Ω.

Tale sottogruppo ha le seguenti proprietà:

a) L *muta in sè* PG(2,4) *e, più precisamente, muta i punti di* H *in punti di* H *e i punti di* PG(2,4)-H *in punti di* PG(2,4)-H.

b) L *è un gruppo doppiamente transitivo sull'insieme* H.

c) L *agisce sulle rette di* PG(2,4) *mutando assi in assi e le rette trisecanti ad* H *in rette trisecanti ad* H. *Esso è doppiamente transitivo sull'insieme degli assi.*

2. PROPOSIZIONE 2.1. *Per ogni* P$\in$PG(2,4)-H *si ha che* A$\cup$\{P\} *è un arco.*

Dimostrazione. Essendo A contenuto in una ovale, esso è un arco. Basta pertanto verificare che per P non passano secanti ad A.

Per la (1.1) ciascuna secante A_iA_j $(0\leq i<j\leq 8)$ ad A è trasformata in sè da una unica elazione involutoria h_ℓ senza però esserne l'asse. Per la Prop. 1.2, A_iA_j ha un sol punto in comune con PG(2,4): il centro di h_ℓ. Ne segue che $A_iA_j\cap$PG(2,4)$\in H$.

PROPOSIZIONE 2.2. *Fissato* $P_1\in$PG(2,4)-H *è possibile determinare univocamente altri due punti,* P_2 *e* P_3, *di* PG(2,4)-H *in modo tale che* $\bar{A}$ = A $\cup\{P_1,P_2,P_3\}$ *sia un arco.*

Dimostrazione. Al fine di provare l'asserto si osserva che per il Cor. 1.2. si ha che nove degli undici punti di PG(2,4)-($H\cup\{P_1\}$) appartengono ai tre assi per P_1 e che i rimanenti punti, diciamoli P_2 e P_3, appartengono ciascuno ad una delle trisecanti ad H per P_1

Come nella Prop. 2.1 si ha che per un punto P_i non passa mai alcuna secante A_iA_j e per la Prop. 1.2 mai su P_iP_j vi è un punto di A. Da tutto ciò segue l'asserto.

Osservazione. Il ruolo di P_1 può essere svolto indifferentemente da P_2 o P_3. Poiché la retta P_2P_3 contiene i tre punti di H appartenenti agli assi per P_1, possiamo dire allora che, per ogni $i\in\{1,2,3\}$, i tre assi per P_i intersecano P_jP_k, $i\neq j,k$ nei tre punti di H.

PROPOSIZIONE 2.3. a) *Per ogni* $i\in\{0,1,\dots,8\}$ *l'elazione* h_i *muta in sè il triangolo di vertici* P_1,P_2,P_3.

b) *Se* H_i,H_j,H_k *sono allineati, comunque si consideri una permutazione* ℓ,m,n *della terna* i,j,k *si ha:* $h_\ell(H_m) = H_n$.

Dimostrazione. a) Tenendo conto della b) del Cor. 1.2 si ha che per ogni punto P_i passano tre assi delle elazioni h_i e quindi i nove assi di tali elazioni passano a tre a tre per i punti P_1,P_2,P_3 poiché un asse non contiene mai due punti P_i.

Per provare l'asserto basta allora verificare che ciascuna elazione h_i scambia tra loro i punti P_i,P_j per cui non passa il relativo asse.

Se supponiamo com'è lecito, che l'asse di h_i passi per P_1, si ha che $h_i(P_1) = P_1$ e che $H_i\in P_2P_3$, cioè che tale retta è unita in h_i. Per la a) della Prop. 1.3 inoltre, h_i muta in sè i punti di $PG(2,4)-H$ e pertanto $h_i(P_2) = P_3$ e $h_i(P_3) = P_2$, poiché P_2 e P_3 non appartengono all'asse di h_i.

b) Per la (1.2) si ha $h_\ell(H_m) = h_\ell h_m(H_m) = h_n h_\ell(H_m)$ e quindi $h_1(H_m)$ è un punto unito in h_n. Poiché h_n muta punti di H in punti di H e l'unico punto di H unito in h_n è H_n, si ottiene $h_\ell(H_m) = H_n$.

Dalla dimostrazione della a) della Prop. 2.3 si ha che ogni asse passa per uno dei punti P_1, P_2, P_3. Pertanto segue che

COROLLARIO 2.1. *Ogni asse di una elazione è una secante ad* $\bar{A}$.

Per dimostrare che $\bar{A}$ è un 12-arco completo premettiamo alcuni Lemma; prima però introduciamo la seguente notazione:

se α è una collineazione di PG(2,16) con $\langle\alpha\rangle$ indichiamo il gruppo delle collineazioni generato da α.

LEMMA 2.1. *Se* ℓ *è una retta di* PG(2,16) *trisecante ad* H *nei punti* H_i, H_j, H_k, $\langle h_i, h_j, h_k\rangle$ *agisce su* $\ell-(\ell\cap \mathrm{PG}(2,4))$ *secondo due orbite di punti. Inoltre i punti di una stessa orbita hanno lo stesso indice rispetto ad* A.

