

SULL'ESISTENZA DELL'INTEGRALE PRIMO DELL'ENERGIA PER UN SISTEMA
VINCOLATO

Giancarlo CANTARELLI

Summary. - *In this note a necessary and sufficient condition for the existence of the first integral of the energy for a system of N particles, subjected to holonomic, bilateral, scleronomic and frictionless constraints, and acted up by positional forces, is given.*

1. INTRODUZIONE. Sia P un elemento materiale vincolato ad appartenere ad una curva regolare, rigida e liscia. Come è noto, per l'esistenza dell'integrale primo dell'energia (nel riferimento solidale al vincolo) *non è necessario* che la forza attiva totale \vec{f} (escluse le forze a potenza nulla), agente su P , sia conservativa, ma è sufficiente (oltre che necessario) che la componente tangenziale di \vec{f} sia indipendente sia dal tempo sia dalla velocità di P . Non essendo a conoscenza di analoghi criteri per, un elemento vincolato ad una superficie o soggetto ad un vincolo anolonomo, abbiamo pensato di colmare questa lacuna con la presente nota, fornendo dei criteri per l'esistenza dell'integrale dell'energia per un elemento soggetto ad un vincolo bilaterale, scleronomo e perfetto, sia olonomo (N.2) sia anolonomo (N.3), e per un sistema discreto di elementi materiali soggetto a vincoli olonomi, bilaterali, scleronomi e perfetti (N.4). Vari esempi illustrano i risultati ottenuti.

2. ELEMENTO MATERIALE VINCOLATO AD APPARTENERE AD UNA SUPERFICIE REGOLARE, RIGIDA E LISCIA.

Sia $Oxyz$ una terna cartesiana ortogonale, solidale alla superficie vincolare σ , rigida e liscia, e siano

$$(1) \quad x = x(u,v) \quad , \quad y = y(u,v) \quad , \quad z = z(u,v)$$

le equazioni parametriche di σ , dove le tre funzioni scalari sono definite e di classe \mathcal{C}^2 in tutto il piano (u,v) . Supponiamo inoltre che tutti i punti di σ siano *semplici*, e che il prodotto vettoriale $\frac{\partial \vec{OP}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{OP}}{\partial v}$ sia diverso da zero in tutto \mathbb{R}^2 . Indicando con \vec{v} il versore della normale a σ nel generico punto P di coordinate curvilinee (u,v) , si ha

$$(2) \quad \vec{v} = \frac{\frac{\partial \vec{OP}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{OP}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \vec{OP}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{OP}}{\partial v} \right\|}$$

Sia \vec{f} la forza attiva totale agente sull'elemento P nel riferimento rappresentato dalla terna $Oxyz$, escluse le eventuali forze a potenza nulla, e supponiamo che \vec{f} sia una forza *posizionale*, definita e di classe \mathcal{C}^1 in \mathbb{R}^3 . Scelte le coordinate curvilinee u,v come coordinate lagrangiane di P , le componenti lagrangiane di \vec{f} sono rispettivamente $Q_u = \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial u}$ e $Q_v = \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial v}$ essendo $\vec{f} = \vec{f}(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Poiché il vincolo è perfetto, condizione necessaria e sufficiente affinché esista l'integrale dell'energia è che il lavoro virtuale $\delta L = Q_u \delta u + Q_v \delta v$ sia una forma differenziale esatta, o equivalentemente che in tutto \mathbb{R}^2 si abbia

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial v} (\vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial u}) = \frac{\partial}{\partial u} (\vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial v})$$

Calcolando le derivate parziali rispetto ad u e v della funzione composta $\vec{f} = \vec{f}(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, e poi utilizzando la rappresentazione cartesiana del prodotto scalare, ed infine raccogliendo opportunamente i vari termini, si ottiene

$$(4) \quad \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \\ + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) = 0$$

