Note di Matematica Vol. X, Suppl. n. 2, 453-470 (1990)

RESTGLIEDABSCHÄTZUNGEN FÜR DIE STIRLINGSCHE REIHE

F.W. SCHÄFKE, A. SATTLER

Dedicated to the memory of Professor Gottfried Köthe

Für das Restglied $R_n(z)$ der Stirlingschen Reihe im Komplexen, definiert durch

$$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k} z^{-2k+1}}{2k(2k-1)} + R_n(z),$$

sind zahlreiche Abschätzungen bekannt. Wir zitieren hier insbesondere T. J. Stieltjes [16], E. Lindelöf [7], T. M. MacRobert [8], J. G. van der Corput [2], R. Spira [15] und H. Behnke-F. Sommer [1].

In der vorliegenden Note geben wir nicht nur weitere und schärfere Schranken. Wir zeigen darüber hinaus, daß diese und andere schon bekannte Abschätzungen in bestimmtem Sinne optimal, d. h. nicht oder kaum verbesserungsfähig sind. Es zeigt sich, daß dabei die drei Sektoren $|\vartheta| \leq \pi/4$, $\pi/4 < |\vartheta| < \pi/2$, $\pi/2 \leq |\vartheta| < \pi$ für $\vartheta := \arg z$ ein sehr unterschiedliches Verhalten ergeben.

Im Abschnitt **1.** geben wir – bewußt knapp dargestellt – einen Abriß der – bekannten – Grundlagen für die Untersuchungen in diesem Gebiet. Hier lag uns daran, einerseits die verwendeten Bezeichnungen und Formeln bereitzustellen, andererseits aber nicht durch bloße Zitate aus bekannten Monographien für den weniger versierten Leser den Eindruck von tiefer liegenden Resultaten zu erwecken. In **2.** weisen wir auf die Symmetrie-Formel

$$R_n(z) + R_n(-z) = -\log(1 - \exp(2\pi i z)) \quad (Im\, z > 0),$$

hin, die wohl weitgehend übersehen worden ist. Sie spielt naturgemäß eine wesentliche Rolle für Restabschätzungen in $Re\, z < 0$. Sie führt andererseits zu einem interessanten Beweis der Binet-Schaar-Formel für $R_n(z)$, den wir – wieder bewußt knapp gefaßt – in Abschnitt **3.** skizzieren. In **4.** stellen wir dann einige Abschätzungen im Zusammenhang mit der obigen Symmetrie-Formel bereit. In Abschnitt **5.** werden einige Abschätzungen hergeleitet, die ähnliche Schranken von Lindelöf und MacRobert verbessern. Dies führt in **6.** zu «guten» Abschätzungen für $\pi/4 < |\vartheta| \leq \pi/2$. In gewissem Sinne optimale Schranken für $Re\, z < 0$ werden dann – aufbauend auf den vorangehenden Resultaten – in **7.** diskutiert. In Abschnitt **9.** geben wir einen Beweis für eine Verbesserung der wohlbekannten Abschätzung von Stieltjes, die sich – ohne Beweis – als offenbarer Schreib– oder Druckfehler an einigen Stellen in der Literatur findet. Der Beweis für diese etwas «unnatürliche» Formel ist nicht ausgesprochen einfach. Er benutzt an einer Stelle einen 3-Strahlen-Satz, der dem bekannten 3-Kreise-Satz von Hadamard entspricht. Wir geben der Vollständigkeit halber in **8.** einen einfachen Beweis. Danach diskutieren wir in **10.** and **11.** einige Schranken speziellen Typs, die eine gewisse Bedeutung für die numerische Praxis haben. Wir schließen in **12.** mit einigen – kritischen – Bemerkungen zu Abschätzungen von Spira [15].

1. GRUNDLAGEN

Die Bernoulli-Polynome, hier mit $\widetilde{B}_n (n = 0,1,2,\ldots)$ bezeichnet, sind definiert durch

$$\frac{z\exp(tz)}{\exp(z)-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{B}_n(t)\frac{z^n}{n!} \quad (|z| < 2\pi)$$

oder durch

$$\widetilde{B}_0 = 1,\ \widetilde{B}_n' = n\widetilde{B}_{n-1},\ \int_0^1 \widetilde{B}_n(t)\,dt = 0 \quad (n = 1,2,3,\ldots). \tag{1.1}$$

Die Bernoulli-Zahlen sind dann

$$B_n := \widetilde{B}_n(0). \tag{1.2}$$

Mit

$$P_n(t) := \widetilde{B}_n(t - [t]) \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{1.3}$$

bezeichnen wir die 1-periodischen Fortsetzungen der Bernoulli-Polynome in $[0,1[$. Wir notieren die bekannten Formeln

$$B_{2n+1} = 0 \quad (n = 1,2,3,\ldots), \tag{1.4}$$

$$B_{2n+2} = (-1)^n \frac{2(2n+2)!}{(2\pi)^{2n+2}}\zeta(2n+2) \quad (n = 0,1,2,\ldots). \tag{1.5}$$

