Note di Matematica, Vol.IV, 87-96(1984)

SU ALCUNE MASSE FORTEMENTE ATOMICHE (*)

Enzo BARONE e Domenico LENZI (**)

SUMMARY. *In this paper we prove that if* μ *is a positive charge on* $\mathbb{N}$ *such that every two-valued charge* $\beta \leq \mu$ *determines a principal ultrafilter on* $\mathbb{N}$, *then for every* $A \subset \mathbb{N}$, *the range* $\mu(\mathscr{P}(A))$ *is a closed set.*

N.1. **INTRODUZIONE.** In [1] G.H. GRECO e P.M.MOSCHEN hanno introdotto la nozione di massa fortemente atomica ed hanno provato che se μ è una massa a valori reali positivi su di un'algebra Booleana $\mathscr{A}$ tale che valga la "proprietà di chiusura forte" (p.c.f.) (cioé per ogni $A \in \mathscr{A}$, $\mu(\mathscr{A} \cap \mathscr{P}(A))$ è chiuso), allora μ, se non è continua, deve essere fortemente atomica. Tuttora non si è in grado di dire se tale risultato può essere invertito. In [1] gli Autori prendono anche in considerazione un tipo molto semplice di massa fortemente atomica e si domandano se essa ha codominio chiuso; di rimando K.P.S.BHASKARA RAO e M. BHASKARA RAO in [6] affermano, senza provarlo, che tale codominio non è chiuso. Noi in questo lavoro dimostreremo che un'ampia classe di masse fortemente atomiche, nella quale rientra la

(*) Ricerca effettuata con i fondi erogati dal Ministero della P.I.

(**)Dipartimento di Matematica - Università degli Studi - Lecce.

massa di cui al quesito di Greco e Moschen, gode della p.c.f. Le ricerche da noi condotte (ed alcune sensazioni difficili da esprimere) ci portano a pensare che ogni massa fortemente atomica goda della p.c.f.; tuttavia questa per ora è solo una congettura.

Noi, per semplicità descrittiva, ci occuperemo di algebre d'insiemi; comunque, grazie alla classica immersione di Stone (cfr. [5] pag.170), i risultati valgono per un'algebra Booleana qualsiasi.

N.2. PREMESSE E DEFINIZIONI.

Sia X un insieme non vuoto ed $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ un'algebra d'insiemi (cfr. ad esempio [6]. Una funzione $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ si dice *massa* o funzione d'insieme finitamente additiva e limitata (o a variazione limitata) se

a) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ per ogni $A, B \in \mathcal{A}$ con $A \cap B = \emptyset$

b) $\sup \{|\mu(A)| : A \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

Se invece della a) vale la condizione più forte

a') $\mu(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$ per ogni $\{A_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$ a due a due disgiunti, con $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$,

si parla di *misura* limitata.

Si definisce *variazione totale* $|\mu|$ di una massa μ, la funzione definita ponendo, per ogni $A \in \mathcal{A}$

$$|\mu|(A) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |\mu(B_i)|;\ \text{con } \{B_1, \ldots, B_n\} \text{ partizione di } A \text{ in } \mathcal{A}\}.$$

E' facile verificare che anche $|\mu|$ è una massa.

Se μ è una massa sull'algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, si definisce *supporto* *di* μ:

$$\text{supp } \mu = \{A \in \mathscr{A} : |\mu|(A) = |\mu|(X)\} .$$

Tale insieme è un filtro di $\mathscr{A}$ ed è un ultrafiltro (cfr. [6]) se e solo se μ assume solo due valori. Per tale motivo, nel seguito, chiameremo *massa ultrafiltro* ogni massa del tipo $\mu : \mathscr{A} \to \{0,1\}$ e la denoteremo con la stessa lettera β con la quale indicheremo l'ultrafiltro supporto $\{A \in \mathscr{A} : \mu(A) = 1\}$. Si vede facilmente che una massa ultrafiltro β è una misura se e solo se β è un ultrafiltro chiuso rispetto all'intersezione numerabile (δ-ultrafiltro).

Si dice che una massa $\mu \geq 0$ è *continua* se per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $\{A_1, \ldots, A_n\}$ di X in $\mathscr{A}$ tale che $\mu(A_j) < \varepsilon$.

Ricordiamo il seguente fondamentale risultato dovuto ad A. SOBCZYK e P.C.HAMMER (cfr. [3]) ed a B.DE FINETTI (cfr. |2|).

