Note di Matematica Vol.IV, 65-78(1984)

SU UNO SPAZIO AFFINE-METRICO DI DIMENSIONE QUATTRO E A DEBOLE STRUTTURA DI INCIDENZA COSTRUITO SU UN CAMPO DI GALOIS (*)

Gaetano VOLZONE(**)

Summary. - *In this work by means of the harmonic homologies, which commute with a polarity of a projective three space over a Galois field of odd order, a metric affine space of dimension four with a weak structure of incidence is constructed. Successively other hyperplanes are introduced, in order to obtain the incidence structure of an affine space.*

INTRODUZIONE. In un sottospazio ω di dimensione tre di PG(4,q) con q dispari viene fissata una quadrica Q a punti ellittici. Indicata con Φ la polarità definita da tale quadrica si considerano le omologie armoniche di PG(4,q) la cui restrizione a ω è permutabile con Φ .

Con tali omologie armoniche e particolari sistemi di esse si costruisce uno spazio metrico, che inizialmente ha una debole struttura di incidenza, e successivamente assume la struttura di incidenza di uno spazio affine mediante l'introduzione

---

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. - C.N.R.

(**) Istituto di Matematica - Facoltà di Ingegneria - NAPOLI -

dei cosiddetti iperpiani isotropi.

Se $\mathcal{G}_E$ è il gruppo generato dalle suddette omologie armoniche, gli automorfismi interni di $\mathcal{G}_E$ relativi alle stesse omologie armoniche generano il gruppo dei movimenti dello spazio affine-metrico precedentemente costruito.

1. RICHIAMI SULLO SPAZIO AFFINE-METRICO $\bar{\Omega}_E$ DI PG(4,q)(v.[4]).

Lo spazio affine metrico viene costruito partendo da uno spazio proiettivo PG(4,q) fissando un iperpiano $\bar{\omega}$ come iperpiano improprio e in $\bar{\omega}$ una quadrica Q non degenere a punti ellittici. I punti di PG(4,q) appartenenti a $\bar{\omega}$ sono detti *impropri*, quelli non appartenenti a $\bar{\omega}$ *propri*. I punti impropri possono essere *parabolici* o *iperbolici* se appartengono oppure no a Q.

Le rette di $\bar{\omega}$ sono dette *improprie* e *proprie* le altre. Le rette improprie inoltre possono essere *iperboliche*, *paraboliche* o *ellittiche*, secondo che siano *secanti*, *tangenti* o *esterne* a Q.

Le rette proprie a loro volta possono essere di *luce* o *spaziali*, secondo che intersechino $\bar{\omega}$ in un punto appartenente o non a Q. I piani di PG(4,q) contenuti in $\bar{\omega}$ sono detti *impropri* (*parabolici* o *iperbolici* secondo che siano tangenti o secanti Q), gli altri sono detti *propri* e sono distinti in piani di tipo $\bar{\mathcal{P}}_s$, $\bar{\mathcal{P}}_t$, $\bar{\mathcal{P}}_e$, secondo che intersechino $\bar{\omega}$ in una retta secante tangente o esterna a Q. Gli iperpiani propri di PG(4,q) possono essere *isotropi* o *ordinari*, secondo che intersechino $\bar{\omega}$ in un piano tangente o non a Q. In $\bar{\Omega}_E$ si definisce *simmetria* rispetto all'iperpiano ordinario $\bar{\alpha}$, l'omologia armonica α

avente come iperpiano di punti uniti $\bar{\alpha}$ e come centro il punto $\bar{A}$ polo rispetto a Q di $\bar{\alpha}\cap\bar{\omega}$. L'omologia α e la polarità Φ definita da Q sono permutabili in $\bar{\omega}$.

I movimenti di $\bar{\Omega}_E$ si definiscono come prodotti di simmetrie iperplanari e si indica con $\mathcal{G}_E$ il gruppo relativo. Ogni elemento di $\mathcal{G}_E$ si può rappresentare come prodotto di al massimo di sei simmetrie iperplanari di $\bar{\Omega}_E$ (v.[5]).

