Note di Matematica Vol. IX - n. 1, 65-75 (1989)

SULL'INTEGRALE DI BERNOULLI

GIOVANNA REMORINI

Abstract. *The necessary and sufficient conditions for applying the Bernoulli theorem or a bernoulli integral to a viscous, incompressible fluid with conservative body force in steady or unsteady motion are investigated. Some relevant motions are shown.*

1. INTRODUZIONE

Come è ben noto, per un fluido perfetto, barotropico, soggetto a forze di massa conservative di potenziale per unità di massa U ed in moto stazionario (con l'ipotesi tacita che anche le espressioni euleriane della pressione p e della densità ρ non dipendano esplicitamente dal tempo) sussiste il teorema di Bernoulli, il quale afferma che, qualunque sia il moto, il trinomio (di Bernoulli) $H = v^2/2 - U + \int \mathrm{d}p/\rho$ ha valore costante lungo una medesima linea di flusso, potendo variare il valore di H da una linea di flusso ad un'altra, a meno che il moto sia irrotazionale o di Beltrami (unici casi questi in cui H ha lo stesso valore ovunque).

Il teorema di Bernoulli, oltre a fornire un integrale primo del moto, esprime la conservazione, lungo le linee di flusso, della somma dell'energia meccanica (per unità di massa) con l'energia dovuta alla pressione. Il luogo delle linee di flusso per le quali H ha lo stesso valore è una superficie di flusso e vorticosa contemporaneamente ed è detta superficie di Bernoulli.

Tale teorema è stato esteso da Caldonazzo [2b] al caso in cui il moto non sia stazionario, nel qual caso la condizione affinché sussista il teorema di Bernoulli è che il valore locale della velocità sia costante $\left(\frac{\partial \sigma^2}{\partial t} = 0\right)$. Il valore di H non cambia da linea di flusso a linea di flusso nei moti per i quali risulta $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{v}$. Le superfici di Bernoulli (normali al vettore $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$), in generale dipendenti dal tempo, sono superfici di flusso ma non vorticose, a meno che $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ e $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ siano normali (come per esempio per i moti piani e per i moti simmetrici rispetto ad un asse che avvengono per piani meridiani).

Il teorema di Bernoulli è stato esteso al caso di un fluido viscoso in moto stazionario da Craig, Sbrana e Castoldi ([5], [13b], [3]) i quali danno le condizioni affinché H sia costante rispettivamente in tutto il fluido, sulle linee di flusso, sulle linee vorticose.

Successivamente Truesdell in [16a] afferma che per un fluido si ha un teorema di Bernoulli ogni volta che $v^2/2 + P$ (dove P è una funzione di una o più variabili dinamiche) è costante o funzione solo del tempo in tutto il fluido o su certe famiglie di superfici o curve, mettendo così in luce l'importanza di un integrale primo del moto anche se in generale questo, a differenza del teorema di Bernoulli propriamente detto, non esprime anche la conservazione di energia per il fluido.

Molti si sono occupati e si occupano tuttora dell'argomento (per esempio cfr. [4], [6], [8]-[12], [15], [17]); pertanto all'autrice è sembrato non privo di interesse esaminare più dettagliatamente (per un fluido viscoso, incomprimibile, soggetto a forze di massa conservative, in moto stazionario o non) quando e dove sussista il teorema di Bernoulli propriamente detto o nella forma generalizzata introdotta da Truesdell [1], evidenziando anche moti fisicamente significativi.

In particolare al n. 2 si scrive la condizione affinché per un fluido viscoso sussista il teorema di Bernoulli o un integrale bernoulliano lungo le linee di flusso o vorticose.

Per i moti vorticosi [2] ai n. 3 e 4 si studiano rispettivamente il caso stazionario e non stazionario, evidenziando alcuni esempi fisicamente significativi.