Wir gehen nun aus von der Funktion

$$\mu(z) := \log\Gamma(z+1) - \left(z+\frac{1}{2}\right)\log z + z - \frac{1}{2}\log 2\pi, \tag{1.6}$$

die, ausgehend von den Hauptwerten von log für $z > 0$, eindeutig bestimmt und holomorph ist in

$$\mathbf{D} = \mathbb{C} \setminus \,]-\infty, 0], \tag{1.7}$$

und der Darstellung von Gilbert-Stieltjes [4], [16] (vgl. auch N. Nielsen [11])

$$\mu(z) = -\int_0^\infty \frac{P_1(t)}{z+t}\,\mathrm{d}t \quad (z \in \mathbf{D}). \tag{1.8}$$

Hieraus erhält man durch partielle Integration die Stirlingsche Reihe

$$\mu(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)}\, z^{-(2k-1)} + R_n(z) \tag{1.9}$$

mit der Restglieddarstellung

$$R_n(z) = \int_0^\infty \frac{B_{2n+2} - P_{2n+2}(t)}{(2n+2)(z+t)^{2n+2}}\,\mathrm{d}t \tag{1.10}$$

für

$$z \in \mathbf{D}; \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{1.11}$$

Mit

$$|P_{2n+2}(t)| \le |B_{2n+2}|$$

und (1.5) gewinnt man durch Vergleich der Vorzeichen

$$0 < (-1)^n R_n(x) < A_n x^{-(2n+1)} \tag{1.12}$$

für $x > 0$ and $n \in \mathbb{N}_0$. Dabei haben wir die nun häufig auftretende Abkürzung benutzt

$$A_n := \frac{|B_{2n+2}|}{(2n+2)(2n+1)}. \tag{1.13}$$

Mit

$$-\pi < \vartheta := \arg z < \pi, \quad r := |z| \tag{1.14}$$

und

$$|z+t| \geq (r+t)\cos(\vartheta/2)$$

führt das Vorangehende zu der bekannten Abschätzung von Stieltjes [16]

$$(1.15) \qquad |R_n(z)| \leq \frac{A_n}{r^{2n+1}(\cos(\vartheta/2))^{2n+2}} \quad (z \in \mathbf{D}; n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Hieraus und mit

$$(1.16) \qquad R_n(z) = \frac{B_{2n+2}}{(2n+2)(2n+1)} z^{-(2n+1)} + R_{n+1}(z),$$

folgt das Limes-Verhalten

$$(1.17) \qquad z^{2n+1} R_n(z) \to \frac{B_{2n+2}}{(2n+2)(2n+1)} \quad (z \to \infty)$$

in jedem Sektor

$$(1.18) \qquad S_\delta := \{z : |\vartheta| < \pi - \delta\} \quad (\delta > 0).$$

Darüberhinaus ergeben (1.16) und (1.15)

$$(1.19) \qquad z^{2n+2} R_{n+1}(z) \to 0 \quad (z \to 0) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

in diesen Sektoren. Für $n = 0$ zeigt ergänzend (1.6) noch

$$(1.20) \qquad zR_0(z) \to 0 \quad (z \to 0).$$

2. DIE SYMMETRIE-FORMEL FÜR DIE RESTGLIEDER

In der Stirlingschen Reihe (1.9) erscheinen nur ungerade Exponenten von z. Daher ist

$$(2.1) \qquad R_n(z) + R_n(-z) = \mu(z) + \mu(-z) =: \lambda(z)$$

unabhängig von n und lokal holomorph in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. (1.10) zeigt

$$(2.2) \qquad \lambda(z) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(t)}{n(z+t)^n} \, dt \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

und damit

$$\lambda(z+1) = \lambda(z). \tag{2.3}$$

Man berechnet diese Funktion leicht explizit, wobei die Durchführung für rein imaginäre z genügt, natürlich unter Verwendung des Ergänzungssatzes für Γ . Man erhält

$$\lambda(z) = -\log\left(1 - \exp(2\pi i z)\right) \quad I(m\, z > 0). \tag{2.4}$$

Wir bemerken, daß (1.15) und (2.3) das Limesverhalten der Reste ergeben:

$$R_n(z-k) \to \lambda(z) \quad (\mathbf{N} \ni k \to +\infty), \tag{2.5}$$

und zwar lokal gleichmäßig in $\mathbb{C} \setminus \mathbf{R}$. Danach ist offenbar jede Funktion $R_n(z)$ beschränkt auf jeder Parallelen zur reellen Achse, konvergiert jedoch nicht gegen 0 für $Re\ z \to -\infty$.

Diese Symmetrie-Formel findet man etwas implizit bei Lindelöf [7], p. 91, 92 und 101 im Zusammenhang mit der Restglieddarstellung von Binet-Schaar. Sie scheint sonst kaum beachtet worden zu sein. Im folgenden verwenden wir häufig

$$l(y) := \lambda(iy) = \lambda(-iy) = -\log\left(1 - \exp(-2\pi y)\right) \quad (y > 0). \tag{2.6}$$

3. EIN NEUER BEWEIS DER FORMEL VON BINET-SCHAAR

Für $z = iy,\ y > 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ ergeben (2.1) und (2.6)

$$Re\left((-1)^n z^{2n} R_n(z)\right) = \frac{1}{2} y^{2n} \cdot l(y) > 0. \tag{3.1}$$

Daraus folgt leicht

$$Re\left((-1)^n z^{2n} R_n(z)\right) > 0 \quad (\,|\arg z| \leq \pi/2). \tag{3.2}$$

