Note di Matematica Vol.IV, 113-148(1984)

SULLE SOLUZIONI GENERALIZZATE DI EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI DEL PRIMO ORDINE (*)

Antonio LEACI (**)

SUMMARY. *In this paper we study two different boundary value problems for first order partial differential equations on sets of "finite perimeter".*

The second type of boundary value problems has been suggested by issues about the bounce problem.

0. In questo lavoro vengono dimostrati i risultati annunciati in [10] sulle soluzioni in un insieme E dell'equazione

$$(0.1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + bu = c$$

che verificano la condizione

$$(0.2) \qquad u(t,x) = \theta(t,x) \qquad (t,x) \in \mathscr{F}_A^+ E$$

ove $\mathscr{F}_A^+ E$ è la parte della frontiera di E in cui il versore normale a $\mathscr{F}E$ $\nu = (\nu_t, \nu_1, \ldots, \nu_n)$ (diretto verso l'interno di E) verifica la relazione

$$\nu_t + \sum_{i=1}^{n} a_i \nu_{x_i} > 0$$

(*) Lavoro eseguito mentre l'autore usufruiva di una borsa di studio del C.N.R.

(**) L'autore è membro del G.N.A.F.A - C.N.R.

e θ è una arbitraria funzione definita su $\mathscr{F}_A^+E$.

Come è osservato in [2] le difficoltà nel risolvere l'equazione (0.1) in un insieme E provengono dal fatto che la forma $\nu_t+\sum_{i=1}^n a_i\nu_{x_i}$ cambia di segno su $\mathscr{F}E$. In [2] questo problema viene risolto utilizzando il teorema di Sard nel caso di aperti con frontiera di classe C^1 a tratti e di coefficienti lipschitziani.

L'utilizzazione di risultati di teoria geometrica della misura ci permette di dare una nozione di soluzione generalizzata del problema (0.1)(0.2) (comprendente diversi casi trattati in [2]) e di ottenere per tali soluzioni un teorema di esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati iniziali (teorema 3.4).

La classe degli insiemi in cui il problema (0.1)(0.2) viene formulato e risolto è quella degli insiemi di perimetro finito che, oltre ad essere assai più ampia di quelle considerate in precedenza, ha la proprietà di essere stabile per unione e intersezione finita che è assai utile nelle applicazioni.

Nel paragrafo 1 vengono richiamate le nozioni fondamentali della teoria dei perimetri e vengono stabiliti alcuni risultati sulla regolarità delle sezioni di un insieme $E\subset\mathbb{R}^{n+1}$.

Poiché sui coefficienti $a_i(t,x)$ dell'equazione (0.1) facciamo l'ipotesi che siano limitati e lipschtziani per quasi ogni t, nel paragrafo 2 viene dimostrato un teorema di traccia che ci permette di considerare anche in questo caso la forma $\nu_t+\sum_{i=1}^n a_i\nu_{x_i}$ su $\mathscr{F}E$ (teorema 2.2) e viene estesa al caso dei coefficienti considerati una nota formula della teoria delle equazioni ordinarie (prop. 2.5). Risultati dello stesso tipo di quelli esposti nel teorema 2.2 sono stati ottenuti in diverso contesto da G.Anzellotti in [1].

Nel paragrafo 3 viene quindi formulata la nozione di soluzione generalizzata del problema

$$(I)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} a_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} + bu = c \\ u\Big|_{\mathscr{F}_A^+ E} = \theta \end{cases}$$

e viene dimostrato un teorema di esistenza, unicità e dipendenza continua (teorema 3.4).

Nel paragrafo 4 infine viene formulato un diverso tipo di problema al contorno e si dà un teorema di esistenza e unicità della soluzione generalizzata (teorema 4.3). Più precisamente se poniamo $\mathscr{F}_A^- E = \{(t,x) \in \mathscr{F}E : \nu_t + \sum_{i=1}^{n} a_i \nu_{x_i} < 0\}$ è indichiamo con Σ_+ e Σ_- due sottoinsiemi rispettivamente di $\mathscr{F}_A^+ E$ ed $\mathscr{F}_A^- E$ con $T : \Sigma_- \to \Sigma_+$ una applicazione biunivoca, allora possiamo considerare il problema

$$(II)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} a_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} + bu = c \\ u\Big|_{\mathscr{F}_A^+ E \setminus \Sigma_+} = \theta \quad , \quad u\Big|_{\Sigma_+} = u\Big|_{\Sigma_-} \circ T^{-1} \end{cases}$$

Questo diverso tipo di problema al contorno è stato utilizzato in [3] per lo studio dell'equazione del trasporto associata al problema del rimbalzo.

Ulteriori risultati sui problemi trattati in questo lavoro sono contenuti nella nota [4].

Desidero ringraziare il Prof. Ennio De Giorgi per le utili conversazioni avute sull'argomento.

1. In questo paragrafo richiamiamo la definizione di insieme di perimetro finito e ne vediamo alcune proprietà utili nel seguito. Stabiliamo in particolare una formula per il calcolo di integrali sulla frontiera di un insieme e mostriamo come per un insieme di perimetro finito $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ si possa scegliere un rappresentante canonico le cui sezioni risultino opportunamente regolari.

Indichiamo con $\mathscr{L}^m$ la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^m$ e con $\mathscr{H}^k$ la misura k-dimensionale di Hausdorff (cfr. [8],[9]); per ogni punto $z \in \mathbb{R}^m$ e $\rho > 0$ indichiamo con $B_\rho(z)$ la sfera aperta di centro z e raggio ρ e per ogni $E \subset \mathbb{R}^m$ misurabile definiamo

$$(1.1) \qquad E_{(s)} = \{z \in \mathbb{R}^m;\ \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\mathscr{L}^m(E\cap B_\rho(z))}{\mathscr{L}^m(B_\rho)} = s\} \qquad s\in[0,1] .$$

Sia $E \subset \mathbb{R}^m$ un insieme boreliano e χ_E la sua funzione indicatrice; in [6] E.De Giorgi ha introdotto la seguente definizione di perimetro di E:

$$(1.2) \qquad P(E) = \lim_{\lambda\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^m} |D\chi_\lambda|\, d\mathscr{L}^m$$

dove

$$(1.3) \qquad \chi_\lambda(z) = (\pi\lambda)^{-n/2} \exp(-|z|^2/\lambda) * \chi_E(z)$$

Dai teoremi II e IV di [6] si ha che E è di perimetro finito se e solo se la funzione indicatrice χ_E ha come gradiente nel senso delle distribuzioni una misura vettoriale (che indicheremo con $D\chi_E$) la cui variazione totale su $\mathbb{R}^m$ è finita e si ha $P(E) = \int_{\mathbb{R}^m} |D\chi_E|$.

Lo studio della struttura della misura $D\chi_E$ è contenuto in [7].

Se $E \subset \mathbb{R}^m$ è un insieme di perimetro finito ed $m \geq 2$ si definisce frontiera ridotta di E (e si indica con $\mathscr{F}^*E$) l'insieme dei punti $z \in \mathbb{R}^m$ per cui per ogni $\rho > 0$ $\int_{B_\rho(z)} |D\chi_E| > 0$, esiste determinato

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{\int_{B_\rho(z)} D\chi_E}{\int_{B_\rho(z)} |D\chi_E|} = \nu(z)$$

e risulta $|\nu(z)| = 1$. Valgono allora le seguenti proprietà:

se $z \in \mathscr{F}^*E$ allora gli insiemi

$$(1.4) \qquad \{\zeta \in E;\ <\nu(z), \zeta - z> < 0\} \quad \text{e} \quad \{\zeta \in \mathbb{R}^m \setminus E; <\nu(z), \zeta - z> > 0\}$$

hanno densità zero nel punto z e quindi, in particolare, $\mathscr{F}^*E \subset E_{(\frac{1}{2})}$;

per ogni insieme boreliano $B \subset \mathbb{R}^m$

$$(1.5) \qquad \int_B D\chi_E = \int_{B \cap \mathscr{F}^*E} \nu(z)\, d\mathscr{H}^{m-1}, \quad \int_B |D\chi_E| = \mathscr{H}^{m-1}(B \cap \mathscr{F}^*E);$$

esiste una successione di compatti K_j contenuti in ipersuperfici di classe C^1 e un insieme N con $\mathscr{H}^{m-1}(N) = 0$ tali che

$$(1.6) \qquad \mathscr{F}^*E = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \cup N$$

e sui compatti K_j il vettore ν coincide con il versore della normale alla ipersuperficie contenente K_j e diretto verso l'interno di E.

Vale anche

$$(1.7) \qquad \mathscr{H}^{m-1}(\mathbb{R}^m \setminus (E_{(0)} \cup E_{(1)} \cup \mathscr{F}^*E)) = 0.$$

Sempre in [7] è dimostrato che se $E \subset \mathbb{R}$ è di perimetro finito allo ra E è $\mathscr{L}^1$-equivalente all'unione di un numero finito di intervalli aperti e $\mathscr{F}^*E = E_{(\frac{1}{2})} = \mathscr{F}E_{(0)} = \mathscr{F}E_{(1)}$.