Dimostrazione. Poiché le h_i sono involutorie e per la a) della Prop. 1.1 si ottiene $\langle h_i, h_j, h_k\rangle = \{i, h_i, h_j, h_k, h_i o h_j, h_i, o h_k\}$.

Per la b) della Prop. 2.3 tale gruppo muta in sè l'insieme $\{H_i, H_j, H_k\}$ e pertanto lascia fissa la retta ℓ. Allora se L_1 e L_2 sono gli ulteriori punti di $\ell\cap \mathrm{PG}(2,4)$ distinti da H_i, H_j, H_k, si ha che

(2.1) i punti L_1 ed L_2 si scambiano nelle elazioni involutorie h_i, h_j, h_k. Facciamo vedere che $\langle h_i, h_j, h_k\rangle$ agisce su $\ell-(\ell\cap \mathrm{PG}(2,4))$

secondo due orbite di sei punti ciascuna.

Sia $P\in\ell-(\ell\cap PG(2,4))$. Proviamo innanzitutto che i trasformati di P mediante le collineazioni del gruppo $<h_i,h_j,h_k>$ sono a due a due distinti.

E' chiaro che $P\neq h_i(P)$, $h_j(P)$, $h_k(P)$, perché gli unici punti uniti di ℓ in tali elazioni sono i centri H_i,H_j,H_k. Con facili calcoli si vede che l'insieme dei trasformati di P si riduce all'insieme $\{P,h_i(P)\}$ se almeno due dei trasformati coincidono. Ciò implica che $h_i(P) = h_j(P) = h_k(P)$. Ma allora per la (2.1) si avrebbe, tenuto conto che le elazioni h_i sono omografie, che h_i,h_j,h_k coinciderebbero su ℓ, mentre la loro azione è diversa sull'insieme (H_i,H_j,H_k). L'orbita di P è quindi formata da sei punti distinti, da cui la prima parte della Proposizione.

Si ha poi che se P ha indice s rispetto ad A, cioé da P escono esattamente s secanti ad A, poiché $<h_i,h_j,h_k>$ muta A in sè ed inoltre non lascia fissa alcuna retta $A_\ell A_m$, tutti i punti dell'orbita di P hanno indice s rispetto ad A. Ciò conclude la dimostrazione del Lemma.

LEMMA 2.2. *Se* ℓ *ed* $\bar{\ell}$ *sono due rette di* PG(2,16) *trisecanti ad* H, *esiste una collineazione* $\alpha\in L$ *tale che* $\alpha(\ell) = \bar{\ell}$.
Inoltre $P\in$ *e* $\alpha(P)\in^{-}$ *hanno lo stesso indice rispetto ad* A.

Dimostrazione. Siano $\{H_i,H_j,H_k\} = \ell\cap H$ ed $\{\bar{H}_i,\bar{H}_j,\bar{H}_k\} = \bar{\ell}\cap H$. Poiché L è doppiamente transitivo su H, esiste una collineazione $\alpha\in L$ tale che $\alpha(H_i) = \bar{H}_i$ e $\alpha(H_j) = \bar{H}_j$. Pertanto $\alpha(\ell) = \bar{\ell}$.

Inoltre se P è un punto di ℓ di indice s rispetto ad A, (s è 0 se P è anche un punto di PG(2,4)-H, $\alpha(P)$ è un punto di $\bar{\ell}$ ancora di indice s rispetto ad A poiché $\alpha(A) = A$ e $\alpha(PG(2,4)) = PG(2,4)$.

LEMMA 2.3. *Per ogni punto di una trisecante ad H, non appartenente a* PG(2,4) *passano esattamente due secanti ad* A.

Dimostrazione. Per il Lemma 2.2. possiamo limitarci a considerare una particolare trisecante ℓ, ad esempio quella congiungente i punti H_0;H_2,H_6, la cui equazione è $y-z = 0$.

Con facili calcoli, si verifica poi, che il punto $P(d^3,1,1)$ di $\ell-(\ell \cap PG(2,4))$ ha indice 2 rispetto ad A, in quanto per esso passano solo le secanti A_0A_8 e A_4A_6. Allora per il Lemma 2.1 anche gli ulteriori cinque punti dell'orbita di P hanno indice 2 rispetto ad A. Pertanto le secanti ad A che incontrano ℓ nei punti di tale orbita sono dodici. Inoltre notiamo per le (1.1) i tre punti di $H \cap \ell$ hanno indice 4 rispetto ad A , mentre per la Prop. 1.1 i due punti di $(\ell \cap PG(2,4))-H$ hanno indice 0 rispetto ad A. Poiché le secanti ad A sono trentasei, da quanto detto segue che le rimanenti dodici secanti intersecano ℓ nei punti dell'altra orbita. Anzi, ancora per il Lemma 2.1, tali punti hanno indice 2 rispetto ad A.

TEOREMA 2.1. $\bar{A}$ *è un arco completo di* PG(2,16).

Dimostrazione. Dobbiamo provare che ogni punto di PG(2,16)-$\bar{A}$ appartiene ad almeno una secante ad $\bar{A}$. Tale asserto è verificato per costruzione dai punti di PG(2,4) (cfr. la b) del Cor.1.1 e il Cor. 2.1).