Nun kann für $Re\ z > 0$ diese Funktion durch ihren Realteil auf der imaginären Achse dargestellt werden:

$$(-1)^n z^{2n} R_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} t^{2n} l(|t|) \frac{dt}{z - it} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.3}$$

Das läßt sich ohne Anwendung allgemeiner Theoreme in relativ elementarer Weise zeigen. Für $n > 0$ stellt man fest: die Funktion g, definiert durch die rechte Seite, ist holomorph für $Re\ z > 0$ und strebt gegen 0 zumindest für $Re\ z \to \infty$; $Re\ g$ ist stetig für $Re\ z \geq 0$ mit $2\,Re\ g(iy) = y^{2n} l(|y|)$ und strebt gegen 0 für $z \to \infty$. Das genügt zur Identifizierung. Für $n = 0$ sind keine Komplikationen erforderlich: durch gliedweise Integration erhält man nämlich mit dem bekannten Wert von $\zeta(2)$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty l(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{12}.$$

Damit ergibt (1.16) für $n = 0$ des gewünschte Resultat.

Offenbar kann (3.3) in der Form geschrieben werden:

$$R_n(z) = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi z^{2n-1}}\int_0^\infty \frac{t^{2n}}{z^2 + t^2}\log(1 - \exp(-2\pi t))\,\mathrm{d}t. \tag{3.4}$$

Das aber ist die Formel von Binet und Schaar, die hier in neuem Lichte erscheint.

4. EINIGE ABSCHÄTZUNGEN FÜR DIE FUNKTIONEN λ UND l

In 2. wurde deutlich, daß die Funktionen λ and l wesentliche Bedeutung für Restgliedabschätzungen haben. Mit diesem Ziel notieren wir zunächst

$$|\lambda(z)| \leq l(|y|) \quad (y = Im\ z). \tag{4.1}$$

Das ergibt sich unmittelbar durch Beachtung der Vorzeichen der Potenzreihe für die Funktion $-\log\,(1 - z)$. Wenn man nun Abschätzungen der Form

$$|R_n(z)| \leq A_n r^{-(2n+1)} c(n, |\vartheta|) \quad (z = re^{i\vartheta}), \tag{4.2}$$

wie sie etwa auch (1.15) darstellt, anstrebt, so ist dazu die Kenntnis von

$$M_n := \max\left\{y^{2n+1} l(y) : y > 0\right\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.3}$$

von Bedeutung. Wir zeigen:

Für jedes n wird das Maximum genau an einer Stelle angenommen. Für $n = 0$ erhält man das Maximum für $2\pi y = \log 2$ mit dem Wert

$$M_o = \frac{1}{2\pi}\cdot(\log 2)^2. \tag{4.4}$$

Für alle n gilt die Schranke

$$M_n \leq \sqrt{\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)}\cdot A_n \tag{4.5}$$

mit den Konstanten (1.13). Für $n \to \infty$ hat man dabei

$$M_n = \sqrt{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} \cdot A_n \cdot \left(1 - O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{4.6}$$

Zum Beweis der ersten Aussage geht man zweckmäßig aus von der Äquivalenz der drei Gleichungen

$$x = l\left(\frac{y}{2\pi}\right), \quad e^{-x} + e^{-y} = 1, \quad y = l\left(\frac{x}{2\pi}\right).$$

Das Problem führt so zu

$$x \cdot y^k = \max, \quad e^{-x} + e^{-y} = 1.$$

Hier kann man allgemeiner $k > 0$ betrachten. In üblicher Weise erhält man die notwendige Bedingung

$$\begin{vmatrix} y^k & kxy^{k-1} \\ e^{-x} & e^{-y} \end{vmatrix} = 0$$

und so das Problem

$$ye^{-y} = kxe^{-x}, \quad e^{-x} + e^{-y} = 1.$$

Mit

$$t := e^{-y} \in \,]0,1[$$

gibt das die Gleichung

$$\varphi(t) := t \log t - k(1-t) \log(1-t) = 0.$$

Wir rechnen

$$\varphi'(t) = \log(t \cdot (1-t)^k) + 1 + k$$

und sehen: φ' hat genau zwei Nullstellen. Wegen $\varphi(t) \to 0$ für $t \to 0$ und $t \to 1$ folgt: φ hat genau eine Nullstelle. Das beweist die erste Aussage. Für $n = 0$, $k = 1$ zeigt dies nun gleichzeitig: das Maximum liegt bei $t = 1/2$. Das gibt die zweite Aussage. Für (4.5) schreiben wir

$$-y^{2n+1} \log(1 - \exp(-2\pi y)) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} y^{2n+1} \exp(-2\pi m y) \tag{$*$}$$

und erhalten mit

$$\max_{t \geq 0} t^k \exp(-c\,t) = \left(\frac{k}{ce}\right)^k \quad (c > 0, k > 0)$$

die Ungleichung

$$M_n \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{2n+1}{2\pi m e} \right)^{2n+1} = \left(\frac{2n+1}{2\pi e} \right)^{2n+1} \zeta(2n+2).$$

Nun ist auf Grund von (1.5)

$$\zeta(2n+2) = \frac{(2\pi)^{2n+2}}{2(2n)!} A_n .$$

Mit

$$\left(\frac{2n+1}{e} \right)^{2n+1} \leq \frac{(2n+1)!}{(2\pi(2n+1))^{1/2}}$$

beweist dies die dritte Behauptung. Für (4.6) gehen wir aus von

$$M_n \geq \left(\frac{2n+1}{2\pi e} \right)^{2n+1}.$$

und verwenden

$$\zeta(2n+2)^{-1} = 1 - O\left(\frac{1}{n}\right)$$

sowie die Stirling-Formel in der Form

$$\left(\frac{2n+1}{e} \right)^{2n+1} = \frac{(2n+1)!}{(2\pi(2n+1))^{1/2}} \cdot \left(1 - O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Durch Vergleich mit den vorangehenden Überlegungen gibt dies auch die letzte Aussage.