2. EQUAZIONI DI BASE

Le equazioni di base per un fluido omogeneo, incomprimibile, viscoso (stokesiano-lineare) di viscosità cinematica ν costante, soggetto a forze di massa che ammettono un potenziale per unità di massa U, posto $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ ed $H = v^2/2 + p/\rho - U$, sono

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nu \text{ rot } \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v} - \text{grad } H \tag{2.1}$$

$$0 = \text{div } \mathbf{v}. \tag{2.2}$$

Detto $\boldsymbol{\tau}$ il versore di $\mathbf{v}$, moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{\tau}$ ambo i membri della (2.1) segue che:

a) *Condizione necessaria e sufficiente affinché anche per i fluidi viscosi sussista il teorema di Bernoulli è che sia* [3]

$$0 = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nu \text{ rot } \boldsymbol{\omega} \right) \cdot \boldsymbol{\tau}; \tag{2.3}$$

ad ogni istante le superfici (di Bernoulli) $H = \text{cost}$ sono superfici di flusso ma in generale non vorticose.

b) *Condizione necessaria e sufficiente affinché sussista lungo le linee di flusso un integrale bernoulliano è che* il componente parallelo a $\mathbf{v}$ del vettore $\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nu \text{ rot } \boldsymbol{\omega}$ sia conservativo, cioè

(1) Nella presente nota parleremo di teorema di Bernoulli se il trinomio di Bernoulli H è costante lungo una linea di flusso, di integrale bernoulliano quando sussiste un teorema di Bernoulli nella forma generalizzata introdotta da Truesdell.

(2) Per i moti non vorticosi è immediato constatare che continuano a valere i risultati trovati per i fluidi perfetti.

(3) Nel caso stazionario cfr. [13].

esista un campo scalare $G(x,y,z,t)$ *tale che* [4]

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nu \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}\right) \cdot \boldsymbol{\tau} = \frac{\mathrm{d}\,G}{\mathrm{d}\,s}, \tag{2.4}$$

essendo $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}$ la derivata lungo una linea di flusso.

Lungo ogni linea di flusso lo scalare $H + G$ ha lo stesso valore, funzione del tempo, potendo questo variare da linea di flusso a linea di flusso. Ad ogni istante le superfici $H + G$ =cost (che continueremo a chiamare superfici di Bernoulli) sono superfici di flusso ma in generale non vorticose.

Scritto $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{\lambda}$ e detta $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,l}$ la derivata lungo una linea vorticosa, moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{\lambda}$ ambo i membri della (2.1) segue che:

c) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè sussista lungo le linee vorticose un integrale bernoulliano è che* il componente parallelo ad $\boldsymbol{\omega}$ del vettore $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nu \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}$ sia conservativo, cioè *esista un campo scalare* $G(x,y,z,t)$ *tale che* [5]

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nu \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}\right) \cdot \boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathrm{d}\,G}{\mathrm{d}\,l}. \tag{2.5}$$

Ad ogni istante le superfici $H + G$ = cost sono superfici vorticose ma in generale non di flusso, a meno che risulti [6]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nu \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} = \operatorname{grad} G \tag{2.6}$$

che fornisce la *condizione necessaria e sufficiente affinché esistano per il fluido superfici che sono al tempo stesso di flusso e vorticose.*

Si possono fornire altri esempi di integrali bernoulliani lungo particolari linee, per esempio Truesdell [16a] nell'ipotesi che sia $\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = 0$ dimostra l'esistenza di un integrale bernoulliano

---

[4] Nel caso stazionario Serrin [15] esamina il caso particolare rot ω = grad G.

[5] Nel caso stazionario cfr. [3].

[6] Masotti [11a] nel caso non viscoso dimostra che condizione necessaria e sufficiente affinché esista una famiglia di superfici che sono al tempo stesso superfici di flusso e vorticose è che sia $\partial\omega/\partial t = 0$ e nel caso viscoso fornisce un esempio di soluzione della (2.6), quello in cui $\partial\omega/\partial t = 0$ e rot ω = grad G.

lungo le linee parallele al vettore $\mathbf{w} = (\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega}) \wedge \mathrm{rot}\, \boldsymbol{\omega}$, Serrin [15] nel caso stazionario riconosce che H è costante lungo le linee parallele al vettore $\mathbf{w}$.

Si riconosce facilmente che se il moto è irrotazionale valgono gli stessi risultati trovati per i fluidi non viscosi.
Nel caso stazionario il teorema di Bernoulli è valido per ogni moto irrotazionale; detto ϕ il potenziale di velocità, il trinomio di Bernoulli $H = (\mathrm{grad}\ \phi)^2/2 + p/\rho - U$ è costante in tutto lo spazio.
Nel caso non stazionario il teorema di Bernoulli vale solo per i moti irrotazionali che hanno valore locale della velocità costante, come per esempio $\mathbf{v} = a(\cos \sigma t \mathbf{i} + \mathrm{sen}\ \sigma t \mathbf{j})$; il trinomio H ha lo stesso valore su una linea di flusso ma il suo valore cambia da linea di flusso a linea di flusso. Qualunque sia il moto irrotazionale sussiste ovunque l'integrale bernoulliano

$$(\mathrm{grad}\ \phi)^2/2 + p/\rho - U + \frac{\partial \phi}{\partial t} = g(t) \tag{2.7}$$

Nei successivi numeri 3 e 4 studieremo i moti vorticosi distinguendo i casi di moto stazionario e non stazionario.