Essendo il primo membro uguale al prodotto misto $\text{rot } \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{OP}}{\partial v}$, tenuto conto della (2), la condizione (4) si può esprimere nella forma equivalente

$$(5) \quad \text{rot } \vec{f} \cdot \vec{\nu} = 0, \quad \forall P \in \sigma$$

Sussiste quindi il seguente

TEOREMA 1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché esista l'integrale primo dell'energia per un elemento materiale vincolato ad appartenere ad una superficie regolare, rigida e liscia, e soggetto alla forza attiva totale $\vec{f} = \vec{f}(P)$ (nel riferimento solidale al vincolo, ed escluse le eventuali forze a potenza nulla), è che il rotore di \vec{f} sia ortogonale alla normale alla superficie vincolare in ogni suo punto.*

ESEMPIO 1. Sia

$$(6) \quad \vec{f} = xy \vec{e}_1 + xy \vec{e}_2 + z(x+y) \vec{e}_3$$

la forza attiva agente sull'elemento P di massa m, dove \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 sono i versori fondamentali della terna cartesiana Oxyz, solidale alla superficie vincolare σ . Per le seguenti superficie vincolari la condizione (5) risulta soddisfatta, e quindi sussiste l'integrale dell'energia anche se la forza (6) non è conservativa:

(i) σ è il piano di equazione $x+y = c$, dove $c = \text{cost.}$ Scelte come coordinate lagrangiane x e z , si ha

$$(7) \quad \frac{1}{2} m (2\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - \frac{c}{2} z^2 = \text{cost.}$$

(ii) σ è la superficie sferica di centro 0 e raggio R. Scelte come coordinate lagrangiane ϑ (colatitudine) e φ (longitudine), si ha

$$(8) \quad \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{R^3}{3} \sin^3 \vartheta (\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi) = \text{cost.}$$

3. ELEMENTO MATERIALE SOGGETTO AD UN VINCOLO ANOLONOMO BILATERALE, SCLERONOMO E PERFETTO.

Sia

$$(9) \quad a(x,y,z)dx + b(x,y,z)dy + c(x,y,z)dz = 0$$

l'equazione, in forma pfaffiana, del vincolo anolonomo cui è soggetto l'elemento P nel riferimento \mathcal{C} rappresentato dalla terna cartesiana Oxyz, di versori fondamentali \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 . Posto $\vec{V} = a(x,y,z)\vec{e}_1 + b(x,y,z)\vec{e}_2 + c(x,y,z)\vec{e}_3$, supponiamo che la funzione vettoriale $\vec{V} = \vec{V}(P)$ sia di classe \mathcal{C}^1 in \mathbb{R}^3 , e che inoltre in tutto \mathbb{R}^3 si abbia

$$(10) \quad \vec{V} \cdot \text{rot } \vec{V} \neq 0$$

il che assicura, come è noto, che la forma differenziale lineare (9) non è integrabile.

Sia $\vec{f} = \vec{f}(P)$, funzione definita e continua in \mathbb{R}^3 , la forza attiva totale agente su P nel riferimento \mathcal{C} , escluse le eventuali forze a potenza nulla, e supponiamo che il vincolo anolonomo sia perfetto, cioè che il lavoro virtuale della reazione vincolare sia identicamente nullo. Allora condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza dell'integrale dell'energia è che esista una funzione scalare $U = U(P)$ e $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ tale che si abbia

$$(11) \quad (\vec{f} - \text{grad } U) \cdot \delta P = 0, \quad \forall P \in \mathbb{R}^3, \quad \forall \delta P.$$

Siccome gli spostamenti virtuali δP , relativi al generico punto P , sono tutti e soli quelli soddisfacenti la condizione $\vec{V}(P) \cdot \delta P = 0$, per la nota regola del moltiplicatore, la (11) è equivalente alla seguente equazione

$$(12) \quad \vec{f} - \text{grad } U - \lambda \vec{V} = 0 \quad \forall P \in \mathbb{R}^3$$

Osserviamo che se la (11) fosse valida per ogni spostamento infinitesimo, cioè il più generale spostamento *nominale* ∂P , essa implicherebbe che la forza \vec{f} è conservativa. Invece la condizione (11), essendo valida per tutti e soli gli spostamenti virtuali, implica che la forza $(\vec{f} - \lambda \vec{V})$ è conservativa (come si riconosce dalla (12), dove $\lambda = \lambda(P)$ è un opportuno moltiplicatore. In particolare, se \vec{f} è conservativa, quest'ultima condizione risulta soddisfatta per $\lambda \equiv 0$.