Ricordiamo infine che per la classe degli insiemi di perimetro finito valgono le due proprietà seguenti (cfr. [8]):

se $E \subset \mathbb{R}^m$ è di perimetro finito, F è un insieme misurabile e $\mathscr{L}^m(E\Delta F) = 0$ allora $P(F) = P(E)$ e $\mathscr{F}^*F = \mathscr{F}^*E$;

se $E, F \subset \mathbb{R}^m$ sono di perimetro finito, allora tali sono anche $E \cap F$ ed $E \cup F$.

Nel seguito consideriamo il caso in cui E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+1}$ e ne studiamo le sezioni.

Indichiamo con (t,x) il generico punto di $\mathbb{R}^{n+1}$ con $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$ (1). Se $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ è un insieme misurabile, ha senso considerare, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ aperti (cfr. [12])

$$(1.8) \qquad \int_\Omega |D_t \chi_E| = \sup\{ \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \chi_E D_t g \, d\mathscr{L}^{n+1};\ g \in C_0^\infty(\Omega), |g| \leq 1\}$$

e

$$(1.9) \qquad \int_{\mathcal{O}} |D\chi_{E_x}| = \sup\{\int_{\mathbb{R}} \chi_{E_x} g' \, d\mathscr{L}^1;\ g \in C_0^\infty(\mathcal{O}),\ |g| \leq 1\}$$

Da [6] e [12] segue immediatamente

$$(1.10) \qquad P(E) \geq \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |D_t \chi_E| = \int_{\mathbb{R}^n} d\mathscr{L}^n(x) \int_{\mathbb{R}} |D\chi_{E_x}|$$

per cui, se E è di perimetro finito in $\mathbb{R}^{n+1}$, allora E_x è di perimetro finito in $\mathbb{R}$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

---

(1) Per ogni insieme $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $x \in \mathbb{R}^n$ poniamo

$$E_x = \{t \in \mathbb{R}\ ;\ (t,x) \in E\}$$

Utilizzando la proposizione 3.2 di [12] possiamo definire una successione di funzioni misurabili su R^n che saranno spesso usate nel seguito:

$$\zeta_h(x) = \sup \{t \in \mathbb{R} \; ; \int_{(-\infty,t)} |D\chi_{E_x}| < h\} \qquad h=1,2,... \tag{1.11}$$

Possiamo ora dimostrare un risultato riguardante le sezioni di un insieme E.

1.1. LEMMA. *Sia* E *un boreliano di perimetro finito in* $\mathbb{R}^{n+1}$. *Per quasi ogni* $x \in \mathbb{R}^n$ *risulta*

$$(E_{(s)})_x = (E_x)_{(s)} \qquad s \in [0,1].$$

Dim. Utilizziamo le funzioni χ_λ definite da (1.3) per $m=n+1$. Per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\chi_\lambda(\cdot\, ,x)$ converge q.o. in $\mathbb{R}$ a χ_{E_x} e che per ogni aperto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ (cfr. prop.3.2 di [12])

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \int_{\mathcal{O}} |D_t \chi_\lambda(t,x)| \, d\mathcal{L}^1(t) = \int_{\mathcal{O}} |D\chi_{E_x}| < +\infty .$$

Inoltre per (1.4) e (1.7) si ha che, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{R} = (E_{(0)} \cup E_{(1)} \cup E_{(\frac{1}{2})})_x .$$

Sia allora $x \in \mathbb{R}^n$ per cui valgono le proprietà suddette e sia $\bar{t} \in (E_x)_{(0)}$: mostriamo che $\bar{t} \in (E_{(0)})_x$. Poiché E_x è di perimetro finito in $\mathbb{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che $(\bar{t}-\delta, \bar{t}+\delta) \subset (E_x)_{(0)}$. Allora deve essere

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \int_{\bar{t}-\delta}^{\bar{t}+\delta} \chi_\lambda(\tau,x) \, d\mathcal{L}^1(\tau) = \int_{\bar{t}-\delta}^{\bar{t}+\delta} \chi_{E_x} \, d\mathcal{L}^1 = 0$$

per cui esistono $t' < \bar{t} < t''$ con $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \chi_\lambda(t',x) = \lim\limits_{\lambda \to 0^+} \chi_\lambda(t'',x) = 0$.

Se per qualche successione $\lambda_i \to 0$ fosse $\lim_{i\to\infty} \chi_{\lambda_i}(\bar{t},x) > 0$ allora avremo

$$\liminf_{i\to\infty} \int_{\bar{t}-\delta}^{\bar{t}+\delta} |D_t \chi_{\lambda_i}(\tau,x)|\, d\mathscr{L}^1(\tau) > 0$$

mentre deve essere

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \int_{\bar{t}-\delta}^{\bar{t}+\delta} |D_t \chi_\lambda(\tau,x)|\, d\mathscr{L}^1(\tau) = \int_{(\bar{t}-\delta,\bar{t}+\delta)} |D\chi_{E_x}| = 0.$$

Dunque deve essere $\lim_{\lambda\to 0^+} \chi_\lambda(\bar{t},x) = 0$ e quindi $(E_x)_{(0)} \subseteq (E_{(0)})_x$. Analogamente si dimostra che $(E_x)_{(1)} \subseteq (E_{(1)})_x$. Resta solo da far vedere che $(E_x)_{(\frac{1}{2})} \subseteq (E_{(\frac{1}{2})})_x$. Per la definizione (1.11) basta far vedere che, fissato $h \in \mathbb{N}$, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ per cui $\tau_h(x)$ è finito si ha $\tau_h(x) \in (E_{(\frac{1}{2})})_x$. Sia $N \subset \mathbb{R}^n$ misurabile limitato con τ_h finita su N e $\tau_h(x) \notin (E_{(\frac{1}{2})})_x$ per ogni $x \in N$. Modificando eventualmente N per un insieme di misura $\mathscr{L}^n$ nulla. possiamo supporre che $S = \{(\tau_h(x),x);\ x \in N\}$ sia un boreliano con $S \cap E_{(\frac{1}{2})} = \emptyset$. Sia $\varepsilon > 0$ e Ω un aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$ contenente S tale che

$$\int_\Omega |D_t \chi_E| \le \int_S |D_t \chi_E| + \varepsilon$$

Utilizzando il teorema 3.3 di [12] si ottiene

$$0 = \int_S |D_t \chi_E| \ge \int_\Omega |D_t \chi_E| - \varepsilon \ge \int_N d\mathscr{L}^n(x) \int_{\Omega_x} |D\chi_{E_x}| - \varepsilon \ge \mathscr{L}^n(N) - \varepsilon$$

da cui, per l'arbitrarietà di ε, si ha $\mathscr{L}^n(N) = 0$.

Vale inoltre il seguente

1.2. TEOREMA. *Sia* $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *un sottoinsieme limitato di perimetro finito. Per ogni* $g \in C^{\circ}(\mathbb{R}^{n+1})$ *risulta*

$$(1.12) \qquad \int_{\mathcal{F}^* E} g\, \nu_t \, d\mathcal{H}^n = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{h=1}^{P(E_x)} (-1)^{h-1} g(\tau_h(x), x) \right] d\mathcal{L}^n(x)$$

$$(1.13) \qquad \int_{\mathbb{R}^{n+1}} g \, |D_t \, \chi_E| = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{h=1}^{P(E_x)} g(\tau_h(x), x) \right] d\mathcal{L}^n(x).$$

Dim. E' sufficiente fare la dimostrazione nel caso $g \in C^1$. Da (1.5) segue

$$\int_{\mathcal{F}^* E} g \nu_t \, d\mathcal{H}^n = - \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \chi_E D_t \, g \, d\mathcal{L}^{n+1}$$

e per il teorema di Fubini-Tonelli

$$\int_E D_t g d\mathcal{L}^{n+1} = \int_{\mathbb{R}^n} d\mathcal{L}^n(x) \int_{E_x} D_t g \, d\mathcal{L}^1(t).$$

Poiché per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ E_x è $\mathcal{L}^1$-equivalente a

$$\bigcup_{h=1}^{\frac{1}{2}P(E_x)} (\tau_{2h-1}(x), \tau_{2h}(x))$$

dalla formula di integrazione per parti si ha

$$\int_{E_x} D_t g \, d\mathcal{L}^1(t) = \sum_{h=1}^{P(E_x)} (-1)^h \, g(\tau_h(x), x)$$

da cui segue (1.12). Per dimostrare (1.13) basta osservare che dal teorema 3.3 di [12] segue che

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} g\,|D_t\chi_E| = \int_{\mathbb{R}^n} d\mathscr{L}^n(x) \int_{\mathbb{R}} g\,|D\chi_{E_x}|$$

e che, per quasi ogni $x \in R^n$, $|D\chi_{E_x}| = \sum_{h=1}^{P(E_x)} \delta_{\tau_h}(x)$ dove $\delta_{\tau_h}(x)$

è la misura di Dirac (concentrata) nel punto $\tau_h(x)$.