2. ELEMENTI E SOTTOINSIEMI DELLO SPAZIO Ω_E.

Sia PG(4,q) uno spazio proiettivo di dimensione quattro su un campo di Galois di caratteristica $p > 2$, di ordine $q=p^h$, ove p è un numero primo > 2 e h un intero positivo.

Fissati inoltre un iperpiano $\bar{\omega}$ di PG(4,q) e in $\bar{\omega}$ una quadrica Q non degenere a punti ellittici, sia Φ la polarità definita da Q in $\bar{\omega}$. Denotiamo con Σ il sistema delle omologie armoniche di PG(4,q) che, limitatamente a $\bar{\omega}$, sono permutabili con Φ. Ogni elemento α di Σ muta Q in sé, ha il centro $\bar{A}$ su $\bar{\omega}$ e iperpiano asse $\bar{\alpha}$, tale che $\bar{\alpha}\cap\bar{\omega}$ sia il piano polare di $\bar{A}$ rispetto a Q.

Poiché ogni elemento α di Σ ha il centro $\bar{A}$ e l'iperpiano asse $\bar{\alpha}$ che non si appartengono, gli elementi di Σ sono q^4+q^2. Chiamiamo *fascio improprio* di Σ l'insieme degli elementi di Σ che hanno l'iperpiano asse passante per uno stesso piano di $\bar{\omega}$ secante Q. I fasci impropri di Σ sono q^3+q e ognuno contiene q elementi (omologie armoniche con lo stesso centro).

Se α e β sono due elementi di Σ non appartenenti ad uno stesso fascio improprio, per cui gli iperpiani assi $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ in PG(4,q) hanno in comune un piano $\bar{\mathscr{P}}$ non contenuto in $\bar{\omega}$, chiamiamo *fascio proprio*, $\mathscr{F}(\alpha,\beta)$ di Σ, l'insieme degli elementi di Σ che hanno l'iperpiano asse passante per il piano $\bar{\mathscr{P}}$ non contenuto in $\bar{\omega}$. Secondo che il piano $\bar{\mathscr{P}}$ associato al fascio proprio $\mathscr{F}(\alpha,\beta)$ di Σ sia di tipo $\bar{\mathscr{P}}_s$, $\bar{\mathscr{P}}_t$, $\bar{\mathscr{P}}_e$ (v.[4]) il fascio si dirà di tipo $\mathscr{F}_s$, $\mathscr{F}_t$, $\mathscr{F}_e$.

Poiché si ha una biezione tra i fasci propri e i piani di PG(4,q) non contenuti in $\bar{\omega}$, di tali fasci $\frac{1}{2}q^4(q^2+1)$ sono di tipo $\mathscr{F}_s$, $q^2(q^3+q^2+q+1)$ di tipo $\mathscr{F}_t$ e $1/2\ q^4(q^2+1)$ sono di tipo $\mathscr{F}_e$.

Un fascio proprio di Σ contiene q+1, q o q-1 elementi secondo che esso sia di tipo $\mathscr{F}_s$, $\mathscr{F}_t$ o $\mathscr{F}_e$.

Chiamiamo *rete impropria* $\mathscr{R}_{\bar{I}}$ di Σ l'insieme degli elementi di Σ che hanno l'iperpiano asse passante per una retta $\bar{I}$ di PG(4,q) contenuta in $\bar{\omega}$. Una rete impropria può essere *iperobolica*, *parabolica* , o *ellittica*, secondo che $\bar{I}$ sia *secante*, *tangente* o *esterna* a Q. Le reti improprie di Σ sono $(q^2+1)(q^2+q+1)$ di cui $1/2\ q^2(q^2+1)$ iperboliche, $1/2q^2(q^2+1)$ ellittiche e $(q+1)(q^2+1)$ paraboliche. Una rete impropria di Σ contiene $q(q+1)$, q^2 o $q(q-1)$ elementi, secondo che sia iperbolica, parabolica o ellittica. Chiamiamo *rete propria* $\mathscr{R}_{\bar{p}}$ di Σ l'insieme degli elementi di Σ che hanno iperpiano asse passante per una retta $\bar{p} \not\subset Q$.