3. MOTI VORTICOSI STAZIONARI

a) Se il moto è stazionario e vorticoso, dalla (2.3) si ha che il teorema di Bernoulli sussiste per i moti per i quali risulta

$$0 = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}. \tag{3.1}$$

Il valore di H non cambia da linea di flusso a linea di flusso per i moti per i quali risulta (7)

$$0 = \nu\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}. \tag{3.2}$$

Le superfici di Bernoulli sono superfici di flusso ma in generale non sono superfici vorticose, a meno che risulti anche (8)

$$0 = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}. \tag{3.3}$$

Si riconosce facilmente che nel caso stazionario il teorema di Bernoulli non vale per i moti di Beltrami poiché, scritto $\boldsymbol{\omega} = h\mathbf{v}$ (h funzione opportuna non nulla del posto), si ha $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}(h\mathbf{v}) = h^2\mathbf{v} + \mathrm{grad}\ h \wedge \mathbf{v}$ e quindi $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v} = h^2 v^2 \neq 0$ (9).

---

(7) Sbrana in [13b] dimostra che i *soli* moti stazionari viscosi che soddisfano la (3.2) sono i moti *irrotazionali*.

(8) Castoldi in [3] dimostra che gli unici moti stazionari viscosi che soddisfano contemporaneamente le (3.1) e (3.3) sono i moti irrotazionali e i moti che verificano la relazione $(\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega}) \wedge \mathrm{rot}\, \boldsymbol{\omega} = 0$.

(9) Marris in [8b] ha dimostrato che nel caso stazionario per un fluido viscoso non sono ammessi moti di Beltrami.

Soluzioni della (3.1) sono in particolare i moti con rot $\boldsymbol{\omega} = 0$ [10], come i moti a vortice costante [tra questi il moto per rette parallele $\mathbf{v} = (by + d)\mathbf{i}$, le rotazioni rigide e viscose del tipo $\mathbf{v} = (a/r + br)\mathbf{e}_\theta$ [11]]; i moti assialsimmetrici con vortice di modulo inversamente proporzionale alla distanza dall'asse di simmetria cioè solo il moto per rette parallele $\mathbf{v} = (a + b\log r)\mathbf{k}$; il moto per eliche circolari di Strakhovitch del tipo $\mathbf{v} = (br + d/r)\mathbf{e}_\theta + (a_1 \log r + d_1)\mathbf{k}$; il moto pseudopiano di prima specie $\mathbf{v} = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}(x,y,z)\mathbf{i} - \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\mathbf{j}$ con $\nabla^2\psi = f(z)$ come per esempio $\mathbf{v} = (bz + d)\mathbf{i} + (b_1 z + d_1)\mathbf{j}$; il moto di Von Kàrmàn del tipo $\mathbf{v} = -ar/2\mathbf{e}_r + r(bz + b_1)\mathbf{e}_\theta + (az + a_1)\mathbf{k}$ [12].
Per tali moti, essendo verificate contemporaneamente le (3.1) e (3.3), le superfici di Bernoulli sono superfici di flusso e vorticose contemporaneamente.

Si osservi che la (3.3) è identicamente verificata per i moti piani e assialsimmetrici che avvengono per piani meridiani, pertanto per i moti stazionari piani e assialsimmetrici per i quali vale la (3.1) (cioè per i quali sussiste il teorema di Bernoulli) le superfici di Bernoulli sono superfici di flusso e vorticose al tempo stesso.

b) Se il moto è stazionario e vorticoso dalla (2.4) si ha che sussiste un integrale bernoulliano lungo le linee di flusso per i moti per i quali il componente parallelo a $\mathbf{v}$ di rot $\boldsymbol{\omega}$ è conservativo, cioè risulta

$$\nu \,\mathrm{rot}\, \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\tau} = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}s}.$$

Il valore di $H + G$ si mantiene costante su ogni linea di flusso; non cambia da linea di flusso a linea di flusso per i moti per i quali il componente ortogonale a $\mathbf{v}$ di rot $\boldsymbol{\omega}$ è uguale a $\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega}$ ed in tal caso $H + G = \mathrm{cost}$ ovunque, pertanto non esistono le superfici di Bernoulli.