TEOREMA (2.1). *Se* $\mu : \mathscr{A} \to [0,+\infty)$ *è una massa sull'algebra* $\mathscr{A} \subset (X)$, *allora* μ *è rappresentabile in modo unico come*

$$\mu = \gamma + \sum_{n \geq 1} a_n \beta_n \tag{1}$$

con γ *massa continua* $a_n \geq 0$ e $\beta_1 \beta_2 \cdot \cdot \beta_n \cdot \cdot$ *ultrafiltri* (masse a due valori) *a due a due diversi fra loro.*

OSSERVAZIONE. L'uguaglianza (1) va intesa nel senso che per ogni $A \in \mathscr{A}$ risulta $\mu(A) = \gamma(A) + \sum_{n \in M} a_n$, dove $M = \{n \in \mathbb{N} : A \in \beta_n\}$. Inoltre l'insieme $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è costituito da tutti e soli gli ultrafiltri β di $\mathscr{A}$ per i quali $\inf_{A \in \beta} \mu(A) > 0$.

Senza ledere la generalità del discorso, nel seguito supporremo che nella (1) sia $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$ e porremo $\alpha = \sum_{n\geq 1} a_n \beta_n$.

Si dice che $A \in \mathscr{A}$ è un μ-*atomo* se $\mu(A) > 0$ e per ogni $B \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{A} =: \mathscr{A}_A$ si ha $\mu(B) \in \{0, \mu(A)\}$. Se μ ammette un μ-atomo allora è detta *atomica*.

In [1] viene introdotto un particolare tipo di masse atomiche, quelle fortemente atomiche, che, come vedremo, hanno una notevole importanza per le proprietà del codominio. Ricordiamo che una massa $\mu \geq 0$ è detta *fortemente atomica* (f.a) se essa è atomica e per ogni massa a due valori β tale che $0 \leq \beta \leq \mu$ esiste un μ-atomo A tale che $\beta(A) > 0$; il che equivale a dire (per l'unicità della decomposizione (1) di μ) che per ogni ultrafiltro β_n relativo alla decomposizione (1) di μ, esiste un μ-atomo $A_n \in \beta_n$.

E' facile dare sia esempi di masse atomiche non f.a., che esempi di masse f.a. Noi qui ci limitiamo ad osservare che se $\beta_n = \{A \subset \mathbb{N} : n \in A\}$ e $\delta : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ è una massa continua, allora la massa $\mu = \delta + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \beta_n$ è f.a. (cfr. [1] pag.112).

N.3. IL CODOMINIO DELLE MASSE.

Per le masse continue si ha il seguente fondamentale

TEOREMA (3.1). *Se* $\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty)$ *è una massa sulla* σ-*algebra* $\mathscr{A}$ *di parti di* X, *allora* μ *è continua se e solo se:*

(2) $$\forall A \in \mathscr{A} : \mu(\mathscr{A}_A) = [0, \mu(A)].$$

La proprietà (2) è nota come proprietà di Darboux (cfr. [7] pag. 25). Più in generale noi diremo che una massa $\mu \geq 0$ sull'algebra $\mathscr{A}$ gode della *proprietà di chiusura forte* (p.c.f.) se per ogni $A \in \mathscr{A}$ l'insieme $\mu(\mathscr{A}_A)$ è chiuso.

Per le masse non continue si ha il seguente risultato (cfr. [1] lemma 2.8)).

TEOREMA (3.2). *Se μ è una massa non continua sull'algebra $\mathscr{A}$ di parti di X, che verifica la* p.c.f., *allora* μ è f.a..

Per altri risultati sul codominio di una massa si vedano anche [4], [8], [9], [10], [11] e [12] ai quali si rinvia per una bibliografia più completa.

E' naturale chiedersi se vale l'inverso del Teorema (3.2). A tal proposito in [1] gli Autori si domandano se nel caso della massa relativa all'esempio di cui alla fine del N.2., il codominio è chiuso oppure no. Noi proveremo che tale codominio è chiuso; ciò in conseguenza del fatto che un'ampia classe di masse, tra cui rientra la suddetta, gode della p.c.f.

TEOREMA (3.3). *Sia* $\mu : \mathscr{A} \to [0,+\infty)$ *una massa sulla* σ-*algebra* $\mathscr{A}$ *di parti di* X, *del tipo* $\mu = \gamma + \alpha$, *con* γ *continua ed* α σ-*additiva.*

Supponiamo inoltre che X *sia unione di una successione crescente* $(F_m)_{m\geq 0}$ *di elementi di* $\mathscr{A}$, *con* $\gamma(F_m) = 0$ *per ogni* m. *Allora* $[0,\gamma(X)] \subset \mu(\mathscr{A})$.