5. VERSCHÄRFUNGEN EINIGER SCHRANKEN VON LINDELÖF UND MACROBERT

Wir benutzen die Binet-Schaar-Formel und drehen den Integrationsstrahl in üblicher Weise. Für $\vartheta = arg\, z$, $\alpha = arg\, t$,

$$|\alpha| < \pi/2, \quad |\vartheta - \alpha| < \pi/2$$

gibt dies die Darstellung

$$(5.1) \qquad R_n(z) = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi z^{2n-1}} \cdot \int_0^{\infty e^{i\alpha}} \frac{t^{2n}}{t^2 + z^2} \log\left(1 - \exp(-2\pi t)\right) dt.$$

Mit $t = \tau e^{i\alpha}$ und

$$|\log(1-z)| \leq -\log(1-|z|) \quad (|z|<1)$$

kann man dann abschätzen

$$|R_n(z)| \leq \frac{1}{\pi r^{2n-1}} \int_0^\infty \frac{\tau^{2n}}{|z^2 e^{-2i\alpha} + \tau^2|} l(\tau\cos\alpha)\,\mathrm{d}\tau$$

oder mit $\varphi := \tau \cos\alpha$

$$|R_n(z)| \leq \frac{1}{\pi(r\cos\alpha)^{2n-1}} \int_0^\infty \frac{\varphi^{2n}}{|z^2 e^{-2i\alpha}\cos^2\alpha + \varphi^2|} l(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

Nun zeigen (3.4) und (1.17)

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \varphi^{2n} l(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

So erhalten wir weiter

$$|R_n(z)| \leq \frac{A_n}{(r\cos\alpha)^{2n-1}} \cdot \max_{\varphi\geq 0} |\varphi^2 + z^2 e^{-2i\alpha}\cos^2\alpha|^{-1}.$$

Das Maximum ist leicht zu sehen: wir erhalten schließlich

$$(5.2) \qquad |R_n(z)| \leq \frac{A_n}{(r\cdot\cos\alpha)^{2n+1}} \quad (|\vartheta-\alpha| \leq \pi/4),$$

$$(5.3) \qquad |R_n(z)| \leq \frac{A_n}{(r\cdot\cos\alpha)^{2n+1}\sin(2|\vartheta-\alpha|)} \quad (\pi/4 \leq |\vartheta-\alpha| < \pi/2),$$

dies für

$$z = re^{i\vartheta},\ -\pi/2 < \alpha < \pi/2,\ n = 0,1,2,\ldots.$$

Diese Schranken verallgemeinern oder verbessern ähnliche Formeln von Lindelöf [7] und MacRobert [8].

Speziell ergeben (5.2) Und (5.3) die bekannten Resultate

$$(5.4) \qquad |R_n(z)| \leq \frac{A_n}{r^{2n+1}} \quad (|\vartheta| \leq \pi/4)$$

und

$$(5.5) \qquad |R_n(z)| \leq \frac{A_n}{r^{2n+1}\sin 2|\vartheta|} \quad (\pi/4 \leq |\vartheta| < \pi/2).$$

Wir bemerken: Wie (1.17) zeigt, ist (5.4) optimal für eine Schranke der Form

$$|R_n(z)| \leq A_n r^{-2n-1} c(n, |\vartheta|)$$

in dem ersten oben genannten Sektor.

Für $|\vartheta| = \pi/2$ kann in (5.3) das Minimum der rechten Seite für $|\alpha| \in]0, \pi/4]$ leicht bestimmt werden. Es wird angenommen für

$$\tan |\alpha| = (2n+2)^{-1/2}.$$

So erhalten wir

$$(5.6) \qquad |R_n(z)| \leq \frac{A_n}{r^{2n+1}} \cdot C_n \quad (|\arg z| = \pi/2)$$

mit

$$(5.7) \qquad C_n := \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2n+2}\right)^{n+1} (2n+3)^{1/2}.$$

6. FEHLERSCHRANKEN FÜR $\pi/4 \leq |\arg z| \leq \pi/2$

Kürzlich haben F. W. Schäfke und A. Finsterer [13] gezeigt, daß die Lindelöf-Schranke (5.5) in folgendem Sinne optimal ist: $c(|\vartheta|) := (\sin 2|\vartheta|)^{-1}$ ist die beste n-unabhängige Konstante für eine Abschätzung der Form

$$|R_n(z)| \leq A_n r^{-2n-1} c(|\vartheta|) \quad (\pi/4 \leq |\vartheta| < \pi/2).$$

Im folgenden suchen wir bessere Schranken der Form

$$|R_n(z)| \leq A_n r^{-2n-1} c_k(n, |\vartheta|) \quad (\pi/4 \leq |\vartheta| \leq \pi/2)$$

mit von n abhängigen Faktoren.