Secondo che la retta $\bar{p}$ di PG(4,q) associata alla rete propria $\mathscr{R}_{\bar{p}}$ intersechi $\bar{\omega}$ in un punto appartenente o non a Q, si hanno due tipi di reti proprie che diremo di *luce* e *spaziali* rispettivamete. Le reti di luce sono $q^3(q^2+1)$ e quelle spaziali $q^4(q^2+1)$. Una rete propria contiene q^2+q o q^2 elementi, secondo che essa sia di luce o spaziale. Chiamiamo inoltre *stella impropria* $\mathcal{S}_{\bar{I}}$ di Σ l'insieme degli elementi di Σ che hanno l'iperpiano asse passante per il punto $\bar{I}$ di $\bar{\omega}$. Secondo che $\bar{I}$ appartenga o non a Q la stella $\mathcal{S}_{\bar{I}}$ si dice *parabolica* o *iperbolica*. Le stelle paraboliche sono q^2+1, e quelle iperboliche q^3+q.

Una stella impropria, secondo che sia parabolica o iperbolica, contiene $q(q^2+q)$ oppure q^3 elementi e questi si distribuiscono in q^2+q o q^2 fasci.

Chiamiamo *stella propria* $\mathcal{S}_{\bar{P}}$ di Σ l'insieme degli elementi di Σ che hanno l'iperpiano asse passante per un punto $\bar{P}$ di PG(4,q) non appartenente a $\bar{\omega}$. Il numero delle stesse proprie è q^4 e ognuna contiene q^3+q elementi.

Detti α un elemento di Σ, $\bar{\alpha}$ l'iperpiano asse e $\bar{A} \notin Q$ il centro di α, polo di $\bar{\alpha} \cap \bar{\omega}$ rispetto a Q; gli elementi di Σ permutabili con α, ossia quelli con iperpiani assi passanti per $\bar{A}$, distinti da $\bar{\omega}$, costituiscono la stella impropria $\mathcal{S}_{\bar{A}}$ di Σ, necessariamente iperbolica. Notiamo che le omologie della stella $\mathcal{S}_{\bar{A}}$ sono permutabili con tutti gli elementi di Σ appartenenti al fascio improprio individuato dal piano $\alpha \cap \omega$. Gli elementi di $\mathcal{S}_{\bar{A}}$ sono q^3.

Consideriamo ora un fascio proprio individuato da due elementi α, β di Σ. Il fascio $\mathcal{F}(\alpha,\beta)$ è $\mathcal{F}_s$, $\mathcal{F}_t$ o $\mathcal{F}_e$, secondo che il piano $\bar{\alpha} \cap \bar{\beta}$ intersechi $\bar{\omega}$ in una retta secante, tangente o esterna a Q. Gli elementi di Σ permutabili con α e β sono permutabili con tutti gli elementi di $\mathcal{F}(\alpha,\beta)$ e costituiscono una rete impropria $\mathscr{R}_{\mathscr{F}}$ che diremo associata al fascio. La rete impropria $\mathscr{R}_{\mathscr{F}}$ risulta essere ellittica, parabolica, iperbolica, secondo che il fascio sia di tipo $\mathscr{F}_s$, $\mathscr{F}_t$, $\mathscr{F}_e$.

Ciò premesso, assumiamo gli elementi di Σ come *iperpiani*, i fasci di Σ come *piani*, le reti di Σ come *rette* e le stelle di Σ come *punti* di uno spazio che denotiamo con Ω_E.

I *piani* di Ω_E si distinguono in *impropri* e *propri*, e questi ultimi, in piani del tipo $\mathscr{P}_s$, $\mathscr{P}_t$, $\mathscr{P}_e$, come gli elementi di Σ corrispondenti. Le rette di Ω_E si distinguono in *rette improprie, paraboliche* o *ellittiche* e *rette proprie, di luce* o *spaziali*, come gli elementi di Σ corrispondenti.

I *punti* di Ω_E si suddividono in *propri* e *impropri* e, questi ultimi, in *parabolici* e *iperbolici* come le stelle di Σ corrispondenti.