Dimostrazione. Senza ledere la generalità, supporremo che sia $\gamma(X) = 1$. Per la continuità di γ, esiste in $\mathscr{A}$ una partizione $(T_n)_{n\geq 1}$ di X, tale che si abbia $\gamma(T_n) = 2^{-n}$ per ogni n.
Poniamo $T_o = \emptyset$ e $T_{n,m} = T_n - F_m$. Risulta $\gamma(T_{n,m}) = \gamma(T_n)$; inoltre γ e quindi μ è σ-additiva sulla sotto-σ-algebra di $\mathscr{A}$ generata dai $T_{n,m}$.
Infatti se $S = \bigcup_{k\geq 0} S_k$ ed $S_k = T_{n_k} - F_{m_k}$, risulta

$$\gamma(S) \leq \gamma(\bigcup_{k\geq 0} T_{n_k}) = \sum_{k\geq 0} \gamma(T_{n_k}) = \sum_{k\geq 0} \gamma(S_k) \leq \gamma(S).$$

Fissato $x \in [0,1]$, che possiamo supporre diverso da 0, mostriamo che esiste $S \in \mathscr{A}$, tale che $\mu(S) = x$. A questo scopo, per quanto appena detto, basterà costruire due successioni $(n_i)_{i\geq 0}$ ed $(m_i)_{i\geq 0}$ d'interi positivi, tali che, posto

$$(3) \qquad S_i = T_{n_i} - F_{m_i}$$

risulti, per ogni intero positivo k,

$$(4) \qquad 2^{-n_{k+1}} < x - \sum_{0\leq i\leq k} \mu(S_i) \leq 2^{-n_k}.$$

Infatti ponendo $S = \sum_{k\geq 0} S_k$, si avrà per la (4)

$$\mu(S) = \sum_{k\geq 0} \mu(S_k) = x.$$

Ora, per costruire le successioni $(n_i)_i$ ed $(m_i)_i$ si può procedere per induzione. Anzitutto si ponga $n_o = m_o = 0$. Supposto di aver già costruito, per un certo intero $k \geq 1$, gli interi n_i, m_i, con $0 \leq i \leq k$, in modo tale che sia verificata la relazione

$$\sum_{0<1<k} \mu(S_i) < x,$$

si ponga

$$(5) \qquad n_k = \min\{ n : 2^{-n} < x - \sum_{0\leq i<k} \mu(S_i) \} .$$

Osservato che

$$\alpha(T_n - F_m) \leq \alpha(F_m^c) \downarrow 0$$

risulta

$$\lim_m \alpha(T_n - F_m) = 0$$

uniformente rispetto ad n e quindi

$$\lim_m \mu(T_{n_k} - F_m) = \gamma(T_{n_k}) = 2^{-n_k} < x - \sum_{0\leq i<k} \mu(S_i).$$

Ha allora senso porre:

$$m_k = \min\{m: \mu(T_{n_k} - F_m) < x - \sum_{0\leq i<k} \mu(S_i)\}$$

Sussiste quindi, per ogni $k \geq 0$ la prima delle diseguaglianze (4). Per quanto riguarda la seconda delle diseguaglianze (4), basta osservare che essa è evidente per $k = 0$ (riducendosi ad $x \leq 1$), mentre, per $k \geq 1$, essa discende dall'essere, in virtù di (5),

$$x - \sum_{0\leq i<k} \mu(S_i) \leq 2^{-(n_k-1)} = 2\cdot 2^{-n_k} = 2^{-n_k} + \gamma(T_{n_k}) =$$

$$= 2^{-n_k} + \gamma(S_k) \leq 2^{-n_k} + \mu(S_k).$$

C.V.D.

COROLLARIO (3.4). *Nelle ipotesi del teorema precedente se* $\gamma(X) \geq \alpha(X)$, *allora* $\mu(\mathscr{A}) = [0, \mu(X)]$.

Dimostrazione. Per il teorema precedente $[0,\gamma(X)] \subset \mu(\mathscr{A})$. Quando $\mu(A)$ descrive $[0,\gamma(X)]$, $\mu(A^c)$ descrive $[\alpha(X),\mu(X)]$ e quindi $[\alpha(X),\mu(X)] \subset \mu(\mathscr{A})$. Poiché per ipotesi $\alpha(X) \leq \gamma(X)$, segue l'asserto.