Consideriamo allora, un punto T di PG(2,16)-(PG(2,4) $\cup$ $\bar{A}$). T appartiene ad una retta ℓ del sottopiano PG(2,4) che, per la a) del Cor. 1.1, è un asse o una trisecante ad H. Il teorema è allora completamente dimostrato per il Cor. 2.1 e il Lemma 2.3.

3. In questo numero calcoliamo l'indice dei punti di PG(2,16)-$\bar{A}$ rispetto ad $\bar{A}$.

Ricordiamo che l'indice di un punto $P \notin \bar{A}$ (rispetto ad $\bar{A}$) è il numero delle secanti ad $\bar{A}$ per P. Ricordiamo poi che ogni punto di PG(2,16) appartiene ad una retta di PG(2,4) e quindi basta calcolare l'indice di un punto P qualora

(1) $P(\notin \bar{A})$ sia un qualsiasi punto degli assi,

(2) $P(\notin \bar{A})$ sia un qualsiasi punto delle rette P_iP_j $(1 \le i < j \le 3)$,

(3) $P(\notin \bar{A})$ sia un qualsiasi punto delle trisecanti ad H diverse dalle P_iP_j, visto che tali rette esauriscono l'insieme delle rette di PG(2,4).

PROPOSIZIONE 3.1. *Su ogni asse* A_iB_i *vi sono:*
otto punti che hanno indice 2, tre punti di indice 4 e cinque punti di indice 0, rispetto all'arco A.

Dimostrazione. Poiché L è un gruppo 2-transitivo sull'insieme degli assi e lascia fisso A, due assi qualsiasi presentano la medesima situazione relativa all'indice dei loro punti rispetto ad A. Pertanto possiamo limitare il calcolo degli indici ai punti dell'asse A_0B_0 di equazioni $x+d^{10}y+d^5z = 0$.

A tale scopo consideriamo la collineazione u di PG(2,16) di equazione

$$\begin{cases} \rho x' = d^{13}x^2 + d^8y^2 + d^8z^2 \\ \rho y' = d^{13}x^2 + d^3y^2 + d^3z^2 \\ \rho z' = d^3x^2 + d^8z^2 \end{cases}$$

Si verifica con calcoli laboriosi ma non difficili, che u trasforma Ω in sè operando su di essa come segue:

$$u : (A_0)(A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8)(B_0)(B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8)$$

A_0B_0 è allora una retta unita in u e il gruppo <u>, generato da u, muta A in sé.

Sempre con calcoli diretti si verifica che <u> opera sui punti di A_0B_0 secondo le seguenti orbite

(A_0) (B_0) $(T_1,u(T_1),u^2(T_1),u^3(T_1))$ $(T_2,u(T_2),u^2(T_2),u^3(T_2))(T_3,u(T_3))$ (D_1,D_2,D_3,D_4)

con $T_1(d^{14},d^2,1)$, $T_2(d^{11},d^8,1)$, $T_3(d^6,d^4,1)$ e $D_i\in A_0B_0 \cap(PG(2,4)-\{H_0\})$ per ogni $i\in\{1,2,3,4\}$.

Essendo $u(A) = A$, tutti i punti di una stessa orbita hanno lo stesso indice rispetto ad A. T_1 ha indice 2 poiché per esso passano solo le secanti A_1A_8,A_4A_5; T_3 ha indice 4 poiché per esso passano solo le secanti A_1A_4, A_2A_7,A_3A_6,A_5A_8. Inoltre, H_0 ha indice 4 per le (1.1) e per A_0 passano otto secanti perché $A_0 \in A$. Abbiamo così determinato l'incidenza della retta A_0B_0 con 28 delle 36 secanti ad A. Poiché infine, hanno indice 0 rispetto ad A sia i punti D_1,D_2,D_3,D_4 (cfr. Prop. 2.1), sia il punto B_0, in quanto $A\cup B=\Omega$ è un arco, segue che anche i punti della seconda orbita hanno indice 2 rispetto ad A.

Resta pertanto provato l'asserto.

Dalla Prop. 3.1 discende il

COROLLARIO 3.1. *L'indice rispetto ad A di un qualsiasi punto* $P(\notin A)$ *appartenente all'asse* A_1B_i *è un intero pari.*

Poiché l'asse A_iB_i è una secante ad $\bar{A}$ che contiene il punto A_i ed il punto P_j, uno dei punti P_1,P_2,P_3, si ha la seguente

PROPOSIZIONE 3.2. *L'indice rispetto ad* $\bar{A}$, *dei punti di* A_iB_i-$-\{A_i,P_j,H_i\}$ *è un intero dispari.*

Dimostrazione. Una secante ad $\bar{A}$ per un generico punto P di $A_iB_i-\{A_i,P_j,H_i\}$ è una secnate ad A oppure una retta congiungente un punto di A con un punto di $\{P_1,P_2,P_3\}$. Poiché la congiungente i due rimanenti punti di $\{P_1,P_2,P_3\}$ passa per H_i (cfr. b) della Prop. 2.3), per P passa certamente la secante A_iP_j.