3. RELAZIONI DI INCIDENZA E DI PARALLELISMO.

La relazione di appartenenza tra gli elementi di Ω_E si esprime come appartenenza di elementi di Σ a fasci, a reti e a stelle di Σ e come inclusione di fasci in reti, in stelle di Σ e di reti in stelle di Σ.

Proprietà numeriche della relazione di appartenenza sono le seguenti: per un punto proprio passano q^3+q iperpiani, $(q^2+1)(q^2+q+1)$ piani di cui $1/2q^2(q^2+1)$ di tipo $\mathscr{P}_s$, $(q+1)(q^2+1)$ di tipo $\mathscr{P}_t$, $1/2\ q^2(q^2+1)$ di tipo $\mathscr{P}_e$. Per un punto proprio passano q^2+1 rette di luce e q^3+q rette spaziali. Per un punto improprio parabolico passano q^3+q^2 iperpiani e q^2+q piani, mentre per un punto improprio iperbolico passano q^3 iperpiani e q^2 piani. Le rette improprie passanti per un punto I improprio parabolico o iperbolico sono q^2+q+1, di cui $q+1$ paraboliche e q^2 iperboliche, mentre le rette proprie per I sono q^3 (tutte di luce o tutte spaziali, secondo che I sia parabolico o iperbolico).

Per una retta propria di luce passano q^2+q+1 piani, di cui $q+1$ di tipo $\mathcal{P}_t$ e q^2 di tipo $\mathcal{P}_s$, e q^2+q iperpiani. Per una retta propria spaziale passano q^2+q+1 piani, di cui $q+1$ di tipo $\mathcal{P}_t$, $1/2\ q(q-1)$ di tipo $\mathcal{P}_s$ e $1/2\ q(q+1)$ di tipo $\mathcal{P}_e$, e q^2 iperpiani. Per un piano improprio passano q iperpiani, mentre per un piano proprio ne passano $q+1, q$ o $q-1$ secondo che il piano sia di tipo $\mathcal{P}_s$, $\mathcal{P}_t$ o $\mathcal{P}_e$.

Su una retta impropria ci sono $q+1$, q o $q-1$ punti impropri iperbolici e, in corrispondenza, 0,1 o 2 punti impropri parabolici. Su una retta propria ci sono q punti propri e 1 punto improprio parabolico o iperbolico, secondo che la retta sia di luce o spaziale. Su un piano improprio ci sono: $q+1$ punti parabolici e q^2 punti iperbolici; $q+1$ rette paraboliche, $1/2\ q(q+1)$ rette iperboliche e $1/2\ q(q-1)$ ellittiche. Su un piano proprio ci sono q^2 punti propri e $q+1$ punti impropri, di cui 0,1 o 2 parabolici, secondo che il piano sia di tipo $\mathcal{P}_e$, $\mathcal{P}_t$, $\mathcal{P}_s$. Su un piano proprio di tipo $\mathcal{P}_s$ vi sono una retta impropria iperbolica, 2q rette di luce e q^2-q rette spaziali; su un piano di tipo $\mathcal{P}_t$ vi sono una retta impropria parabolica, q rette di luce e q^2 rette spaziali; su un piano di tipo

$\mathscr{P}_e$ vi sono una retta impropria ellittica e q^2+q rette spaziali. Su un iperpiano ci sono: q^3+q^2+q+1 punti, di cui q^2+q+1 impropri distinti in q^2 iperbolici e $q+1$ parabolici; $(q^2+1)(q^2+q+1)$ rette di cui q^2+q+1 improprie distinte in $q+1$ paraboliche, $1/2\ q(q+1)$ iperboliche e $1/2\ q(q-1)$ ellittiche e $q^2(q^2+q+1)$ rette proprie, di cui $q^2(q+1)$ di luce e q^4 spaziali: 1 piano improprio, $q(q+1)$ piani $\mathscr{P}_t$, $1/2\ q^2(q+1)$ piani $\mathscr{P}_s$ e $1/2\ q^2(q-1)$ piani $\mathscr{P}_e$.