Il caso $g \in C^\circ$ segue per approssimazione tenendo presente che $P(E_x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Per un insieme $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ di perimetro finito definiamo

(1.14) $$\mathscr{F}^+E = \{ (t,x) \in \mathscr{F}^*E;\ \nu_t(t,x) > 0 \}$$

(1.15) $$\mathscr{F}^-E = \{(t,x) \in \mathscr{F}^*E;\ \nu_t(t,x) < 0\} .$$

Possiamo allora dimostrare la seguente

1.3. PROPOSIZIONE. *Sia* $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *un insieme limitato di perimetro finito con* $E_{(1)} = E$. *Per quasi ogni* $x \in \mathbb{R}^n$ *risulta:*

(a) $$E_x = \bigcup_{h=1}^{\frac{1}{2}P(E_x)} (\tau_{2h-1}(x),\ \tau_{2h}(x))$$

(b) $$(\mathscr{F}^*E)_x = \bigcup_{h=1}^{P(E_x)} \{\tau_h(x)\}$$

(c) $$\begin{cases} (\mathscr{F}^+E)_x = \bigcup_{h=1}^{\frac{1}{2}P(E_x)} \{\tau_{2h-1}(x)\} \\ (\mathscr{F}^-E)_x = \bigcup_{h=1}^{\frac{1}{2}P(E_x)} \{\tau_{2h}(x)\} \end{cases}$$

Dim. Il punto (a) segue immediatamente dal lemma 1.1, dalla caratterizzazione dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ di perimetro finito e dalla limitatezza di E. Analogamente si ottiene (b) tenendo presente che $\mathscr{H}^n(E_{(\frac{1}{2})} \setminus \mathscr{F}^*E) = 0$ e quindi per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$

$$(\mathscr{F}^*E)_x = (E_{(\frac{1}{2})})_x .$$

Dimostriamo infine (c). Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ con $\mathscr{L}^n(M) = 0$ tale che in $\mathbb{R}^n \setminus M$ valgano (a) e (b) e poniamo, per ogni $h \in \mathbb{N}$,

$$\text{(1.16)} \qquad \operatorname{dom}\tau_h = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus M;\ -\infty < \tau_h(x) < +\infty\}$$

$$\text{(1.17)} \qquad G_h = \{(\tau_h(x), x);\ x \in \operatorname{dom}\tau_h\} .$$

Per la (b) $G_h \subseteq \mathscr{F}^*E$. Possiamo sempre supporre, a meno di modificare le funzioni τ_h su un insieme di misura nulla in $\mathbb{R}^n$, che le τ_h siano funzioni boreliane per cui boreliani risultano anche gli insiemi G_h. Utilizzando la rappresentazione di $\mathscr{F}^*E$ data da (1.6) si ottiene che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tale che $\mathscr{H}^n(G_h \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$. Indichiamo con π la proiezione $\pi(t,x) = x$ e con (ϕ_i) una successione di funzioni continue per cui $\lim \phi_i = \chi_{K_\varepsilon}$ puntualmente in $\mathbb{R}^{n+1}$ con $|\phi_i| \le 1$; dal teorema 1.2 si ottiene per ogni $g \in C^\circ(\mathbb{R}^{n+1})$

$$\int_{K_\varepsilon} g\nu_t \, d\mathscr{H}^n = \lim_{i\to\infty} \int_{\mathscr{F}^*E} g\,\phi_i \nu_t \, d\mathscr{H}^n =$$

$$= \lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{k=1}^{P(E_x)} (-1)^{k-1} g(\tau_k(x),x)\phi_i(\tau_k(x),x)\right] d\mathscr{L}^n(x)$$

e quindi, ricordando che $P(E_x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e usando il teorema di convergenza dominata,

$$(1.18)\qquad \int_{K_\varepsilon} g\nu_t \, d\mathscr{H}^n = (-1)^{h-1} \int_{\pi(K_\varepsilon)} g(\tau_h(x),x)\,d\mathscr{L}^n(x).$$

Da questo, per l'arbitrarietà di g e di ε, segue immediatamente (c).

1.4. OSSERVAZIONE. Da (1.18) si ottiene che se B è un sottoinsieme boreliano di $\mathbb{R}^n$ con $\mathscr{L}^n(B) = 0$ allora si ha

$$\int_{\mathscr{F}^*E\cap(B\times\mathbb{R})} g\nu_t \, d\mathscr{H}^n = 0$$

e quindi, in particolare, $\mathscr{H}^n(\mathscr{F}^+E \setminus (\bigcup_{h=1}^{\infty} G_{2h-1})) = \mathscr{H}^n(\mathscr{F}^-E\setminus(\bigcup_{h=1}^{\infty} G_{2h}))=0$.

In base all'osservazione precedente possiamo definire una trasformazione $T_E : \mathscr{F}^+E \to \mathscr{F}^-E$ nel modo seguente:

$$(1.19)\qquad T_E(\tau_{2h-1}(x),x) = (\tau_{2h}(x),x).$$

Utilizzando (1.6) si verifica che T_E e T_E^{-1} sono definite $\mathscr{H}^n$-quasi ovunque e trasformano insiemi $\mathscr{H}^n$-misurabili in insiemi $\mathscr{H}^n$-misurabili.

2. In questo paragrafo dimostriamo alcune proprietà di un campo di vettori $A = (1,a_1,\dots,a_n)$ su $\mathbb{R}^{n+1}$ per cui vale l'ipotesi

$$(H_1)\qquad \begin{array}{l} a_i\in L^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \text{ ed esiste } k>0 \text{ tale che, per quasi ogni } t\in\mathbb{R} \\ |a_i(t,x)-a_i(t,y)| \le k|x-y| \qquad x,y\in\mathbb{R}^n \qquad (i=1,\dots,n). \end{array}$$

Nel caso in cui le funzioni a_i sono lipschitziane su tutto

$\mathbb{R}^{n+1}$ si ha

$$(2.1) \qquad \int_E \left\{ \frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i\psi) \right\} d\mathscr{L}^{n+1} = -\int_{\mathscr{F}^*E} \psi\langle A,\nu\rangle \, d\mathscr{H}^n$$

per ogni insieme E limitato di perimetro finito e $\psi \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^{n+1})$. Vogliamo provare che una formula analoga vale quando A verifica l'ipotesi (H_1). Per fare questo dimostriamo dapprima il seguente

2.1. LEMMA. *Se le funzioni* a_i *verificano* (H_1) $(i=1,\dots,n)$ *esistono* n *successioni* $\{a_i^h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ *per cui*

(1) $(a_i^h)_{h\in N}$ *converge ad* a_i *in* $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$;

(2) $\left(\frac{\partial a_i^h}{\partial x_j}\right)_{h\in\mathbb{N}}$ *converge in* $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ e $\left|\frac{\partial a_i^h}{\partial x_j}\right| \le k$ $(j=1,\dots,n)$;

(3) *per quasi ogni* $t\in\mathbb{R}$ $(a_i^h(t,\cdot))_{h\in N}$ *converge uniformemente sui compatti verso* $a_i(t,\cdot)$.

Dim. La dimostrazione di (1) e (2) è standard una volta osservato che esistono le derivate deboli $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} \in L^\infty(R^{n+1})$ $(i,j=1,\dots,n)$; (cfr. ad esempio [11] Lemma 1.2 e Lemma 1.3). Per avere (3) basta osservare che è possibile scegliere le successioni approssimanti in maniera tale che, per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$, $a_i^h(t,\cdot)$ convergono in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ed allora, dalla (2) e dal teorema di Ascoli-Arzelà, segue la tesi.

Possiamo ora dimostrare il seguente

2.2. TEOREMA. *Sia* $A = (1,a_1,\dots,a_n)$ *un campo di vettori per cui vale* (H_1) . *Per ogni insieme* E *limitato di perimetro finito esi-*

ste una funzione γ_A *limitata* $\mathscr{H}^n$*-misurabile su* $\mathscr{F}^*E$ *per cui si ha:*

$$(2.1') \qquad \int_E \{-\frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i\psi)\}\, d\mathscr{L}^{n+1} = -\int_{\mathscr{F}^*E} \psi\gamma_A d\mathscr{H}^n \quad \forall\psi\in Lip(\mathbb{R}^{n+1})$$

$$\gamma_A(t,x) = \langle A(t,x),\nu(t,x)\rangle \quad \forall(t,x)\in\mathscr{F}^*E \quad \text{se } A\in[Lip(\mathbb{R}^{n+1})]^{n+1}$$

Nel seguito la funzione γ_A sarà sempre denotata con $\langle A,\nu\rangle$.

Dim. Siano $(a_i^h)_{h\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})(i=1,\dots,n)$ le successioni di funzioni (equilimitate) date dal lemma 2.1. Poiché $a_i^h \in C^\infty$ vale per i campi di vettori $A_h = (1,a_1^h,\dots,a_n^h)$ la formula (2.1) e dal Lemma 2.1 segue che è possibile passare al limite per $h\to\infty$ nel primo membro.Per passare al limite nel secondo membro osserviamo che

$$\mathscr{F}^*E = \bigcup_{j=1}^{n} \{(t,x)\in\mathscr{F}^*E : \nu_{x_j}(t,x)\neq 0\} \cup \{(t,x)\in\mathscr{F}^*E : \nu_t(t,x)=1\} .$$

Su $\{\nu_t=1\}$ si ha $\gamma_A \equiv\langle A_h,\nu\rangle \equiv 1$ per ogni $h\in\mathbb{N}$. Fissato poi j, dalla (3) del lemma 2.1 e per l'osservazione 1.4 (con x_j al posto di t) otteniamo che le funzioni a_i^h convergono $\mathscr{H}^n$-quasi ovunque su $\{\nu_{x_j}\neq 0\}$ e in definitiva $\mathscr{H}^n$-q.o. su E risulta univocamente determinata la funzione γ_A per cui vale (2.1').