Supponiamo che per P passi un'altra secante $A_\ell A_k$ con $\ell\neq i$, $k\neq j$. Allora per $P = h_i(P)$ passa anche la retta $h_i(A_\ell)h_i(P_k)$ e, poiché per la Prop. 2.3, $h_i(P_k) = P_r$ con $r\neq i,k$, tale retta è ancora una secante ad $\bar{A}$.

Tenendo conto, allora, della Prop. 3.1 segue l'asserto.

Osservazione 3.1. Per ogni $i\in\{0,1,\dots,8\}$ H_i ha indice 6 rispetto ad $\bar{A}$, in quanto ha indice 4 rispetto ad A e per esso passano le ulteriori secanti A_iP_j e P_kP_r con $i\neq r,k$.

PROPOSIZIONE 3.3. *Su ogni asse* A_iB_i *vi sono, rispetto ad* $\bar{A}$: *otto punti di indice* 3, *sei punti di indice* 5, *un punto,* H_i, *di indice* 6.

Dimostrazione. Consideriamo le seguenti equazioni diophantee

$$(3.1)\qquad \begin{cases} c_1 + c_3 + c_5 = 14 \\ \\ 2(5c_1 + 3c_3 + c_5) = 2\cdot 30 \end{cases}$$

ove, indicato con c_s il numero dei punti di $A_iB_i - \{A_i, P_j, H_i\}$ di indice s rispetto ad $\bar{A}$, la prima relazione esprime il numero dei punti di $A_iB_i - \{A_i, P_j, H_i\}$ mentre la seconda si ricava dalla relazione che esprime il numero delle tangenti uscenti dai punti di A_iB_i - $- \{A_i, P_j, H_i\}$.

Per la Prop. 3.1 deve essere $c_3 \geq 8$ e quindi le (3.1) ammettono l'unica soluzione $c_1 = 0$, $c_5 = 6$, $c_3 = 8$.

Osserviamo che tra gli otto punti di indice 3 vi sono il punto B_i ed i tre punti di $(A_iB_i - PG(2,4)) - \{H_i, P_j\}$. Inoltre l'unico punto di indice 6 è H_i.

Calcoliamo, ora, l'indice dei punti appartenenti ad una retta congiungente due punti dell'insieme $\{P_1, P_2, P_3\}$ e sia questa P_iP_j.

Siano h_ℓ, h_m, h_n le elazioni aventi per centri rispettivamente H_ℓ, H_m, H_n appartenenti alla retta P_iP_j.

Per il Lemma 2.1, i punti di P_iP_j non appartenenti al sottopiano PG(2,4) si distribuiscono in due orbite rispetto al gruppo $\langle h_\ell, h_m, h_n\rangle$, inoltre, per il Lemma 2.3, per ciascuno di essi passano due secanti ad A. Possiamo allora dire che l'indice dei punti di P_iP_j non appartenenti a PG(2,4) è almeno 3 perché P_iP_j è secante ad $\bar{A}$. Inoltre se $P\epsilon P_iP_j \cap H$, esso ha indice 6 (cfr. Prop. 3.3).

Possiamo allora concludere che se $P(\notin A)$ è un punto della retta P_iP_j, esso ha indice almeno 3.

Premettiamo al computo dell'indice dei punti di P_iP_j il seguente

LEMMA 3.1. *Le sei rette* P_kA_h, *con* $k\neq i,j$, *diverse dagli assi per* P_k, *intersecano la retta* P_iP_j *in punti appartenenti ad una stessa orbita rispetto al gruppo delle collineazioni* $<h_\ell, h_m, h_n>$.

Dimostrazione. Sia $T = A_hP_k \cap P_iP_j$. T è un punto non appartenente al sottopiano PG(2,4) e l'insieme $\{T, h_\ell(T), h_m(T), h_\ell o h_m(T), h_\ell o h_n(T)\}$ è l'orbita di T rispetto alle collineazioni del gruppo $<h_\ell, h_m, h_n>$.

Ma, essendo gli assi di h_ℓ, h_m, h_n rispettivamente le rette P_kH_ℓ, P_kH_m, P_kH_n, P_k è unito in tutte le collineazioni di $<h_\ell, h_m, h_n>$. Inoltre per la b) della Prop. 2.3 ogni collineazione di tale gruppo muta in sè l'insieme delle rette che non sono assi. Allora le rette per P_k, del tipo P_kH_h, diversa dagli assi, sono tutte e sole le rette $P_k\alpha(T)$ con $\alpha \in <h_\ell, h_m, h_n>$.

Possiamo quindi concludere che per i punti di P_iP_j appartenenti ad una stessa orbita rispetto al gruppo $<h_\ell, h_m, h_n>$, passano almeno tre bisecanti diverse da P_iP_j.

Siamo ora in grado di dimostrare la seguente

PROPOSIZIONE 3.4. *Su una retta congiungente due punti dell'insieme $\{P_1,P_2,P_3\}$ vi sono tre punti di indice 6, sei punti di indice 4, sei punti di indice 3.*

Dimostrazione. Da quanto detto in precedenza si ha che sulla secante P_iP_j vi sono almeno tre punti, H_ℓ, H_m, H_n, di indice 6, per cui passano complessivamente quindici secanti diverse da P_iP_j; sei punti di indice almeno 4 per cui passano complessivamente almeno diciotto secanti diverse da P_iP_j; sei punti di indice almeno 3 per cui passano complessivamente almeno dodici secanti diverse da P_iP_j.