Hier führt zunächst das Prinzip vom Maximum zu der Möglichkeit

$$c_0(n, |\vartheta|) := \min((\sin 2|\vartheta|)^{-1}, C_n)$$

mit dem C_n von (5.7). Eine etwas bessere Wahl ist die aus dem 3-Strahlen-Satz, den wir in 8. notieren, resultierende Konstante:

$$c_1(n, |\vartheta|) := \min\left((\sin 2|\vartheta|)^{-1}, C_n^{\frac{4}{\pi}(|\vartheta|-\frac{\pi}{4})}\right).$$

Von besonderem Interesse wird jedoch die Anwendung von (5.3) sein:

$$c_4(n, |\vartheta|) := \min\left\{(\cos\alpha)^{-2n-1}(\sin(2|\vartheta-\alpha|)^{-1} : \pi/4 \le |\vartheta-\alpha| < \pi/2\right\}.$$

Hier führt aber die Auswertung zu einer Gleichung 3. Grades für $\tan|\alpha|$. Einfachere explizite Formeln entstehen, wenn man diese durch eine approximierende Gleichung 2. Grades ersetzt. Das führt zu

$$c_3(n, |\vartheta|) := \frac{(1+z^{-2})^{n+3/2}}{(1-z^{-2})\sin 2|\vartheta| - 2z^{-1}\cos 2|\vartheta|}$$

mit

$$z := \frac{1}{2}b\left(n+\frac{5}{2}\right) + \left((2n+2) + \frac{1}{4}b^2\left(n+\frac{5}{2}\right)^2\right)^{1/2},$$

$$b := \tan(\pi - 2|\vartheta|).$$

Möglich ist hier auch die Wahl von

$$z := b\left(n+\frac{5}{2}\right) + (2n+2)^{1/2}$$

anstatt des zuvor angegebenen z. Wir schreiben die hieraus resultierende Schranke

$$c_2(n, |\vartheta|).$$

Eingehende Untersuchungen von A. Finsterer [3] zeigen: alle diese $c_k(n, |\vartheta|)$ wachsen mit $|\vartheta|$ von dem optimalen Wert 1 bei $\pi/4$ zu dem Wert C_n für $\pi/2$ und streben wachsend gegen den besten n-unabhängigen Wert $(\sin 2|\vartheta|)^{-1}$ für $n \to \infty$. In diesem Sinne sind sie «gute» Schranken. Genauere Analyse zeigt: c_3 ist eine sehr gute Approximation für c_4, während c_2 demgegenüber unvorteilhaft ist. Wir verzichten hier auf die Wiedergabe der präzisen Limes-Formeln für die Differenzen dieser Konstanten und verweisen hier noch einmal auf die Note von A. Finsterer [3].

Wesentlich ist nun noch die Bemerkung: das Verhalten von C_n in der Schranke für $|\vartheta| = \pi/2$ wie $O(n^{1/2})$ mit n läßt sich nicht verbessern. Das zeigen (4.3), (4.6). In diesem Sinne ist also C_n «optimal». Und: da die Schranken für $\pi/4 \le |\vartheta| \le \pi/2$ gegen C_n streben für $|\vartheta| \to \pi/2$, sind diese auch in dieser Hinsicht «gut».

7. RESTGLIEDABSCHÄTZUNGEN FÜR $Re\ z < 0$

(2.1), (4.1) und (2.5) zeigen, daß für $Re\ z < 0$ zur Abschätzung von $R_n(z)$ vor allem

$$R_n(z) = \lambda(z) - R_n(-z)$$

verwendet werden sollte. Hier spielen nun für den ersten Term die Resultate von 4., insbesondere (4.1), (4.3) und (4.5) eine Rolle, während für den zweiten 6. verwendet wird. So entstehen die Schranken

$$(7.1) \qquad |R_n(z)| \le A_n \left[(\pi(n+1/2))^{1/2}|y|^{-2n-1} + c_k(n, \pi - |\vartheta|)r^{-2n-1}\right]$$

mit $y := Im\ z$ und – natürlich –

$$c_k(n, \pi - |\vartheta|) := 1 \quad (3\pi/4 \le |\vartheta| < \pi).$$

Abschätzungen, die eine solche Aufspaltung in zwei Terme vermeiden, werden nicht recht anpassungsfähig im Hinblick auf (2.1) und (2.5) sein. Natürlich ist auch (7.1) etwas unvorteilhaft für $|\vartheta|$ nahe $\pi/2$. Hier hat man es jedoch mit einem Faktor zu tun, der mit wachsendem n beschränkt und für große n nicht größer als 2.6 ist. Jedenfalls kann $(\pi(n+1/2))^{1/2}$ im ersten Term nicht verbessert werden, wie (4.6) zeigt. Natürlich aber ist in der Regel $l(|y|)$ selbst wesentlich kleiner als die gegebene Schranke hierfür. Man sollte diese Funktion oder noch besser die Symmetrie-Formel lieber direkt auswerten. – Wenn man mit den diesbezüglichen Formeln aus Behnke – Sommer [1] vergleicht, erkennt man, daß diese gegenüber den hier gegebenen unvorteilhaft sind und überdies $n = 0$ ausschließen. – Abschließend sei noch die Vereinfachung notiert:

$$(7.2) \qquad |R_n(z)| \le A_n|y|^{-2n-1}\left((\pi(n+1/2))^{1/2} + C_n\right).$$

Wie wieder (4.6) zeigt, kann das Verhalten $O(n^{1/2})$ des Faktors in den Klammern nicht verbessert werden. In diesem Sinne ist (7.2) optimal. Bezüglich des Vergleichs mit den Resultaten von Spira [15] sei auf Abschnitt 12. verwiesen.