Per determinare l'espressione del moltiplicatore, calcoliamo

il rotore del primo membro della (12), supponendo che le funzioni che vi compaiono siano sufficientemente regolari

$$(13) \quad \text{rot } \vec{f} - \text{grad} \lambda \times \vec{V} - \lambda \text{rot } \vec{V} = 0, \quad \forall P \in \mathbb{R}^3$$

Moltiplicando scalarmente per \vec{V} entrambi i membri della (13), e tenuto conto dell'ipotesi (10), si ottiene per λ la seguente espressione

$$(14) \quad \lambda = \frac{\vec{V} \cdot \text{rot } \vec{f}}{\vec{V} \cdot \text{rot } \vec{V}}, \quad \forall P \in \mathbb{R}^3$$

Si ha quindi il seguente

TEOREMA 2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché esista l'integrale primo dell'energia per un elemento materiale soggetto al vincolo anolonomo perfetto (9) soddisfacente la condizione (10), quando la forza attiva totale \vec{f} (escluse le eventuali forze a potenza nulla) è posizionale, è che la forza*

$$\vec{f} - \left(\frac{\vec{V} \cdot \text{rot } \vec{f}}{\vec{V} \cdot \text{rot } \vec{V}} \right) \vec{V}$$

sia conservativa. Indicando con $U = U(P)$ il suo potenziale, l'integrale dell'energia assume la seguente espressione

$$\theta - U = \text{cost.}$$

dove θ è l'energia cinetica dell'elemento espressa in funzione delle caratteristiche cinetiche e delle coordinate cartesiane.

ESEMPIO 2. Sia $Oxyz$ una terna cartesiana rappresentante il riferimento \mathcal{C} , e sia

$$(15) \quad xz dx + dy + y dz = 0$$

l'equazione del vincolo anolonomo perfetto cui è soggetto l'elemento P, di massa m, e $\vec{f} = xyz \vec{e}_1 + (z+y^2) \vec{e}_3$ la forza attiva totale agente su P. Pur non essendo soddisfatta in tutto \mathbb{R}^3 la condizione (10), perché $\vec{V} \cdot \text{rot } \vec{V}$ si annulla nei due piani: $x=0$ e $z=-1$, la formula (14) è ancora utilizzabile poiché nei punti in cui si annulla il denominatore si annulla contemporaneamente anche il numeratore, e quindi la funzione può essere definita per continuità in tutto \mathbb{R}^3 . Si ha infatti

$$(16) \quad \lambda = \frac{xy(z+1)}{x(z+1)} = y, \quad \forall P \in \mathbb{R}^3$$

La forza $\vec{f} - \lambda \vec{V} = -y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3$ è conservativa, di potenziale $U = \frac{1}{2}(z^2 - y^2) + \text{cost.}$, e quindi l'integrale dell'energia risulta

$$(17) \quad \frac{1}{2} m \{ (1+x^2z^2) \dot{x}^2 + 2xyz \dot{x} \dot{z} + (1+y^2) \dot{z}^2 \} + \frac{1}{2} (y^2 - z^2) = \text{cost.}$$

avendo scelto come caratteristiche cinetiche \dot{x} e \dot{z} .