Soluzioni della (3.4), oltre ai moti per i quali risulta $\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}s} = 0$ già esaminati in a), sono i moti per i quali rot $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{grad}\, G$ [13] (con $\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}s} \neq 0$) come il moto per rette parallele $\mathbf{v} = (ay^2 + by + d)\mathbf{i}$ con $G = ax$, le rotazioni rigide e viscose $\mathbf{v} = (a/r + br + dr\log r)\mathbf{e}_\theta$ con $G = -2\mathrm{d}\,\theta$ [14]; i moti assialsimmetrici la cui funzione di corrente $\psi(r, z)$ è tale che $D^4\psi = 0$ [15], per esempio i moti assialsimmetrici con vortice di modulo proporzionale alla distanza

---

(10) Tali moti sono *universali*, cioè possibili sia per un fluido non viscoso che per uno viscoso (cfr. per esempio [16a]); per essi la pressione p è indipendente da ν (moti universali con $\nabla^2 \mathbf{v} = 0$).

(11) Qui e di seguito $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{k}$ sono i versori di una terna di coordinate cilindriche ortogonali (r, θ, z) di asse z.

(12) Per brevità non si riporta qui la dimostrazione che per i moti sopraelencati è soddisfatta la rot $\boldsymbol{\omega} = 0$. Allo stesso modo nel seguito si ometteranno le dimostrazioni esplicite per situazioni analoghe a questa.

(13) Tali moti sono universali; per essi la pressione p è funzione di $\nu (\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = 0)$, (cfr. anche [15] pag. 260).

(14) Sono le uniche soluzioni piane stazionarie; Kampé de Feriet in [7a] ha dimostrato che nel caso stazionario gli unici moti con $\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = 0$ sono i moti per rette parallele, i moti per cerchi concentrici e i moti a vortice costante.

(15) L'operatore $D^2\psi$ è definito da $D^2\psi = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial r} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$.

dall'asse di simmetria ($D^2\psi = Ar^2$ con $G = Az$) come il moto di Hill $\mathbf{v} = -2Arz\mathbf{e}_r - 2A(a^2 - 2r^2 - z^2)\mathbf{k}$; il moto per eliche circolari di Strakhovitch $\mathbf{v} = (ar\log r + br + d/r)\mathbf{e}_\theta + (a_1 \log r + b_1 r^2 + d_1)\mathbf{k}$ con $G = -(2a\theta + 4b_1 z)$.
Per tali moti, essendo verificata la (2.6), le superfici di Bernoulli sono superfici di flusso e vorticose al tempo stesso.

c) Se il moto è stazionario e vorticoso, dalla (2.5) si ha che sussiste un integrale bernoulliano lungo le linee vorticose:

per *ogni moto universale* (rot $\boldsymbol{\omega}$ = grad G [(16)]);

per i moti per i quali risulta rot $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$, tra questi ogni *moto piano, ogni moto assialsimmetrico* che avvenga per piani meidiani, *ogni moto spaziale per rette parallele*, i moti pseudopiani di prima specie $\mathbf{v} = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\mathbf{i} - \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{j}$ con $\psi(x, y, z)$ tale che $\dfrac{D(\nabla^2\psi, \partial\psi/\partial z)}{D(x, y)} = 0$ essendo $\nabla^2\psi = \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$ come per esempio $\mathbf{v} = a^{\alpha x + \beta y + \gamma z}(\beta\mathbf{i} - \alpha\mathbf{j})$, il moto $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + (a_1 y + d)\mathbf{j} + [f(x) - a_1 z + d_1]\mathbf{k}$ con $f(x)$ tale che $\nu f'''(x) - af''(x) + a_1 f'(x) = 0$ [(17)].
Si osservi che se rot $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ H ha valore costante lungo ogni linea vorticosa, tale valore variando da linea vorticosa a linea vorticosa; infatti la condizione affinché H non vari passando da una linea vorticosa ad un'altra è espressa ancora dalla (3.2) che è verificata solo dai moti irrotazionali (cfr. nota (7)).