Mostriamo alcune proprietà delle soluzioni del sistema delle caratteristiche associato all'equazione (0.1). E' ben noto (cfr. [5] cap.II) che nell'ipotesi (H_1) il sistema di equazioni ordinarie

$$(2.2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\gamma_i(t)}{dt} = a_i(t,\gamma(t)) & (i=1,\dots,n) \\ \gamma(0) = \xi & \xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

ammette una e una sola soluzione $\gamma_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ lipschitziana. Possiamo allora definire un cambiamento di variabili $\Gamma : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ nel modo seguente

$$\Gamma(t,\xi) = (t,\gamma_\xi(t)) \qquad (t,\xi) \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{2.3}$$

Nello studio delle proprietà di Γ sarà utile il seguente

2.3. LEMMA. *Siano* $g_h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *trasformazioni invertibili localmente equilipschitziane insieme con le inverse. Se la successione* $(g_h)_{h\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente sui compatti verso una applicazione* g *allora per ogni aperto limitato* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$

$$\lim_h \mathscr{L}^m(g(\Omega) \mathbin{\Delta} g_h(\Omega)) = 0.$$

Dim. Poiché g_h e g_h^{-1} sono localmente equilipschtziane si ha che g è invertibile e g_h^{-1} converge uniformemente sui compatti verso g^{-1}.

Sia ora K un compatto contenuto in Ω e $d = \mathrm{dist}(g(K), g(\Omega))>0$. Esiste $\bar h \in \mathbb{N}$ tale che $|g_h(z) - g(z)|< \frac{d}{2}$ per ogni $z \in K$ e per ogni $h \geq \bar h$ per cui definitivamente si ha $g_h(K) \subset g(\Omega)$ ed allora, per l'arbitrarietà di K e l'equilipschitzianità delle g_h si ottiene

$$\limsup_{h\to\infty} \mathscr{L}^m(g_h(\Omega) \setminus g(\Omega)) = 0.$$

Analogamente si ottiene $g(K) \subset g_h(\Omega)$ definitivamente e quindi

$$\limsup_{h\to\infty} \mathscr{L}^m(g(\Omega) \setminus g_h(\Omega)) = 0.$$

2.4. OSSERVAZIONE. Nelle ipotesi del lemma 2.3 si ha che se f_h è una successione di funzioni misurabili equilimitate che converge ad f in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^m)$, allora le funzioni $f_h \circ g_h$ sono misurabili e la successione $(f_h \circ g_h)_{h \in \mathbb{N}}$ converge ad $f \circ g$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^m)$.

2.5. PROPOSIZIONE. *Sia* $A = (1, a_1, \ldots, a_n)$ *un campo di vettori che verifica l'ipotesi* (H_1). *L'applicazione* Γ *data da* (2.3) *è un cambiamento di variabili localmente lipschitziano insieme con il suo inverso e il suo jacobiano* J_Γ *è dato, per quasi ogni* $\xi \in \mathbb{R}^n$, *da*

$$J(t,\xi) = \exp\left[\int_0^t \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i}(s, \gamma_\xi(s))\,ds\right] \tag{2.4}$$

Dim. Consideriamo i campi di vettori $A_h = (1, a_1^h, \ldots, a_n^h)$ ottenuti a partire dalle funzioni approssimanti date dal lemma 2.1 e i cambiamenti di variabili $\Gamma_h(t,\xi) = (t, \gamma^h_{\xi,1}, \ldots, \gamma^h_{\xi,n})$ ad essi associati. Le applicazioni Γ_h sono di classe C^1 con le derivate prime localmente equilimitate e per ogni $(t,\xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$ vale (cfr. [5]):

$$J_\Gamma(t,\xi) = \exp\left[\int_0^t \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i(s, \gamma^h_\xi(s))}{\partial x_i}\,ds\right].$$

Mostriamo che $\lim_{h \to \infty} \Gamma_h(t,\xi) = \Gamma(t,\xi)$ per ogni $(t,\xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$; si ha:

$$|\gamma^h_{\xi,i}(t) - \gamma_{\xi,i}(t) \leq \int_0^t |a_i^h(s, \gamma^h_\xi(s)) - a_i(s, \gamma_\xi(s))|\,ds \leq$$

$$\leq \int_0^t [|a_i^h(s,\gamma_\xi^h(s)) - a_i^h(s,\gamma_\xi(s))| + |a_i^h(s,\gamma_\xi(s)) - a_i(s,\gamma_\xi(s))|]\, ds \leq$$

$$\leq k \int_0^t \|\gamma_\xi^h(s) - \gamma_\xi(s)\| ds + \int_0^t |a_i^h(s,\gamma_\xi(s)) - a_i(s,\gamma_\xi(s))| ds.$$

Poiché $(\|\gamma_\xi^h\|_{L^\infty(0,t)})$ è equilimitata, dalla (3) del lemma 2.1 e per il teorema di convergenza dominata si ha, per ogni $\varepsilon > 0$ e per h sufficientemente grande

$$|\gamma_{\xi,i}^h(t) - \gamma_{\xi,i}(t)| \leq k \int_0^t \|\gamma_\xi^h(s) - \gamma_\xi(s)\| ds + \varepsilon$$

da cui, per il lemma di Gronwall e l'arbitrarietà di ε, si ha la convergenza richiesta. Poiché le applicazioni Γ_h sono localmente equilipschitziane, si può usare il teorema di Ascoli-Arzelà per avere che Γ_h converge verso Γ uniformemente sui compatti per cui, in particolare, Γ risulta localmente lipschitziano. Analogo risultato vale anche per Γ^{-1}. Mostriamo infine che vale (2.4).

Per l'osservazione 2.4 e la (2) del lemma 2.1 si ha che $(\frac{\partial a_i^h}{\partial x_i} \circ \Gamma_h)_{h\in\mathbb{N}}$ converge in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ verso $\frac{\partial a_i}{\partial x_i} \circ \Gamma$ $(i=1,\dots,n)$ e quindi, passando eventualmente a una sottosuccessione, otteniamo $\lim_{h\to\infty} \frac{\partial a_i^h}{\partial x_i}(t, \gamma_\xi^h(t)) = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}(t,\gamma_\xi(t))$ per quasi ogni $(t,\xi)\in\mathbb{R}^{n+1}$. Poiché $|\frac{\partial a_i^h}{\partial x_i}| \leq k$ possiamo usare ancora il teorema di Lebesgue per avere, per quasi ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$\text{(2.5)} \qquad \lim_{h\to\infty} \exp\left[\int_0^t \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i}(s,\gamma_\xi^h(s))ds\right] = \exp\left[\int_0^t \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i}(s,\gamma_\xi(s)ds\right].$$

Se indichiamo con $g(t,\xi)$ la funzione definita per quasi ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ da (2.5), dal lemma 2.3 risulta, per ogni Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\int_\Omega g\, d\mathscr{L}^{n+1} = \lim_{h\to\infty}\int_\Omega J_{\Gamma_h}\, d\mathscr{L}^{n+1} = \lim_{h\to\infty}\mathscr{L}^{n+1}(\Gamma_h(\Omega)) = \mathscr{L}^{n+1}(\Gamma(\Omega)) =$$

$= \int_\Omega J_\Gamma\, d\mathscr{L}^{n+1}$ e quindi la (2.4).

2.6. OSSERVAZIONE. Si verifica facilmente che esiste la derivata debole $\frac{\partial J_\Gamma}{\partial t}$ e vale

$$\frac{\partial J_\Gamma}{\partial t} = \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \circ \Gamma\Big) J_\Gamma$$

Dimostriamo infine una formula che ci permette di effettuare il cambiamento di variabili Γ negli integrali sulla frontiera di un insieme E.