8. EIN 3-STRAHLEN-SATZ

Sei

$$0 < \vartheta_1 - \vartheta_0 < 2\pi - 2\varepsilon,\ \varepsilon > 0,$$

und G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ mit

$$\{z \neq 0 : \vartheta_0 - \varepsilon < \arg z < \vartheta_1 + \varepsilon\} \supset G \supset S := \{z \neq 0 : \vartheta_0 \le \arg z \le \vartheta_1\}.$$

Die Funktion

$$f : G \to \mathbb{C}$$

sei holomorph und

$$|f(z)| \leq M_0 \qquad (\arg z = \vartheta_0),$$

$$|f(z)| \leq M_1 \qquad (\arg z = \vartheta_1),$$

$$\limsup |f(z)| \leq \min\left(M_0, M_1\right) \begin{cases} S \ni z \to 0, \\ S \ni z \to \infty. \end{cases}$$

Dann gilt für

$$\arg z = \vartheta, \quad \vartheta_0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1$$

die Abschätzung

$$|f(z)| \leq M_1^{\frac{\vartheta-\vartheta_0}{\vartheta_1-\vartheta_0}} \cdot M_0^{\frac{\vartheta_1-\vartheta}{\vartheta_1-\vartheta_0}}.$$

Zum Beweis genügt es, $\vartheta_0 = 0$, $1 = M_0 < M_1$ anzunehmen; der allgemeine Fall kann leicht hierauf zurückgeführt werden. Man führt zweckmäßig ein

$$\alpha := \frac{1}{\vartheta_1} \log M_1$$

und betrachtet die holomorphe Funktion

$$h(z) := f(z) z^{i\alpha}$$

mit $\arg z = \vartheta \in]-\varepsilon, \vartheta_1 + \varepsilon[$. Man erhält

$$|z^{i\alpha}| = e^{-\alpha\vartheta}, \; |h(z)| = |f(z)| \cdot M_1^{\frac{-\vartheta}{\vartheta_1}}.$$

Das Prinzip vom Maximum gibt dann $|h(z)| \leq 1$ in S, und so die Behauptung.

9. EINE VERBESSERUNG DER ABSCHÄTZUNG VON STIELTJES

An mehreren Stellen in der Literatur findet sich die Formel

$$(9.1) \qquad |R_n(z)| \leq A_n(r\cos(\vartheta/2))^{-2n-1} \quad (z \in \mathbf{D}),$$

so bei Magnus-Oberhettinger [9], Gradshteyn-Ryshik [5], Schäfke [12] und Slavic [14]. Es findet sich keinerlei Beweis. Es erscheint offensichtlich, daß es sich hier um einen Schreib- oder Druckfehler bei der Notation der Stieltjes- Formel handelt, noch übernommen vom einen zum anderen. –Wir zeigen nun im folgenden, daß diese Formel (9.1) gleichwohl richtig ist. – Diese Abschätzung ist – dies sollte bemerkt werden – eine durchaus interessante Verschärfung der Stieltjes-Formel, weil sie im Gegensatz zu dieser die Beschränktheit auf Parallelen zur reellen Achse erkennen läßt. Im Vergleich zu den von uns oben erhaltenen Schranken ist sie aber offenbar deutlich schlechter. Sie muß als etwas «unnatürlich»angesehen werden. So macht ihr Beweis, insbesondere für kleine n und $Re\ z \leq 0$, durchaus etwas Schwierigkeiten und erfordert einige Fallunterscheidungen.

$Re\ z \geq 0$:

Für $|\vartheta| \leq \pi/2$ kann in (5.2) $\alpha = \vartheta/2$ gewählt werden. Das gibt (9.1) für diesen Sektor. Man erkennt überdies, wie unvorteilhaft diese Formel auch hier ist; man vergleiche mit Abschnitt 6. und – natürlich auch – mit (5.4).

$Re\ z \leq 0$:

$n \geq 2$: Für $\pi/2 \leq |\vartheta| < \pi$ ergibt Formel (7.1)

$$|R_n(z)| \leq \frac{A_n}{(r\cos(\vartheta/2))^{2n+1}} \left[\frac{(\pi(n+1/2))^{1/2}}{(2\sin(|\vartheta|/2))^{2n+1}} + C_n \cdot (\cos(\vartheta/2))^{2n+1}\right] \leq$$
$$\leq \frac{A_n}{(r\cos(\vartheta/2))^{2n+1}} \left[\left((\pi(n+1/2))^{1/2} + C_n\right) \cdot 2^{-n-1/2}\right].$$

Der letzte Faktor ist ≤ 1 für $n \geq 2$.