Poiché le secanti sinora considerate sono tutte le secanti ad $\bar{A}$ non passanti per P_i e P_j segue l'asserto.

Calcoliamo, infine, l'indice dei punti di una trisecante ad H che non sia la congiungente di due punti dell'insieme $\{P_1,P_2,P_3\}$.

Indichiamo con ℓ una tale trisecante e con H_ℓ, H_m, H_n le sue intersezioni con H. E' chiaro che ℓ risulta esterna ad $\bar{A}$ per la Prop.1.2. Inoltre per la Prop. 3.3 i tre punti di $\ell \cap H$ hanno indice 6 e, ancora per la Prop. 1.2, i due punti di $\ell \cap PG(2,4)-H)$ hanno indice 3 poiché le uniche secanti per essi sono i tre assi (cfr. Cor. 1.2 e Prop. 2.1).

E' pertanto nota l'incidenza di ventiquattro secanti ad $\bar{A}$ con ℓ altre ventiquattro secanti, per il Teorema 2.1, sono le rette del tipo A_iA_j che passano a due a due per i dodici punti di ℓ non appartenenti al sottopiano $PG(2,4)$.

Delle sessanta secanti ad $\bar{A}$ rimane da determinare l'incidenza delle ultime diciotto secanti che sono rette P_iA_k, $i \in \{1,2,3\}$, diver se dagli assi.

A tal fine proviamo la seguente

PROPOSIZIONE 3.5. *Detto* $\{P\} = P_iA_h \cap \ell$, *dove* P_iA_h *non sia un asse, si dimostra che per ogni punto dell'orbita di* P *relativa al gruppo* $<h_i, h_j, h_\ell>$ *passa ancora una secante congiungente un punto di* A *e un punto di* $\{P_1, P_2, P_3\}$ *che non è un asse.*

Dimostrazione. La dimostrazione discende dal fatto che $<h_i, h_j, h_\ell>$ muta in sé sia A sia l'insieme $\{P_1, P_2, P_3\}$ e che ogni collineazione di tale gruppo muta in sè l'insieme delle rette che non sono assi.

Dalla Prop. 3.5 segue che per le 18 rette P_iA_h, secanti ad A, possono aversi due possibilità:

1) esse, a 3 a 3, intersecano ℓ nei sei punti di una stessa orbita.

2) 12 di esse, a 2 a 2, intersecano ℓ nei sei punti di una stessa orbita e le rimanenti 6, nei sei punti dell'altra orbita.

Per determinare l'esatta indicenza di tali secanti con ℓ premettiamo alcune proposizioni.

PROPOSIZIONE 3.6. *Siano* ℓ *ed* $\bar{\ell}$ *due trisecanti ad* H. *Esiste una elazione* α *di* L *tale che*

1) $\alpha(\ell) = \bar{\ell}$

2) $\alpha(\{P_1, P_2, P_3\}) = \{P_1, P_2, P_3\}$

3) α *muta punti di* ℓ *di indice* s *in punti di* $\bar{\ell}$ *di indice* s .

Dimostrazione. Siano $\{H_i,H_j,H_k\} = \ell \cap H$ e $\{\bar{H}_i,\bar{H}_j,\bar{H}_k\} = \bar{\ell} \cap H$. Supponiamo dapprima $\ell \cap \bar{\ell} \in PG(2,4)-H$. La retta $H_i\bar{H}_i$ è una trisecante ad H; chiamiamo H'_i l'ulteriore suo punto appartenente ad H.

Può accadere che la retta H'_iH_j intersechi $\bar{\ell}$ in un punto di H oppure che sia $\ell \cap H'_iH_j \in PG(2,4)-H$.

Nel primo caso supponiamo $H'_iH_j \cap \bar{\ell} = \bar{H}_j$; la collineazione h'_i verifica l'asserto, poiché essendo $H_i,H'_j,\bar{H}_i$ e $H_j,H'_i,\bar{H}_j$ allineati si ha: $h'_i(H_i) = \bar{H}_i$ e $h'_i(H_j) = \bar{H}_j$. Pertanto $h'_i(\ell) = \bar{\ell}$ e dalla Prop. 2.3 segue la 2).

La 3) è una ovvia conseguenza della 2) e della proprietà $h'_i(A)=A$. Nel secondo caso, poiché su $\bar{\ell}$ vi sono solo due punti di PG(2,4) non appartenenti ad H, necessariamente $H'_iH_k \cap \bar{\ell} \in H$. Anche questa volta, per le considerazioni già fatte, la collineazione richiesta è h'_i.