Se consideriamo iperpiani, piani e rette propri, possiamo introdurre una relazione di parallelismo con le seguenti definizioni.

a) *Due iperpiani* α *e* β *sono detti paralleli, se appartengono ad un fascio improprio.*

b) *Un piano* $\mathscr{P}$ *e un iperpiano* α, *con* $\mathscr{P} \not\subset \alpha$, *sono detti paralleli, se gli elementi corrispondenti di* Σ *appartengono ad una rete impropria.*

c) *Una retta* r *e un iperpiano* α, *con* $r \not\subset \alpha$, *sono detti paralleli, se gli elementi corrispondenti di* Σ *appartengono ad una stella impropria.*

d) *Due piani* $\mathscr{P}$ *e* $\mathscr{P}_1$ *contenuti (non contenuti) in uno stesso iperpiano sono detti paralleli, se i fasci di* Σ *corrispondenti appartengono ad una rete impropria (ad una stella impropria).*

e) *Una retta* r *e un piano* $\mathscr{P}$, *con* $r \not\subset \mathscr{P}$, *appartenenti ad uno stesso ipermpiano (oppure due rette* r *ed* r' *appartenenti ad uno stesso piano) sono detti paralleli, se gli elementi di* Σ *corrispondenti sono inclusi in una stella impropria.*

Se indichiamo con AG(4,q) lo spazio affine che si ottiene da PG(4,q) togliendo l'iperpiano $\bar{\omega}$, si può esprimere la relazione di appartenenza di Ω_E, indirettamente, mediante l'appartenenza tra gli elementi associati di AG(4,q).

La struttura di incidenza di Ω_E risulta più debole di quella di AG(4,q), in quanto agli iperpiani di AG(4,q) passanti per un piano tangente a Q non corrisponde alcun iperpiano di Ω_E.

Per ottenere la stessa struttura di incidenza dello spazio affine AG(4,q) introduciamo dei nuovi *iperpiani* che chiamiamo *isotropi* per distinguerli da queli finora considerati e che d'ora in poi diremo *ordinari* : a questo scopo introduciamo nel paragrafo successivo la relazione di perpendicolarità.

4. PERPENDICOLARITA' E POLARITA' IN Ω_E.

Due iperpiani ordinari α *e* β *di* Ω_E *si dicono perpendicolari, se gli iperpiani* $\bar{\alpha}$ *e* $\bar{\beta}$ *ad essi associati in* PG(4,q) *hanno i piani* $\bar{\alpha}\cap\bar{\omega}$ *e* $\bar{\beta}\cap\bar{\omega}$ *coniugati rispetto a* Q.

Dalla definizione segue che gli iperpiani ordinari β perpendicolari ad un dato iperpiano ordinario α di Ω_E, e perpendicolari quindi a tutti gli iperpiani paralleli ad α, passano per un punto improprio A non appartenente ad α a cui corrisponde il punto $\bar{A} \notin Q$, polo di $\bar{\alpha}\cap\bar{\omega}$ rispetto a Q. In questo modo ad ogni iperpiano ordinario α di Ω_E viene associato un ben determinato punto improprio $A \notin \alpha$ che dicesi polo di α (esso è anche polo di ogni iperpiano parallelo ad α). Quindi due iperpiani α e β ordinari perpendicolari sono tali che l'uno contiene il polo dell'altro. Poiché gli iperpiani dello stesso fascio improprio di Ω_E hanno lo stesso polo A, il piano improprio corrispondente al fascio viene detto piano polare di A e non passa per A.