La condizione affinché il valore di $H + G$ non vari da linea vorticosa a linea vorticosa è che il componente di rot $\boldsymbol{\omega}$ ortogonale ad $\boldsymbol{\omega}$ sia uguale a $\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega}$.

4. MOTI VORTICOSI NON STAZIONARI

a) Se è verificata la (2.3), lungo ogni linea di flusso H assume lo stesso valore (dipendente dal tempo), potendo tale valore variare da linea di flusso a linea di flusso, a meno che risulti

$$0 = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nu \,\mathrm{rot}\, \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}. \tag{4.1}$$

La (4.1) esprime la *condizione necessaria e sufficiente affinché H sia in tutto lo spazio funzione solo del tempo* (ed in tal caso non esistono le superfici di Bernoulli). Se vale la (4.1), necessariamente $\mathbf{v}$ ha modulo decrescente nel tempo con legge

$$\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial t} + \nu\omega^2 = 0, \tag{4.2}$$

(16) Le superfici (di Bernoulli) $H + G$ = cost sono superfici vorticose e di flusso al tempo stesso; per i moti universali per i quali risulta rot $\omega = 0$ sussiste anche il teroema di Bernoulli (vedi caso a)).

(17) Il componente parallelo ad ω di rot $\boldsymbol{\omega}$ è nullo e rot (rot $\boldsymbol{\omega}$) $= f'''(x)\mathbf{j}$.

come si riconosce facilmente dalla (4.1) considerandone il prodotto scalare per $\mathbf{v}$ e la divergenza di ambo i membri [18].

Se non vale la (4.1), ad ogni istante le superfici (di Bernoulli) H = cost, normali al vettore $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nu \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}$, sono superfici di flusso ma in generale non vorticose, a meno che risulti anche

$$0 = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nu \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} \right) \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{4.3}$$

come per i moti piani e assialsimmetrici che avvengono per piani meridiani.
Se le (2.3) e (4.3) sono verificate contemporaneamente, si ha anche [19]

$$0 = (\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega}) \wedge \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nu \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} \right) \tag{4.4}$$

che è in particolare verificata da ogni moto di Beltrami e dai moti per i quali risulta $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nu \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} = 0$.

Le superfici di Bernoulli non sono, in generale, stazionarie; perché ciò avvenga è necessario e sufficiente che in ogni punto non vari col tempo l'orientamento del vettore $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nu \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}$ [20].

Si riconosce che nel caso non stazionario il teorema di Bernoulli sussiste per i moti di Beltrami il cui campo di velocità è tale che

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} + \nu h^2 v^2 = 0 \tag{4.5}$$

avendo posto $\boldsymbol{\omega} = h\mathbf{v}$, con h funzione opportuna del tempo e del posto.
Le superfici di Bernoulli sono superfici di flusso e vorticose al tempo stesso essendo verificata la (4.4), a meno che valga la (4.1), nel qual caso H è funzione solo del tempo in tutto lo spazio come per esempio per h =cost, circostanza questa che si riscontra per i moti (di *Trkal*) $\mathbf{v} = \mathbf{a}(x, y, z) e^{-\nu A^2 t}$ con $\operatorname{rot} \mathbf{a} = A\mathbf{a}$.

---

(18) In particolare dalla (4.2) nel caso stazionario si ritrova il risultato di Sbrana (cfr. nota (7)).

(19) In particolare dalla (4.4) si ritrovano i risultati determinati nel caso stazionario viscoso da Castoldi (cfr. nota (8)).

(20) Masotti in [11a] nel caso di moto non viscoso con vortice stazionario dimostra che la condizione affinché le superfici di Bernoulli siano stazionarie è che sia $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v} \cdot \partial \mathbf{v}/\partial t = 0$.