$n = 0$: 1) Mit (2.1), (5.4) und (4.4) erhält man zunächst für $3\pi/4 \leq |\vartheta| < \pi$

$$|R_0(z)| \leq \frac{(\log 2)^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sin|\vartheta|} + \frac{1}{12r}$$

bzw.

$$|R_0(z)| \leq \frac{A_0}{r\cos(\vartheta/2)} \cdot \left[\frac{3(\log 2)^2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sin(|\vartheta|/2)} + \cos(\vartheta/2)\right].$$

Die Klammer nimmt ihr Maximum für $3\pi/4$ an; dies ist

$$0.87928\ldots.$$

2) Für $\pi/2 \leq |\vartheta| \leq 3\pi/4$ – es genügt die Beschränkung auf $\vartheta > 0$ – führt der 3-Strahlen-Satz aus 8. zu gerade genügend scharfer Abschätzung. Man hat

$$|zR_0(z)| \leq A_0 C_0 \leq \frac{A_0}{4} \cdot 3^{3/2} \quad (\vartheta = \pi/2),$$

dazu – wie in 1) –

$$|zR_0(z)| \leq A_0 E_0 := A_0 \left[1 + \frac{12(\log 2)^2}{2^{1/2}\pi}\right] \quad (\vartheta = 3\pi/4)$$

und verwendet (1.17), (1.20). Der Satz liefert dann

$$|zR_0(z)| \leq A_0 E_0^{\frac{4}{\pi}(\vartheta - \frac{\pi}{2})} C_0^{\frac{4}{\pi}(\frac{3\pi}{4} - \vartheta)} \quad (\pi/2 \leq \vartheta \leq 3\pi/4).$$

Nun hat man offenbar im gegebenen Intervall die Funktion

$$\cos\frac{\vartheta}{2} \cdot E_0^{\frac{4}{\pi}(\vartheta - \frac{\pi}{2})} C_0^{\frac{4}{\pi}(\frac{3\pi}{4} - \vartheta)}$$

zu betrachten. Ihr Maximum ist 0.9601..., und zwar angenommen für

$$\vartheta = 2 \cdot arctan\left(\frac{8}{\pi} \log \left(\frac{E_0}{C_0}\right)\right) = 1.935\ldots.$$

Das bestätigt (9.1) auch für den Sektor $\pi/2 \leq |\vartheta| \leq 3\pi/4$.

$\underline{n = 1:}$ Hier kann der Beweis ebenso geführt werden wie bei $n = 0$. Die Abschätzungen sind dabei nur noch deutlicher.

10. SCHRANKEN SPEZIELLER ART

Für die praktisch-numerische Anwendung sind Schranken des Typs

$$|R_n(z)| \leq A_n D_n (r\, g(\vartheta))^{-2n-1} \tag{10.1}$$

für geeignete Sektoren von einigem Interesse. Hat man eine solche Schranke, so hat bei einer Fehler-Toleranz ε der «verbotene Bereich»

$$A_n D_n (r\, g(\vartheta))^{-2n-1} \geq \varepsilon$$

die einfache Darstellung

$$r\, g(\vartheta) \leq \left(\frac{A_n D_n}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2n+1}} \tag{10.2}$$

in Polarkoordinaten. Für alle n und ε sind diese Bereiche zentral ähnlich.

Bezüglich solcher Schranken zeigen nun unsere obigen Überlegungen:

1) Für $|\vartheta| \leq \pi/4$ ist

$$(10.3) \qquad |R_n(z)| \leq A_n r^{-2n-1}$$

optimal.

2) Für $3\pi/4 \leq |\vartheta| < \pi$ ist mit $y = r \sin \vartheta$

$$(10.4) \qquad |R_n(z)| \leq A_n |y|^{-2n-1} \left[(\pi(n+1/2))^{1/2} + 2^{-n-1/2} \right]$$

eine vernünftige Abschätzung. $D_n \geq (\pi(n+1/2))^{1/2}$ kann nicht verbessert werden.

3) Für $\pi/2 < |\vartheta| < \pi$ ist

$$(10.5) \qquad |R_n(z)| \leq A_n |y|^{-2n-1} \left[(\pi(n+1/2))^{1/2} + C_n \right]$$

recht gut. Wieder kann $D_n \geq (\pi(n+1/2))^{1/2}$ nicht verbessert werden.

4) Für $\pi/4 < |\vartheta| < \pi/2$ zeigt Abschnitt 6., daß für eine vernünftige Schranke des gewünschten Typs $g(\vartheta) = 1$ gewählt werden muß. Danach ist hier

$$(10.6) \qquad |R_n(z)| \leq A_n r^{-2n-1} C_n$$

möglich. 6. zeigt dabei, daß die Form (10.1) nicht hinreichend anpassungsfähig genug ist für das «etwas merkwürdige» Verhalten von $R_n(z)$ in diesem Sektor.