Sia ora $\ell \cap \bar{\ell} \in H$ e supponiamo $\{H_i\} = \{\bar{H}_i\} = \ell \cap \bar{\ell}$. Detto H'_j l'ulteriore punto di $H \cap H_j\bar{H}_j$, se $H_kH'_j \cap \bar{\ell} \in H$, allora la collineazione richiesta è h'_j, sempre per le considerazioni già fatte. Se $H_kH'_j \cap \bar{\ell} \in PG(2,4)-H$, si consideri la trisecante $H_k\bar{H}_k$, e sia H'_k l'ulteriore punto di H su tale trisecante. Se $H_jH'_k \cap \bar{\ell} \in H$, allora h'_k è la collineazione richiesta. Se invece $H_jH'_k \cap \bar{\ell} \in PG(2,4)-H$ si deve considerare un'altra trisecante, per esempio $H_j\bar{H}_k$. Detto H'_l l'ulteriore punto di $H_j\bar{H}_k$ appartenente ad H, la collineazione richiesta è h'_ℓ, in quanto sicuramente $H_kH'_\ell \cap \bar{\ell} \in H$, essendovi su $\bar{\ell}$ solo due punti di PG(2,4) non appartenenti ad H.

Sia ora $\{P'_1, P'_2, P'_3\}$ una terna diversa da $\{P_1, P_2, P_3\}$ tale che $\bar{A}' = A \cup \{P'_1, P'_2, P'_3\}$ sia ancora un 12-arco completo.

Per la Prop. 2.2 è sicuramente $P_i \neq P'_i$ per ogni $i \in \{1,2,3\}$.

PROPOSIZIONE 3.7. *Siano* $\bar{A} = A \cup \{P_1, P_2, P_3\}$ *ed* $\bar{A}' = A \cup \{P'_1, P'_2, P'_3\}$. *Esiste una collineazione* $\alpha \in L$ *tale che*

1) $\alpha(\{P_1, P_2, P_3\} = \{P'_1, P'_2, P'_3\}$

2) *Se* ℓ *è una trisecante ad* H *diversa da* P_iP_j, $i,j \in \{1,2,3\}$, $\alpha(\ell)$ *è una trisecante ad* H *diversa da* $P'_\ell P'_K$, $\ell, k \in \{1,2,3\}$.

3) α *muta punti di* ℓ *di indice* s *rispetto ad* $\bar{A}$ *in punti di* $\alpha(\ell)$ *con lo stesso indice rispetto ad* $\bar{A}'$.

Dimostrazione. Essendo L doppiamente transitivo sull'insieme H esiste $\alpha \in L$ tale che $\alpha(P_1P_2) = P'_1P'_2$. Inoltre α gode della proprietà di mutare tre assi concorrenti in un punto, in tre assi concorrenti in un punto.

Allora gli assi H_iP_3, con H_i che varia in $H \cap P_1P_2$, che sono concorrenti in P_3 sono mutati negli assi $\alpha(H_i)\alpha(P_3)$ con $\alpha(H_1) \in P'_1P'_2$. Si ha:

$$\alpha(P_3) = P'_3 \quad \text{e quindi} \quad \alpha(\{P_1, P_2, P_3\}) = \{P'_1, P'_2, P'_3\}.$$

Se ℓ è una trisecante ad H diversa da P_iP_j, poiché sui lati del triangolo di vertici P_1, P_2, P_3 si dispongono a tre a tre tutti i punti di H, su ogni lato del triangolo c'è un punto di $\ell \cap H$. Segue banalmente $\alpha(\ell) \neq P'_1P'_k$. Infine la 3) discende dal fatto che α è una omografia che muta ℓ in $\alpha(\ell)$ e A in $\bar{A}'$

PROPOSIZIONE 3.8. *Se ℓ è una trisecante ad H diversa da* P_iP_j *vi sono, rispetto ad* $\bar{A}$, *tre punti di indice* 6, *otto punti di indice* 3, *sei punti di indice* 4.

Dimostrazione. Ricordiamo che per determinare l'indice dei punti di ℓ, basta vedere come si dispongono sui punti di ℓ le secanti A_hP_i diverse dagli assi.

(Supponiamo già che i tre punti di $H\cap\ell$ hanno indice 6 rispetto ad $\bar{A}$, i due punti di $\ell-(\ell\cap(PG(2,4)-H))$ hanno indice 3 rispetto ad A e che ogni altro punto di ℓ ha indice 2 rispetto ad A).

Per far ciò procediamo a calcoli diretti su una particolare retta, dopo aver fissato una precisa terna $\{P_1,P_2,P_3\}$. (Infatti, se un punto di ℓ ha indice s rispetto ad $\bar{A}=A\cup\{P_1,P_2,P_3\}$ esso ha lo stesso indice rispetto ad ogni altro $A'=A\cup\{P_1',P_2',P_3'\}$ per la Prop.3.7. Inoltre sempre per la Prop. 3.7 i punti di tutte le rette trisecanti diverse da $P_i'P_j'$ hanno lo stesso indice rispetto ad $\bar{A}'$).

Scegliamo $P_1(0,d^{10},1)$ come punto di intersezione delle due trisecanti r ed s, congiungenti rispettivamente i punti H_4,H_6,H_7 ed H_2,H_3,H_8. Detta t la trisencante congiungente i punti H_0,H_1,H_5, si ottengono, poi, i punti $P_2(0,d^5,1)$ dalla intersezione di r con t e $P_3(d^5,d^{10},1)$ dalla intersezione di s con t.

Come retta ℓ scegliamo la retta congiungente H_0,H_2,H_6 la cui equazione è $y-z=0$.