OSSERVAZIONE 1. Se l'elemento P è soggetto simultaneamente al vincolo olonomo (1) e a quello anolonomo (9), entrambi perfetti, scelte come coordinate lagrangiane di P le coordinate curvilinee u,v, e sostituite le (1) ed i loro differenziali totali nella (9), si ottiene l'equazione del vincolo anolonomo in coordinate lagrangiane

$$(18) \quad A(u,v) du + B(u,v) dv = 0$$

essendo

$$A = \vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial u}, \quad B = \vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial v}$$

$$e \quad \vec{V} = \vec{V}(x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$$

Siccome la (18) è una forma differenziale in due variabili, essa è integrabile, e quindi, nota la posizione iniziale di P, la sua traiettoria γ sulla superficie σ è completamente individuata. Se γ è una curva regolare, allora condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza dell'integrale dell'energia è che la componente tangenziale della forza attiva totale, agente su P, sia indipendente sia dal tempo sia dalla velocità di P (cfr. il risultato citato nell'introduzione).

4. SISTEMA DISCRETO DI ELEMENTI MATERIALI SOGGETTO A VINCOLI OLONOMI, BILATERALI, SCLERONOMI E PERFETTI.

Nel riferimento \mathcal{C} , rappresentato dalla terna cartesiana Oxyz, tutti i vincoli cui è soggetto un sistema discreto S di N elementi materiali siano olonomi, bilaterali, scleronomi e perfetti. Sia $q^T = (q_1, \dots, q_n)$ una n-upla di coordinate lagrangiane indipendenti, dove n è il grado di libertà di S ($1 \leq n < 3N$), e supponiamo che le funzioni $OP_h = OP_h(q)$, $h=1, \dots, N$, siano definite e di classe \mathcal{C}^2 in tutto \mathbb{R}^n , e che la sollecitazione attiva complessiva $\{\vec{f}_h\}$ $h=1, \dots, N$, agente su S nel riferimento \mathcal{C} (escluse le eventuali sollecitazioni a potenza nulla), sia posizionale e di classe \mathcal{C}^1 in \mathbb{R}^{3N} . Indicando con Q_i la componente lagrangiana i-esima della suddetta sollecitazione, condizione necessaria e sufficiente affinché esista l'integrale dell'energia (nel riferimento \mathcal{C}) è che il lavoro virtuale $\delta L = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i$ sia una forza differenziale

esatta, o equivalentemente che risulti $\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}$ in tutto \mathbb{R}^n e $\forall i, j=1, \dots, n$. Per l'uguaglianza delle derivate seconde miste delle funzioni $OP_h(q)$, si ha quindi

$$(19) \quad \sum_{h=1}^N \frac{\partial \vec{f}_h}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial OP_h}{\partial q_j} = \sum_{h=1}^N \frac{\partial \vec{f}_h}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial OP_h}{\partial q_i}$$

che si può esprimere in forma matriciale, utilizzando, per il prodotto tra matrici, la regola del prodotto righe per

colonne, ed osservando che si ha $\frac{\partial \vec{f}_h}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial \vec{f}_h}{\partial P_k} \frac{\partial OP_k}{\partial q_i}$, dove $\frac{\partial \vec{f}_h}{\partial P_k}$ è la matrice jacobiana $\frac{\partial (f_{h,x}, f_{h,y}, f_{h,z})}{\partial (x_k, y_k, z_k)}$ e $\frac{\partial OP_k}{\partial q_i}$, $\frac{\partial \vec{f}_h}{\partial q_i}$

sono due vettori colonna. Si ha precisamente

$$(20) \quad \sum_{h=1}^N \left\{ \left(\frac{\partial OP_h}{\partial q_j} \right)^T \frac{\partial \vec{f}_h}{\partial P_k} \frac{\partial OP_k}{\partial q_i} - \left(\frac{\partial OP_h}{\partial q_i} \right)^T \frac{\partial \vec{f}_h}{\partial P_k} \frac{\partial OP_k}{\partial q_j} \right\} = 0,$$

$$\forall q \in \mathbb{R}^n, \quad \forall i, j=1, \dots, n.$$

Particolarmente interessante è il caso in cui ogni singola forza della sollecitazione attiva è *posizionale*, cioè risulta $\vec{f}_h = \vec{f}_h(P_h)$, $h=1, \dots, N$, perché allora, per ogni $h \neq k$, la matrice jacobiana $\frac{\partial \vec{f}_h}{\partial P_k}$ è identicamente nulla, e la (20) diventa

$$(21) \quad \sum_{h=1}^N \left\{ \left(\frac{\partial OP_h}{\partial q_i} \right)^T \left[\left(\frac{\partial \vec{f}_h}{\partial P_h} \right)^T - \frac{\partial \vec{f}_h}{\partial P_h} \right] \frac{\partial OP_h}{\partial q_j} \right\} = 0$$

$$\forall q \in \mathbb{R}^n, \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