2.7. PROPOSIZIONE. *Sia* $A = (1,a_1,\dots,a_n)$ *un campo di vettori verificante l'ipotesi* (H_1), Γ *il cambiamento di variabili definito in* (2.3) *e* J_Γ *il suo jacobiano. Se* E *è un insieme limitato di perimetro finito in* $\mathbb{R}^{n+1}$ *ed* $\tilde{E} = \Gamma^{-1}(E)$ *allora per ogni* $\psi \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^{n+1})$ *si ha*

$$(2.7) \qquad \int_{\mathscr{F}^*E} \psi \langle A,\nu\rangle\, d\mathscr{H}^n = \int_{\mathscr{F}^*\tilde{E}} (\psi\circ\Gamma) J_\Gamma \nu_t\, d\mathscr{H}^n$$

Dim. (1) Dal teorema 2.2 sappiamo che

(1) E' sufficiente fare la dimostrazione nel caso $\psi \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$.

$$\int_{\mathscr{F}^*E} \psi < A,\nu > d\mathscr{H}^n = - \int_E [\frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i \psi)] d\mathscr{L}^{n+1}$$

e quindi, usando l'osservazione 2.6,

$$\int_{\mathscr{F}^*E} \psi < A,\nu > d\mathscr{H}^n = - \int_{\tilde{E}} [\frac{\partial}{\partial t}(\psi \circ \Gamma) + (\psi\circ\Gamma)\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} \circ \Gamma)] J_\Gamma d\mathscr{L}^{n+1} =$$

$$= - \int_{\tilde{E}} \frac{\partial}{\partial t} [(\psi\circ\Gamma) J_\Gamma] d\mathscr{L}^{n+1}.$$

Dall'espressione (2.4) di J_Γ, con una dimostrazione analoga a quella del teorema 2.2, si ottiene che esiste una funzione definita $\mathscr{H}^n$-q.o. su $\mathscr{F}^+E \cup \mathscr{F}^-E$ che indichiamo ancora con J_Γ per cui vale, per $\mathscr{H}^n$-quasi ogni $(t,\xi) \in \mathscr{F}^+E \cup \mathscr{F}^-E$,

$$J_\Gamma(t,\xi) = \exp[\int_0^t \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}(s,\gamma_\xi(s))ds]$$

e

$$-\int_{\tilde{E}} \frac{\partial}{\partial t}[(\psi\circ\Gamma)J_\Gamma] d\mathscr{L}^{n+1} = \int_{\mathscr{F}^*\tilde{E}} (\psi\circ\Gamma) J_\Gamma \nu_t d\mathscr{H}^n.$$

3. Possiamo ora formulare la nozione di soluzione generalizzata per il problema di tipo (I) e intraprenderne lo studio.

Sia $A = (1,a_1,\ldots,a_n)$ un campo di vettori su $\mathbb{R}^{n+1}$ per cui vale l'ipotesi (H_1) e sia E un insieme limitato di perimetro finito in $\mathbb{R}^{n+1}$ contenuto in $[0,T]\times\mathbb{R}^n$.

In tutto il paragrafo sottintendiamo sempre tali ipotesi.

In analogia con le definizioni (1.14) e (1.15), utilizzando il teorema 2.2 poniamo:

(3.1) $$\mathscr{F}_A^+E = \{ (t,x) \in \mathscr{F}^*E \ ; \ \gamma_A(t,x) > 0 \} \quad ;$$

$$(3.2) \qquad \mathscr{F}_A^- E = \{(t,x) \in \mathscr{F}^* E;\ \gamma_A(t,x) < 0\}.$$

Evidentemente $\mathscr{F}_A^+ E$ ed $\mathscr{F}_A^- E$ sono determinati a meno di un insieme di misura $\mathscr{H}^n$ nulla.

Sui sottoinsiemi Σ di $\mathscr{F}^* E$ possiamo considerare lo spazio $L_A^1(\Sigma)$ delle funzioni θ $\mathscr{H}^n$-misurabili tali che

$$\|\theta\|_{L^1(\Sigma)} \equiv \int_\Sigma |\theta|\ |\langle A,\nu\rangle|\, d\mathscr{H}^n < +\infty \quad .$$

Infine, per ogni $\psi \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^{n+1})$, definiamo

$$\mathscr{A}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial\psi}{\partial x_i}$$

$$\mathscr{A}^*\psi = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i\psi)$$

3.1. DEFINIZIONE. *Assegnati* $b \in L^\infty(E)$, $c \in L^1(E)$ *e* $\theta \in L_A^1(\mathscr{F}_A^+ E)$ *diremo che* $u \in L^1(E)$ *è soluzione generalizzata del problema*

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + bu = c \\ u\big|_{\mathscr{F}_A^+ E} = \theta \end{cases}$$

se esiste $\zeta \in L_A^1(\mathscr{F}_A^- E)$ *tale che per ogni* $\psi \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^{n+1})$ *si abbia:*

$$(\mathrm{I}^*) \quad \int_E [u(\mathscr{A}^*\psi - b\psi) + c\psi]\, d\mathscr{L}^{n+1} + \int_{\mathscr{F}_A^+ E} \theta\psi\langle A,\nu\rangle\, d\mathscr{H}^n + \int_{\mathscr{F}_A^- E} \zeta\psi\langle A,\nu\rangle\, d\mathscr{H}^n = 0.$$

Nel seguito useremo anche la notazione $u|_{\mathscr{F}^-_A E} = \zeta$.

Vale il seguente teorema di approssimazione.

3.2. TEOREMA. *Per ogni* $b \in L^\infty(E)$, $c \in L^1(E)$ *e* $\theta \in L^1_A(\mathscr{F}^+_A E)$ *esiste una successione* $(\psi_h)_{h\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^{n+1})$ *tale che*

(i) ψ_h *converge in* $L^1(E)$

(ii) $\mathscr{A}\psi_h + b\psi_n$ *converge a* c *in* $L^1(E)$;

(iii) $\psi_h|_{\mathscr{F}^+_A E}$ *converge a* θ *in* $L^1_A(\mathscr{F}^+_A E)$ *e* $\psi_h|_{\mathscr{F}^-_A E}$ *converge in* $L^1_A(\mathscr{F}^-_A E)$.

*Dim.*Utilizzando la trasformazione Γ studiata nel paragrafo precedente si verifica che basta dimostrare il teorema nel caso del campo $A_o = (1,0,\dots,0)$; inoltre possiamo supporre $E = E_{(1)}$.

Sia θ_h una successione di funzioni continue e limitate su $\mathscr{F}^+_{A_o} E$ che converge $\mathscr{H}^n$-q.o. e in $L^1_{A_o}(\mathscr{F}^+_{A_o} E)$ verso θ e sia c_h una successione di funzioni continue e limitate su E che convergono verso c $\mathscr{L}^{n+1}$-q.o. e in $L^1(E)$. Utilizzando le funzioni τ_h date da (1.11) possiamo definire i seguenti sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$

$$B_h = \{\xi \in \mathbb{R}^n;\ 0 < \int_R |D\chi_{E_\xi}| \leq 2h,\ |\tau_{2j}(\xi) - \tau_{2j+1}(\xi)| \geq \frac{1}{h}$$

se $1 \leq j < h$ e $\tau_{2j+1}(\xi) < +\infty\}$.

E' allora possibile per quasi ogni $\xi \in B_h$ considerare le funzioni $u^h_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ottenute nel modo seguente:

u_ξ^h coincide in $(\tau_{2j-1}(\xi), \tau_{2j}(\xi))$ con la soluzione del problema

$$(3.3)\quad \begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + b(t,\xi)u(t) = c_h(t,\xi) \\ \\ u(\tau_{2j-1}(\xi)) = \theta_h(\tau_{2j-1}(\xi),\xi) \end{cases}$$

mentre sugli intervalli rimanenti è ottenuta per prolungamento lineare. Poniamo ora per ogni $(t,\xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\Phi_h(t,\xi) = \begin{cases} u_\xi^h(t) & \text{se} \quad \xi \in B_h \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Dalla misurabilità delle funzioni τ_h e dalla rappresentazione di $\mathcal{F}^*E$ data da (1.6) si ottiene che le Φ_h sono misurabili ed inoltre:

(a) le funzioni Φ_h sono limitate e per ogni $h \in \mathbb{N}$ esiste $l(h)$ (indipendente da ξ) tale che

$$|\Phi_h(t,\xi) - \Phi_h(s,\xi)| \leq l(h)|t-s| \quad \text{per ogni} \quad \xi \in \mathbb{R}^n;\ t,s \in \mathbb{R}\ ;$$

(b) la successione (Φ_h) converge in $L^1(E)$ e la successione $(\frac{\partial \Phi_h}{\partial t} + b\Phi_h)$ converge verso c in $L^1(E)$.

Il punto (a) segue immediatamente dalla costruzione delle funzioni Φ_h. Mostriamo che (Φ_h) è una successione di Cauchy in $L^1(E)$.

Per $j > h$ risulta:

$$\int_E |\Phi_h-\Phi_j|\,d\mathscr{L}^{n+1} = \int_{E\cap(R\times B_h)} |\Phi_h-\Phi_j|\,d\mathscr{L}^{n+1} + \int_{E\cap[R\times(B_j\setminus B_h)]} |\Phi_j|\,d\mathscr{L}^{n+1}.$$

Maggioriamo il secondo membro di questa uguaglianza; applicando il lemma di Gromwall alla soluzione di (3.3) e usando il teorema 1.2 si ha:

$$\int_{E\cap(R\times B_h)} |\Phi_h-\Phi_j|\,d\mathscr{L}^{n+1} = \int_{B_h} d\mathscr{L}^n(\xi) \int_{E_\xi} |\Phi_h-\Phi_j|\,d\mathscr{L}^1(t) =$$

$$= \int_{B_h} d\mathscr{L}^n(\xi) \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}P(E_\xi)} \int_{\tau_{2i-1}(\xi)}^{\tau_{2i}(\xi)} |\Phi_h-\Phi_j|\,d\mathscr{L}^1(t) \le$$