Si verifica che per il punto $P(d^3,1,1)$ di ℓ passano le secanti P_2A_5 e P_3A_2. Ne segue che per ogni punto dell'orbita di P passano ancora due secanti di questo tipo. Abbiamo così preso in considerarazione dodici di tali secanti. Poiché le secanti di tipo P_iA_h sono diciotto, ne rimangono sei che necessariamente intersecano ℓ nei sei punti dell'altra orbita.

Una volta provato che i punti delle due orbite hanno indice 2 rispetto ad A (cfr. Lemma 2.3), segue, da quanto su detto, che i sei punti dell'orbita di P hanno indice 4, mentre i sei punti dell'altra orbita hanno indice 3, rispetto ad $\bar{A}$.

Infine ricordiamo che i tre punti di indice 6 sono i punti di $\ell \cap H$, mentre i rimanenti due punti di indice 3 sono i punti di $\ell-(\ell\cap(PG(2,4)-H))$.

Da ciò segue l'asserto.

Appendice 1.

Vogliamo calcolare il carattere dei punti delle secanti il 12-arco $\bar{A}$ in PG(2,16). Per far ciò basterà determinare l'indice di tali punti; infatti, indicati con s,t ed e rispettivamente il numero delle rette secanti, tangenti ed esterne ad $\bar{A}$, essi devono soddisfare le seguenti relazioni

$$e + t + s = q + 1$$

$$t + 2s = k.$$

Osserviamo che le secanti $\bar{A}$ sono dei seguenti tipi:

1) rette del tipo A_iA_j

2) rette del tipo P_iA_j che non sono assi delle elazioni h_i

3) rette del tipo P_iA_j che sono assi delle elazioni h_i

4) rette del tipo P_iP_j .

Conosciamo già l'indice dei punti delle rette del tipo 3) e 4) (cfr. Prop. 3.3 e 3.4).

Per le rette del tipo 1) e 2) dimostriamo le seguenti proposizioni:

PROPOSIZIONE 1. *Su una retta del tipo* A_iA_j *vi sono un punto di indice* 6, *quattro punti di indice* 5, *quattro punti di indice* 4 *e sei punti di indice* 3.

Dimostrazione. Procediamo a calcoli diretti sulla retta A_0A_1 (infatti il gruppo L agisce transitivamente sull'insieme delle rette A_iA_j cfr. Prop.1.3)) e troviamo quattro punti di indice 5, dati dal l'intersezione di A_0A_1 con gli assi P_3H_4, P_2H_2, P_3H_6, P_2H_3 e un punto H_5 di indice 6, per cui $c_5 = 4$ e $c_6 = 1$.

Le seguenti equazioni diophantee

$$c_3 + c_4 + c_5 + c_6 = 15$$
$$6c_3 + 4c_4 + 2c_5 = 60$$

danno inoltre $c_3 = 6$ e $c_4 = 4$. Segue l'asserto.

PROPOSIZIONE 2. *Su una retta del tipo* P_iA_j *che non sia asse di alcuna elazione* h_k, *vi sono quattro punti di indice 5, sette punti di indice 4 e quattro punti di indice 3.*

Dimostrazione. L'asserto segue, anche in questo caso, da calcoli diretti su una particolare retta.

Riportiamo qui di seguito la tabella T riassuntiva dei caratteri, rispetto ad $\bar{A}$ dei punti di tutte le secanti $\bar{A}$.

	A_iA_j	P_iA_j asse	P_iA_j non asse	P_iP_j
n° punti di indice 3	6	8	4	6
n° punti di indice 4	4	0	7	6
n° punti di indice 5	4	6	4	0
n° punti di indice 6	1	1	0	3

PROPOSIZIONE 3. *Non vi sono in* PG(2,16) *k-archi, con* $k<12$, *che verificano la proprietà*

(*) *per ogni punto non appartenente all'arco passino almeno tre secanti allo stesso arco.*

Dimostrazione. Consideriamo il seguente sistema di equazioni diophantee per un k-arco di PG(2,16) (cfr.[4])

$$(1)\qquad \begin{cases} \sum_{i=0}^{k} e_i = 16^2 + 16 + 1 - k \\ \sum_{i=0}^{k} i\, e_i = 16\, k\, t \\ \sum_{i=0}^{k} i(i-1)\, e_i = t^2 k(k-1) \end{cases}$$

(ove e_i esprime il numero dei punti di PG(2,16)-k per cui passano i tangenti al k-arco e $t \equiv 18-k$ esprime il numero delle tangenti al k-arco per un punto del k-arco) e facciamo vedere che esso non ammette soluzioni accettabili per un k-arco verificante la proprietà (*) con $k < 12$, sia se k è pari sia se k è dispari.

Per k pari, il sistema (1) diventa

$$\begin{cases} e_o + e_2 + e_4 = 273-k \\ 2\, e_2 + 4\, e_4 = 16kt \\ 2\, e_2 + 12\, e_4 = t^2 k(k-1) \end{cases}$$

da cui si ricava $e_2 = 8kt - \frac{kt[t(k-1)-16]}{4}$

Poiché è $e_2 \geq 0$, segue $48 \geq t(k-1) = (18-k)(k-1)$.