Diamo inoltre le seguenti definizioni.

a) Due piani propri $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ si dicono perpendicolari, se i piani $\bar{\mathcal{P}}_1$ e $\bar{\mathcal{P}}_2$ corrispondenti in PG(4,q) hanno le rette improprie $\bar{\mathcal{P}}_1 \cap \bar{\omega}$ e $\bar{\mathcal{P}}_2 \cap \bar{\omega}$ coniugate rispetto a Q.

b) Due rette proprie r_1, r_2 si dicono perpendicolari, se le rette corrispondenti $\bar{r}_1$ e $\bar{r}_2$ in PG(4,q) hanno i punti impropri $\bar{\tau}_1 \cap \omega$ e $\bar{\tau}_2 \cap \omega$ coniugati rispetto a Q.

c) Una retta propria r e un iperpiano ordinario α si dicono perpendicolari, se r passa per il polo di α .

d) Una retta r e un piano $\mathcal{P}$ proprio si dicono perpendicolari, se gli elementi corrispondenti $\bar{r}$ e $\mathcal{P}$ in PG(4,q) hanno il punto improprio $\bar{r} \cap \bar{\omega}$ e la retta impropria $\mathcal{P} \cap \omega$ coniugati rispetto a Q.

e) Un piano proprio $\mathcal{P}$ e un iperpiano ordinario α si dicono perpendicolari, se il polo di α appartiene a $\mathcal{P}$.

Considerato un punto P improprio parabolico, *chiamiamo piano isotropo* $\mathcal{P}_P$ *l'insieme costituito dal punto* P *e dai punti impropri* P' *poli dei piani impropri passanti per* P.

Un piano isotropo ha quindi un punto parabolico e q^2+q iperbolici.

Considerati inoltre un piano isotropo $\mathcal{P}_P$ e un punto proprio A, *chiamiamo iperpiano isotropo* ($\mathcal{P}_P$,A) *l'insieme costituito dalle*

q^2+q+1 *rette passanti per* A *(una di luce e* q^2+q *spaziali) aventi il punto improprio su* $\mathcal{P}_p$ *e dai punti delle stesse rette.*

Il punto P dicesi polo dell'iperpiano isotropo ($_p$,A). Esso è anche polo di ogni iperpiano isotropo avente lo stesso piano isotropo $\mathcal{P}_p$. Pertanto ad ogni piano isotropo $\mathcal{P}_p$ è associato un ben determinato polo P, punto improprio parabolico, e viceversa. Un iperpiano isotropo contiene il proprio polo e quindi è perpendicolare a se stesso.

Dalle definizioni date di piano e iperpiano isotropo segue che un iperpiano isotropo può essere individuato da un punto improprio parabolico e da un punto proprio. Ovviamente per un punto proprio A passano q^2+1 iperpiani isotropi; per una retta propria di luce passa un solo iperpiano isotropo, mentre per una retta spaziale ne passano q+1; per un piano proprio $\mathcal{P}$ passano 0,1 o 2 iperpiani isotropi, secondo che esso sia di tipo $\mathcal{P}_s$, $\mathcal{P}_t$, $\mathcal{P}_e$.

Ampliando lo spazio Ω_E con gli iperpiani isotropi si ottiene uno spazio Ω_E^* che ha la stessa struttura di incidenza di AG(4,q).

5. IPERANGOLOIDI E MOVIMENTI DI Ω_E^*.

In AG(4,q) un iperangoloide tetraedrico quadrirettangolo (v. [4]) di vertice $\bar{P}$ e di spigoli $\bar{P}\,\bar{A}$, $\bar{P}\,\bar{B}$, $\bar{P}\,\bar{C}$, $\bar{P}\,\bar{D}$ a due a due ortogo , con $(\bar{A},\bar{B},\bar{C},\bar{D})$ tetraedro autopolare rispetto a Q su $\bar{\omega}$ può avere due configurazioni diverse, secondo che 1/2(q+1) sia pari o dispari. Precisamente, se 1/2(q+1) è pari, dei sei piani dell'iperangoloide, tre di tipo $\bar{\mathscr{P}}_e$ appartengono ad uno stesso iperpiano e gli altri tre, a coppie, appartengono agli altri tre iperpiani (due per ogni iperpiano più uno di tipo $\bar{\mathscr{P}}_e$). Se invece 1/2(q+1) è dispari, dei sei piani dell'iperangoloide, tre di tipo $\bar{\mathscr{P}}_s$ appartengono ad uno stesso iperpiano e gli altri tre, a coppie, appartengono agli altri tre iperpiani (due per ogni iperpiano più uno di tipo $\bar{\mathscr{P}}_s$). Corrispondentemente in Ω^*_E l'iperangoloide tetraedrico di vertice P e di spigoli P A, P B, P C, P D è quadrirettangolo poiché è autopolare il tetraedro di vertici impropri, A, B, C, D. Quindi anche per un iperangoloide tetraedrico quadrirettangolo di Ω^*_E si ha una diversa configurazione e gli spazi Ω^*_E si possono suddividere per questo in due classi, secondo che 1/2(q+1) sia pari o dispari.