(3.4)

$$\le \int_{B_h} \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}P(E_\xi)} \Big[\, |\theta_h(\tau_{2i-1}(\xi),\xi)-\theta_j(\tau_{2i-1}(\xi),\xi)| +$$

$$+ \int_{\tau_{2j-1}(\xi)}^{\tau_{2j}(\xi)} |c_h-c_j|\,d\mathscr{L}^1\Big]\,d\mathscr{L}^n(\xi)\cdot e^{\|b\|_\infty T_0}\; T_0 \le$$

$$\le \Big[\int_{\mathscr{F}^+_{A_0}E} |\theta_h-\theta_j|\,\nu_t\,d\mathscr{H}^n + \int_E |c_h-c_j|\,d\mathscr{L}^{n+1}\Big]\,e^{\|b\|_\infty T_0}\; T_0$$

e analogamente

$$\text{(3.5)}\quad \int_{E\cap[R\times(B_j\setminus B_h)]} |\Phi_j|\,d\mathscr{L}^{n+1} \le \Big[\int_{\mathscr{F}^+_{A_0}E\cap[R\times(B_j\setminus B_h)]} |\theta_j|\,\nu_t\,d\mathscr{H}^n +$$

$$+ \int_{E\cap[R\times(B_j\setminus B_h)]} |c_j|\,d\mathscr{L}^{n+1}\Big]\; e^{\|b\|_\infty T_0}\; T_0.$$

Tenendo presente che le successioni (θ_h) e (c_h) sono convergenti e quindi equiassolutamente integrabili, si ottine che (Φ_h) è una successione di Cauchy in $L^1(E)$. Per concludere la dimostrazione del punto (b) notiamo che

$$\int_E \left| \frac{\partial\Phi_h}{\partial t} + b\Phi_h - c \right| d\mathscr{L}^{n+1} = \int_{E\cap(\mathbb{R}\times B_h)} |c_h - c|\, d\mathscr{L}^{n+1} + \int_{E\setminus(\mathbb{R}\times B_h)} |c|\, d\mathscr{L}^{n+1}$$

da cui segue immediatamente la tesi.

Come nel lemma 2.1, possiamo ora ottenere, per ciascun $h\in\mathbb{N}$, una successione $(\phi_{h,j})_{j\in\mathbb{N}}\subset \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^{n+1})$ tale che, per $j\to+\infty$, $\phi_{h,j}$ converge a Φ_h in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$, $\frac{\partial\phi_{h,j}}{\partial t}$ converge a $\frac{\partial\Phi_h}{\partial t}$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ e $\phi_{h,j}|_{\mathscr{F}^+_{A_o}E}$ converge in $L^1_{A_o}(\mathscr{F}^+_{A_o}E)$ verso $\Phi_h|_{\mathscr{F}^+_{A_o}E}$.

Esiste allora una applicazione crescente $j : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ tale che, posto $\psi_h = \phi_{h,j(h)}$, le funzioni ψ_h soddisfano (i),(ii) e la prima parte di (iii).

Infine, poiché

$$\int_E \frac{\partial}{\partial t} |\psi_h - \psi_i|\, d\mathscr{L}^{n+1} = -\int_{\mathscr{F}^+_{A_o}E} |\psi_h-\psi_i|\,\nu_t\, d\mathscr{H}^n - \int_{\mathscr{F}^-_{A_o}E} |\psi_h-\psi_i|\,\nu_t\, d\mathscr{H}^n$$

ne segue che

$$\|\psi_h-\psi_i\|_{L^1_{A_o}(\mathscr{F}^-_{A_o}E)} = -\int_{\mathscr{F}^-_{A_o}E} |\psi_h-\psi_i|\,\nu_t\, d\mathscr{H}^n \le \int_{\mathscr{F}^+_{A_o}E} |\psi_h-\psi_i|\,\nu_t\, d\mathscr{H}^n +$$

$$+\int_E \left| \frac{\partial\psi_h}{\partial t} - \frac{\partial\psi_i}{\partial t}\right| d\mathscr{L}^{n+1}$$

e dunque $(\psi_h|_{\mathscr{F}^-_{A_o}E})$ è una successione di Cauchy in $L^1_{A_o}(\mathscr{F}^-_{A_o}E)$.

3.3 OSSERVAZIONE. E' possibile anche ottenere che, per quasi ogni $x \in R^n$ le funzioni $\psi_h(\cdot\,,x)$ convergono uniformemente su

$$\bigcup_{j=1}^{\frac{1}{2}P(E_x)} [\tau_{2j-1}(x),\tau_{2j}(x)]$$

e che il limite è una funzione assolutamente continua su tale insieme.

Utilizzando il teorema 3.2 possiamo dimostrare il seguente teorema di esistenza e unicità.

3.4. TEOREMA. *Per ogni* $b \in L^\infty(E)$, $c \in L^1(E)$ *e* $\theta \in L^1_A(\mathscr{F}^+_A E)$ *esiste ed è unica la soluzione* $u \in L^1(E)$ *del problema* (I*) *e vale la maggiorazione*

$$(3.6)\qquad (\|u\|_{L^1(E)}+\|\zeta\|_{L^1_A(\mathscr{F}^-_A E)}) \le (1+T_o)e^{(nk+\|b\|_\infty)T_o}(\|\theta\|_{L^1_A(\mathscr{F}^+_A E)}+\|c\|_{L^1(E)}).$$

Dim. Sia (ψ_h) la successione data dal teorema 3.2 e siano $u \in L^1(E)$ il limite di (ψ_h) e $\zeta \in L^1_A(\mathscr{F}^-_A E)$ il limite di $(\psi_h|_{\mathscr{F}^-_A E})$.

Per ogni $\psi \in Lip(R^{n+1})$ si ha

$$\int_E [(\mathscr{A}\psi_h+b\psi_h)\,\psi + \psi_h(\mathscr{A}^*\psi - b\psi)]\,d\mathscr{L}^{n+1}+\int_{\mathscr{F}^*E}\psi_h\,\psi\langle A,\nu\rangle\,d\mathscr{H}^n = 0$$

da cui, passando al limite per $h \to \infty$, si ottiene che u verifica (I*).

Sia ora $v \in L^1(E)$ una soluzione generalizzata del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + bu = 0 \\[2ex] u|_{\mathscr{F}^+_A E} = 0\,. \end{cases}$$

Poiché nel teorema 3.2 è possibile scambiare i ruoli di $\mathscr{F}^+_A E$ e $\mathscr{F}^-_A E$, per ogni $f \in L^\infty(E)$ possiamo costruire una successione di funzioni lipschitziane ψ_h tali che $(\psi_{h|\mathscr{F}^-_A E})$ converge a zero in $L^1_A(\mathscr{F}^-_A E)$ e $\left(\frac{\partial\psi_h}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial\psi_i}{\partial x_i} + \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i} - b\right)\psi_h\right)_{h\in\mathbb{N}}$ converge ad f in $L^1(E)$.

Da (I*) si ha:

$$\int_E v\left[\frac{\partial\psi_h}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i\psi_h) - b\psi_h\right] d\mathscr{L}^{n+1} + \int_{\mathscr{F}^-_A E} \zeta\psi_h < A,\nu > d\mathscr{H}^n = 0$$

per cui, passando al limite per $h \to \infty$, si ottiene

$$\int_E v\ f\ d\mathscr{L}^{n+1} = 0 \qquad \text{per ogni } f \in L^\infty(E)$$

e dunque $v \equiv 0$ q.o. su E.

Infine dimostriamo la maggiorazione (3.6). Se u è la soluzione del problema (I*), effettuando la trasformazione Γ in (I*) e ponendo $\tilde{u} = u \circ \Gamma$, $\tilde{\psi} = \psi \circ \Gamma$ e così via, si ha:

$$\int_{\tilde{E}} \{\tilde{u}[\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial t} + (\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \circ \Gamma - \tilde{b})\tilde{\psi}] + \tilde{c}\,\tilde{\psi}\}\, J_\Gamma\, d\mathscr{L}^{n+1} +$$

$$+\int_{\mathscr{F}^+\tilde{E}} \tilde{\theta}\tilde{\psi}\, J_\Gamma\, \nu_t\, d\mathscr{H}^n + \int_{\mathscr{F}^-\tilde{E}} \tilde{\zeta}\tilde{\psi}\, J_\Gamma\, \nu_t\, d\mathscr{H}^n = 0$$

per cui, posto $E = \tilde{b} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \circ \Gamma$, la funzione $\tilde{u}\, J_\Gamma$ risulta essere soluzione generalizzata su $\tilde{E}$ del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = B\, u = \tilde{c}\, J_\Gamma \\ u_{|\mathscr{F}^+\tilde{E}} = \tilde{\theta}\, J_\Gamma \end{cases} .$$

Utilizzando per $\tilde{u}\, J_\Gamma$ le funzioni approssimanti Φ_h costruit nel corso della dimostrazione del teorema 3.2 e usando l stesso procedimento seguito per avere (3.4) si ottiene:

$$\|\tilde{u}J_\Gamma\|_{L^1(\tilde{E})} \leq T_o\, e^{(nk+\|b\|_\infty)T_o}(\|\tilde{\theta}J_\Gamma\|_{L^1_{A_o}(\mathscr{F}^+\tilde{E})} + \|\tilde{c}J_\Gamma\|_{L^1(\tilde{\tilde{E}})})$$

e quindi

$$(3.7) \qquad \|u\|_{L^1(E)} \leq T_o\, e^{(nk+\|b\|_\infty)T_o}(\|\theta\|_{L^1_A(\mathscr{F}^+_A E)} + \|c\|_{L^1(E)}).$$

Analogamente, usando ancora le funzioni approssimanti Φ_h, si ha

$$\int_{\mathscr{F}-\tilde{E}} |\Phi_h|\, |\nu_t|\, d\mathscr{H}^n = \int_{B_h} \sum_{j=1}^{\frac{1}{2}P(\tilde{E}_\xi)} |\Phi_h(\tau_{2j}(\xi),\xi)|\, d\mathscr{L}^n(\xi) \leq$$

$$\leq \int_{B_h} [\sum_{j=1}^{\frac{1}{2}P(\tilde{E}_\xi)} (|\Phi_h(\tau_{2j-1}(\xi),\xi)| + \int_{\tau_{2j-1}(\xi)}^{\tau_{2j}(\xi)} |\tilde{c}_h(s,\xi) J_\Gamma(s,\xi) ds] e^{(nk+\|b\|_\infty)T_o} d\mathscr{L}^n($$

per cui risulta

$$(3.8) \qquad \|\zeta\|_{L^1_A(\mathscr{F}^-_A E)} \leq e^{(nk+\|b\|_\infty)T_o}(\|\theta\|_{L^1_A(\mathscr{F}^+_A E)} + \|c\|_{L^1(E)}) ;$$

sommando (3.7) e (3.8) si ha (3.6).