Dalla (2.3) si ha che il teorema di Bernoulli sussiste in particolare per i moti per i quali risulta

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nu \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} = 0; \tag{4.6}$$

per tali moti, essendo verificata la (4.4), le superfici di Bernoulli, se esistono, sono superfici di flusso e vorticose contemporaneamente.
La (4.6) nel caso piano e assialsimmetrico, introdotta la funzione di corrente ψ, si scrive rispettivamente

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \nu \nabla^2 \psi = f(t), \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \nu D^2 \psi = f(t). \tag{4.8}$$

Si riconosce che sono moti che soddisfano la (4.6) e per i quali quindi sussiste il teorema di Bernoulli:

– i moti piani per rette parallele o per cerchi concentrici la cui funzione di corrente $\psi(x,y,t)$ verifica la (4.7), *ogni moto di Taylor* e questi sono gli *unici* [21] moti piani non stazionari che verificano la (4.6);

– i moti di rivoluzione per rette parallele la cui funzione di corrente $\psi(r,t)$ verifica la (4.8), i moti di rivoluzione la cui funzione di corrente $\psi(r,z,t)$ verifica la (4.8) e tali che $D^2\psi = Ar^2$, come per esempio

$$\psi = \nu A r^2 t + g(r,z), \qquad D^2 g = Ar^2;$$

– i moti spaziali per rette parallele $\mathbf{v} = v(x,y,t)\mathbf{k}$ con v tale $\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \nabla^2 v = 0$, *ogni moto di Trkal* (tra questi in particolare i *moti di Caldonazzo* $\mathbf{v} = be^{-\nu A^2 t}[J_1(Ar)\mathbf{e}_\theta + J_0(Ar)\mathbf{k}]$).

b) Se è verificata la (2.4) il valore di $H+G$ si mantiene funzione solo del tempo lungo ogni linea di flusso, non cambia da linea di flusso a linea di flusso per i moti per i quali il componente

---

[21] Per i moti che verificano la (4.6), considerando il rotore di ambo i membri della (2.1), si ha $\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}) = 0$ che nel caso piano si scrive $\frac{D(\psi, \nabla^2\psi)}{D(x,y)} = 0$. Kampé de Fériet [7b] ha dimostrato che gli unici moti piani soluzioni del sistema formato dalle due equazioni $\frac{D(\psi,\nabla^2\psi)}{D(x,y)} = 0$, $\nabla^2[(\partial\psi/\partial t) - \nu\nabla^2\psi] = 0$ sono i moti per rette parallele, i moti per cerchi concentrici, i moti (*di Taylor*) con funzione di corrente del tipo $\psi = e^{\nu A t}F(x,y)$ con $\nabla^2 F = AF$ ed i moti a vortice costante (cf. anche [1] pag. 139).

ortogonale a v di $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nu \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}$ è uguale a $\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega}$ ed in tal caso, essendo $H + G = f(t)$ ovunque, non esistono le superfici di Bernoulli.
Ad ogni istante le superfici $H + G =$ cost sono superfici di flusso ma in generale non vorticose, a meno che risulti verificata la (2.6).

Dalla (2.4) si ha che sussiste un integrale bernoulliano lungo le linee di flusso, oltre ai casi esaminati in a):

– per *ogni moto per rette parallele*; per i moti per i quali risulta in particolare verificata la (2.6) [(22)], quindi per *ogni moto per cerchi concentrici*, per *ogni moto piano a vortice costante* (cf. anche [1] pag. 141); per i moti di rivoluzione con funzione di corrente $\psi(r, z, t)$ tale che $D^2\psi = Ar^2$ (cf. anche [1] pag. 158).

c) Dalla (2.5) si ha che sussiste un integrale bernoulliano lungo le linee vorticose:

per *ogni moto per rette parallele*; per *ogni moto piano*;

per *ogni moto di rivoluzione*; per *ogni moto di Trkal*; per i moti che verificano la (2.6) (vedi caso b)).

---

(22) Masotti in [11a] esamina il caso particolare in cui $\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = 0$ e $\operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} = \operatorname{grad} F$.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. BERKER, *Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible*, Handbuch der Physik, 8/2 (1963) pp. 1-384.

[2a] B. CALDONAZZO, *Un'osservazione a proposito del teorema di Bernoulli*, Boll. Un. Mat. Ital. **4** (1925), pp. 1-3.

[2b] B. CALDONAZZO, *Un'estensione del teorema di Bernoulli*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **4** (6) (1926), pp. 124-126.

[2c] B. CALDONAZZO, *Sopra alcune proprietà di moti liquidi permanenti i cui vortici sono normali alle velocità*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **6** (6) (1927), pp. 288-291.

[3] L. CASTOLDI, *Superficie e linee di Bernoulli nel moto stazionario di un fluido reale*, Atti Accad. Ligure Sci. Lett. **4** (1947), pp. 21-25.

[4a] U. CISOTTI, *Sul carattere necessariamente vorticoso dei moti regolari, permanenti di un fluido qualsiasi in ambienti limitati, oppure in quiete all'infinito*, Boll. Un. Mat. Ital. **2** (1923), pp. 170-172.