Ciò è assurdo, in quanto $6 \leq k \leq 10$.

Infine, per k dispari, il sistema (1) diventa

$$\begin{cases} e_1 + e_3 + e_5 = 273-k \\ e_1 + 3\,e_3 + 5\,e_5 = 16kt \\ 6\,e_3 + 20\,e_5 = t^2k(k-1) \end{cases}$$

da cui $3\,e_3 = 32kt - 2\,e_1 - \dfrac{kt^2(k-1)}{2}$.

Poiché è $e_3 \geq 0$, $e_1 \geq 0$ si ha $32kt \geq \dfrac{kt^2(k-1)}{2}$ da cui $64 \geq t(k-1) = (18-k)(k-1)$.

Anche tale risultato è assurdo poiché $7 \leq k \leq 11$. Segue l'asserto.

Appendice 2.

Sia D il gruppo delle omografie di PG(2,16) che trasformano $\bar{A}$ in sé.

LEMMA 1. D *permuta tra loro gli assi.*

Dimostrazione. Notiamo che le uniche secanti $\bar{A}$ che abbiano lo stesso insieme di indice di un asse, sono gli assi (vedere la tabella T). Ne segue l'asserto.

Dal Lemma 1 discende immediatamente il seguente

LEMMA 2. *Lo stabilizzatore puntuale* $D_{\{P_1,P_2,P_3\}}$ *nel gruppo* D *dell'insieme* $\{P_1,P_2,P_3\}$, *permuta tra loro i tre assi passanti per*

P_i, *per ogni* i = 1,2,3.

LEMMA 3. D *muta in sé sia* $\{P_1,P_2,P_3\}$ *che* A.

Dimostrazione. Infatti, altrimenti, muterebbe il tipo delle secanti.

Sia Δ il sottogruppo di L generato dalle elazioni h_i.

E' chiaro che Δ muta in sé $\bar{A}$ e che $|\Delta| = 18$.

Ciò premesso dimostriamo il seguente

TEOREMA: D è *il gruppo totale delle omologie che trasforma* $\bar{A}$ *in sé.*

Dimostrazione. Sappiamo che esiste il gruppo Δ di omologie d'ordine 18 che trasforma A in sé. Quindi $\Delta \subseteq D$.

Vogliamo provare che $\Delta = D$ e a tal fine basterà dimostrare che $|D| \leq 18$.

Per un ben noto teorema sui gruppi di permutazione (cfr. [5]) si ha:

$$|D| = |P_1^D| \cdot |P_2^{D_{P1}}| \cdot |P_3^{D_{\{P_1,P_2\}}}| \cdot |D_{\{P_1,P_2,P_3\}}|$$

Ove P_1^D esprime l'orbita di P_1 in D, $P_2^{D_{P1}}$ esprime l'orbita di P_2 nello stabilizzatore D_{P1} di P_1 in D e $P_3^{D_{\{P_1,P_2\}}}$ esprime l'orbita di P_3 nello stabilizzatore $D_{\{P_1,P_2\}}$ di $\{P_1,P_2\}$ in D.

Per il Lemma 3, $P_1^D \subset \{P_1,P_2,P_3\}$, $P_2^{D_{P1}} \subset \{P_2,P_3\}$, $P_3^{D_{\{P_1,P_2\}}} = \{P_3\}$

Ne segue che $|D| \leq 6 \cdot |D_{\{P_1,P_2,P_3\}}|$.

Proviamo che $|D_{\{P_1,P_2,P_3\}}| \leq 3$. Per il lemma 2, sappiamo che $D_{\{P_1,P_2,P_3\}}$ permuta tra loro i tre assi per P_i, per ogni $i \in \{1,2,3\}$, ne segue che se $d \in D_{\{P_1,P_2,P_3\}}$ muta in sé uno degli assi a, allora d è l'identità. Infatti, per il Lemma 3, d muta A in sé e poiché a ha un unico punto in comune con A tale punto è lasciato fisso da d.

Ma allora d ha quattro punti uniti e quindi coincide con l'identità.

Poiché per ciascun punto P_i passano esattamente tre assi, da quanto su detto, segue che $|D_{\{P_1,P_2,P_3\}}| \leq 3$.

Resta così provato il teorema.

BIBLIOGRAFIA

[1] R.J.BUMCROT: "*Finite Hyperbolics*". Atti del Convegno di Geom. Comb. e sue Appl. Perugia pp. 113-130 (1978).

[2] M.HALL jr.: "*Ovals in the Desarguesian Plane of Order 16*", Annali di Mat. 102 (1975) pp. 159-176.

[3] K.KORCHMAROS: "*Gruppi di collineazioni transitivi sui punti di una ovale (q+2-arco) di* $S_{2,q}$, *q pari*". Atti Sem. Mat. Fis. Università di Modena XXVII pp. 89-104.

[4] G.E.MARTIN: "*On arcs in a finite projective plane*", State University of New York at Albany.

[5] H.WIELANDT: "*Finite Permutation Groups*", Accademic Press, New York and London.

Lavoro pervenuto alla Redazione l'1 Dicembre 1982
ed accettato per la pubblicazione il 25 Luglio 1983
su parere favorevole di M. Sce ed A. Rosati