C.V.D.

COROLLARIO (3.5). *Siano* $\alpha, \gamma : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to [0,+\infty)$ *con* γ *massa continua tale che* $\gamma(\mathbb{N}) = c$, $\alpha = \sum_{n\geq 1} a_n \beta_n$ *con* $\sum_{n\geq 1} a_n = a$ *e* $\beta_n = \{B \subset \mathbb{N} : n \in B\}$ *e* $\mu = \gamma + \alpha$.

1) *Se* $a \leq c$, *allora* $\mu(\mathscr{P}(\mathbb{N})) = [0,a+c]$

2) *Se* $a > c$, *allora* $\mu(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$ *è unione finita d'intervalli chiusi.*

Dimostrazione. Basta osservare che siamo nelle ipotesi del teorema (3.3) con $F_m = \{0,1,2,\dots,m\}$.

La 1) segue dal corollario (3.4).

Per la 2) si osservi che se m è il primo naturale per il quale $a' := \sum_{n>m} a_n \leq c$, posto $\nu = \gamma + \sum_{n>m} a_n \beta_n$, per quanto già provato risulta $\nu(\mathscr{P}(\mathbb{N})) = [0,c+a']$, onde $\mu(\mathscr{P}(\mathbb{N})) = \bigcup_b [b,b+c+a']$ dove $b = \sum_{i\in I} a_i$, con $I \subset \{1,2,\dots,m\}$ (essendo $\sum_{i\in\emptyset} a_i = 0$).

C.V.D.

Concludiamo con seguente

TEOREMA (3.6) *La massa* γ di cui al Corollario precedente, gode della p.c.f.

Dimostrazione. Sia $A \subset N$. Se A è finito, allora anche $\mu(\mathscr{A}_A)$, dove $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$, è finito e quindi chiuso. Se A è infinito e $\gamma(A) = 0$, allora la restrizione di μ ad $\mathscr{A}_A$ è una misura, per cui $(\mu(\mathscr{A}_A) \subseteq [0,\mu(A)] = [0,\sum_{n\in A} a_n]$ è un chiuso (cfr. [9]). Infine sia A infinito e $\gamma(A) > 0$. Poiché la restrizione μ' di μ ad $\mathscr{A}_A$ è data da $\gamma' + \sum_{n\in A} a_n \beta'_n$, dove γ' è la restrizione di γ ad $\mathscr{A}_A$ e $\beta'_n = \{C \in \mathscr{A}_A; n \in C\}$, e poiché γ' è continua grazie al Teorema (3.1), applicando il corollario (3.5) alla massa μ' (dopo un piccolo aggiustamento dovuto al fatto che A, pur potendo essere diverso da $\mathbb{N}$, è sempre numerabile) si ha subito la tesi.

C.V.D.

BIBLIOGRAFIA

[1] G.H.GRECO,M.P.MOSCHEN, "*Algebre d'insiemi e misure finitamente additive*", Boll.U.M.I. (5) 18-B(1982), 103-117.

[2] B.DE FINETTI, "*Probability induction and statistic*", J.Wiley (1972).

[3] A.SOBCZYK, P.C.HAMMER, "*A decomposition of additive set functions*", Duke Math.J.11 (1944), 839-846.

[4] A.SOBCZYK, P.C.HAMMER, "*The ranges of additive set functions*", Duke Math.J.11 (1944), 847-851.

[5] P.R.HALMOS, "*Measure Theory*", Springer (1974).

[6] K.P.S.BHASKARA RAO M.BHASKARA RAO, "*Theory of charges-A study of finitely additive measure*", Academic Press (1983).

[7] N.DINCULEANU, "*Vector measures*", Pergamon Press (1967).

[8] G.H.GRECO, "*Sulle misure finite definite su un'algebra di Boole*", Ann. Univ. Ferrara, Sez.VII, Sc.Mat. 26 (1980), 213-218.

[9] E.BARONE, "*Sul codominio di misure e masse finite*", Rend.di Mat. 3 (1983), 229-238.

[10] E.BARONE, "*Alcune proprietà del codominio di misure di probabilità*", in corso di stampa su Rend. di Mat.

[11] D.LENZI, "*Sulle funzioni finitamente additive in un'algebra Booleana*", Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981)

[12] D.LENZI, "*Sul codominio di una misura di probabilità priva di componente continua*",in corso di stampa sul Bollettino U.M.I.

Ricevuto il 13/3/1984