[4b] U. CISOTTI, *Considerazioni sulla nota formula idrodinamica di Daniele Bernoulli*, Boll. Un. Mat. Ital. **2** (1923), pp. 125-128.

[5] T. CRAIG, *Motions of viscous fluids*, J. Franklin Inst. **110** (1880), pp. 217-227.

[6] B. FINZI, *Moti di fluidi incompressibili il cui vortice è normale alla velocità*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **34** (5) (1924), pp. 275-278.

[7a] M.J. KAMPÈ DE FERIET, *Sur quelques cas d'intégration des équations du mouvement plan d'un fluide visqueux incompressible*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles (A) **50** (1930), pp. 77-80.

[7b] M.J. KAMPÈ DE FERIET, C.R. 9° Congr. Int. Math., Zürich, Vol. 2, 1932, pp. 298-299.

[8a] A.W. MARRIS, *On steady three-dimensional motions*, Arch. Rational Mech. Anal. **35** (1969), pp. 122-128.

[8b] A.W. MARRIS, *The impossibility of steady screw motions of a Navier-Stokes fluid*, Arch. Rational Mech. Anal. **70** (1979), pp. 47-60.

[8c] A.W. MARRIS, *Remarks on plane universal Navier-Stokes motions*, Arch. Rational Mech. Anal. **77** (1981), pp. 195-102.

[8d] A.W. MARRIS, *On circulation-preserving motions with lamellar vorticity*, J. Appl. Math. Phys. (ZAMP) **33** (1982), pp. 124-131.

[8e] A.W. MARRIS, *On motions with constant speed and streamline parameters*, Arch. Rational Mech. Anal. **90** (1985), pp. 1-14.

[9] A.W. MARRIS, M.G.A. SWANI, *On the general impossibility of controllable axisymmetric Navier-Stokes motions*, Arch. Rational Mech. Anal. **63** (1977), pp. 107-153.

[10] A.W. MARRIS, M.P. STALLYBRASS, *A class of fluid motions obtained by superposition*, Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **113** (1979), pp. 53-60.

[11a] A. MASOTTI, *Osservazione sui moti di un fluido nei quali è stazionaria la distribuzione del vortice*, Rend. Accad. Naz. Lincei **6** (6A) (1927), pp. 224-228.

[11b] A. MASOTTI, *Decomposizione intrinseca del vortice e sue applicazioni*, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. **60** (2) (1927), pp. 869-874.

[12a] S.N. PRASAD, P.J. THAKUR, *Two-dimensional universal motions of Navier-Stokes fluids*, Math. Ed. (A) **14** (1980), pp. 1-7.

[12b] S.N. PRASAD, P.J. THAKUR, *Axially symmetrical universal motions of Navier-Stokes fluids*, Math. Ed. (A) **14** (1980), pp. 15-24.

[12c] S.N. PRASAD, P.J. THAKUR, *Rotationally symmetrical universal motions of Navier-Stokes fluid*, Math. Ed. (A) **14** (1980), pp. 35-45.

[13a] F. SBRANA, *Sopra una classe di moti vorticosi permanenti*, Atti Soc. Ligustica Sci. Lett. Genova **6** (2) (1927), pp. 157-164.

[13b] F. SBRANA, *Sulla validità del teorema di Bernoulli per un fluido reale*, Boll. Un. Mat. Ital **10** (1931), pp. 77-78.

[14] B. SEGRE, *Sul moto sferico vorticoso di un fluido incompressibile*, Ann. Mat. Pura Appl. **1** (4) (1924), pp. 31-55.

[15] J. SERRIN, *Mathematical principles of classifcal fluid mechanics*, Handbuch der Physik **8/1** (1959), pp. 125-263.

[16a] C. TRUESDELL, *Bernoulli's theorem for viscous compressible fluids*, Phys. Review **77** (1950), pp. 535-536.

[16b] C. TRUESDELL, *The kinematics of vorticity*, Indiana University Press, Bloomington, 1954, pp. 1-232.

[17] W.L. YIN, *Velocity fields that are constant along every vortex line*, Arch. Rational Mech. Anal. **87** (1985), pp. 93-105.

Received March 15, 1988.

G. Remorini
Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale
Università di Pisa
Via Diotisalvi, 2
Pisa, Italy