Osservando che la matrice antisimmetrica $\left[\left(\frac{\partial \vec{f}_h}{\partial \vec{p}_h} \right)^T - \frac{\partial \vec{f}_h}{\partial \vec{p}_h} \right]$ è la rappresentazione matriciale del vettore $\text{rot } \vec{f}_h$, il primo membro della (21) si può esprimere come sommatoria di N prodotti misti, e la (21) diventa

$$(22) \quad \sum_{h=1}^N \left\{ \text{rot } \vec{f}_h \cdot \frac{\partial \vec{O}P_h}{\partial q_i} \times \frac{\partial \vec{O}P_h}{\partial q_j} \right\} = 0, \quad \forall q \in \mathbb{R}^n, \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Si ha il seguente

TEOREMA 3. *Condizione necessaria e sufficiente affinché esista l'integrale primo dell'energia per un sistema discreto S di N elementi materiali, soggetto alla sollecitazione attiva complessiva posizionale $\{f_h\}$, $h=1, \dots, N$, ed a vincoli olonomi, bilaterali, scleronomi e perfetti, è che sia soddisfatta la condizione (20). Nel caso particolare in cui ogni singola forza della suddetta sollecitazione è posizionale, la condizione necessaria e sufficiente diventa*

$$\sum_{h=1}^N \left\{ \text{rot } \vec{f}_h \cdot \frac{\partial \vec{O}P_h}{\partial q_j} \times \frac{\partial \vec{O}P_h}{\partial q_j} \right\} = 0 \quad \forall q \in \mathbb{R}^n, \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

OSSERVAZIONE 2. Per $N=1$ e $n=2$, la condizione (22) diventa $\text{rot } \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{O}P}{\partial q_1} \times \frac{\partial \vec{O}P}{\partial q_2} = 0$, che coincide con la (4) del N.2; mentre per $n=1$, la condizione (20) è sempre soddisfatta, cioè nelle suddette ipotesi sussiste sempre l'integrale dell'energia (il che costituisce una generalizzazione del risultato citato nell'Introduzione).

ESEMPIO 3. Il sistema S sia costituito da due elementi materiali P_1 e P_2 , di masse m_1 e m_2 rispettivamente, soggetto ai vincoli olonomi perfetti

$$(23) \quad x_1 = z_2^2, \quad z_1 = z_2^2, \quad y_2 = y_1 + z_2$$

La forza attiva totale, agente su P_1 , sia $\vec{f}_1 = -y_1 \vec{e}_1 + x_1 \vec{e}_2 + y_1 \vec{e}_3$, e quella agente su P_2 sia $\vec{f}_2 = x_2 \vec{e}_1 - z_2^2 \vec{e}_2$. Scelte come coordinate lagrangiane: y_1, x_2, z_2 , si verifica facilmente che la condizione (22) è soddisfatta. Sussiste quindi l'integrale dell'energia, che ha la seguente espressione

$$(24) \quad \frac{1}{2} m_1 (\dot{y}_1^2 + 8 \dot{z}_2^2 z_2^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{z}_2^2 + 2\dot{y}_1 \dot{z}_2) + \\ - \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{3} z_2^3 = \text{cost.}$$

BIBLIOGRAFIA

L.A.PARS: *A treatise on analytical dynamics*, Heinemann, London, 12-19.

Ricevuto l'1/10/1985

Dipartimento di Matematica
Università
43100 PARMA (Italy)