11. WEITERES ZUR NUMERISCHEN ANWENDUNG

Für konkrete numerische Zwecke, z.B. für bestimmte n und ε, kann es angezeigt sein, die Abschätzung

$$(11.1) \qquad |R_n(z)| \leq A_n (r \cos(|\vartheta| - \pi/4))^{-2n-1} \quad (\pi/4 \leq |\vartheta| \leq \pi/2)$$

an Stelle von (10.6) zu verwenden. Diese Schranke, die Spezialfall von (5.2) ist, kann explizit bei Lindelöf [7] und van der Corput [2] gefunden werden. Interessant ist die Bemerkung, daß

$$A_n (r \cos(|\vartheta| - \pi/4))^{-2n-1} \geq \varepsilon$$

mit $z = x + iy$ gerade zu

$$(11.2) \qquad x + |y| \leq 2^{1/2} \left(\frac{A_n}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2n+1}}$$

führt. Das ergibt eine lineare Begrenzung des «verbotenen Bereichs», die gerade den Kreis von (10.3) tangential fortsetzt und einfache Programmierung erlaubt.

Vergleicht man mit Kuki [6] and Ng [10], so stellen unsere Formeln (10.2) mit (10.3), (10.5) und (10.6) und/oder (11.2) wesentliche Verbesserungen: kleinere verbotene Bereiche und dabei einfachste Darstellung und damit leichte Programmierung.

12. BEMERKUNGEN ZU FORMELN VON SPIRA

Spira [15] hat die Schranken notiert:

$$|R_n(z)| \leq \frac{2|B_{2n}|}{2n-1}|y|^{-2n+1} = A_{n-1}4n|y|^{-2n+1} \quad (Re\ z < 0) \tag{12.1}$$

und

$$|R_n(z)| \leq \frac{|B_{2n}|}{2n-1}r^{-2n+1} = A_{n-1}2nr^{-2n+1} \quad (Re\ z \geq 0). \tag{12.2}$$

Man muß wohl sagen, daß sie etwas merkwürdig aussehen, weil sie nicht das korrekte asymptotische Verhalten für große r bzw. y zeigen. Es handelt sich jedoch offenbar nicht um ein Versehen in der Numerierung. Vielmehr ist einfach die zur Abschätzung benutzte Darstellung von $R_n(z)$ nicht geeignet gewählt. Natürlich lassen sich vernünftige Fehlerschranken aus diesen Formeln gewinnen, indem man in ihnen $n+1$ statt n setzt und dazu (1.16) heranzieht. Dann kann man mit den oben gewonnenen vergleichen. Man erkennt, daß die Schranken von Spira nicht gut sind, weil sie einen Faktor mit $O(n)$ enthalten im Vergleich zu unserem optimalen $O(n^{1/2})$. Aber darüber hinaus zeigt der Vergleich, daß unsere Formeln für R_{n-1}, d.h. beim Abbruch der Stirlingschen Reihe ein Glied früher, schon wesentlich besser sind als die von Spira für R_n.

REFERENCES

[1] H. Behnke, F. Sommer, *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, Grdl. d. math. Wiss., 77; Springer-Verlag, Berlin, 1955.

[2] J.G. van der Corput, *ASYMPTOTICS III Elementary Methods*, Indag. math. **17** (1955), 139-150.

[3] A. Finsterer, *Einige Probleme im Zusammenhang mit Restgliedabschätzungen bei der Stirlingschen Reihe*, Fakultät für Mathematik; Universität Konstanz; 1987.

[4] P. Gilbert, *Recherches sur le developpement de la fonction Γ et sur certaines integrales definies qui en dependent*, Memoires de l'Acad. Roy. de Belgique **41**, 1875.

[5] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryshik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York, 1965.

[6] H. Kuki, *Algorithm 421, Complex gamma function with error control*, Comm. ACM **15**, 1972.

[7] E. Lindelöf, *Le calcul des residues et ses applications a la theorie des fonctions*, Collection des Monographies sur la Theorie des Fonctions; Gauthier-Villars, Paris, 1905; reprinted by Chelsea, New York, 1947.

[8] T.M. MacRobert *Functions of a Complex Variable*, 5th ed.; Macmillan, London 1962.

[9] W. Magnus, F. Oberhettinger, *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik*, Grdl. d. math. Wiss., **52**; Springer-Verlag, Berlin 1943; 2nd ed. 1948; 3rd (english) ed. 1966.

[10] E.W. Ng, *A Comparison of Computational Methods and Algorithms for the Complex Gamma Function*, ACM Trans. Math. Softw., **1**, Nr. 1, 1975.

[11] N. Nielsen, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Teubner, Leipzig, 1906; reprinted by Chelsea, New York, 1974.

[12] F.W. Schäfke, *Einführung in die Theorie der speziellen Funktionen der Mathematischen Physik*, Springer-Verlag; Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1963.

[13] F.W. Schäfke, A. Finsterer, *On Lindelöf's error bound for Stirling's series*, J. reine angew. Math. **404** (1990), 135-139.

[14] D.V. Slavic, *Supplementing the asymptotic expansion of the Gamma funktion and other related functions*, Publ. Elektr. Fak. Univ. Beograd, Ser. mat. fiz. No. 395 (1972).

[15] R. Spira, *Calculation of the gamma function by Stirling's formula*, Math. Comp., **25** (1971), 317-322.

[16] T.J. Stieltjes, *Sur le developpement de $\log\Gamma(a)$*, Journal de Mathematiques, Ser. 4, **5** (1889), 425-444.

Received January 31, 1990

F.W. Schäfke
Marienweg 13
D-7750 Konstanz 16
Germany

A. Sattler
Rheinbergstr. 30
D-5000 Köln 90
Germany