Detto $\mathscr{G}_E$ il gruppo generato da Σ, indichiamo con S_α l'automorfismo interno di $\mathscr{G}_E$ relativo ad α. S_α muta elementi di Σ in elementi di Σ. Infatti, $\forall \beta \in \Sigma$, si ha: $\beta \xrightarrow{S_\alpha} \beta' = \alpha\beta\alpha$ che appartiene al fascio $\mathscr{F}(\alpha,\beta)$ di Σ, per il teorema delle tre simmetrie (v. [5]). S_α muta inoltre fasci, reti e stelle di Σ in fasci, reti e stelle dello stesso tipo, mutando in sé gli elementi di Σ permutabili con α (e di conseguenza la stella di Σ costituita dagli elementi permutabili con α e ogni rete o fascio di Σ inclusi in questa stella) e i fasci, le reti e le stelle di Σ contenenti α. Pertanto S_α trasforma iperpiani ordinari, piani, rette e punti di Ω^*_E in iperpiani, piani, rette e punti dello stesso tipo lasciando uniti gli iperpiani, i piani e le rette perpendicolari ad α e i punti le rette e i piani di α. Da quanto sopra detto e dalle definizioni di piano e iperpiano isotropo segue che S_α muta piani e iperpiani isotropi in piani e iperpiani isotropi.

Per le proprietà elencate, l'automorfismo interno S_α è chiamato *simmetria di* Ω_E^* *rispetto all'iperpiano ordinario* α.

Chiamiamo *movimento di* Ω_E^* *ogni prodotto di simmetrie rispetto a iperpiani ordinari, cioè ogni automorfismo interno di* $_E$.

Indichiamo con $\mathscr{G}_E^*$ il gruppo dei movimenti di Ω_E^*. Poiché ogni elemento di $\mathscr{G}_E$ si può esprimere come prodotto di al massimo sei generatori (v. [5]), ogni movimento di Ω_E^* (automorfismo interno di $\mathscr{G}_E$) si rappresenta come prodotto di al massimo sei simmetrie di Ω_E^*.

BIBLIOGRAFIA

[1] V. DICUONZO: *Su una classe di spazi metrici finiti a debole struttura di incidenza*. Annali di Matematica pura ed applicata. (IV), Vol. 100, pp. 27-43, 1974.

[2] V. DICUONZO: *Su una classe di spazi metrici finiti e i gruppi dei loro movimenti*. Annali di Matematica pura ed applicata. (IV), Vol. 100, pp. 1-43, 1974.

[3] B. KERÉKJÁRTÓ: *Les fondements de la Géométrie*. Tome 2, Paris, Gauthier-Villars, 1966.

[4] T. PANTALEO - G. VOLZONE: *Su due classi di spazi affini-metrici di dimensione quattro su un campo di Galois di ordine dispari*. "LA RICERCA" Rivista quadrimestrale di Matematiche pure ed applicate, ANNO XXXI-N°1 -Gennaio-Aprile 1980.

[5] T.PANTALEO - G. VOLZONE: *Sui sistemi di generatori dei gruppi dei movimenti di due classi di spazi affini-metrici di dimensione quattro*. Rendiconti di Matematica, (di prossima pubblicazione).

[6] B.SEGRE: *Le Geometrie di Galois*. Annali di Matematica pura ed applicata. 48,I,1959.

[7] B. SEGRE: *Lectures on modern Geometry*. Ed. Cremonese, Roma, 1961.

[8] B. SEGRE: *Istituzioni di Geometria Superiore*. Vol. II (spazi proiettivi), Roma, Istituto Matematico "G.Castelnuovo", 1963.

Ricevuto il 7/11/1983