3.5. OSSERVAZIONE. Dall'osservazione 3.3 segue che la soluzione del problema (I*) data dal teorema 3.4 è $\mathscr{L}^{n+1}$-equivalente a una funzione assolutamente continua su quasi ogni linea caratteristica che, ristretta a tali linee, assume il dato al bordo con continuità.

Definiamo ora per un generico campo $A = (1, a_1, \ldots, a_n)$ verificante l'ipotesi (H_1) l'analogo della trasformazione T_E definita in (1.19).

3.6. DEFINIZIONE. *Per ogni insieme* E *limitato di perimetro finito, posto* $E=\Gamma^{-1}(E)$, *indichiamo con* $T_{E,A} : \mathscr{F}_A^+E \to \mathscr{F}_A^-E$ *la trasformazione data da:*

$$T_{E,A} = \Gamma \circ T_E \circ \Gamma^{-1} .$$

E facile verificare che $T_{E,A}$ è ben definita $\mathscr{H}^n$-q.o. e che gode delle stesse proprietà di T_E. Vale infine la seguente

3.7. PROPOSIZIONE. *Esistono* $m > 0$ *e* $\sigma \in L^\infty(\mathscr{F}_A^+E)$ *tali che* $m \le \sigma \le \frac{1}{m}$ $\mathscr{H}^n$*-quasi ovunque su* $\mathscr{F}_A^+E$ *e per ogni* $\psi \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^{n+1})$ *risulta:*

$$(3.9) \qquad \int_{\mathscr{F}_A^-E} \psi \langle A, \nu \rangle \, d\mathscr{H}^n = - \int_{\mathscr{F}_A^+E} \psi \circ T_{E,A} \langle A, \nu \rangle \sigma \, d\mathscr{H}^n .$$

Dim. Dalla proposizione 2.7 si ha

$$\int_{\mathscr{F}_A^-E} \psi \langle A, \nu \rangle d\mathscr{H}^n = \int_{\mathscr{F}^-\tilde{E}} (\psi \circ \Gamma) J_\Gamma \nu_t \, d\mathscr{H}^n$$

mentre risolvendo su $\tilde{E}$ il problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \\ u|_{\mathcal{F}^-\tilde{E}} = (\psi \circ \Gamma) J_\Gamma \end{cases}$$

utilizzando la trasformazione $T_{\tilde{E}}$, si ottiene subito

$$\int_{\mathcal{F}^-\tilde{E}} (\psi \circ \Gamma) J_\Gamma \nu_t \, d\mathcal{H}^n = -\int_{\mathcal{F}^+\tilde{E}} (\psi \circ \Gamma \circ T_{\tilde{E}})(J_\Gamma \circ T_{\tilde{E}}) \nu_t \, d\mathcal{H}^n.$$

Per la (2.4), valgono $\mathcal{L}^{n+1}$-q.o. su $\tilde{E}$ le disuguaglianze $e^{-nkT_0} \leq J_\Gamma \leq e^{nkT_0}$ ed allora, posto $\sigma = (J_\Gamma \circ T_{\tilde{E}} \circ \Gamma^{-1})(J_\Gamma \circ \Gamma^{-1})^{-1}$, utilizzando ancora la proposizione 2.7 risulta:

$$\int_{\mathcal{F}_A^- E} \psi \langle A, \nu \rangle d\mathcal{H}^n = -\int_{\mathcal{F}^+\tilde{E}} (\psi \circ \Gamma \circ T_{\tilde{E}})(J_\Gamma \circ T_E) \nu_t \, d\mathcal{H}^n = -\int_{\mathcal{F}_A^+ E} (\psi \circ T_{E,A}) \langle A, \nu \rangle \sigma d\mathcal{H}^n.$$

4. In quest'ultimo paragrafo affrontiamo lo studio del problema di tipo (II) ottenendo un teorema di esistenza e unicità.

Dati un campo vettoriale $A = (1, a_1, \ldots, a_n)$ per cui vale l'ipotesi (H_1), un insieme E limitato di perimetro finito in $\mathbb{R}^{n+1}$ e due sottoinsiemi $\mathcal{H}^n$-misurabili $\Sigma_+ \subset \mathcal{F}_A^+ E$ e $\Sigma_- \subset \mathcal{F}_A^- E$, sia θ_0 una funzione $\mathcal{H}^n$-misurabile e limitata su $S_0 = \mathcal{F}_A^+ E \setminus \Sigma_+$ e $T : \Sigma_- \to \Sigma_+$ una applicazione bigettiva $\mathcal{H}^n$-misurabile insieme con la sua inversa.

4.1. DEFINIZIONE. *Assegnati* $b, c \in L^\infty(E)$ *e* $\theta_0 \in L^\infty(S_0)$, *diremo che* $u \in L^\infty(E)$ *è soluzione generalizzata del problema*

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i}+b\,u=c \\ \\ u_{|S_o}=\theta_o \qquad u_{|\Sigma_+}=u_{|\Sigma_-}\circ T^{-1} \end{cases}$$

se esiste $\zeta\in L^\infty(\Sigma_+\cup\mathscr{F}_A^- E)$ *tale che per ogni* $\psi\in\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^{n+1})$ *valga*

$$(\mathrm{II}^*)\qquad \int_E [u(\mathscr{A}^*\psi-b\psi)+c\psi]\,d\mathscr{L}^{n+1}+\int_{S_o}\theta_o\psi\langle A,\nu\rangle d\mathscr{H}^n+\int_{\Sigma_+\cup\mathscr{F}_A^- E}\zeta\psi\langle A,\nu\rangle d\mathscr{H}^n=0$$

ed inoltre

$$\zeta_{|\Sigma_+}=\zeta_{|\Sigma_-}\circ T^{-1}\,.$$

Per avere un teorema di esistenza e unicità per il problema (II) facciamo su T la seguente ipotesi:

(H_2) $T:\Sigma_-\to\Sigma_+$ *è bigettiva,* $\mathscr{H}^n$*-misurabile insieme con la sua inversa ed inoltre:*

(a) *posto* $T(t,x)=(t',x')$ *si ha* $t'\geq t$;

(b) *esiste* $\sigma:\Sigma_-\to\mathbb{R}$ $\mathscr{H}^n$*-misurabile con* $0\leq\sigma(t,x)\leq e^{m(t'-t)}$ $\mathscr{H}^n$-q.o. *su* Σ_- *(dove* $m>0$ *e* t' *come in (a)) tale che per ogni* $\psi\in\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^{n+1})$ *si ha*

$$(4.1)\qquad \int_{\Sigma_+}\psi\langle A,\nu\rangle d\mathscr{H}^n=-\int_{\Sigma_-}(\psi\circ T)\sigma\,\langle A,\nu\rangle d\mathscr{H}^n.$$

Ricordando che $T_{E,A}$ è la trasformazione data dalla definizione 3.6, possiamo dimostrare il seguente

4.2. LEMMA. *Sia* E *un insieme limitato di perimetro finito in* $\mathbb{R}^{n+1}$ *e supponiamo che* A *verifichi l'ipotesi* (H_1) *e* T *verifichi* *l'ipotesi* (H_2). *Posto*:

$$S_o = \mathscr{F}_A^+ E \setminus \Sigma_+ \ , \ S_{2j+1} = T_{E,A}(S_{2j}), \ S_{2j+2} = T(S_{2j+1} \cap \Sigma_-)$$

$(j = 0,1,2,\ldots.)$, *si ha*

$$\mathscr{H}^n((\mathscr{F}_A^+ E \cup \mathscr{F}_A^- E) \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} S_j) = 0. \tag{4.2}$$

Dim. Sia $N = (\mathscr{F}_A^+ E \cup \mathscr{F}_A^- E) \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} S_j$ e definiamo $z : \mathscr{F}_A^+ E \cup \Sigma_- \to \mathscr{F}_A^- E \cup \Sigma_+$ nel seguente modo: $z \equiv T_{E,A}$ su $\mathscr{F}_A^+ E$ e $z \equiv T$ su Σ_-. Dalla proposizione 3.7 e dall'ipotesi (H_2) segue che esistono $\tilde{m} > 0$ e $\tilde{\sigma} : \mathscr{F}_A^+ E \cup \Sigma_- \to \mathbb{R}$ $\mathscr{H}^n$-misurabile con

$$0 \leq \tilde{\sigma}(t,x) \leq e^{\tilde{m}(t'-t)} \tag{4.3}$$

dove t' è dato da $z(t,x) = (t',x'))$ per cui si ha

$$\int_{\mathscr{F}_A^- E \cup \Sigma_+} \psi |<A,\nu>| d\mathscr{H}^n = \int_{\mathscr{F}_A^+ E \cup \Sigma_-} (\psi \circ z) |<A,\nu>| \tilde{\sigma} \, d\mathscr{H}^n. \tag{4.4}$$

E' immediato verificare che $z^{-1}(N) \subset N$ ed allora sia $N' \subseteq N$ tale che $z(N') = N$. Se inchiamo con π la proiezione $\pi(t,x)=t$, risulta, per $m' > 0$:

$$\int_N e^{-(\tilde{m}+m')\pi} |<A,\nu>| d\mathscr{H}^n = \int_{N'} e^{-(\tilde{m}+m')\pi \circ z} |<A,\nu>| \tilde{\sigma} \, d\mathscr{H}^n \leq$$

$$\leq \int_{N'} e^{-(\tilde{m}+m')\pi \circ z} |<A,\nu>| e^{\tilde{m}(\pi \circ z - \pi)} d\mathscr{H}^n = \int_{N'} e^{-m'\pi \circ z} e^{-\tilde{m}\pi} |<A,\nu>| d\mathscr{H}^n \leq$$

$$\leq \int_{N \cap \mathscr{F}_A^+ E} e^{-m'\pi \circ z} e^{-\tilde{m}\pi} |<A,\nu>| d\mathscr{H}^n + \int_{N' \cap \mathscr{F}_A^- E} e^{-m'\pi \circ z} e^{-\tilde{m}\pi} |<A,\nu>| d\mathscr{H}^n \leq$$

$$\leq \int_{N\cap\mathcal{F}_A^+E} e^{-m'\pi}\, e^{-\tilde{m}\pi}\, |\langle A,\nu\rangle|\, d\mathcal{H}^n + \int_{N'\cap\mathcal{F}_A^-E} e^{-m'\pi}\, e^{-\tilde{m}\pi}\, |\langle A,\nu\rangle|\, d\mathcal{H}^n$$

e nell'ultima maggiorazione vale la disuguaglianza stretta se $\mathcal{H}^n(N\cap\mathcal{F}_A^+E)\neq 0$. Ma in questo caso avremmo:

$$\int_N e^{-(\tilde{m}+m')\pi}|\langle A,\nu\rangle|\, d\mathcal{H}^n < \int_N e^{-(\tilde{m}+m')\pi}\, |\langle A,\nu\rangle|\, d\mathcal{H}^n$$

e quindi deve essere $\mathcal{F}^n(N\cap\mathcal{F}_A^+E) = 0$. D'altra parte $N\cap\mathcal{F}_A^-E \subseteq z(N\cap\mathcal{F}_A^+E)$ per cui, per (4.3) e (4.4), risulta anche $\mathcal{H}^n(N\cap\mathcal{F}_A^-E) = 0$.

Possiamo ora dimostrare un teorema di esistenza e unicità per il problema (II).

4.3. TEOREMA. *Siano* A *un campo di vettori verificante l'ipotesi* (H_1), $E\subset[0,T_o]\times\mathbb{R}^n$ *un insieme limitato di perimetro finito e* T *una trasformazione verificante l'ipotesi* (H_2). *Per ogni* $b,c\in L^\infty(E)$ *e* $\theta_o\in L^\infty(S_o)$ *esiste unica* $u\in L^\infty(E)$ *soluzione generalizzata del problema* (II).

Dim. Utilizzando le notazioni del lemma 4.2 abbiamo che, a meno di insiemi di misura $\mathcal{H}^n$-nulla, $\mathcal{F}_A^+E = \bigcup_{j=0}^{\infty} S_{2j}$. Poniamo allora

$$\theta_1 = \begin{cases} \theta_o & \text{su } S_o \\ 0 & \text{su } \bigcup_{j=1}^{\infty} S_{2j}\ . \end{cases}$$

Dal teorema 3.4 sappiamo che esiste unica u_1 soluzione generalizzata del problema (I) con $u_{|\mathscr{F}_A^+ E} = \theta_1$ e sia $\zeta_1 = u_{1|\mathscr{F}_A^- E}$.

Per induzione possiamo ottenere tre successioni $(\theta_i),(u_i)$, (ζ_i) tali che:

$$\theta_i = \begin{cases} \theta_{i-1} & \text{su } \bigcup_{j=0}^{i-2} S_{2j} \\ \zeta_{i-1}\, T^{-1} & \text{su } S_{2(i-1)} \\ 0 & \text{su } \bigcup_{j=i}^{\infty} S_{2j} \end{cases} ;$$

u_i è la soluzione generalizzata del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} a_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} + b\, u = c \\ u_{|\mathscr{F}_A^+ E} = \theta_i \end{cases}$$

e $\zeta_i = u_{i|\mathscr{F}_A^- E}$. Inoltre, come nella dimostrazione del teorema 3.4, posto $c_o = e^{\|b\|_\infty T_o}(\|\theta_o\|_\infty + \|c\|_\infty T_o)$, si ha:

$$\|u_i\|_\infty \,,\ \|\theta_i\|_\infty \,,\ \|\zeta_i\|_\infty \le c_o$$

ed allora, per la definizione di θ_i, se $h > i$ otteniamo

$$\|\theta_h - \theta_i\|_{L^1_A(\mathscr{F}_A^+ E)} \le 2\, c_o \mathscr{H}^n(\bigcup_{j=i}^{\infty} S_{2j}).$$

Utilizzando la maggiorazione (3.6) otteniamo quindi che (u_i) converge in $L^1(E)$ e $(\theta_i),(\zeta_i)$ convergono in L^1_A. Poiché per ogni $i \in \mathbb{N}$ e per ogni $\psi \in Lip(\mathbb{R}^{n+1})$ risulta

$$\int_E [u_i(\mathscr{A} * \psi - b\psi) + c\psi]\, d\mathscr{L}^{n+1} + \int_{\mathscr{F}_A^+ E} \theta_i \psi < A,\nu > d\mathscr{H}^n + \int_{\mathscr{F}_A^- E} \zeta_i \psi < A,\nu > d\mathscr{H}^n = 0$$

passando al limite per $i \to +\infty$ e tenendo presente come sono state costruite le funzioni θ_i e ζ_i si ha che esiste una soluzione generalizzata del problema (II). L'unicità segue immediatamente dall'osservazione 3.5 e dal lemma 4.2.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. ANZELLOTTI: *Pairings between measures and bounded functions and compensated compactness* Ann. Mat. Pura e Appl., s.IV, t. CXXXV (1983), 293-313.

[2] C. BARDOS: *Problèmes aux limites pour des équations aux dérivées partielles du premier ordre a coefficients réels; théorèmes d'approximation; application a l'équation de trasport.* Ann.Scient. Ec. Norm.Sup.,s.4,t.3 (1970), 185-233.

[3] M. CARRIERO-A.LEACI-E.PASCALI: *Convergenza per l'equazione degli integrali primi associata al problema del rimbalzo elastico unidimensionale.* Ann.Mat.Pura e Appl.,s.IV,t.CXXXIII (1983),227-256.

[4] M. CARRIERO-A.LEACI-E.PASCALI: *Sulle soluzioni di equazioni alle derivate parziali del primo ordine in insiemi di perimetro finito con termine noto misura.* (In corso di stampa su Rend.Sem.Mat. Padova).

[5] E.A. CODDINGTON-N. LEVINSON: "Theory of Ordinary Differential Equations", McGraw-Hill, N.Y., 1955.

[6] E. DE GIORGI: *Su una teoria generale della misura* (r-1)-*dimensionale in uno spazio ad* r *dimensioni.* Ann.Mat.Pura e Appl. s.IV, t. XXXVI (1954), 191-213.

[7] E. DE GIORGI: *Nuovi teoremi relativi alle misure* (r-1)-*dimensionali in uno spazio ad* r *dimensioni.* Ricerche Mat., v.IV(1955), 95-113.

[8] E. DE GIORGI-F. COLOMBINI-L.C.PICCININI: "Frontiere orientate di misura minima e questioni collegate". Quaderni S.N.S.Pisa 1972.

[9] H. FEDERER: "Geometric Measure Theory". Springer-Verlag,N.Y.1969.

[10] A. LEACI: *Sulle soluzioni di equazioni alle derivate parziali del primo ordine in insiemi di perimetro finito.* Atti Acc.Naz. Lincei Rend. Cl.Sci.Fis.Mat.Natur.,v.LXXI (1981), 55-59.

[11] M. MARCUS-V.J.MIZEL: *Nemitsky operators on Sobolev spaces*, Arch. Rational Mech. Anal.,v.51(1973), 347-370.

[12] M.MIRANDA: *Superfici cartesiane generalizzate ed insiemi di perimetro localmente finito sui prodotti cartesiani*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., v.18(1964), 515-542.

Ricevuto il 30/5/1984